И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

2-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Народная асвета» 2022

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А80

Рецензент
кафедра высшей алгебры и защиты информации
механико-математического факультета Белорусского государственного
университета (доктор физико-математических наук,
профессор *В. В. Беняш-Кривец*)

ISBN 978-985-03-3770-2

Уважаемые семиклассники!

По этой книге вы начнете изучать раздел математики, который называется алгебра. Эта наука изучает операции с различными математическими объектами.

Книга состоит из четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, где вы встретите следующие условные обозначения:

— задания на повторение для подготовки к изучению нового материала;

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— важные правила и утверждения;

— основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;

— устные вопросы и задания;

— задания для работы в классе;

— задания для домашней работы;

— задания для повторения;

* — задания повышенной сложности.

Каждая глава учебного пособия заканчивается разделами «Практическая математика», «Итоговая самооценка», «Увлекательная математика». В них вы найдете задачи на применение математики в различных областях жизни, перечень требований к усвоению теоретического материала и практические задания для самопроверки, а также задачи для тех, кто увлекается математикой.

Дополнительные материалы к книге (тренажеры, тесты, тренировочные контрольные работы, исторические сведения и задачи практического содержания) можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика».

Желаем успехов!

Глава 1

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ И ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

§ 1. Степень с натуральным показателем и ее свойства

1.1. Найдите площадь квадрата, длина стороны которого равна: а) 5 см; б) 0,1 см.

1.2. Найдите объем куба, длина ребра которого равна: а) 2 дм; б) 0,1 м.

1.3. Сравните значения выражений a^3 и a^2, зная, что: а) a — правильная дробь; б) a — отрицательное число; в) $a = 0$.

Для обозначения произведения нескольких одинаковых множителей используют понятие степени.

Определение

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$, то $a^1 = a$.

a^n — степень,
a — основание степени,
n — показатель степени

Например, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Число a называют **основанием степени**, число n — **показателем степени**.

Чтобы **найти значение степени** (чтобы **возвести число в степень**), надо найти значение произведения одинаковых множителей.

Например, $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ (4 — основание степени, 3 — показатель степени, 64 — значение степени);

$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$ (5 — основание степени, 6 — показатель степени, 15 625 — значение степени).

Так же как и другие действия (сложение, умножение, вычитание, деление), действие возведения в степень имеет свойства.

Произведение степеней с одинаковыми основаниями

Рассмотрим произведение двух степеней с одинаковыми основаниями:

$$2^4 \cdot 2^6 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}.$$

Можно заметить, что $2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$. Проведем эти рассуждения в общем виде:

$$\underset{\substack{\text{по определению}\\ \text{степени}}}{a^n a^m =} (\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ раз}}) \cdot (\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ раз}}) \underset{\substack{\text{по свойству}\\ \text{умножения}}}{=} \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n+m \text{ раз}} \underset{\substack{\text{по определению}\\ \text{степени}}}{=} a^{n+m}.$$

Получили **первое свойство степени:**

при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Верно и обратное утверждение:

степень числа можно представить в виде произведения степеней с одинаковыми основаниями.

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

Например, $2^{11} = 2^4 \cdot 2^7$.

Частное степеней с одинаковыми основаниями

Рассмотрим частное двух степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю:

$$2^8 : 2^6 = (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) : (2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2) =$$
$$= \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2} = 2\cdot2 = 2^2.$$

Имеем: $2^8 : 2^6 = 2^{8-6} = 2^2$. В общем виде получим:

$$\underset{\text{по определению степени}}{a^n : a^m} = (\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}) : (\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m\text{ раз}}) = \underset{\text{сократим дробь}}{\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ раз}}}} = \underset{\text{по определению степени}}{a^{n-m}}.$$

Получили **второе свойство степени:**

при делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитается показатель степени делителя.

Верно и обратное утверждение:

степень числа можно представить в виде частного степеней с одинаковыми основаниями.

$$a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$a^{n-m} = a^n : a^m,$$
$$a \neq 0;\ n > m$$

Например, $2^6 = 2^{10} : 2^4$.

Степень степени

Рассмотрим выражение $(3^2)^4$. Его можно прочитать так: «четвертая степень числа три в квадрате» или «четвертая степень второй степени числа три». Коротко говорят: «степень степени».

В общем виде записывают: $(a^n)^m$ — и говорят: «**степень** с показателем m **степени** числа a с показателем n».

По определению степени получим: $(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \times \times 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$. Таким образом, $(3^2)^4 = 3^8$. В общем виде имеем:

$$\underbrace{(a^n)^m}_{\text{по определению степени}} = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ раз}} = a^{\overbrace{n+n+n+\ldots+n}^{m \text{ раз}}} = a^{nm}.$$

Получили **третье свойство степени:**

при возведении степени в степень основание степени остается прежним, а показатели перемножаются.

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Верно и обратное утверждение:

степень числа можно представить в виде степени, основание которой — тоже степень.

Например, $4^6 = (4^2)^3$.

$$a^{nm} = (a^n)^m$$

Степень частного

Рассмотрим выражение $(2 : 3)^4$. Основание этой степени равно $2 : 3$, поэтому по определению степени получим: $(2 : 3)^4 = (2 : 3) \cdot (2 : 3) \cdot (2 : 3) \cdot (2 : 3) = = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 2^4 : 3^4$.

Проведем эти рассуждения в общем виде:

$$\underbrace{(a : b)^n}_{\text{по определению степени}} = \underbrace{\overbrace{(a : b) \cdot (a : b) \cdot (a : b) \cdot \ldots \cdot (a : b)}^{n \text{ раз}}}_{\text{по свойству умножения}} = \underbrace{\frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ раз}}}}_{} = \underbrace{a^n : b^n}_{\text{по определению степени}}.$$

Получили **четвертое свойство степени:**

степень частного равна частному степеней делимого и делителя с тем же показателем.

$$(a : b)^n = a^n : b^n, \quad b \neq 0$$

Справедливо и обратное утверждение:

при делении степеней с одинаковыми показателями можно разделить основания степеней и полученный результат возвести в ту же степень.

Например,

$12^4 : 3^4 = (12 : 3)^4 = 4^4 = 256.$

$$a^n : b^n = (a : b)^n,\ b \neq 0$$

Степень произведения

Рассмотрим выражение $(2 \cdot 3)^4$. Основание этой степени равно $2 \cdot 3$, поэтому по определению степени получим: $(2 \cdot 3)^4 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^4 \cdot 3^4$.

В общем виде получим:

$$(a \cdot b)^n \underset{\text{по определению степени}}{=} \overbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}^{n\ \text{раз}} \underset{\text{по свойству умножения}}{=} \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n\ \text{раз}} \cdot \overbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}^{n\ \text{раз}} \underset{\text{по определению степени}}{=} a^n \cdot b^n.$$

Получили **пятое свойство степени:**

степень произведения равна произведению степеней множителей с тем же показателем.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Справедливо и обратное утверждение:

при умножении степеней с одинаковыми показателями можно перемножить основания степеней и полученный результат возвести в ту же степень.

Например,

$$2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^4 = 1^4 = 1.$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Определение степени числа с натуральным показателем	
1. Представьте в виде степени произведение и назовите основание и показатель степени: а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; б) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$.	а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$; 3 — основание степени, 4 — показатель степени; б) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^3$; -3 — основание степени, 3 — показатель степени; в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $-\frac{1}{2}$ — основание степени, 2 — показатель степени; г) $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^5$; 0 — основание степени, 5 — показатель степени.
2. Найдите значение степени: а) $0{,}3^4$; б) $(-5)^5$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.	а) $0{,}3^4 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081$; б) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \times (-5) \cdot (-5) = -3125$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$.
Произведение степеней с одинаковыми основаниями	
3. Представьте в виде степени произведение степеней: а) $5^2 \cdot 5^4$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^6$; в) $m^{10} \cdot m^{15}$; г) $a^8 \cdot a$.	а) $5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^6 = \left(\frac{3}{7}\right)^{5+6} = \left(\frac{3}{7}\right)^{11}$; в) $m^{10} \cdot m^{15} = m^{10+15} = m^{25}$; г) $a^8 \cdot a = a^{8+1} = a^9$.
4. Представьте в виде произведения каких-либо степеней степень: а) 4^7; б) k^{12}; в) n^3.	а) $4^7 = 4^{2+5} = 4^2 \cdot 4^5$; б) $k^{12} = k^{9+3} = k^9 \cdot k^3$; в) $n^3 = n^{2+1} = n^2 \cdot n^1 = n^2 \cdot n$.

Частное степеней с одинаковыми основаниями	
5. Представьте в виде степени частное степеней: а) $5^{20} : 5^{14}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^9 : \left(\frac{2}{7}\right)^5$; в) $m^{18} : m^{15}$; г) $a^{12} : a$.	а) $5^{20} : 5^{14} = 5^{20-14} = 5^6$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^9 : \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{9-5} = \left(\frac{2}{7}\right)^4$; в) $m^{18} : m^{15} = m^{18-15} = m^3$; г) $a^{12} : a = a^{12-1} = a^{11}$.
6. Представьте в виде частного каких-либо двух степеней степень: а) 4^7; б) k^{12}; в) n^3.	а) $4^7 = 4^{10-3} = 4^{10} : 4^3$; б) $k^{12} = k^{13-1} = k^{13} : k^1 = k^{13} : k$; в) $n^3 = n^{20-17} = n^{20} : n^{17}$.
Степень степени	
7. Представьте в виде степени с основанием: а) 5 выражение $(5^2)^3$; б) m выражение $(m^4)^6$; в) a выражение $(a^6)^n$.	а) $(5^2)^3 = 5^{2\cdot3} = 5^6$; б) $(m^4)^6 = m^{4\cdot6} = m^{24}$; в) $(a^6)^n = a^{6\cdot n} = a^{6n}$.
8. Представьте в виде степени с основанием 3^2 выражение: а) 9^3; б) 9^7; в) 81.	а) $9^3 = (3^2)^3$; б) $9^7 = (3^2)^7$; в) $81 = (3^2)^2$.
Степень частного	
9. Представьте в виде частного степеней степень: а) $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^n$; в) $\left(\frac{c}{k}\right)^7$.	а) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{3^n}{7^n}$; в) $\left(\frac{c}{k}\right)^7 = \frac{c^7}{k^7}$.
10. Представьте частное степеней в виде степени и найдите ее значение: а) $10^4 : 5^4$; б) $21^5 : 7^5$; в) $\frac{20^{10}}{10^{10}}$.	а) $10^4 : 5^4 = (10:5)^4 = 2^4 = 16$; б) $21^5 : 7^5 = (21:7)^5 = 3^5 = 243$; в) $\frac{20^{10}}{10^{10}} = \left(\frac{20}{10}\right)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Степень произведения	
11. Представьте в виде произведения степеней степень: а) $(3 \cdot 5)^3$; б) $(3 \cdot a)^8$; в) $(c \cdot d)^n$.	а) $(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3$; б) $(3 \cdot a)^8 = 3^8 \cdot a^8$; в) $(c \cdot d)^n = c^n \cdot d^n$.
12. Представьте произведение степеней в виде степени и найдите ее значение: а) $0{,}5^8 \cdot 2^8$; б) $25^3 \cdot 0{,}4^3$; в) $3^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$.	а) $0{,}5^8 \cdot 2^8 = (0{,}5 \cdot 2)^8 = 1^8 = 1$; б) $25^3 \cdot 0{,}4^3 = (25 \cdot 0{,}4)^3 =$ $= 10^3 = 1000$; в) $3^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^7 = 2^7 =$ $= 128$.

? Установите соответствие между выражениями: 1) $a^m \cdot a^n$; 2) $(ab)^n$; 3) $(a^m)^n$; 4) $a^n \cdot b^n$; 5) $a^n : b^n$; 6) $a^n : a^m$ — и их словесными характеристиками: а) степень произведения; б) произведение степеней с одинаковыми основаниями; в) произведение степеней с одинаковыми показателями; г) степень степени; д) частное степеней с одинаковыми основаниями; е) частное степеней с одинаковыми показателями.

1.4. Прочитайте выражение, назовите основание и показатель степени:

а) 6^4; б) $(2{,}4)^{10}$; в) a^{15}; г) $(2b)^3$.

1.5. Каким действием можно заменить произведение одинаковых множителей? Выполните эту замену:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5$; б) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$;

в) $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$.

1.6. Запишите произведение в виде степени; назовите основание и показатель степени:

а) $d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$; б) $(2x) \cdot (2x) \cdot (2x) \cdot (2x)$;

в) $(a + b) \cdot (a + b)$; г) $\left(-\frac{b}{4}\right) \cdot \left(-\frac{b}{4}\right) \cdot \left(-\frac{b}{4}\right)$.

1.7. Какие множители будут в произведении, если применить определение степени? Представьте в виде произведения степень:

а) 3^4; б) a^7; в) $(-x)^5$;
г) $(8b)^3$; д) $(m-n)^2$; е) $(c+d)^3$.

1.8. Выберите выражения, имеющие вид степени. Назовите основание и показатель степени:

а) 8^m; б) $(-2y)^4$; в) $3 \cdot x^9$;
г) $(a+b)^4$; д) $x^3 - y^3$; е) $(17a)^8$.

1.9. Запишите в виде выражения:
а) 3 в пятой степени; б) седьмая степень числа 0,5; в) a в степени m; г) произведение чисел c и d в восьмой степени; д) 8 в первой степени; е) куб суммы чисел x и y.

1.10. Запишите в виде степени числа 10 число:

а) 1000; б) 100 000; в) 10 000 000.

1.11. Запишите произведение в виде степени с основанием a:

а) $a \cdot a$; б) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; в) $a \cdot a \cdot a^2$.

1.12. Представьте в виде степени числа 2 число:

а) 8; б) 32; в) 64; г) 256.

Назовите показатель степени.

1.13. Найдите значение степени:

а) 4^3; б) $(-3)^4$; в) $(-2)^5$;
г) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$; д) $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$; е) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$;
ж) $(0{,}5)^3$; з) $(-0{,}02)^2$; и) $(-0{,}1)^5$.

1.14. Используйте определение степени и вычислите значение выражения:

а) 4^2; б) -4^2; в) $(-4)^2$;
г) 5^3; д) -5^3; е) $(-5)^3$.

1.15. Сравните значения выражений:
а) -7^8 и 7^8; б) $(-3)^{10}$ и 3^{10}; в) 9^4 и -9^6;
г) $(-1)^{12}$ и 1; д) $(-2)^3$ и 8; е) $(-0,6)^5$ и 0.

Можно ли выполнить сравнение, не выполняя вычислений?

1.16. Найдите значение выражения:
а) $7 \cdot 3^2$; б) $3 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^3$; в) $-8 - 10^4$;
г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(1\frac{1}{9}\right)^2$; д) $\left(3 \cdot 1\frac{1}{3}\right)^3$; е) $600 : (-0,1)^3$.

1.17. Найдите значение выражения $100a^3$ при:
а) $a = 2$; б) $a = -0,5$; в) $a = 10$; г) $a = -1$.

1.18. Найдите значение выражения $b^4 - 8$ при:
а) $b = -1$; б) $b = 2$; в) $b = -0,1$; г) $b = \frac{1}{2}$.

1.19. Найдите значение выражения $m^3 - m^2$ при:
а) $m = 5$; б) $m = -\frac{1}{3}$; в) $m = -10$; г) $m = -1$.

1.20. Используйте свойства степени и представьте в виде степени произведение степеней:
а) $7^2 \cdot 7^5$; б) $10^5 \cdot 10$; в) $a^4 \cdot a^6$;
г) $(3b)^2 \cdot (3b)^{10}$; д) $8^n \cdot 8^7$; е) $c^m \cdot c$.

1.21. Запишите в виде степени произведение:
а) $x^2x^4x^5$; б) m^6m^9m; в) $9^3 \cdot 9^7 \cdot 9^2 \cdot 9$.

1.22. Представьте в виде произведения каких-либо степеней с одинаковыми основаниями степень:
а) 2^{10}; б) a^5; в) $(2x)^8$.

Сколькими способами можно это сделать?

1.23. Представьте степень a^{10} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна: а) a^4; б) a^5; в) a^9.

1.24. Сравните значения выражений:
а) $6^4 \cdot 6^2$ и 6^8; б) $7^5 \cdot 7^3 \cdot 7^{10}$ и 7^{18}.

1.25. Представьте произведение в виде степени с основанием 2:

а) $2^2 \cdot 2^4$; б) $4 \cdot 2^9$; в) $2^7 \cdot 8$; г) $2^4 \cdot 16 \cdot 2$.

1.26. Представьте степень b^7 двумя способами в виде произведения трех степеней с одинаковыми основаниями.

1.27. Какое свойство можно использовать, чтобы представить частное степеней в виде степени? Примените это свойство:

а) $9^{10} : 9^4$; б) $0{,}3^5 : 0{,}3^3$; в) $5^7 : 5$;
г) $a^{12} : a^8$; д) $x^{14} : x^{13}$; е) $c^{18} : c$.

1.28. Представьте в виде частного каких-либо степеней с одинаковыми основаниями степень:

а) 3^8; б) b^4; в) $(3a)^7$; г) m^1.

1.29. Представьте степень b^{12} в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна: а) b^5; б) b^{15}; в) b^{11}.

1.30. Найдите значение выражения:

а) $2^8 : 2^5$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 : (0{,}5)^7$;

в) $4{,}7^{19} : 4{,}7^{18}$; г) $10^{28} : 10^{23}$;

д) $(-0{,}1)^{10} : (-0{,}1)^8$; е) $\left(5\frac{2}{3}\right)^{14} : \left(5\frac{2}{3}\right)^{12}$;

ж) $(-0{,}25)^8 : (-0{,}25)^5$; з) $(-0{,}3)^{13} : (-0{,}3)^{10}$.

1.31. Вычислите:

а) $\frac{9^8}{9^6}$; б) $\frac{0{,}2^5}{0{,}2^2}$; в) $\frac{3^4 \cdot 3^5}{3^8}$; г) $\frac{2^{15}}{2^{10} \cdot 2^3}$.

1.32. Прочитайте выражение и представьте его в виде степени с основанием 7: а) $(7^4)^3$; б) $(7^2)^{10}$; в) $(7^5)^4$.

1.33. Представьте в виде степени с основанием a выражение: а) $(a^2)^5$; б) $(a^7)^8$; в) $(a^5)^3$; г) $(a^3)^5$.

1.34. Сравните значения выражений:

а) $3^4 \cdot 3^2$ и $(3^4)^2$; б) $4^3 \cdot 4^5$ и $(4^3)^5$.

1.35. Представьте в виде степени с основанием 2^4 выражение: а) 2^{20}; б) 2^{48}; в) 2^8; г) 16^9; д) 256.

Какое свойство степени применялось?

1.36. Представьте a^{24} в виде степени с основанием:

а) a^2; б) a^3; в) a^6; г) a^{12}.

1.37. Сравните значения степеней, представив их в виде степеней с одинаковыми основаниями:

а) 9^6 и 27^2; б) 8^{10} и 4^{15}; в) $0,01^3$ и $0,001^2$.

1.38. Упростите выражение с помощью свойств степени:

а) $((-12)^2)^3$; б) $((-17)^3)^4$; в) $(-(-a)^4)^5$.

1.39. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

а) $(a^3)^6 \cdot a^9$; б) $a^8 \cdot (a^2)^4$; в) $(a^7)^2 \cdot (a^2)^3$;
г) $(a^3a^4)^5$; д) $(a^4)^2 : a^3$; е) $a^{19} : (a^9)^2$;
ж) $(a^5)^3 : (a^7)^2$; з) $(a^{13} : a^8)^6$; и) $(a^{17})^2 \cdot (a^8 : a^7)^4$.

1.40. Упростите выражение:

а) $\dfrac{b^4(b^3)^7}{b^{12}}$; б) $\dfrac{b^{14}b^9}{(b^2)^3}$; в) $\dfrac{(b^{10} : b^4)^2 \cdot b^7}{(b^6)^3}$.

1.41. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4^{16}}{8^{10}}$; б) $\dfrac{25^{11}}{125^7}$; в) $\dfrac{3^{14} \cdot (3^4)^2}{3^{20}}$;

г) $\dfrac{125^7}{5^9 \cdot 25^5}$; д) $\dfrac{27^5}{9^2 \cdot 81^2}$; е) $\dfrac{64^2 \cdot 32^5}{16^3 \cdot 8^8}$.

1.42*. Сравните числа 99^{10} и 10^{20}.

1.43. Прочитайте выражение и представьте степень в виде частного степеней:

а) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^6$; б) $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; в) $(5 : 2)^8$; г) $(a : b)^5$.

1.44. Какое свойство нужно использовать для записи частного степеней в виде степени? Запишите частное степеней в виде степени:

а) $\frac{2^6}{7^6}$; б) $\frac{3^4}{10^4}$; в) $\frac{a^3}{4^3}$; г) $\frac{(3b)^6}{(2a)^6}$.

1.45. Представьте частное степеней в виде степени и вычислите:

а) $30^6 : 3^6$; б) $\frac{75^3}{25^3}$; в) $15^5 : 7{,}5^5$; г) $\frac{5{,}26^4}{52{,}6^4}$.

1.46. Найдите значение выражения:

а) $\frac{100^4}{2^4 \cdot 5^4}$; б) $\frac{6^5 \cdot 7^5}{21^5}$; в) $\frac{(2^2)^3 \cdot 7^5}{14^5}$.

1.47. Представьте степень в виде произведения степеней: а) $(2 \cdot 7)^4$; б) $(ab)^5$; в) $(-0{,}1 \cdot x)^3$; г) $(2ab)^4$.

1.48. Вычислите рациональным способом:

а) $(5 \cdot 10)^3$; б) $(9 \cdot 100)^2$; в) $(3 \cdot 0{,}01)^4$.

1.49. Представьте произведение степеней в виде степени: а) $5^8 \cdot 3^8$; б) a^4b^4; в) $(-0{,}3)^7 \cdot 5^7$; г) $3^9a^9b^9$.

1.50. Представьте произведение степеней в виде степени и найдите значение выражения:

а) $2^5 \cdot 5^5$; б) $0{,}25^9 \cdot 4^9$; в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 3^7$;

г) $7^4 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^4$; д) $0{,}8^6 \cdot 0{,}125^6$; е) $(-12)^3 \cdot 0{,}25^3$.

1.51. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^7$; б) $(0{,}1)^5 \cdot 10^3$;

в) $(-0{,}125)^5 \cdot 8^7$; г) $(2{,}5)^{15} \cdot (0{,}4)^{14}$.

1.52. Представьте выражение:

а) $\frac{2^8 \cdot 3^6}{6^6}$ в виде степени с основанием 4;

б) $\frac{7^7 \cdot 2^5}{14^5}$ в виде степени с основанием 7.

1.53. Представьте выражение в виде степени с основанием, равным натуральному числу:

а) $3^m \cdot 9$; б) $3^m : 3$; в) $(7^n)^2 \cdot 7$; г) $(3^n)^3 : 3^{2n}$.

1.54. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{15^{10}}{25^4 \cdot 3^9}$; б) $\dfrac{8^5 \cdot 3^4}{48^3}$; в) $\dfrac{100^2 \cdot 1000^3}{4^6 \cdot 125^4}$.

1.55. Установите порядок действий и вычислите:

а) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right)^3$; б) $25^2 \cdot (-4)^2 \cdot (0{,}01)^3$;

в) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^9 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \cdot 3^2$; г) $(-0{,}75)^9 : \left(-\dfrac{3}{4}\right)^7 \cdot 2^5$.

1.56. Найдите значение выражения $\dfrac{49 \cdot 10^6}{25^3 \cdot 14^2}$.

1.57*. Докажите, что значение выражения не зависит от n:

а) $12^{n+2} : 12^{n+1}$; б) $\dfrac{3^{2n+6} \cdot 3^{n+1}}{3^{3n-2}}$; в) $\dfrac{(5^{n-1})^2 \cdot 5^{3n+7}}{5^{5n+3}}$.

1.58*. Докажите, что значение выражения $9^{15} - 3^{28}$ кратно 24.

1.59*. Докажите, что значение выражения $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ кратно 14 при любом натуральном значении n.

1.60. Используя определение степени, запишите в виде степени произведение:

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$; г) $(2a - b) \cdot (2a - b) \cdot (2a - b)$.

Назовите основание и показатель степени.

1.61. Используя определение степени, запишите в виде произведения степень:

а) 5^2; б) m^5; в) $(-3y)^4$; г) $(a - b)^3$.

1.62. Запишите в виде выражения:

а) 13 в третьей степени; б) восьмая степень числа 0,3; в) $2a$ в степени n; г) квадрат суммы чисел a и c; д) x в первой степени.

1.63. Запишите в виде степени числа 3 числа:

а) 9; б) 27; в) 81; г) 243.

Назовите показатель степени.

1.64. Найдите значение степени:

а) 2^5; б) $(-10)^4$; в) $(-3)^3$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; д) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$; е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$;

ж) $(0{,}6)^3$; з) $(-0{,}11)^2$; и) $(-0{,}1)^7$.

1.65. Сравните значения выражений, не выполняя вычислений:

а) 5^2 и -5^2; б) 5^2 и $(-5)^2$;
в) -5^2 и $(-5)^2$; г) 2^3 и -2^3;
д) $(-2)^3$ и 2^3; е) -2^3 и $(-2)^3$.

1.66. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $5 \cdot 2^4$; б) $567 : (-10)^3$;

в) $-0{,}1^6 + 9$; г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

1.67. Найдите значение выражения $10a^2 - a^3$ при:

а) $a = 2$; б) $a = -\frac{1}{2}$;

в) $a = -0{,}1$; г) $a = -1$.

1.68. Какое свойство нужно использовать для записи произведения степеней в виде степени? Представьте произведение степеней в виде степени:

а) $3^4 \cdot 3^8$; б) $9^6 \cdot 9$; в) $b^5 \cdot b^6$;
г) $(2a)^3 \cdot (2a)^4$; д) $c^3c^4c^8$; е) a^2a^9a.

1.69. Представьте степень b^{12} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна:

а) b^5; б) b^{10}; в) b^{11}.

1.70. Представьте произведение в виде степени с основанием 10:

а) $10^3 \cdot 10^4$; б) $100 \cdot 10^7$;
в) $10^{12} \cdot 1000$; г) $10^5 \cdot 100 \cdot 10$.

1.71. Представьте двумя способами степень a^8 в виде произведения трех степеней с одинаковыми основаниями.

1.72. Используя свойства степени, представьте частное степеней в виде степени:

а) $7^{12} : 7^4$; б) $1{,}6^8 : 1{,}6^5$; в) $7^6 : 7$;
г) $a^{14} : a^{11}$; д) $b^{10} : b^9$; е) $x^7 : x$.

1.73. Представьте в виде частного каких-либо степеней с одинаковыми основаниями степень:

а) 7^{10}; б) a^5.

1.74. Найдите значение выражения:

а) $3^9 : 3^6$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10} : (0{,}25)^8$;

в) $(-2{,}35)^{15} : (-2{,}35)^{14}$; г) $0{,}2^{13} : 0{,}2^{11}$;

д) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{11} : \left(2\frac{1}{7}\right)^9$; е) $(0{,}5)^9 : \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

1.75. Вычислите:

а) $\frac{5^7}{5^4}$; б) $\frac{0{,}1^{15}}{0{,}1^{13}}$; в) $\frac{7^8 \cdot 7^9}{7^{15}}$; г) $\frac{3^{17}}{3^{11} \cdot 3^5}$.

1.76. Представьте в виде степени с основанием 3 выражение:

а) $(3^2)^5$; б) $(3^4)^{10}$; в) $(3^{10})^4$; г) $(3^3)^3$.

1.77. Представьте в виде степени с основанием 5^2 выражение:

а) 5^{10}; б) 5^{22}; в) 25^9; г) 625.

1.78. Представьте b^{12} в виде степени с основанием:

а) b^2; б) b^3; в) b^4; г) b^6.

1.79. Упростите выражение с помощью свойств степени:

а) $((-7)^4)^5$; б) $(-(-11)^7)^2$; в) $((-3)^5)^7$;
г) $(-(-b)^5)^4$; д) $(-(-b)^8)^3$; е) $(-(-b)^3)^5$.

1.80. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

а) $(a^4)^8 \cdot a^{10}$; б) $a^6 \cdot (a^5)^3$; в) $(a^8)^3 \cdot (a^5)^4$;
г) $(a^2a^5)^3$; д) $(a^6)^2 : a^4$; е) $a^{15} : (a^2)^7$;
ж) $(a^7)^3 : (a^5)^2$; з) $(a^{19} : a^{16})^7$; и) $(a^9 : a^8)^4 \cdot (a^6)^3$.

1.81. Упростите выражение:

а) $\dfrac{c^5(c^4)^2}{c^{12}}$; б) $\dfrac{c^{15}c^7}{(c^4)^3}$; в) $\dfrac{(c^9 \cdot c)^5 \cdot c^4}{(c^8 : c^6)^{25}}$.

1.82. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3^{22}}{9^{10}}$; б) $\dfrac{5^{22} \cdot (5^2)^3}{5^{27}}$; в) $\dfrac{4^7}{16 \cdot 64}$; г) $\dfrac{32^3 \cdot 8^2}{16^5}$.

1.83. Представьте степень в виде частного степеней:

а) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^5$; б) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^3$; в) $(3 : 4)^{12}$;
г) $\left(2\dfrac{2}{3}\right)^4$; д) $(0{,}6)^3$; е) $(c : d)^8$.

1.84. Запишите в виде степени:

а) $\dfrac{3^8}{4^8}$; б) $\dfrac{7^5}{10^5}$; в) $\dfrac{b^7}{5^7}$.

1.85. Представьте частное степеней в виде степени и вычислите:

а) $34^5 : 17^5$; б) $\dfrac{26^4}{2{,}6^4}$; в) $42^3 : 14^3$; г) $\dfrac{37{,}2^2}{372^2}$.

1.86. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{30^5}{2^5 \cdot 15^5}$; б) $\dfrac{3^6 \cdot 8^6}{12^6}$; в) $\dfrac{16^3 \cdot 18^3}{24^3 \cdot 3^3}$.

1.87. Представьте степень в виде произведения степеней:

а) $(8 \cdot 9)^5$; б) $(ab)^6$; в) $(5 \cdot 7)^n$;
г) $(-3a)^9$; д) $(3xy)^5$; е) $(-abc)^3$.

1.88. Представьте произведение степеней в виде степени:

а) $7^4 \cdot 2^4$; б) m^7n^7; в) $(-0{,}2)^5 \cdot 7^5$; г) $7^6a^6b^6$.

1.89. Представьте произведение степеней в виде степени и найдите значение выражения:

а) $4^3 \cdot 25^3$; б) $0{,}2^7 \cdot 5^7$;

в) $(-0{,}125)^5 \cdot 8^5$; г) $18^5 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^5$.

1.90. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot 3^4$; б) $(-0{,}01)^3 \cdot 100^4$; в) $(0{,}25)^6 \cdot 4^7$.

1.91. Представьте выражение $\dfrac{2^{12} \cdot 7^8}{14^8}$ в виде степени с основанием 4.

1.92*. Докажите, что значение выражения не зависит от n:

а) $\dfrac{7^{4n+8} \cdot 7^{n+3}}{7^{5n-2}}$; б) $\dfrac{(3^{5n-1})^3 \cdot 3^{3n+7}}{3^{18n-4}}$;

в) $\dfrac{27^{2n+5}}{9^{3n+2}}$; г) $\dfrac{15^{n+8}}{3^{n+1} \cdot 5^{n+2}}$.

1.93*. Докажите, что значение выражения $8^{17} - 2^{45}$ кратно 18.

1.94*. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ кратно 13.

1.95. Какую часть часа составляют 12 мин?

1.96. Решите уравнение $2\frac{3}{8} + x = 5$.

1.97. Найдите значение выражения:

а) $7{,}863 + 72{,}4$; б) $37{,}3 - 4{,}507$;
в) $0{,}027 \cdot 73{,}6$; г) $69 : 1{,}2$.

1.98. Килограмм риса стоит в магазине 2 р. Магазин с 9.00 до 10.00 делает скидку всем покупателям на определенное количество процентов от цены покупки. В 9.45 покупатель заплатил за килограмм риса 1 р. 88 к. Сколько процентов составляет утренняя скидка?

1.99. Представьте дробь $\frac{4}{25}$ в виде десятичной дроби. Можно ли дробь $\frac{7}{15}$ представить в виде конечной десятичной дроби?

1.100. Среди всех четырехзначных чисел, в записи которых все цифры различны, выбрали наибольшее и наименьшее. Чему равна сумма этих чисел?

§ 2. Степень с целым показателем и ее свойства

1.101. Выберите пару противоположных чисел:

а) 4 и $\frac{1}{4}$; б) 0,5 и 5; в) –7 и 7.

1.102. Запишите число, обратное числу:

а) 6; б) $\frac{1}{7}$; в) 0,2; г) $2\frac{5}{6}$.

1.103. Найдите значение выражения $a - b$ при:

а) $a = 6$; $b = 13$; б) $a = -5$; $b = 12$;
в) $a = -4$; $b = -10$; г) $a = 8$; $b = -5$.

Одно из направлений современной науки связано с развитием нанотехнологий. Эти технологии позволяют создавать структуры с наночастицами. Размеры наночастиц изменяются от 10^{-9} до 10^{-6} м. Что означают эти выражения? Выясним, как определяется степень с отрицательным показателем.

Определение степени числа с нулевым показателем

Определение Любое число a, не равное нулю, в нулевой степени равно единице.

$a^0 = 1,$
$a \neq 0$

Рассмотрим частное двух степеней с одинаковыми основаниями (не равными нулю) и одинаковыми показателями, например $\frac{a^m}{a^m}$. По правилу деления двух равных выражений $\frac{a^m}{a^m} = 1$. Таким образом, $1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$.

Определение степени числа с целым отрицательным показателем

Определение **Степенью числа с целым отрицательным показателем** называется число, обратное степени с тем же основанием и противоположным показателем.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$
$a \neq 0$

Рассмотрим частное $\frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$ и n — натуральное число. Представим число 1 в виде степени: $1 = a^0$, тогда получим: $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$.

Чтобы вычислить значение степени с целым отрицательным показателем, нужно:

① Назвать основание степени.	Вычислите 5^{-3}. ① 5 — основание степени.
② Записать число, ему обратное, — новое основание.	② $\frac{1}{5}$ — новое основание.
③ Назвать показатель степени.	③ –3 — показатель степени.
④ Назвать число, ему противоположное, и записать его в показатель степени с новым основанием.	④ 3 — показатель степени с новым основанием.
⑤ Найти значение степени с полученным натуральным показателем.	⑤ $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

Например:

$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}; \ \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}.$$

Степень положительного числа с любым целым показателем есть число положительное.

Например:

$$3^5 = 243; \ 3^{-5} = \frac{1}{243}; \ \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}; \ \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81.$$

Степень отрицательного числа с четным показателем есть число положительное, а с нечетным — отрицательное.

Например:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}; \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81; \quad (-3)^5 = -243; \quad (-3)^{-5} = -\frac{1}{243}.$$

Свойства степени с целым показателем

Для степени с целым показателем справедливы все пять свойств степени с натуральным показателем.

Докажем одно из свойств степени с целым показателем (например, первое). Пусть $a \neq 0$, p и q — натуральные числа, тогда $-p$ и $-q$ — целые отрицательные числа. Покажем, что $a^{-p}a^{-q} = a^{-p-q}$.

По определению степени с отрицательным показателем: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$. По правилу умножения дробей $a^{-p}a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p a^q}$.

По свойству степени с натуральным показателем $\frac{1}{a^p a^q} = \frac{1}{a^{p+q}}$. По определению степени с целым отрицательным показателем $\frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}$.

Таким образом, $a^{-p}a^{-q} = a^{-p-q}$.

Для $a \neq 0$, целых m и n
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$,
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для $a \neq 0$; $b \neq 0$, целого n
4. $(a : b)^n = a^n : b^n$,
5. $(a \cdot b)^n = a^n b^n$.

Если $a \neq 0$, то $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Степень числа с целым показателем	
1. Представьте в виде степени: а) с основанием 2 числа: $8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};$ б) с основанием $\frac{1}{3}$ числа: $27;\ 9;\ 3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27}$.	а) $8 = 2^3;\ 4 = 2^2;\ 2 = 2^1;\ 1 = 2^0;$ $\frac{1}{2} = 2^{-1};\ \frac{1}{4} = 2^{-2};\ \frac{1}{8} = 2^{-3};$ б) $27 = 3^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3};\ 9 = 3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2};\ 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1};\ 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0};$ $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1};\ \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2};$ $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$.
Вычисление значения степени с целым отрицательным показателем	
2. Найдите значение степени $0{,}3^{-1}$.	$0{,}3^{-1} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

3. Вычислите: а) $(-3)^{-2}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.	а) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}=\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{243}{32}=7\frac{19}{32}$.
4. Найдите значение выражения $(-3)^{-3}+6^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.	$(-3)^{-3}+6^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^3+$ $+\frac{1}{6^2}\cdot 2^2=-\frac{1}{27}+\frac{2^2}{6^2}=$ $=-\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=-\frac{1}{27}+\frac{3}{27}=\frac{2}{27}$.
Свойства степени с целым показателем	
5. Представьте выражение в виде степени: а) $5^{20}:5^{-4}\cdot 5^7$; б) $(m^{18})^{-2}\cdot m^{20}:m^{-20}$.	а) $5^{20}:5^{-4}\cdot 5^7=5^{20-(-4)+7}=$ $=5^{31}$; б) $(m^{18})^{-2}\cdot m^{20}:m^{-20}=$ $=m^{-36+20-(-20)}=m^4$.
6. Найдите значение выражения: а) $\frac{1}{3^{-4}}$; б) $4^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}:(-2)^{21}$.	а) $\frac{1}{3^{-4}}=3^4=81$; б) $4^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}:(-2)^{21}=$ $=(2^2)^7\cdot 2^4:(-(2)^{21})=$ $=-2^{14}\cdot 2^4:2^{21}=-2^{-3}=-\frac{1}{8}$.

? Используя определение степени с целым показателем, объясните почему: а) $3^{-3}\neq -3^3$; б) $(-3)^{-3}\neq 27$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\neq -\frac{1}{27}$.

1.104. Прочитайте выражение, назовите основание и показатель степени:

а) 7^{-5}; б) $(5{,}8)^{-9}$; в) 13^{-1}; г) $(8a)^{-4}$.

1.105. Представьте степень с целым отрицательным показателем в виде дроби:

а) 3^{-4}; б) 2^{-10}; в) 8^{-1}; г) a^{-7}; д) $(9n)^{-5}$.

1.106. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{13^3}$; б) $\frac{1}{7^{11}}$; в) $\frac{1}{15}$; г) $\frac{1}{b^2}$; д) $\frac{1}{(7a)^6}$.

1.107. В какую степень надо возвести число 5, чтобы получить числа: 625; 125; 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{625}$?

1.108. Представьте в виде степени с основанием 10 числа: 10 000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001.

1.109. Найдите значение степени и сравните результат с 1:

а) 2^{-3}; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; в) 6^{-1}; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$;

д) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$; е) $0{,}1^{-2}$; ж) $2{,}5^{-1}$; з) $0{,}2^{-3}$.

1.110. Расположите числа 7; 7^{-1}; 7^{-4}; 7^0 в порядке возрастания. Можно ли дать ответ, не выполняя вычислений?

1.111. Расположите числа $0{,}8^{-2}$; 2^{-5}; 1; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ в порядке убывания.

1.112. Установите порядок действий и вычислите значение выражения:

а) $9 \cdot 18^{-1}$; б) $-6 \cdot 2^{-3}$; в) $3^{-2} - 9^{-1}$;

г) $5^{-1} + 10^{-2}$; д) $4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; е) $19^0 - 0{,}1^{-3}$.

1.113. Сравните с нулем значение степени:

а) 5^{-7}; б) $2{,}3^{-8}$; в) $(-2)^{-4}$; г) $(-7)^{-1}$;
д) $(-1)^{-9}$; е) $(-1)^{-12}$; ж) $(-11)^0$; з) -13^0.

1.114. Используйте определение степени с целым показателем и сравните значения выражений:

а) -3^{-4} и $(-3)^{-4}$; б) -5^{-3} и $(-5)^{-3}$;
в) $-(-1)^{-3}$ и $(-1)^{-2}$; г) -5^0 и $(-5)^0$.

1.115. Вычислите:

а) -10^{-3}; б) $-0{,}25^{-2}$; в) $(-3)^{-4}$;

г) $(-0{,}3)^{-3}$; д) $\left(-6\frac{2}{7}\right)^{-1}$; е) $\left(-2\frac{1}{7}\right)^{-2}$.

1.116. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $(-10)^{-3}\cdot(0{,}2)^{-2}$; б) -3^4+3^{-2};

в) $-2^{-3}-10^2$; г) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-1}+4^{-2}$;

д) $(-5)^{-2}+(-2)^{-4}$; е) $(-0{,}5)^{-4}-(-1)^{-7}$;

ж) $10^{-3}-(-0{,}1)^{-3}$; з) $-5^{-2}+5^3-(-7)^0$.

1.117. Примените свойства степени с целым показателем и представьте выражение в виде степени с основанием y: а) $y^{-12}\cdot y^{-5}$; б) $y^{-2}:y^3$; в) $(y^2)^{-6}$.

1.118. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение:

а) $3^7\cdot3^{-5}$; б) $2^{-8}\cdot2^5$; в) $49\cdot7^{-3}$;

г) $3:3^{-3}$; д) $16:2^{-3}$; е) $10^{-6}:10^{-4}:10^{-8}$;

ж) $(5^{-3})^{-1}$; з) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^2$; и) $((0{,}01)^{-2})^{-1}$;

к) $(3^{-2})^{-2}\cdot3^{-4}$; л) $25^{-4}:5^{-7}$; м) $6^{-1}\cdot(6^{-4})^3:36^{-7}$.

1.119. Выберите свойство степени для упрощения вычислений и примените его:

а) $\frac{24^{-3}}{8^{-3}}$; б) $\frac{6{,}5^{-5}}{13^{-5}}$; в) $2^{-5}\cdot5^{-5}$;

г) $3^{-8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$; д) $0{,}125^{-10}\cdot8^{-10}$; е) $0{,}2^{-6}\cdot0{,}5^{-6}$.

1.120. Найдите, во сколько раз одно из чисел 10^{-4} и 10^2 больше другого.

1.121. Представьте выражение:

а) $(3^{-2})^3\cdot27$ в виде степени с основанием 3;

б) $\frac{(8^3)^{-2}\cdot64}{8^{-8}}$ в виде степени с основанием 0,5.

1.122. Представьте степень a^{-12} в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна: а) a^{-5}; б) a^{-11}; в) a^{14}.

1.123. Представьте какими-либо двумя способами степень b^{-6} в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями.

1.124. Представьте c^{-18} в виде степени с основанием:

а) c^{-2}; б) c^{3}; в) c^{-1}; г) c^{18}.

1.125. Представьте выражение:

а) $\dfrac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ в виде степени с основанием a и найдите его значение при $a = 6$;

б) $\dfrac{b^{-9}}{b^{-2} \cdot b^{-5}}$ в виде степени с основанием b и найдите его значение при $b = \dfrac{1}{2}$.

1.126. Найдите значение выражения:

а) $4^3 \cdot (-4)^{-5}$; б) $(-3)^{-8} : 3^{-6}$;

в) $(-0{,}1^{-1})^2$; г) $(-2{,}25)^{-5} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right)^{-4}$;

д) $(-32)^{-2} : (0{,}5^{-3})^{-3}$; е) $(-27 \cdot 3^{-4})^2$;

ж) $\dfrac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{-6^{-12}}$; з) $\dfrac{(5^3)^{-3}}{(-5)^{-2} \cdot 5^{-5}}$.

1.127. Представьте выражение $\dfrac{1}{n^{-1}} \cdot \dfrac{1}{n^{-4}}$ в виде степени с основанием n и найдите его значение при $n = -2$.

1.128. Сравните значения выражений $\dfrac{7{,}5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-4}}$ и $\dfrac{3}{200}$.

1.129. Найдите значение выражения $\dfrac{(x^{-3} \cdot x^{-6})^4}{x^{-33}}$ при $x = -0{,}5$.

1.130. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3^{-2} \cdot 5^{-3}}{15^{-3}}$; б) $\dfrac{6^{-5}}{27^{-2} \cdot 4^{-4}}$; в) $\dfrac{81 \cdot 6^{-4} \cdot 21^{-5}}{14^{-5}}$.

1.131. Представьте выражение $\dfrac{(a^{-3})^{-2}\cdot(a^{3})^{-3}}{(a^{-1})^{-2}\cdot(a^{2})^{-4}}$ в виде степени с основанием a.

1.132. Вычислите:

а) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}-\left(1\dfrac{2}{7}\right)^{-1}$;   б) $(3^{-1}-2^{-2}\cdot 8)^{-1}$;

в) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1}-\dfrac{2^{-2}}{9}$;   г) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}-3^{-3}:9^{-2}+0{,}3^{0}$;

д) $\dfrac{2^{3}-2^{-3}}{4^{3}-10^{0}}$;   е) $\dfrac{4^{2}\cdot 2^{-2}-2^{2}\cdot 4^{-2}}{2^{-4}}$.

1.133. Вычислите:

а) $\dfrac{2^{-2}\cdot 5^{4}\cdot 10^{-6}}{2^{-3}\cdot 5^{3}\cdot 10^{-4}}$;   б) $\dfrac{5{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{2}}{10^{-3}}$.

1.134*. Вычислите: $\dfrac{-4\cdot(-3)^{-17}-(-3)^{-16}}{9^{-9}\cdot 45}$.

1.135*. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3^{-n+3}\cdot 3^{-5n-2}}{3^{-6n-1}}$;   б) $\dfrac{15^{-n}}{3^{-n+1}\cdot 5^{-n-1}}$.

1.136*. Найдите частное чисел a и b, если $a=3^{6}\cdot(5^{-2})^{-2}\cdot\dfrac{1}{7^{-2}}$ и $b=3^{7}\cdot 5^{5}\cdot\dfrac{1}{7^{-1}}$.

1.137. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем:

а) $\dfrac{1}{24^{7}}$;   б) $\dfrac{1}{9}$;   в) $\dfrac{1}{a^{4}}$;   г) $\dfrac{1}{(3b)^{5}}$;   д) $\dfrac{1}{c}$.

Назовите основание и показатель степени.

1.138. Представьте степень с целым отрицательным показателем в виде дроби:

а) 5^{-3};   б) 10^{-2};   в) 7^{-1};
г) c^{-9};   д) $(4a)^{-6}$;   е) $(ab)^{-1}$.

1.139. Представьте в виде степени с основанием 4 числа: 64; 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$.

1.140. Вычислите:

а) 3^{-2}; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$; в) 10^{-1}; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$;
д) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$; е) $0{,}01^{-2}$; ж) $4{,}5^{-1}$; з) $0{,}3^{-2}$.

1.141. Расположите числа 5; 5^{-1}; 5^{-3}; 5^{0} в порядке убывания.

1.142. Вычислите:

а) $3^{-4} \cdot 72$; б) $-2 \cdot 5^{-3}$; в) $4^{-1} + 2^{-2}$;
г) $4^{-1} - 20^{-1}$; д) $-3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; е) $0{,}1^{-4} + 149$.

1.143. Выпишите степени, значения которых положительны:

а) 3^{-6}; б) $3{,}4^{-7}$; в) $(-3)^{-2}$; г) $(-9)^{-1}$;
д) $(-1)^{-8}$; е) $(-1)^{-5}$; ж) -6^{0}; з) $(-7)^{0}$.

1.144. Сравните значения выражений:

а) $(-7)^{-6}$ и -7^{-6}; б) $(-2)^{-5}$ и -2^{-5};
в) $-(-1)^{-4}$ и $(-1)^{-7}$; г) $(-17)^{0}$ и -17^{0}.

1.145. Вычислите:

а) -3^{-4}; б) $-0{,}5^{-3}$; в) $(-2)^{-2}$;
г) $(-0{,}2)^{-3}$; д) $\left(-2\frac{3}{7}\right)^{-1}$; е) $\left(-1\frac{2}{9}\right)^{-2}$.

1.146. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $-2^{5} \cdot 4^{-3}$; б) $(-10)^{-5} \cdot 5^{4}$;
в) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1} + 3^{-2}$; г) $(-6)^{-2} + (-3)^{-3}$;
д) $(-0{,}25)^{-1} - (-1)^{-8}$; е) $100^{-2} + (-0{,}01)^{-2}$.

1.147. Примените свойства степени с целым показателем: а) $x^{-4} \cdot x^{-6}$; б) $y^{3} : y^{-9}$; в) $(x^{-2})^{-4}$.

1.148. Найдите значение выражения:

а) $5^{-7}\cdot 5^{5}$; б) $(2,4)^{-6}\cdot\left(2\frac{2}{5}\right)^{6}$; в) $4\cdot 2^{-4}$;

г) $10^{-5}:10^{-3}$; д) $5:5^{-3}$; е) $3^{7}:3^{9}:3^{-1}$;

ж) $(5^{-3})^{-1}$; з) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{4}$; и) $(0{,}1^{-3})^{-1}$;

к) $(7^{-2})^{-3}:7^{7}$; л) $100^{-8}:10^{-15}$; м) $5^{-4}:(5^{-2})^{3}$.

1.149. Вычислите:

а) $\frac{72^{-2}}{18^{-2}}$; б) $\frac{1{,}3^{-4}}{3{,}9^{-4}}$;

в) $5^{-3}\cdot 2^{-3}$; г) $0{,}25^{-8}\cdot 4^{-8}$;

д) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-5}\cdot\left(1\frac{3}{4}\right)^{-5}$; е) $1{,}5^{-6}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-6}$.

1.150. Найдите, во сколько раз одно из чисел 10^{-3} и 10^{2} меньше другого.

1.151. Представьте выражение:

а) $(2^{-3})^{3}\cdot 32$ в виде степени с основанием 2;

б) $\frac{(4^{3})^{-1}\cdot 16}{4^{-6}}$ в виде степени с основанием 0,25.

1.152. Представьте степень a^{-20} в виде:

а) произведения двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна a^{-15};
б) частного двух степеней с одинаковыми основаниями, одна из которых равна a^{-10};
в) степени с основанием a^{5}.

1.153. Представьте выражение:

а) $\frac{c^{-7}\cdot c^{2}}{c^{-9}}$ в виде степени с основанием c и найдите его значение при $c=4$;

б) $\frac{a^{-6}}{a^{-2}\cdot a^{-3}}$ в виде степени с основанием a и найдите его значение при $a=\frac{2}{3}$.

1.154. Найдите значение выражения:

а) $(-2)^{-12} : 4^{-6}$; б) $(16 \cdot 2^{-3})^2$;

в) $\left(-3\frac{1}{6}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{6}{19}\right)^{-4}$; г) $(-10^{-3})^{-2} : 0{,}1^{-3}$;

д) $\left(-1\frac{7}{9}\right)^{-8} \cdot \left(\left(0{,}75\right)^{-3}\right)^{5}$; е) $125^{-3} : \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}\right)^{-2}$;

ж) $\frac{7^{-7} \cdot (-49^{-4})}{7^{-13}}$; з) $\frac{(-6)^{-4}}{2^{-3} \cdot 3^{-4}}$.

1.155. Представьте выражение $\frac{1}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-4}}$ в виде степени с основанием b и найдите его значение при $b = -2$.

1.156. Найдите значение выражения $\frac{m^{-38}}{m^{-12}(m^{-6})^4}$ при $m = -\frac{1}{3}$.

1.157. Найдите значение выражения:

а) $\frac{6^{-4} \cdot 2^{-1}}{12^{-4}}$; б) $\frac{16^{-2} \cdot 27^{-4}}{6^{-12}}$; в) $\frac{64 \cdot 25^{-3} \cdot 14^{-7}}{35^{-6}}$.

1.158. Представьте выражение $\frac{(x^{-7})^2 \cdot (x^{-3})^{-4}}{(x^6)^{-1} \cdot (x^{-2})^{-3}}$ в виде степени с основанием x.

1.159. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; б) $(2^{-1} - 3^{-1} \cdot 6)^{-1}$;

в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} + 6^{-3} : 36^{-2} - 0{,}6^0$; г) $\frac{2^{-2} \cdot 5^2 - 25}{10^{-2}}$.

1.160. Представьте в виде степени с основанием 4 выражение $16^{-3} \cdot 16^0 \cdot \frac{1}{64} \cdot (2^{-7})^{-8}$.

1.161. Вычислите:

а) $\frac{2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 6^{-5}}{2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}$; б) $\frac{7{,}1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{10^{-6}}$.

1.162. Найдите значение выражения

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-10} \cdot 64^{-3} - 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + 0{,}125^{-1}.$$

1.163*. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2^{-10n-2}}{2^{-6n-4}\cdot 2^{-4n+1}}$; б) $\dfrac{7^{-n+2}\cdot 3^{-n-2}}{21^{-n}}$.

1.164*. Найдите произведение чисел a и b, если $a = 2^8\cdot(5^{-2})^{-2}\cdot\dfrac{1}{7^{-2}}$ и $b = 2^{-7}\cdot 5^{-5}\cdot 7^{-1}$.

1.165. Запишите в граммах 9 % килограмма.

1.166. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2}{5}+1\dfrac{3}{8}$; б) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{7}$;

в) $\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{11}$; г) $\dfrac{5}{8}:\dfrac{4}{9}$.

1.167. Найдите делимое, если делитель равен 14, неполное частное 13, а остаток 11.

1.168. Расстояние между городами A и B на карте равно 2,4 см. Сможет ли велосипедист добраться из города A в город B за 1,5 ч, если масштаб карты $1:1\,000\,000$, а скорость велосипедиста 14 $\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$?

1.169. В корзине грибника 90 грибов. Половину этих грибов составляют белые и подосиновики. Среди них белых грибов — только одна треть. Моховиков в полтора раза меньше, чем подосиновиков, остальные грибы — подберезовики. а) Сколько подберезовиков находится в корзине? б) Каких грибов собрано больше всего?

§ 3. Стандартный вид числа

1.170. Вычислите:

а) $258{,}63 : 0{,}01$;

б) $548\cdot 0{,}001$.

1.171. Найдите значение выражения:

а) $0{,}25 \cdot 100 + 0{,}25 : 100$;
б) $5{,}287 : 100 + 5{,}287 \cdot 100$.

1.172. Найдите значение выражения:

а) $(0{,}001)^{-2} \cdot 10^{-4}$; б) $10^{-25} \cdot (0{,}01)^{-10}$.

При изучении различных величин часто требуется оценить их значения, увидеть, насколько значение величины велико или мало. Это можно сделать с помощью записи числа в стандартном виде.

Например, сравним массу Земли — 6 000 000 000 000 000 000 000 000 кг и массу Марса — 640 000 000 000 000 000 000 000 кг. Это проще сделать, если каждое из чисел представить в виде произведения: 6 000 000 000 000 000 000 000 000 кг $= 6 \times$ $\times$ 1 000 000 000 000 000 000 000 000 кг $= 6 \cdot 10^{24}$ кг; 640 000 000 000 000 000 000 000 кг $= 6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Ясно, что масса Земли больше массы Марса.

Записи вида $6 \cdot 10^{24}$ и $6{,}4 \cdot 10^{23}$ называют **стандартным видом числа.**

Определение Записать число b в **стандартном виде** означает представить его в виде произведения числа a, которое больше или равно 1, но меньше 10, и степени числа 10 с целым показателем. Этот показатель называется **порядком числа.**

$$\boldsymbol{b = a \cdot 10^n},$$

где a больше или равно 1, но меньше 10, а n — целое число.
$\boldsymbol{n}$ — **порядок числа**

Например, числа $5 \cdot 10^{18}$ и $1{,}2547 \cdot 10^{-21}$ записаны в стандартном виде. Порядок числа $5 \cdot 10^{18}$ равен 18, а порядок числа $1{,}2547 \cdot 10^{-21}$ равен -21.

Чтобы записать число в стандартном виде, поступают следующим образом:

• если **число больше 10**, то его делят на 10^n (переносят запятую влево) так, чтобы в целой части была только одна цифра (не нуль), и записывают произведение полученного числа и 10^n;

$$350\,000 = (350\,000 : 10^5) \cdot 10^5 = 3{,}5 \cdot 10^5;$$

$$183{,}023 = (183{,}023 : 10^2) \cdot 10^2 = 1{,}83023 \cdot 10^2$$

• если **число меньше единицы**, то его умножают на 10^n (переносят запятую вправо) так, чтобы в целой части была только одна цифра (не нуль), и записывают произведение полученного числа и 10^{-n}.

$$0{,}000000052 = (0{,}000000052 \times 10^8) \cdot 10^{-8} = 5{,}2 \cdot 10^{-8};$$

$$0{,}58702 = (0{,}58702 \times 10^1) \cdot 10^{-1} = 5{,}8702 \cdot 10^{-1}$$

Запись числа в стандартном виде	
1. Какое из чисел: а) 40,5; б) 405; в) 0,0405; г) 4,05 — имеет стандартный вид $4{,}05 \cdot 10^{-2}$?	Запишем каждое из чисел в стандартном виде: а) $40{,}5 = 4{,}05 \cdot 10^1$; б) $405 = 4{,}05 \cdot 10^2$; в) $0{,}0405 = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$; г) $4{,}05 = 4{,}05 \cdot 10^0$. Число в) имеет стандартный вид $4{,}05 \cdot 10^{-2}$.
Порядок числа	
2. Какое из произведений: а) $0{,}35 \cdot 10^{-3}$; б) $0{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3$; в) $0{,}33 \cdot 10^{-3}$; г) $0{,}2 \cdot 10^{-2}$ — является наименьшим?	Представим в стандартном виде и определим порядок числа: а) $0{,}35 \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$, порядок –4; б) $0{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^{-1} \times 10^{-2} \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^0$, порядок 0;

	в) $0{,}33 \cdot 10^{-3} = 3{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$, порядок -4; г) $0{,}2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-3}$, порядок -3. Сравним два числа наименьшего порядка -4. $3{,}3 \cdot 10^{-4} < 3{,}5 \cdot 10^{-4}$. Наименьшее число в).

1. Верно ли, что при записи числа в стандартном виде: а) если это число целое, то нужно перенести запятую влево; б) если это число дробное, то нужно перенести запятую вправо?

2. Верно ли утверждение: а) чем больше порядок числа, тем больше само число; б) если порядок числа отрицательный, то и само число отрицательное; в) если найти произведение двух чисел, записанных в стандартном виде, то ответ будет числом, записанным в стандартном виде; г) в стандартном виде можно записать любое число?

1.173. Выберите числа, представленные в стандартном виде:

а) $57 \cdot 10^4$; б) $0{,}023 \cdot 10^{-6}$; в) $4{,}5 \cdot 10^{13}$;
г) $1{,}067 \cdot 10^{-4}$; д) $30 \cdot 10^5$; е) $0{,}7 \cdot 10^4$.

1.174. Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

а) $3{,}2 \cdot 10^6$; б) $7{,}384 \cdot 10^{-2}$; в) $1{,}012 \cdot 10^{-1}$.

1.175. Запишите число в стандартном виде:

а) 480 000 000; б) 0,00000214; в) 3504,8.

1.176. Ученые полагают, что возраст нашей Вселенной составляет около 14 000 000 000 лет. Запишите это число в стандартном виде.

1.177. Представьте число $\frac{1}{125}$ в стандартном виде.

1.178. Верно ли, что числа $1{,}9 \cdot 10^{-3}$; $5800 \cdot 10^{6}$; $0{,}00217 \cdot 10^{-7}$ записаны в стандартном виде? Если нет, то запишите их в стандартном виде.

1.179. Переведите 5 872 600 км в метры и результат запишите в стандартном виде.

1.180. Переведите 578 г в тонны и результат запишите в стандартном виде.

1.181. В таблице приведены данные об объеме воды в крупнейших озерах Беларуси.

Озеро	Мядель	Нарочь	Свирь	Селява
Объем воды, м^3	$1{,}02 \cdot 10^{8}$	$7{,}1 \cdot 10^{8}$	$1{,}043 \cdot 10^{8}$	$9{,}48 \cdot 10^{7}$

а) В каком из них наибольшее количество воды?
б) В каких озерах объем воды не превышает 102 500 000 м^3?

1.182. Как сравнить числа, представленные в стандартном виде?

Сравните числа: а) $9{,}5687 \cdot 10^{14}$ и $1{,}06 \cdot 10^{15}$; б) $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ и $3{,}235 \cdot 10^{-3}$; в) $5{,}23 \cdot 10^{8}$ и $5{,}061 \cdot 10^{8}$.

1.183. Представьте числа $0{,}56 \cdot 10^{-6}$; $2300 \cdot 10^{-10}$; $0{,}053 \cdot 10^{-5}$ в стандартном виде и расположите их в порядке возрастания.

1.184. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

а) $(4{,}2 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-1})$; б) $(7{,}2 \cdot 10^{7}) : (9 \cdot 10^{10})$.

1.185. Представьте числа $a = 63 \cdot 10^{-4}$, $b = 0{,}21 \cdot 10^{-2}$ в стандартном виде и найдите значение выражения:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a \cdot b$; г) $a : b$.

1.186. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде $(1{,}2 \cdot 10^{62}) \cdot (4 \cdot 10^{38}) : (5 \cdot 10^{45})$.

1.187. Известно, что $a = 32{,}4 \cdot 10^{11}$; $b = 0{,}9 \cdot 10^{-7}$. Выберите неверное равенство:

а) $b^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-15}$;   б) $a : b = 3{,}6 \cdot 10^{19}$;

в) $a \cdot b = 2{,}916 \cdot 10^5$;   г) $b^{-1} = \frac{1}{9} \cdot 10^7$.

1.188*. Упростите выражения $a + b$; $a - b$; $a \cdot b$; $a : b$, если $a = 6 \cdot 10^{n+1}$; $b = 3 \cdot 10^n$, где n — целое число.

1.189*. Порядок числа a равен 9, а порядок числа b равен 11. Каким может быть порядок произведения ab?

1.190. Выберите и запишите число, представленное в стандартном виде:

а) $0{,}3 \cdot 10^{-4}$;   б) $27 \cdot 10^5$;   в) $6{,}87 \cdot 10^{10}$.

1.191. Есть ли среди данных чисел число, порядок которого равен 4? Если есть, то назовите его:

а) $4 \cdot 10^6$;   б) $5{,}607 \cdot 10^4$;   в) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

1.192. Представьте число в стандартном виде:

а) 892 140 000;   б) 0,004507;   в) 32 145,25.

1.193. Единица длины в астрономии — 1 парсек — приближенно равен 30 857 000 000 000 км. Запишите это число в стандартном виде.

1.194. Верно ли, что числа $2{,}86 \cdot 10^4$; $300 \cdot 10^{-7}$; $0{,}00458 \cdot 10^{-4}$ записаны в стандартном виде? Если нет, то запишите их в стандартном виде.

1.195. Переведите 435 ц в граммы и результат запишите в стандартном виде.

1.196. Переведите 34 567 см в километры и результат запишите в стандартном виде.

1.197. Представьте числа $0{,}032 \cdot 10^{-6}$; $5478 \cdot 10^{-10}$; $0{,}79 \cdot 10^{-9}$ в стандартном виде и расположите их в порядке убывания.

1.198. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

а) $(3{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^2)$;   б) $(6{,}4 \cdot 10^{12}) : (8 \cdot 10^{14})$.

1.199*. Вычислите: $a+b$; $b-a$; $a\cdot b$; $a:b$, если $a=6{,}4\cdot10^{-4}$; $b=3{,}2\cdot10^{-3}$, и результаты вычислений запишите в стандартном виде.

1.200. Летом килограмм клубники стоит 2 р. Хозяйка купила 1 кг 400 г клубники. Какую сдачу она получит, заплатив 5 р.?

1.201. Найдите число, если 25 % его равны 213.

1.202. Найдите число, на которое нужно умножить сумму чисел 4,2 и 3,8, чтобы получить их разность.

Практическая математика

1.203. Выпускнику университета предложили работу две производственные фирмы: *A* и *B*. В таблице приведен доход этих фирм по кварталам.

Фирма	Годовой доход			
	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
A	$4{,}1\cdot10^4$ р.	$12\cdot10^3$ р.	$0{,}86\cdot10^5$ р.	$19\cdot10^3$ р.
B	$0{,}69\cdot10^5$ р.	$5{,}1\cdot10^4$ р.	$25\cdot10^3$ р.	$0{,}19\cdot10^5$ р.

На предложение какой из фирм стоит согласиться выпускнику, если остальные показатели их работы по итогам года одинаковые?

1.204. После обязательной уборки школьный бассейн, длина которого равна $2{,}5\cdot10^3$ см, ширина — $1{,}6\cdot10^3$ см, а глубина — $2\cdot10^2$ см, необходимо наполнить водой на 80 %. Будет ли готов бассейн к уроку физкультуры в 10 ч 15 мин, если его начали наполнять водой в 5 ч 00 мин через трубу, пропускная способность которой 130 $\frac{м^3}{ч}$?

1.205. Для измерения расстояний между объектами в Солнечной системе используются следующие единицы:

• астрономическая единица — это расстояние от Земли до Солнца, равное $1{,}5 \cdot 10^8$ км;

• световой год — это расстояние, которое луч света проходит в вакууме за один год, равное $9{,}5 \times 10^{12}$ км.

Вычислите, сколько: а) астрономических единиц в одном световом году; б) суток понадобится летательному аппарату, скорость которого $20\,000\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, чтобы добраться до Марса, если расстояние от Земли до Марса в момент противостояния (максимального сближения планет) равно 0,37 астрономической единицы.

1.206. «Нано-» — приставка для обозначения одной миллиардной доли чего-либо. Например, один нанометр — миллиардная доля метра (1 нм = 10^{-9} м). Ягода вишни меньше земного шара примерно во столько раз, во сколько нанометр меньше метра. Средняя вишенка имеет диаметр 1,3 см (рис. 1). Определите приблизительно диаметр земного шара в километрах. С помощью справочной литературы или Интернета выясните, насколько полученный результат отличается от среднего диаметра Земли.

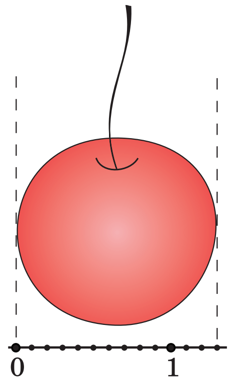


Рис. 1

Диаметр молекулы воды приблизительно равен 0,3 нм. Во сколько раз диаметр молекулы воды меньше диаметра Земли?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• знать определение степени с натуральным показателем, нулевым показателем, отрицательным показателем;

• уметь записывать число в стандартном виде и определять порядок числа;

• уметь применять определение степени с целым показателем для записи числа в виде степени;

• знать свойства степени с целым показателем;

• уметь использовать свойства степени для вычисления значений выражений, упрощения выражений, сравнения значений выражений.

Я проверяю свои знания

1. Выберите выражение, которое можно прочитать как «семь в четвертой степени»:

а) $7 \cdot 4$; б) $\frac{7}{4}$; в) 4^7; г) 7^4.

2. Если $a^3 > a^4$, то число a может быть равно:

а) 7; б) $\frac{1}{7}$; в) -7; г) $-\frac{1}{7}$.

3. Что означает представить число в стандартном виде? Выберите запись числа 0,0000089 в стандартном виде: а) $0{,}89 \cdot 10^{-5}$; б) $8{,}9 \cdot 10^{-6}$; в) $8{,}9 \cdot 10^{-7}$.

4. Используя свойства степени, найдите выражение, значение которого не равно 1:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $(2^4)^2 \cdot 2^3 : 2^{10}$; в) $\frac{4^7 \cdot 64}{16^5}$.

5. Расположите в порядке возрастания числа:

$$(-2{,}5)^{-1};\ (-2{,}5)^{-2};\ (-2{,}5)^{1};\ (0{,}25)^{-1};\ (0{,}25)^{-2}.$$

6. Какие свойства имеет степень с целым показателем? Установите порядок действий и упростите выражение $\frac{(a^5)^{-2} \cdot (a^{-13})^{-1}}{a^7}$.

7. Используя свойства степени с целым показателем, вычислите $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + 0{,}125^{-2}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{24^4 \cdot 6^3 \cdot 12^2}{48^3 \cdot 3^4 \cdot 18}$.

9. Как найти порядок числа? Порядок числа a равен 12, а порядок числа b равен 14. Каким может быть порядок частного $\frac{b}{a}$?

10. Представьте сумму $2 \cdot 16^n + 2^n \cdot 8^n + 2^{4n}$ в виде степени с основанием 2.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание 1. а) Найдите информацию о самых маленьких и самых больших значениях величин. Составьте таблицы значений этих величин, записав их в стандартном виде. б) Используя найденную информацию, составьте кроссворд для друзей.

Исследовательское задание 2. а) Найдите информацию о записи степеней чисел в различных системах счисления. б) Придумайте для друзей задания о записи степеней чисел в различных системах счисления.

Готовимся к олимпиадам

1. Изменив положение одной спички (рис. 2), получите верное равенство.

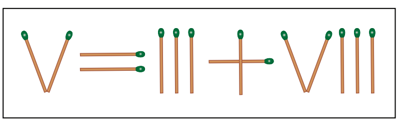


Рис. 2

2. Запишите число 100 цифрами от 1 до 9, идущими по возрастающей и соединенными знаками действий. Сможете ли вы сделать это двумя способами?

Глава 2

ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 4. Числовые выражения и выражения с переменными

2.1. Найдите: а) сумму чисел 12 и $3\frac{1}{6}$; б) разность чисел $4\frac{1}{5}$ и 6,9; в) произведение чисел –14,5 и $\frac{8}{29}$; г) частное чисел $9\frac{3}{17}$ и 3.

Числовые выражения

Рассмотрим задачи. 1) Школьники в новом парке 4 дня сажали по 75 деревьев ежедневно, а 3 дня — по 80 деревьев. Сколько всего деревьев посадили школьники за эти дни? Решение этой задачи приводит к выражению $75 \cdot 4 + 80 \cdot 3$.

2) Автобус шел 3 ч со скоростью 56 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а потом, чтобы уложиться в расписание, оставшиеся 4 ч двигался, увеличив скорость на 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Какова протяженность автобусного маршрута? Для решения этой задачи можно составить выражение $56 \cdot 3 + (56 + 6) \cdot 4$.

При решении различных задач получают выражения, содержащие числа, знаки действий, скобки. Такие выражения называют **числовыми**.

Числовое выражение — это запись, составленная из чисел, знаков действий и скобок.

Числовые выражения содержат:
- **числа;**
- **знаки действий;**
- **скобки**

Если в числовом выражении выполнить действия, то получится число, которое называется **значением**

числового выражения. Например: $75 \cdot 4 + 80 \cdot 3 = 540$; 540 — значение числового выражения $75 \cdot 4 + 80 \cdot 3$. Число 416 — значение числового выражения $56 \cdot 3 + (56 + 6) \cdot 4$, поскольку $56 \cdot 3 + (56 + 6) \cdot 4 = 416$.

Определение **Значение числового выражения** — это число, полученное в результате выполнения указанных в выражении действий.

Выражения с переменными

Рассмотрим задачу. Один килограмм груш стоит 5 р., а килограмм яблок — y р. Чему равна стоимость двух килограммов груш и трех килограммов яблок вместе? Для решения задачи составим выражение $2 \cdot 5 + 3 \cdot y$. Это выражение называется **выражением с переменной.**

Выражение с переменными — это запись, содержащая числа, знаки действий, скобки, переменные, обозначенные буквами.

Если в выражение с переменными вместо переменных подставить их значения — числа, то получится числовое выражение. Его значение называется **значением выражения с переменными** при данных значениях переменных.

Выражения с переменными содержат:
- **числа;**
- **знаки действий;**
- **скобки;**
- **переменные, обозначенные буквами**

Пример 1. Найдите значение выражения

$$1050 - m : 7 \text{ при } m = 105.$$

Решение. Если $m = 105$, то $1050 - m : 7 = 1050 - 105 : 7 = 1050 - 15 = 1035$. Число 1035 — значение данного выражения при $m = 105$.

Область определения выражения с переменными

Если в выражение с переменной $105 - 20 : (x - 3)$ вместо x подставить какое-либо число (например, 2), то получится значение этого выражения при $x = 2$, оно равно 125. А вот подстановка числа 3 приведет к выражению $105 - 20 : 0$, которое не имеет смысла. Говорят, что число 3 не входит в **область определения** данного выражения с переменной.

Определение **Областью определения выражения с переменными** называют все значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

Чтобы найти область определения выражения с переменными, нужно:

1) установить порядок действий в выражении с переменными;

2) записать область определения:

- если в выражении нет действия деления на выражения с переменными, то область определения — все числа;
- если в выражении есть действие деления на выражения с переменными, то нужно исключить те значения переменных, при которых деление не имеет смысла.

Пример 2. Найдите область определения выражения $(4 + x) \cdot 3x^3 + 2$.

Решение. Значение этого выражения можно найти при любом значении переменной x, так как все действия в этом выражении: сложение, умножение, возведение в степень с натуральным показателем — выполняются для любого значения переменной. Область определения этого выражения — все числа.

Пример 3. Найдите область определения выражения $(4 + x) : (2 - x)$.

Решение. Чтобы выражение имело смысл при некотором значении переменной, т. е. чтобы можно было найти значение выражения, можно подставить вместо x любое число, кроме числа 2, так как подстановка числа 2 приводит к выражению $6 : 0$, которое не имеет смысла. При всех остальных значениях переменной выражение имеет смысл. Значит, область определения выражения $(4 + x) : (2 - x)$ — это все числа, кроме 2.

Числовые выражения	
1. Найдите значение выражения: а) $(1{,}27 + 3{,}74) \cdot 2{,}43 - 1{,}53 : (3{,}72 - 1{,}92)$; б) $\frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : \left(5 - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)$.	а) $(1{,}27 + 3{,}74) \cdot 2{,}43 - 1{,}53 : (3{,}72 - 1{,}92) = 5{,}01 \cdot 2{,}43 - 1{,}53 : 1{,}8 = 12{,}1743 - 0{,}85 = 11{,}3243$; б) $\frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : \left(5 - 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : (5 - 1) = \frac{5}{6} - 4\frac{1}{3} : 4 = \frac{5}{6} - 1\frac{1}{12} = -\frac{1}{4}$.
Выражения с переменными	
2. Найдите значение выражения $2a^2 - a : b^2 - 3$ при: а) $a = 4,\ b = -2$; б) $a = -3,\ b = 1$.	а) $2a^2 - a : b^2 - 3 = 2 \cdot 16 - 4 : (-2)^2 - 3 = 32 - 4 : 4 - 3 = 32 - 1 - 3 = 28$; б) $2a^2 - a : b^2 - 3 = 2 \cdot 9 - (-3) : 1 - 3 = 18$.

Область определения выражения с переменными	
3. Найдите область определения выражения: а) $b^2 - b : (b - 3)$; б) $b^2 - b \cdot (b - 3)$.	а) Так как в выражении $b^2 - b : (b - 3)$ выполняется действие деления на $(b - 3)$, то областью определения данного выражения будут все числа, кроме числа 3, поскольку $(b - 3)$ не может быть равным нулю. б) Так как в выражении $b^2 - b \cdot (b - 3)$ нет действия деления на выражения с переменными, то область его определения — все числа.

1. Может ли числовое выражение содержать: а) только числа и знаки действий; б) только числа и скобки; в) только скобки и знаки действий; г) только числа?

2. Может ли выражение с переменными содержать: а) только числа и переменные; б) только переменные и скобки; в) только переменные и знаки действий; г) только переменные?

3. Найдите ошибку в утверждении: «Если выражение с переменной содержит действие деления, то его область определения — не все числа».

2.2. Найдите значение выражения:

а) $4 : \left(5\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\right)$;

б) $\left(-8\frac{1}{12} + 6\frac{1}{4}\right) \cdot 3$;

в) $\frac{3}{7} \cdot \left(-4\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)$;

г) $\left(3\frac{2}{3} - 1\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}\right) : (-2{,}5)$.

2.3. Найдите значение выражения:

а) $-12{,}3 + 8{,}5 - 1{,}9$;

б) $-0{,}636 : 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}1$.

2.4. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

а) $127 : \frac{1}{3}$ и $127 \cdot \frac{1}{3}$;

б) $5{,}67 \cdot (-1)$ и $5{,}67 : (-1)$;

в) $-5^4 \cdot 3$ и $(-5)^4 \cdot 3$;

г) $0{,}3 : 0{,}2$ и $0{,}3 \cdot 0{,}2$.

2.5. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $0{,}6 \cdot \frac{5}{6} + \left(2\frac{2}{15} - 3\frac{5}{9}\right) : 9{,}6;$

б) $\left(-1\frac{2}{3} + \left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{11}\right).$

2.6. Придумайте пример числового выражения, содержащего четыре различных арифметических действия, значение которого равно 10.

2.7. Составьте выражение для решения задачи:

а) Ширина прямоугольного участка земли 10 м, а длина — x м. Найдите длину забора, которым огорожен участок.

б) Школьник вышел из дома в школу и двигался со скоростью 50 $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. По пути он остановился и 2 мин подождал друга, с которым они вместе продолжили путь с той же скоростью. Вся дорога заняла t мин. Как далеко находится дом от школы?

в) Число 18 меньше искомого числа на a десятков. Чему равно искомое число?

2.8. Придумайте задачу, для решения которой нужно составить выражение:

а) $3 \cdot 10 + 4 \cdot a;$ б) $8 \cdot x - 12.$

2.9. Прочитайте выражение:

а) $a \cdot b;$ б) $2 \cdot (x - y);$

в) $(a + b) : 5;$ г) $(n - m)^2.$

2.10. Запишите в виде выражения с переменными: а) полусумма чисел 8 и a; б) произведение числа 12 и разности чисел a и b; в) разность квадратов чисел a и b. Придумайте три других выражения с двумя переменными и прочитайте их.

2.11. Запишите сумму, разность, произведение и частное выражений с переменными $(c + b)$ и $(a - d)$.

2.12. Найдите значение выражения:

а) $7a + 1$ при $a = 4$; $a = 0$; $a = -3$;
б) $15 - 2b$ при $b = 6$; $b = -0{,}5$; $b = 7{,}5$.

Могут ли среди значений данных выражений оказаться равные?

2.13. Найдите значение выражения $x - y$, если:

а) $x = 0$, $y = -1{,}8$; б) $x = -8$, $y = \frac{1}{3}$.

Может ли значение данного выражения быть равным нулю?

2.14. Найдите значение выражения $0{,}25m - n^2$ при:

а) $m = 8$, $n = -5$; б) $m = 10$, $n = \frac{1}{2}$.

При каких не равных между собой m и n значение данного выражения равно нулю?

2.15. Сравните значения выражений $3x - 7(x + 2)$ и $(3x - 7)x + 2$ при $x = -1$.

2.16. Найдите значения выражений $0{,}4x$; $-x^2$ и $0{,}9 : x$ при $x = -0{,}3$ и расположите полученные значения в порядке убывания.

2.17. Из данных числовых выражений выберите выражение, не имеющее смысла:

а) $\left(\frac{1}{2} - 0{,}5\right)^2$; б) $(-7) : \left(0{,}75 - \frac{3}{4}\right)$; в) $(-3)^0 + 3$.

2.18. Найдите область определения выражения:

а) $x^2 - 2x + 6$; б) $(x - 8) : 3$; в) $12 : (x - 4)$.

2.19. Выясните, существует ли значение переменной, при котором выражение не имеет смысла:

а) $2x : (x - 6)$; б) $3 - 8 : x$; в) $(x - 7) : (2x + 8)$.

Если существует, то найдите его.

2.20. Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются: а) все числа; б) все числа, кроме –5.

2.21. Найдите по три пары значений переменных, при которых не имеет смысла выражение:

а) $8 : (a - b)$; б) $(12a + b) : (a + 3b)$.

2.22*. Можно ли найти значение выражения $(b - a) : 2$, если $a - b = -5$? Если можно, то найдите его.

2.23*. Найдите область определения выражения:

а) $(x - 4) : (x + 2) - 7 : x$;
б) $2x^2 - x : (2x - 1) + 1 : (4 - x)$.

2.24*. Приведите пример выражения с двумя переменными, областью определения которого являются все числа, кроме противоположных значений переменных.

2.25. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $6 \cdot \left(7\frac{4}{9} - 8\frac{5}{18}\right)$; б) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-1\frac{1}{15}\right) : (-4)$;

в) $\left(-\frac{3}{16}\right) \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(2\frac{5}{6} - 3{,}8 \cdot 1\frac{1}{9}\right) : \left(-3\frac{3}{4}\right)$.

2.26. Найдите значение выражения:

а) $-16{,}2 + 9{,}5 - 3{,}4$; б) $-7{,}14 : 0{,}7 + 120 \cdot 0{,}01$.

2.27. Придумайте пример числового выражения, содержащего четыре различных арифметических действия, значение которого равно 1.

2.28. Составьте выражение для решения задачи:

а) Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а третья сторона — x см. Найдите периметр треугольника.

б) Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля — 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго — 90 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Протяженность дороги между городами s км. Через какое время автомобили встретятся?

2.29. Придумайте задачу, для решения которой нужно составить выражение $5 \cdot b - 2 \cdot 7$.

2.30. Запишите в виде выражения с переменными:

а) утроенная разность чисел 7 и a;
б) частное от деления суммы чисел a и b на число 15;
в) квадрат суммы чисел a и b.

2.31. Найдите значение выражения $8x - 3$ при $x = 2$; $x = 0$; $x = -1$.

2.32. Найдите значение выражения $2a + b$ при:

а) $a = 0{,}1$, $b = -\frac{1}{7}$; б) $a = -1{,}5$, $b = -3$.

Подберите две пары не равных между собой значений переменных, при которых значение данного выражения равно нулю.

2.33. Найдите значение выражения $m^3 - 0{,}3n$ при:

а) $m = -2$, $n = 2{,}5$; б) $m = 10$, $n = -10$.

2.34. Сравните значения выражений $2a(a - 1)$ и $2a - (a - 1)$ при $a = -4$.

2.35. Найдите значения выражений $0{,}7a$; $-a^2$ и $0{,}8 : a$ при $a = -0{,}4$ и расположите полученные значения в порядке возрастания.

2.36. Найдите область определения выражения:

а) $8x - x^3 + 2$; б) $(5 + x) : 9$; в) $(x - 4) : (x + 7)$.

2.37. Найдите, при каких значениях переменной выражение не имеет смысла:

а) $(2x+5):(x-3)$; б) $6:x+12$; в) $(x+1):(2x+5)$.

2.38. Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются: а) все числа, кроме 7,4; б) все числа, кроме –8.

2.39*. Известно, что $x - y = 2$. Найдите значение выражения $(y - x)^3$.

2.40. Число 204 представьте в виде суммы трех слагаемых m, n и k так, чтобы $m : n : k = 3 : 5 : 4$.

2.41. Решите уравнение $(x - 0{,}3) \cdot 3{,}8 = 0{,}38$.

2.42. Услугами двух сотовых операторов пользовалось одинаковое число абонентов. Через год число абонентов первого оператора увеличилось на 100 %, а второго — в 2 раза. У какого сотового оператора абонентов стало больше?

§ 5. Тождество

2.43. Вычислите наиболее удобным способом:

а) $0{,}25 \cdot 2{,}56 \cdot 4$; б) $3{,}567 \cdot 0{,}3 - 0{,}567 \cdot 0{,}3$.

2.44. Сравните значения выражений $2(a - 3)$ и $2a - 6$ при: а) $a = 5$; б) $a = -1$; в) $a = 0$.

Тождественно равные выражения

Найдем значения выражений $7x + 2x$ и $9x$ при:

а) $x = -1$; б) $x = 0$; в) $x = \frac{1}{3}$.

Получим: а) $7x + 2x = 7 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = -7 - 2 = -9$ и $9x = 9 \cdot (-1) = -9$;

б) $7x + 2x = 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$ и $9x = 9 \cdot 0 = 0$;

в) $7x + 2x = 7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

и $9x = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Заметим, что при различных значениях переменной значения этих выражений равны. Эти выражения будут принимать равные значения и при других значениях переменных, так как $7x + 2x = (7 + 2)x = 9x$ по распределительному закону умножения относительно сложения. Такие выражения называют **тождественно равными.**

Тождественно равные выражения

$a + 4$	и	$4 + a$;
$a \cdot 7$	и	$7 \cdot a$;
a^3	и	$a \cdot a \cdot a$

Например, тождественно равными являются выражения: $a + (b + 8)$ и $(a + b) + 8$; $5(bc)$ и $(5b)c$; $3(b + c)$ и $3b + 3c$, — так как они выражают свойства действий умножения и сложения.

Определение Два выражения называются **тождественно равными,** если они принимают одинаковые значения при всех значениях переменных из их общей области определения.

Общей областью определения двух выражений называют все значения переменных, при которых имеют смысл и первое и второе выражения.

Тождество

Между тождественно равными выражениями обычно ставят знак равенства, т. е. $a(b8) = (ab)8$; $a + (b + 8) = (a + b) + 8$; $a(b + 8) = ab + 8a$. Такие равенства называют **тождествами.**

Определение **Тождеством** называют равенство двух тождественно равных выражений.

Тождества

$a + 3 = 3 + a$;

$b \cdot 5 = 5 \cdot b$;

$m^4 = m \cdot m \cdot m \cdot m$

Например, равенство $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$ является тождеством. Равенство $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ является тождеством для всех чисел, кроме нуля.

Тождественные преобразования выражений

В примере $12 \cdot 3 \cdot x = 36x$ мы одно выражение заменили другим, тождественно равным ему, т. е. **выполнили тождественные преобразования.**

Определение

Тождественным преобразованием выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Тождественные преобразования

$3x + 2x = 5x$

(закон умножения)

$x^8 : x^{10} = x^{-2}$

(свойство степени)

Например, $a(b - c + d) = ab - ac + ad$ — тождественные преобразования выполнены на основании распределительного закона умножения;

$3 \cdot x^2 \cdot x^4 = 3x^6$ — тождественные преобразования выполнены на основании свойства степени с натуральным показателем.

Тождественно равные выражения	
1. Являются ли тождественно равными выражения: а) $a - b$ и $b - a$; б) $a \cdot b$ и $b \cdot a$?	а) Выражения $a - b$ и $b - a$ не являются тождественно равными, так как $b - a = -(a - b)$, т. е. при любых неравных значениях a и b данные выражения принимают противоположные значения. б) Выражения $a \cdot b$ и $b \cdot a$ являются тождественно равными на основании переместительного закона умножения.

Тождество	
2. Является ли равенство тождеством: а) $a^n \cdot a^{-n} = a^0$; б) $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; в) $a + a = 2a^2$?	а) Равенство $a^n \cdot a^{-n} = a^0$ является тождеством согласно свойству умножения степеней с одинаковыми основаниями. б) Равенство $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ является тождеством по свойству степени частного. в) Равенство $a + a = 2a^2$ не является тождеством, так как $a + a = 2a$.
Тождественные преобразования выражений	
3. Является ли преобразование тождественным: а) $4x - 3x = x$; б) $a^5 \cdot a^{-5} = a^0$; в) $-(x + z)^2 = (x - z)^2$?	а) Преобразование $4x - 3x = x$ является тождественным на основании распределительного закона умножения. б) Преобразование $a^5 \cdot a^{-5} = a^0$ является тождественным на основании свойства умножения степеней с одинаковыми основаниями. в) Убедиться, что преобразование выражения $-(x + z)^2 =$ $= (x - z)^2$ не является тождественным, можно, подставив в левую и правую части равенства какие-либо значения переменных. Например, при $x = z = 1$ получим неверное равенство $-4 = 0$.
4. Выполните тождественное преобразование, применив законы умножения: а) $4x(-3,5)$; б) $4,5x - 3,5x + 9x$.	а) $4x(-3,5) = 4(-3,5)x = -14x$; б) $4,5x - 3,5x + 9x =$ $= (4,5 - 3,5 + 9)x = 10x$.

1. Если между двумя выражениями стоит знак « = », то является ли такое равенство тождеством?
2. Если в результате тождественных преобразований одного выражения получили другое выражение, то каковы значения этих выражений?
3. Является ли тождеством равенство $x : x = y : y$?

2.45. На основании каких свойств действий можно утверждать, что тождественно равны выражения:

а) $2 + 3x$ и $3x + 2$; б) $7(a - b)$ и $7a - 7b$;
в) $n \cdot 3m$ и $3nm$?

2.46. Являются ли тождественно равными выражения:
а) $a(-b)$ и $(-a)b$; б) $b + b + b + b + b$ и b^5;
в) $(-a)^2$ и $-a^2$; г) $(-a)^3$ и $-a^3$?

Придумайте примеры тождественно равных выражений.

2.47. Выполните тождественные преобразования, применив законы умножения:
а) $1{,}2y(-3)$; б) $8x - 7{,}3x$; в) $-3{,}5b - 9{,}5b + b$.

2.48. Преобразуйте выражение $15c + 15d$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при:
а) $c = 0{,}34$, $d = 0{,}66$; б) $c = -2\frac{1}{7}$, $d = -3\frac{6}{7}$.

2.49. Преобразуйте выражение $-5a(-20b)$ в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при:
а) $a = 0{,}2$, $b = -2{,}7$; б) $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{2}{7}$.

2.50. Выберите выражения, тождественно равные выражению $-5(x-2)$:

а) $-5x-10$; б) $-5x+10$; в) $10-5x$.

2.51. Преобразуйте выражение $a^7 : a^{11} \cdot a^2$ в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а) $a = 3$; б) $a = -0{,}25$.

2.52. Придумайте два тождественно равных выражения с двумя переменными.

2.53. Как доказать, что выражения не являются тождественно равными? Докажите одним из способов, что выражения не являются тождественно равными:

а) $5a$ и $5+a$; б) a^{-2} и $-2a$;
в) $(a-1)^2$ и a^2-1; г) $(a+2)^2$ и a^2+4.

2.54. Какие из равенств являются тождествами:

а) $0 \cdot a = a - a$; б) $(a+b)^2 = (b+a)^2$;
в) $a^5 \cdot a^{10} = (a^3)^5$; г) $a^3 - a^2 = a$?

2.55. Докажите, что данные равенства не являются тождествами:

а) $(a-b)^3 = (b-a)^3$; б) $b^2+2 = (b+2)^2$;
в) $(x+3)2+x = x+3(2+x)$.

2.56. Двумя способами составьте выражение для решения задачи. Школьник купил 10 тетрадей в клетку по a к. и 10 тетрадей в линейку по b к. Найдите стоимость покупки.

Являются ли полученные выражения тождественно равными?

2.57. Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов и встретились через 4,5 ч. Скорость одного поезда — x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а другого — y $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Составьте два тождественно равных выражения, с помощью которых можно найти протяженность дороги между городами.

2.58. Применив законы умножения, преобразуйте выражения в тождественно равные:

а) $4a \cdot 5$; б) $8b + 2{,}5b$; в) $1{,}2a - 0{,}5a + 6a$.

2.59. Преобразуйте выражение $2{,}1x - 2{,}1y$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при $x = 1{,}564$, $y = -0{,}436$.

2.60. Преобразуйте выражение $0{,}1a \cdot (-100b)$ в тождественно равное, применив законы умножения, и найдите значение полученного выражения при $a = \frac{1}{12}$, $b = 2\frac{2}{17}$.

2.61. Выберите выражения, тождественно равные выражению $-3(a + 5)$:

а) $-3a - 15$; б) $-3a + 15$; в) $-15 - 3a$.

2.62. Преобразуйте выражение $(a^7)^3 : a^{18}$ в тождественно равное, используя свойства степени с целым показателем, и найдите значение полученного выражения при: а) $a = -2$; б) $a = 0{,}1$.

2.63. Докажите, что выражения не являются тождественно равными:

а) $a - 7$ и $-7a$; б) a^4 и $4a$.

2.64. Как можно убедиться в том, что равенство не является тождеством? Докажите, что равенство $a^2 - 9 = (a - 3)^2$ не является тождеством.

2.65. Среднее арифметическое двух чисел равно 20. Одно из этих чисел 13,29. Найдите другое число.

2.66. Найдите НОД (255, 238).

2.67. Были куплены четыре книги общей стоимостью 84 р., при этом стоимость первой книги составила 20 %, стоимость второй — 30 %, а стоимость третьей — 25 % от суммы потраченных денег. Верно ли, что за четвертую книгу заплатили не больше 19 р.?

§ 6. Одночлен

2.68. Вычислите: $2\frac{1}{3}\cdot(-15)$.

2.69. Упростите выражение $b^{12}\cdot b^3\cdot b$.

Определение одночлена

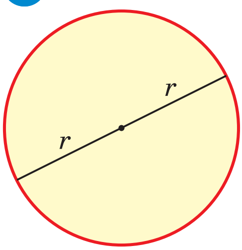


Рис. 3

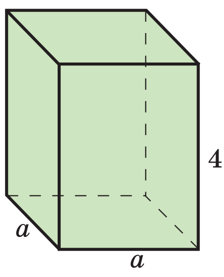


Рис. 4

Рассмотрим задачи. 1) Найдите площадь круга с диаметром d. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга (рис. 3). Так как радиус равен половине диаметра, то $\pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$.

2) Запишите выражение для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, если его основание — квадрат со стороной a, а высота равна 4 см (рис. 4). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания и высоты, т. е. $a^2\cdot 4$, или $4a^2$.

При решении задач получаются выражения, которые содержат только произведение переменных, натуральных степеней переменных и чисел. Такие выражения называются **одночленами**.

Определение **Одночленом** называется произведение чисел, переменных, натуральных степеней переменных.

Пример. Является ли одночленом выражение:
а) $-2{,}9x^3$; б) $0{,}7 : x^2 + y$;
в) $4x \cdot 2xy$; г) $12a^2x^4 - 3c^3y^7$?

Решение. Выражения в пунктах а), в) — одночлены, так как содержат только произведение чисел, переменных и их натуральных степеней. Выражения в пунктах б), г) не являются одночленами, так как содержат не только действие умножения, но и сложение, деление на выражение с переменной.

Одночлены:
$2a^2b^3c$; $\frac{2}{7}x^6y$; $-3{,}5a^2$;
18; m; k^4

Числа, переменные, натуральные степени переменных являются одночленами

Стандартный вид одночлена. Коэффициент

Упростим одночлен $4x \cdot 2xy$, применив переместительный и сочетательный законы умножения и свойства степеней: $4x \cdot 2xy = 8x^2y$. Так же можно упростить одночлены $-5a^3x^43c^3 = -15a^3c^3x^4$ и $-2a^2y^2(-5a^3y^5) = 10a^5y^7$.

После упрощения в одночленах числовой множитель записан на первом месте, а остальные множители — это натуральные степени различных переменных. Такая запись одночлена называется **стандартным видом одночлена**.

Определение **Стандартным видом одночлена** называется запись одночлена в виде произведения числового множителя, записанного на первом месте, и степеней переменных с разными основаниями. Числовой множитель, записанный на первом месте, называется **коэффициентом одночлена**.

Одночлены с коэффициентом 1	Одночлены с коэффициентом –1
$a = \underline{1} \cdot a,\ mn^4 = \underline{1} \cdot mn^4$	$-x^2 = -\underline{1} \cdot x^2,\ -k^8p = -\underline{1} \cdot k^8p$

Например, коэффициент одночлена $-15a^3x^4c^3$ равен –15, а коэффициент одночлена $\frac{2}{7}x^3y$ равен $\frac{2}{7}$.

Степень одночлена

Рассмотрим одночлены $-3a^3$ и $5abc$. Первый одночлен содержит третью степень переменной a, говорят, что и сам одночлен имеет третью степень. Второй одночлен содержит три различные переменные в первой степени; одночлен $5abc$ имеет третью степень.

Определение **Степенью одночлена с коэффициентом, отличным от нуля**, называется сумма показателей степеней входящих в него переменных.

$5a^2b^3c$ — одночлен шестой степени;
$5a^2$ — одночлен второй степени;
$5a$ — одночлен первой степени;
5 — одночлен нулевой степени

Если одночлен не содержит переменных, то его степень равна нулю. Например, одночлен $10a^5y^7$ имеет двенадцатую степень $(5 + 7)$; одночлен $5xk^8$ имеет девятую степень $(1 + 8)$; одночлен c имеет первую степень; одночлен 1024 имеет нулевую степень.

Определение одночлена	
1. Является ли одночленом выражение: а) $-2{,}8x^3$; б) $-4x + 2y$;	а) $-2{,}8x^3$ — одночлен, так как содержит произведение числа $(-2{,}8)$ и натуральной степени переменной x;

в) $2y \cdot 5{,}1a$; г) $\frac{m^2}{3}$; д) $5k : p$?	б) выражение $-4x + 2y$ не является одночленом, так как содержит сумму $-4x$ и $2y$; в) $2y \cdot 5{,}1a$ — одночлен, так как содержит произведение чисел 2 и 5,1 и переменных y и a; г) $\frac{m^2}{3}$ — одночлен, так как содержит произведение числа $\frac{1}{3}$ и натуральной степени переменной m; д) выражение $5k : p$ не является одночленом, так как содержит деление на переменную p.
Стандартный вид одночлена. Коэффициент	
2. Приведите одночлен к стандартному виду и назовите его коэффициент: а) $4x \cdot 2xy$; б) $-7xy^2x^2$; в) $-a^2y^2(-a^3y^5)$; г) $12a^2x^4(-3x^3y^7)$.	а) $4x \cdot 2xy = 4 \cdot 2 \cdot x^2y = 8x^2y$, коэффициент равен 8; б) $-7xy^2x^2 = -7x^3y^2$, коэффициент равен -7; в) $-a^2y^2(-a^3y^5) = (-1)(-1)a^5y^7 =$ $= 1 \cdot a^5y^7 = a^5y^7$, коэффициент равен 1; г) $12a^2x^4(-3x^3y^7) = -36a^2x^7y^7$, коэффициент равен -36.
Степень одночлена	
3. Приведите одночлен к стандартному виду и укажите его степень: а) $x \cdot 2y^2$; б) $-4xx^5$; в) $x \cdot 5^2$.	а) $x \cdot 2y^2 = 2xy^2$, степень одночлена равна трем (одночлен третьей степени); б) $-4xx^5 = -4x^6$, степень одночлена равна шести (одночлен шестой степени); в) $x \cdot 5^2 = 25x$, степень одночлена равна одному (одночлен первой степени).

1. Может ли одночлен содержать: а) только произведение переменных и степеней переменных; б) только произведение чисел и переменных; в) только произведение степеней переменных; г) только число?

2. Может ли коэффициент одночлена быть равным: а) 1; б) –1; в) самому одночлену?

3. Найдите ошибку в утверждении: «Стандартным видом одночлена называется запись одночлена в виде произведения числового множителя, записанного на первом месте, и степеней переменных».

2.70. Среди выражений выберите одночлены:

а) $4{,}5a^7$; б) x^3+y; в) -12; г) $5a^4b-1$.

2.71. Выберите выражение, не являющееся одночленом:

а) $aaab^8$; б) $\frac{xy}{5}$; в) k^2; г) $a:b^2$.

2.72. Какой из данных одночленов имеет стандартный вид:

а) $1{,}4a\cdot 5bc$; б) $7aabc$; в) $7a^2bc$?

Приведите примеры одночленов стандартного вида.

2.73. Приведите одночлен к стандартному виду и назовите его коэффициент:

а) $3a^7a^2$; б) $0{,}25x^2y\cdot 4y$;

в) $-2a^3(-a^2)ab$; г) $0{,}1m^6n\cdot 65m^7n^2$;

д) $-\frac{5}{7}x^5\cdot 1{,}4xy^2$; е) $-a^3b^2c(-ab)$.

2.74. Определите степень одночлена:

а) $10x^9y^2$; б) ab^2c^3; в) 27;

г) $-8y^6$; д) $\frac{7}{9}m^5n$; е) x.

2.75. Есть ли среди данных одночленов такие, степень которых равна 5:

а) $5a^4$; б) $2a^2b^3$; в) $-4a^5b$;

г) $7abcdn$; д) $-\frac{1}{3}x^2y^3$; е) m^5n^5?

2.76. Представьте выражение $3xy\left(-\frac{1}{4}x^2yz\right)$ в виде одночлена стандартного вида. Назовите коэффициент и степень полученного одночлена.

2.77. Придумайте три одночлена стандартного вида, у каждого из которых коэффициент равен 5, а степень 8.

2.78. Какие действия необходимо выполнить, чтобы привести одночлен к стандартному виду? Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $2a^6(-0{,}5a^2)$; б) $-xy \cdot 2y^2x^4$;

в) $-12a\left(-\frac{5}{6}ba^2\right)$; г) $\frac{3}{7}xy^2\left(-0{,}7x^5y\right)$.

Назовите коэффициент и степень каждого из полученных одночленов.

2.79. Запишите выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) произведение a и квадрата b; б) произведение куба a и утроенного b; в) произведение квадрата a и куба b; г) удвоенное произведение квадрата a и квадрата b.

2.80. Найдите значение одночлена $\frac{1}{2}x^4$ при $x = -10$. Может ли значение этого одночлена быть равным 0; –8; 8?

2.81. Представьте одночлен в стандартном виде и найдите его значение:

а) $xa\frac{1}{2}a$ при $a = -1$, $x = 24$;

б) $\frac{1}{3}a4b^2 0{,}75ba^3$ при $a = -2$, $b = 0{,}5$.

2.82*. Представьте одночлен $45x^7y^{12}$ в виде произведения трех каких-либо одночленов стандартного вида, степень каждого из которых больше 2.

2.83. Выберите выражение, не являющееся одночленом:

а) $2a^2 - bc$; б) 1; в) $8x^2y$; г) a^4.

2.84. Приведите одночлен к стандартному виду и назовите его коэффициент:

а) $8xx^9$; б) $0{,}5ab \cdot 2c$;

в) $-3b^4(-b^2)b$; г) $0{,}2m^8n(-5m^2n^4)$.

2.85. Выберите одночлены, степень которых равна 7:

а) $7a^5$; б) $22b^7$; в) $-6c^3d^4$; г) n^7k^7.

2.86. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $-4b \cdot 0{,}25b^2$; б) $-5a^2b(-b^7a^3)$;

в) $27x^4y^2\left(-\frac{2}{9}y\right)$; г) $-m^8n^7(-mn)$.

Назовите коэффициент и степень результата.

2.87. Запишите выражение в виде одночлена стандартного вида: а) произведение n и куба m; б) произведение квадрата n и удвоенного m; в) утроенное произведение куба n и квадрата m.

2.88. Представьте одночлен $\frac{1}{7}xy^3 \cdot 1{,}4x^2$ в стандартном виде и найдите его значение при $x = -2$, $y = 0{,}5$.

2.89*. Представьте одночлен a^4b^9c в виде произведения двух каких-либо одночленов стандартного вида, коэффициенты которых являются взаимно обратными числами.

2.90. Сравните значения выражений $9{,}54 : 1{,}8$ и $17{,}141 - 11{,}841$.

2.91. Расстояние между городами A и B равно 120 км. Если поезд из города A в город B будет идти со скоростью 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то он прибудет в город B точно по расписанию. а) На сколько минут опоздает поезд, если он будет идти со скоростью 48 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$? б) С какой скоростью должен двигаться поезд, чтобы прибыть в город B на 20 мин раньше запланированного времени?

§ 7. Действия с одночленами

2.92. Выполните действия:

а) $0{,}5 \cdot 0{,}3$; б) $12 : (-0{,}4)$;
в) $-1{,}2 - 0{,}12$; г) $-3{,}8 + 8{,}9$.

2.93. Упростите выражение:

а) $m^7 \cdot m^4$; б) $k^{12} : k^{11}$.

Рассмотрим задачу. Для оформления садовой дорожки нужно $3k$ штук квадратной плитки со стороной b (рис. 5). Какова площадь дорожки? Для решения этой задачи нужно одночлен $3k$ умножить на одночлен b^2.

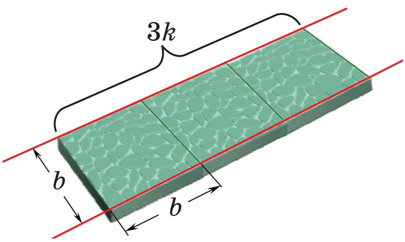


Рис. 5

Так же как и числа, одночлены можно умножать, делить, возводить в степень.

Умножение одночленов

Чтобы умножить одночлены, нужно найти произведение:

1) коэффициентов одночленов;
2) степеней с одинаковыми основаниями;
3) остальных переменных и степеней переменных.

Например:

а) $2x^2y \cdot (0{,}3x^3y^2) =$
$= (2 \cdot 0{,}3) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y \cdot y^2) =$
$= 0{,}6 \cdot x^5 \cdot y^3 = 0{,}6x^5y^3;$

б) $-0{,}25a^4b^6 \cdot (4a^3bc) =$
$= (-0{,}25 \cdot 4) \cdot (a^4 \cdot a^3) \cdot (b^6 \cdot b) \times$
$\times\, c = -1 \cdot a^7 \cdot b^7 \cdot c = -a^7b^7c.$

$$3a^7b^5 \cdot (-4a^2b^3) =$$
$$3 \cdot (-4) = -12 \quad a^7 \cdot a^2 = a^9 \quad b^5 \cdot b^3 = b^8$$
$$= -12a^9b^8$$

Умножение одночленов является тождественным преобразованием. Результатом этого преобразования является одночлен.

Деление одночленов

Чтобы разделить один одночлен на другой, нужно:

1) разделить коэффициенты одночленов и записать частное коэффициентом результата деления;

2) разделить степени с одинаковыми основаниями и записать их множителями в результат деления.

$$-12a^9b^8 : (4a^5b^7) =$$
$$-12 : 4 = -3 \quad a^9 : a^5 = a^4 \quad b^8 : b^7 = b$$
$$= -3a^4b$$

Например:

а) $15x^4y^3 : (-3xy^2) =$
$= (15 : (-3)) \cdot (x^4 : x) \cdot (y^3 : y^2) = -5 \cdot x^3 \cdot y = -5x^3y;$

б) $-1{,}2a^8b^3c : (0{,}2a^5b^3) =$
$= (-1{,}2 : 0{,}2) \cdot (a^8 : a^5) \cdot (b^3 : b^3) \cdot c = -6a^3c.$

Результат деления одночленов может:

а) являться одночленом, например,

$$(2a^3b^4) : (a^2b) = 2ab^3;$$

б) не являться одночленом, например,

$$(2a^3b^4) : (a^8b^5) = 2a^{-5}b^{-1}.$$

Возведение одночлена в степень

Для возведения одночлена в натуральную степень необходимо воспользоваться свойством степени произведения и свойством степени степени.

Чтобы возвести одночлен в степень, нужно:

1) возвести в эту степень каждый множитель одночлена;

2) результаты перемножить.

$$(-4a^4b^2)^3 =$$

$$(-4)^3 = -64 \qquad (a^4)^3 = a^{12} \qquad (b^2)^3 = b^6$$

$$= -64a^{12}b^6$$

Например:

а) $(0{,}1a^6b^3)^2 = (0{,}1)^2 \cdot (a^6)^2 \cdot (b^3)^2 = 0{,}01 \cdot a^{12} \cdot b^6 = 0{,}01a^{12}b^6$;

б) $(-x^4y^2z)^3 = (-1)^3 \cdot (x^4)^3 \cdot (y^2)^3 \cdot z^3 = -1 \cdot x^{12} \cdot y^6 \cdot z^3 = -x^{12}y^6z^3$.

Возведение одночлена в натуральную степень является тождественным преобразованием. Результатом этого преобразования является одночлен.

Подобные одночлены

Рассмотрим одночлены $3x^3y$ и $5x^3y$. В их записи переменные и их степени одни и те же. Такие одночлены называются **подобными**. Коэффициенты подобных одночленов могут быть равными, а могут отличаться друг от друга.

Определение

Подобными называются одночлены, которые имеют одинаковую часть, содержащую степени и переменные.

Подобные одночлены

$5a^4b^3$	и	$-4a^4b^3$,
$-m^4n^2k$	и	m^4n^2k,
$15x^2y$	и	x^2y

Например, подобными являются одночлены $-8x^2y^4z$ и $6x^2y^4z$, так как в их записи переменные и их степени одни и те же.

Сложение одночленов

$$2a^3b^2 + 7a^3b^2 =$$
$$2 + 7 = 9$$
$$= 9a^3b^2$$

Складывать и вычитать можно только подобные одночлены.

При сложении подобных одночленов используется распределительный закон умножения: складываются коэффициенты одночленов, а степени переменных и переменные не изменяются.

Например: а) $-5x^4y + 8x^4y = (-5 + 8)x^4y = 3x^4y$;
б) $10b^2c^3 - 7b^2c^3 - 4b^2c^3 = (10 - 7 - 4)b^2c^3 = (-1)b^2c^3 = -b^2c^3$;
в) $5xy - 2xy - 3xy = (5 - 2 - 3)xy = 0 \cdot xy = 0$.

Сложение одночленов является тождественным преобразованием. Результатом этого преобразования является одночлен.

Умножение одночленов	
1. Выполните умножение одночленов $-2a^2y^2c \cdot (-5a^3y^5d)$.	Найдем произведение: 1) коэффициентов одночленов: $-2 \cdot (-5) = 10$; 2) степеней с одинаковыми основаниями: $a^2 \cdot a^3 = a^5$ и $y^2 \cdot y^5 = y^7$; 3) остальных переменных и степеней переменных: $c \cdot d = cd$. Таким образом, $-2a^2y^2c \cdot (-5a^3y^5d) = 10a^5cdy^7$.
Деление одночленов	
2. Выполните деление одночленов $100a^5y^7 : (4a^2y^6)$.	1) Выполним деление коэффициентов одночленов и запишем частное коэффициентом результата деления: $100 : 4 = 25$. 2) Разделим степени с одинаковыми основаниями $a^5 : a^2 = a^3$, $y^7 : y^6 = y$, запишем их множителями в результат деления: $100a^5y^7 : (4a^2y^6) = 25a^3y$.

Возведение одночлена в степень	
3. Выполните возведение одночлена в степень $(5x^3y^2)^3$.	1) Возведем в третью степень каждый множитель: $5^3 = 125$; $(x^3)^3 = x^9$; $(y^2)^3 = y^6$. 2) Результаты перемножим: $(5x^3y^2)^3 = 125x^9y^6$.
Подобные одночлены	
4. Являются ли подобными одночлены: а) $6x^5y^4$ и $-16x^5y^4$; б) $0{,}4xy^2$ и $-1{,}6x^2y$; в) $1{,}4x^2y^2$ и $-1{,}6a^2b^2$?	а) Одночлены $6x^5y^4$ и $-16x^5y^4$ отличаются только коэффициентами, они подобны; б) одночлены $0{,}4xy^2$ и $-1{,}6x^2y$ отличаются степенями переменных, они не являются подобными; в) одночлены $1{,}4x^2y^2$ и $-1{,}6a^2b^2$ отличаются переменными, они не являются подобными.
Сложение одночленов	
5. Выполните сложение подобных одночленов $1{,}4m^2n^3 - 1{,}6m^2n^3$.	Сложим коэффициенты одночленов $(1{,}4 - 1{,}6 = -0{,}2)$, а степени переменных оставим без изменения: $1{,}4m^2n^3 - 1{,}6m^2n^3 = -0{,}2m^2n^3$.

1. Верно ли, что коэффициент произведения одночленов равен произведению коэффициентов множителей?

2. Верно ли, что коэффициент суммы подобных одночленов равен сумме коэффициентов слагаемых?

3. Может ли коэффициент суммы подобных одночленов быть равен нулю?

2.94. Выполните умножение одночленов:

а) $a^4b \cdot a^2$; б) $3xy^4 \cdot x^6$;

в) $5ac^8 \cdot 2a^6cd$; г) $-6a^2b^4cd^2 \cdot \frac{1}{2}abc$.

2.95. Найдите одночлен, равный произведению одночленов:

а) $-4b^4 \cdot 7ab$; б) $25xy(-4xy^2)$;
в) $(-c^6) \cdot a^6c$; г) $(-8m^4n^5)(-0{,}25m^4n^2)$.

2.96. Найдите произведение одночленов:

а) $\frac{2}{3}a^4b^3$ и $0{,}75a^4bc^2$; б) $-\frac{3}{7}x^5y^2z$ и $1{,}4xy^2z^6$;
в) $-a^2b^7$ и a^3c^4; г) $0{,}2m^4n$ и $5mnk$.

Найдите коэффициент полученного произведения.

2.97. Выполните умножение одночленов:

а) $mn^4 \cdot (-m^7n^2) \cdot (-m^4n)$; б) $(-5a^2b) \cdot 2c \cdot (-0{,}1abc)$;
в) $\left(-2\frac{1}{3}x^2\right) \cdot (-18xy) \cdot \left(-\frac{1}{2}y^3\right)$.

2.98. Выполните умножение одночленов и найдите значение полученного выражения:

а) $\frac{5}{18}x^2 \cdot 3x^2y$ при $x = -3$, $y = -\frac{1}{6}$;
б) $(-x^2y) \cdot (-y^2) \cdot (-xy)$ при $x = -2$, $y = \frac{1}{3}$.

2.99. Тремя различными способами представьте одночлен $0{,}24a^8b^4c$ в виде произведения двух одночленов стандартного вида, степень каждого из которых больше 3.

2.100. Можно ли представить одночлен $-15x^5y^7z^9$ в виде произведения трех одночленов стандартного вида с отрицательными коэффициентами?

2.101. Какие действия нужно выполнить, чтобы разделить одночлен на одночлен? Выполните необходимые действия и преобразуйте в одночлен стандартного вида:

а) $15x^8y^6 : (3x^2y^3)$; б) $36a^4b^3c^5 : (-9a^2bc^4)$;
в) $-21m^9n^5k : (-7m^4k)$; г) $4a^3b^2c : (-8ab)$.

Назовите степень полученного результата деления.

2.102. Найдите одночлен, равный частному одночленов:
а) $-0{,}4a^4x^3y^2$ и $-0{,}5a^3xy^2$;
б) $m^3n^5k^2$ и $-m^2nk$.

2.103. Замените A одночленом так, чтобы полученное равенство стало тождеством:
а) $4a^3b \cdot A = 12a^5b^3$;   б) $4x^7y^2 \cdot A = -32x^8y^3z$.

2.104. Выполните деление одночленов:
а) $16a^5b^3c^2 : (-0{,}4a^3bc)$;   б) $-x^8y^{12}z^4 : \left(-\frac{8}{9}x^5y^9\right)$.

2.105. Выполните деление одночленов $-2a^7x^5y^3 : \left(-\frac{1}{3}a^5x^4y^3\right)$ и найдите значение полученного выражения при $a = -\frac{1}{2}$, $x = 10$, $y = -\frac{5}{7}$.

2.106. Прочитайте выражение и возведите одночлен в степень:
а) $(2b)^4$;   б) $(4a^3)^2$;   в) $(-2x^2y)^3$;   г) $(-a^2bc)^4$.

2.107. Возведите одночлен: а) $\frac{1}{2}xy^2$ в квадрат; б) $-0{,}1a^5b^2$ в куб; в) $-\frac{1}{3}m^4n^8k$ в четвертую степень; г) $-a^4b^3c$ в девятую степень.

2.108. Можно ли представить в виде квадрата одночлена выражение:
а) $m^{10}n^2$;   б) $9c^8b^8$;   в) $\frac{1}{25}a^6b^4$;
г) $0{,}49x^{12}y^8z^2$;   д) $25m^2n^3$?

Представьте, если возможно.

2.109. Представьте в виде куба одночлена выражение:
а) $8x^3$;   б) $-a^6b^9$;
в) $\frac{1}{27}m^3n^{12}$;   г) $-125x^{12}y^9z^{15}$.

2.110. Выполните возведение одночлена в степень:

а) $(-a^2b^3c^4)^5$; б) $(-3x^8y^5z^2)^2$;

в) $(-0{,}5x^3y^4z)^6$; г) $\left(-1\frac{1}{3}m^5n^4k^2\right)^3$.

Определите коэффициент результата.

2.111. Упростите выражение:

а) $-6a^5 \cdot (-ab^2)^4$; б) $(-2x^3y^3)^4 : (4xy^8)$;

в) $(-0{,}4x^3y^4)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^4y\right)$; г) $\left(\frac{1}{27}a^{12}b^9c\right) : \left(-\frac{1}{3}a^3b^2\right)^3$.

Определите степень результата.

2.112. Выберите пары подобных одночленов:

а) $2a$ и $-3a$; б) $-1{,}5x^2$ и $-1{,}5x$;

в) $8b^4$ и $8c^4$; г) a^2b и $-3a^2b$.

2.113. Разбейте следующие одночлены на группы подобных одночленов:

а) $4m$; б) $-5n^4$; в) $2mn^4$; г) $2m^4$;

д) $-5mn^4$; е) m^4; ж) $-m$; з) mn^4;

и) n^4; к) $\frac{1}{3}m$; л) $2m^4n$; м) $-mn^4$.

Для каждой группы придумайте еще по два подобных одночлена.

2.114. Придумайте по три одночлена, подобных одночлену:

а) x^2; б) $-\frac{1}{2}a^4b$; в) $-b^8c^4d$.

2.115. Запишите одночлен, подобный одночлену $3mn^6k^2$, коэффициент которого:

а) противоположен коэффициенту данного одночлена; б) в два раза больше коэффициента данного одночлена; в) в три раза меньше коэффициента данного одночлена.

2.116. Выполните сложение подобных одночленов:

а) $2y + 7y$; б) $6b + 2b + b$;
в) $-3x^2 + 5x^2$; г) $7y^4 + y^4 + 5y^4$;
д) $8a^2b + 5a^2b - 12a^2b$; е) $-n^4m^2 - 3n^4m^2 + 4n^4m^2$.

2.117. С помощью тождественных преобразований приведите выражение к одночлену стандартного вида:

а) $9a - 4a$; б) $12x^2 - 19x^2$;
в) $-6b^3 - 2b^3$; г) $-y^5 + 2y^5$;
д) $15ab^2 - 16ab^2$; е) $-bc^7 - 9bc^7$;
ж) $-2ax^2 + 9ax^2$; з) $7m^2nk - 3m^2nk$.

2.118. Упростите выражение:

а) $12a^2b - 5a^2b + 3a^2b$;
б) $7x^3y^2 + 2x^3y^2 - 8x^3y^2$;
в) $13m^5n^3 - m^5n^3 - 9m^5n^3$;
г) $0{,}2a^6b^2 - 8{,}9a^6b^2 + 2a^6b^2$;
д) $-0{,}1a^2bc - 0{,}4a^2bc - 0{,}5a^2bc$;
е) $8{,}5xy - 7{,}5xy - xy$.

2.119. Приведите к стандартному виду одночлены $0{,}4a^2b \cdot 0{,}1bc^3 \cdot 20ac$ и $-3a^2 \cdot bc^4 \cdot 8ab$, найдите их сумму.

2.120. Представьте в виде одночленов стандартного вида выражения $7m^4 \cdot (-mn^2)^3$ и $(-3m^3n^5)^4 : \left(\frac{1}{2}m^5n^{14}\right)$. Выполните сложение полученных одночленов.

2.121*. К сумме одночленов $3{,}82a^4y$ и $-2{,}04a^4y$ прибавьте сумму одночленов $7{,}04a^4y$ и $2{,}18a^4y$.

2.122. Выполните умножение одночленов:

а) $x^8 \cdot xy^2$; б) $6ab^7 \cdot a$;
в) $7xy^9 \cdot 3x^6yz$; г) $bcd \cdot (-3b^8c^3d)$.

2.123. Найдите произведение одночленов:

а) $-5xy^5$ и $2x$; б) $-0,25a^2b^2$ и $4ab$;

в) mn^8 и $-n^2$; г) $-3a^8b^3$ и $-2\frac{1}{3}ab^2$.

2.124. Найдите одночлен, равный произведению одночленов, и назовите его коэффициент:

а) $-a^2b\cdot(-a^4b^6)\cdot(-ab^8)$;

б) $\left(-\frac{1}{4}xy^2\right)\cdot 1,2z\cdot(-3xyz)$.

2.125. Выполните умножение одночленов $-\frac{2}{7}mn$ и $\frac{7}{16}m^2$, найдите значение полученного выражения при $m=-2$, $n=0,5$.

2.126. Если возможно, представьте одночлен $7,8m^7n^5k$ в виде произведения двух одночленов стандартного вида, степень каждого из которых больше 5.

2.127. Выполните деление одночленов:

а) $42x^9y^7 : (7x^3y^4)$; б) $18a^5b^4c^3 : (-3a^3b^3c)$;

в) $-45m^6n^5k^4 : \left(-5m^6n\right)$; г) $-8a^3b^2c : (-4a^2bc)$.

Определите степень полученного результата.

2.128. Найдите одночлен, равный частному одночленов:

а) $-0,75a^5b^3c$ и $1,5a^2b^2c$; б) $-m^2n^4k$ и mnk.

2.129. Выполните деление одночленов $-m^3n^4k^2 : \left(-\frac{1}{7}m^2nk\right)$ и найдите значение полученного выражения при $n=-3$, $m=\frac{1}{9}$, $k=-2$.

2.130. Прочитайте выражение и возведите одночлен в степень:

а) $(3a)^2$; б) $(2b^4)^3$; в) $(-4x^3y)^2$; г) $(-t^4n^3k)^3$.

2.131. Возведите одночлен: а) $0,2a^3b$ в куб; б) $-7x^7y^3$ в квадрат; в) $-m^3n^2k$ в седьмую степень.

2.132. Представьте в виде квадрата одночлена выражение:
а) x^2y^6; б) $36m^{12}n^8k^4$; в) $\frac{1}{9}a^2b^8$.

2.133. Выполните возведение одночлена в степень:
а) $(-3ax^3y^4)^3$; б) $\left(-2\frac{1}{3}x^5y^4z^3\right)^2$.

Определите степень результата.

2.134. Упростите выражение:
а) $(-a^8b^9):\left(-\frac{1}{2}a^2b^3\right)^3$; б) $(-0{,}3x^2y^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}xy^4\right)$.

2.135. Придумайте одночлены, подобные одночлену:
а) y; б) $3b^2$; в) $0{,}7x^2y$; г) $-\frac{1}{6}m^5nk$.

2.136. Выполните сложение подобных одночленов:
а) $3m+7m$; б) $-2a+5a-a$;
в) $8y^3+5y^3$; г) $-5b^7+3b^7+b^7$.

2.137. Преобразуйте в одночлен стандартного вида:
а) $7b-2b$; б) $3x^2y-7x^2y$;
в) $-a^4b-6a^4b$; г) $-b^3c^4+8b^3c^4$.

2.138. С помощью тождественных преобразований упростите выражение:
а) $2{,}3ab+7{,}7ab-11ab$; б) $-5x^2y-x^2y+6x^2y$.

2.139. Представьте в виде одночленов стандартного вида выражения $(-a^4b)^3(-5ab)$ и $(-2a^5b^2)^3:\left(-\frac{1}{3}ab\right)^2$. Выполните сложение полученных одночленов.

2.140*. К сумме одночленов $4{,}64m^3n$ и $-9{,}02m^3n$ прибавьте сумму одночленов $2{,}02m^3n$ и $3{,}36m^3n$.

2.141. Найдите 25 % от 88.

2.142. Вычислите: $\left(2\frac{3}{4}-0{,}25\right)\cdot0{,}8-1\frac{2}{3}\cdot1{,}8$.

2.143. Сколько минут в феврале в високосный год?

2.144. Отметьте на координатной плоскости вершины $A(-4;\ 2)$, $B(-4;\ 6)$ и $C(2;\ 6)$ прямоугольника $ABCD$. Найдите координаты вершины D.

2.145. Найдите значение выражения

$$\text{НОК } (18,\ 12) \cdot \text{НОД } (18,\ 12).$$

§ 8. Многочлен

2.146. Найдите значение выражения:

а) $-10 + 12 - 3$; б) $-1{,}2 - 2{,}5 - 3{,}8$.

2.147. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $8a^4a^3a$; б) $-0{,}5x^3y2y$; в) $-9b^3(-b^2)bc$.

Определение многочлена

Рассмотрим задачу. Найдите объем трех хранилищ зерна, если одно из них есть куб с ребром a м, а два других — одинаковые прямоугольные параллелепипеды с измерениями m, n и k м. Объем куба равен a^3 м^3, объем прямоугольного параллелепипеда — произведению mnk м^3. Тогда объем трех хранилищ равен $(a^3 + 2mnk)$ м^3.

При решении многих задач получаются выражения, которые имеют вид суммы одночленов. Такие выражения называются **многочленами.**

Определение **Многочленом** называется сумма одночленов.

Рассмотрим многочлен $3x^3 - 2xy^2 + y - 2$. Он состоит из четырех одночленов: $3x^3$, $-2xy^2$, y и -2. Их называют **членами многочлена**.

Двучлен — многочлен, содержащий два члена. $5x^2 - 2y^3$ — двучлен	**Трехчлен** — многочлен, содержащий три члена. $a^2 - ab + b^2$ — трехчлен

Например, членами многочлена:

а) $0{,}7x^2 - y + 6$ являются одночлены $0{,}7x^2$, $-y$ и 6;

б) $12a^2x^4 - c^3y^7$ являются одночлены $12a^2x^4$ и $-c^3y^7$.

Одночлен также считается многочленом, состоящим из одного члена.

Приведение подобных слагаемых многочлена

В многочлене $27x^3 - 3x^2 - 14x^3 + 5x + 7x^2 - 2$ шесть членов. Первый и третий члены — подобные одночлены, сложим их по правилу сложения подобных одночленов: $27x^3 - 14x^3 = 13x^3$. Подобны также второй и пятый члены многочлена, сложим их: $-3x^2 + 7x^2 = 4x^2$. Тогда данный многочлен будет тождественно равен многочлену $13x^3 + 4x^2 + 5x - 2$, т. е. $27x^3 - 3x^2 - 14x^3 + 5x + 7x^2 - 2 = 13x^3 + 4x^2 + 5x - 2$.

В таком случае говорят, что выполнено **приведение подобных слагаемых многочлена** $27x^3 - 3x^2 - 14x^3 + 5x + 7x^2 - 2$.

Чтобы привести подобные слагаемые многочлена, нужно:

① Определить подобные слагаемые (их можно подчеркнуть). ② Сложить подобные слагаемые в каждой группе. ③ Записать сумму полученных слагаемых и остальных членов многочлена.	Приведите подобные слагаемые многочлена $xy^3 - 5x^2y - 4xy^3 + 7x^2y - 12$. ① $\underline{xy^3} - \underline{\underline{5x^2y}} - \underline{4xy^3} + \underline{\underline{7x^2y}} - 12$. ② $(1 - 4)\underline{xy^3} + (-5 + 7)\underline{\underline{x^2y}} - 12$. ③ $-3xy^3 + 2x^2y - 12$. Таким образом, $xy^3 - 5x^2y - 4xy^3 + 7x^2y - 12 = -3xy^3 + 2x^2y - 12$.

Приведение подобных слагаемых многочлена — тождественное преобразование.

Стандартный вид многочлена

Рассмотрим многочлены $2x^3+5xxy-7{,}5xxy$ и $2x^3-2{,}5x^2y$. Второй многочлен получен из первого приведением его членов к стандартному виду и приведением подобных слагаемых. Такой вид многочлена называется **стандартным.**

Определение Многочлен имеет **стандартный вид,** если все его члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, нужно:

① Каждый член многочлена записать в стандартном виде. ② В полученном многочлене привести подобные слагаемые.	Приведите многочлен к стандартному виду $3x^2yyz-8+7xxyzz+5xxyyz-4$. ① $3x^2y^2z+5x^2y^2z+7x^2yz^2-4-8$. ② $8x^2y^2z+7x^2yz^2-12$. $3x^2yyz-8+7xxyzz+5xxyyz-4=$ $=8x^2y^2z+7x^2yz^2-12$.

Степень многочлена

Многочлен $3x^2yz+12x^2y^2z-12$ имеет три члена. Степень первого члена равна 4, степень второго равна 5, а третий член имеет нулевую степень. Степень многочлена $3x^2yz+12x^2y^2z-12$ равна степени одночлена с наибольшей степенью, т. е. равна 5.

Определение **Степенью многочлена стандартного вида** называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

Чтобы определить степень многочлена, нужно:

① Привести многочлен к стандартному виду. ② Определить член многочлена с наибольшей степенью. ③ Назвать эту степень степенью многочлена.	Определите степень многочлена $-3x^5y^4 + 3x^5y - 9x^6 + 4x^5y - 5x^5y^4$. ① $-8x^5y^4 + 7x^5y - 9x^6$. ② $-8x^5y^4$ — член многочлена с наибольшей степенью. ③ Степень многочлена равна девяти.

Определение многочлена	
1. Назовите каждый член многочлена $-5a^2x^3 + 7ax^2 - 3a^2x + a - x - 10$.	В многочлене шесть членов: $-5a^2x^3$; $7ax^2$; $-3a^2x$; a; $-x$ и -10.
Приведение подобных слагаемых многочлена	
2. Приведите подобные слагаемые многочлена $-0{,}2x^4 + 3x^3y - 0{,}3x^2x^2 - 12xxxy + 3x$.	$-0{,}2x^4 + 3x^3y - 0{,}3x^2x^2 - 12xxxy + 3x = \underline{-0{,}2x^4} + \underline{\underline{3x^3y}} - \underline{0{,}3x^4} - \underline{\underline{12x^3y}} + 3x =$ $= -0{,}5x^4 - 9x^3y + 3x$.
Стандартный вид многочлена	
3. Приведите многочлен $x \cdot y^2 - 4xx^2 + x - 5$ к стандартному виду и определите его степень.	Приведем многочлен к стандартному виду: $x \cdot y^2 - 4xx^2 + x - 5 =$ $= xy^2 - 4x^3 + x - 5$. Определим степень каждого члена: степень первого и второго членов равна 3, степень третьего равна 1, четвертого — нулю. Степень данного многочлена равна 3.

1. Сколько членов может иметь многочлен, если его степень равна 1?

2. Верно ли, что члены многочлена стандартного вида являются одночленами стандартного вида?

2.148. Назовите каждый член многочлена:

а) $x + y + z$; б) $x^2 - 3xy + y^3$;

в) $-0{,}3m^4n^2 + 2{,}3m^2n - m$.

2.149. Запишите многочлен, членами которого являются одночлены:

а) n^2 и k^3; б) $3x$, y и -9;

в) $3ab^4$, $-7a^2b$ и ab; г) $8c^5d^2$ и $-c^3$.

Какие из полученных многочленов являются двучленами, а какие — трехчленами?

2.150. Из одночленов a^2, b^2 и ab составьте все возможные двучлены.

2.151. Приведите подобные члены многочлена:

а) $3x + 5y + 8x$; б) $2m + 9n + 5m - 4n$;

в) $a + 5c - 7a + c$; г) $6b - 18 - b + 5$;

д) $23x - 5y + 6x + 5y$; е) $3m - 5n - 3m + 4n$;

ж) $7b + 7c - 6b - 8c$; з) $5x + y - 3x - 2y - 2x$.

2.152. Упростите многочлен, выполнив тождественные преобразования:

а) $3x^2 - 2x + 8x^2 - 4x$; б) $5y^3 - y^2 + 8y^2$;

в) $5a^3 + 7b^3 - 2a^3 + b^3$; г) $7x^2 - 3xy + 6x^2 - 5xy$.

2.153. Выберите многочлены стандартного вида:

а) $5x - y + 1$; б) $2x^2y + 3x^2y - x$;

в) $3a \cdot ab - b^2 + c$; г) $a^2 + 2ab + b^2$.

Придумайте по два примера двучлена и трехчлена стандартного вида.

2.154. Определите степень многочлена:

а) $5x^7 - 3x^4 + 2x^2 - 1$; б) $a^2b^4 - a^2b^2 - ab$;
в) $5m^9n - m^5n^4 + 7$; г) $a^3b^2 + 9a^2b^3 + 17$.

2.155. Приведите многочлен к стандартному виду и определите его степень:

а) $5x - 2xy^2 + 3x - 7xy^2$;
б) $9c^2 - 2a + a - 8c^2 - a - c^2$;
в) $mm + 8m - 9mm + m$;
г) $5x^2y + 6y^2x - yx \cdot x + 2yxy$.

Можно ли определить степень многочлена, не приводя его к стандартному виду?

2.156. Найдите значение многочлена:

а) $-3a^3b + ab + 3a^3b - 8ab$ при $a = \frac{2}{7}$, $b = 15$;
б) $0{,}2x^3 + \frac{3}{4}y^4 - 1{,}2x^3 - 0{,}75y^4$ при $x = -3$, $y = 25$.

2.157. Придумайте по два примера:
а) двучлена пятой степени;
б) трехчлена десятой степени.

2.158. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:

а) $8x + 11x = 38$; б) $15x - 9x - x = 45$;
в) $0{,}7x + 2{,}3x - 8 = 10$; г) $-0{,}2x - 0{,}8x + 2 = 7$.

2.159. Запишите многочлен, членами которого являются одночлены:
а) a и b^2; б) $6n^4$, $-m$ и k^5; в) $-2xy$ и x^2y.

2.160. Приведите подобные члены многочлена:

а) $2a + 3b + 8a$; б) $7x - 8y + 2x - 3y$;
в) $n - 8m + 5n - m$; г) $4x + 12 - 3x - 1$;

д) $8n + 9m - 8n - 2m$; е) $6x - 3y - 7x + 3y$;
ж) $2a + 3b - a - 4b$; з) $8b - 5c - 7b + 4c - b$.

2.161. Упростите многочлен, выполнив тождественные преобразования:
а) $4a^2 - 6a - 3a^2 - a$;
б) $1,6x^3 + 5xy - 0,6x^3 - 4xy$.

2.162. Приведите многочлен к стандартному виду и определите его степень:
а) $8a + 7a^2b - 7a + a^2b$;
б) $m^4 - 5n + 6m^4 - 3n + 8n$;
в) $x^2x - y^2 + 9xx^2 + 5y^2$.

2.163. Найдите значение многочлена
$2m^2n - 7m + 3m^2n - 3m - m^2n$ при $m = 6$, $n = \frac{5}{9}$.

2.164. Выполните действия. $4^{-2} : (-4)^{-3} + 0,4^{-1} - (-3)^0$.

2.165. В университете было 10 000 студентов. В июне университет закончили 25 % студентов. В сентябре за счет первокурсников число студентов в университете увеличилось на 25 %. Сколько студентов теперь в университете?

§ 9. Сложение и вычитание многочленов

2.166. Найдите сумму чисел –15,5 и –7,6.

2.167. Найдите разность чисел $-5\frac{1}{4}$ и 0,75.

Сумма и разность многочленов

Рассмотрим задачу. Мама купила m карандашей по 20 к., n ручек по 50 к. и k тетрадей по 10 к. для старшего сына, а также m карандашей по 10 к.,

n ручек по 40 к. и k тетрадей по 15 к. для младшего. а) Сколько денег за всю покупку заплатила мама? б) На сколько дороже стоит набор принадлежностей для старшего сына?

Составим выражения для решения задачи:

а) $(20m + 50n + 10k) + (10m + 40n + 15k)$;

б) $(20m + 50n + 10k) - (10m + 40n + 15k)$.

Полученные выражения представляют собой сумму и разность многочленов.

При сложении и вычитании многочленов нужно раскрывать скобки.

Если перед скобками стоит знак «плюс», то:

1) опускают скобки;

2) опускают знак «плюс»;

3) все знаки слагаемых в скобках оставляют без изменения.

$$12 + (4 - 3 - 2) = \\ = 12 + (+4 - 3 - 2) = \\ = 12 + 4 - 3 - 2$$

$$a + (b - c - d) = \\ = a + b - c - d$$

Если перед скобками стоит знак «минус», то:

1) опускают скобки,

2) опускают знак «минус»,

3) все знаки слагаемых в скобках заменяют на противоположные.

$$12 - (4 - 3 - 2) = \\ = 12 - (+4 - 3 - 2) = \\ = 12 - 4 + 3 + 2$$

$$a - (b - c - d) = \\ = a - b + c + d$$

Если перед скобками нет ни знака «плюс», ни знака «минус», то подразумевается, что стоит знак «плюс».

Чтобы сложить (вычесть) многочлены, нужно:

1) раскрыть скобки;

2) привести подобные слагаемые в полученном многочлене.

Например:

а) $3a^2 - 5a - (2a^2 - a + 1) =$
$= 3a^2 - 5a - 2a^2 + a - 1 =$
$= a^2 - 4a - 1;$

$$(a + b - c) - (l - n + k) = \\ = a + b - c - l + n - k$$

б) $(-3x^2y^2 + 2xy - 7) +$
$+ (x^2y^2 + 4xy - 2) =$
$= -3x^2y^2 + 2xy - 7 +$
$+ x^2y^2 + 4xy - 2 =$
$= -2x^2y^2 + 6xy - 9.$

$$a + b - c + (l - n + k) = \\ = a + b - c + l - n + k$$

Сложение (вычитание) многочленов является тождественным преобразованием.

Представление многочлена в виде суммы и разности многочленов

Чтобы представить многочлен в виде суммы двух многочленов, нужно:

1) перед скобками поставить знак «плюс»;

2) заключить некоторые члены многочлена в скобки, не меняя знаки членов, внесенных в скобки.

Например,

$-6x^2y + 1{,}2xy + 0{,}6x^2y -$
$- xy^2 - x = -6x^2y + 1{,}2xy +$
$+ (0{,}6x^2y - xy^2 - x).$

$$a + b - c + m - n + k = \\ = a + b - c + (m - n + k)$$

Чтобы представить многочлен в виде разности двух многочленов, нужно:

1) перед скобками поставить знак «минус»;

2) заключить некоторые члены многочлена в скобки, изменив знак каждого члена, внесенного в скобки, на противоположный.

Например,

$$-6x^2y+1{,}2xy+0{,}6x^2y-xy^2-x=-6x^2y+1{,}2xy-(-0{,}6x^2y+xy^2+x).$$

$$\boxed{\begin{aligned}&a+b-c-m+n-k=\\&=a+b-c-(m-n+k)\end{aligned}}$$

Представление многочлена в виде суммы или разности многочленов является тождественным преобразованием.

Сложение и вычитание многочленов	
1. Найдите сумму многочленов $2a^2+ab-c^2+(-2a^2+ab-c^2)$.	$2a^2+ab-c^2+(-2a^2+ab-c^2)=$ $=2a^2+ab-c^2-2a^2+ab-c^2=$ $=2ab-2c^2$.
2. Найдите разность многочленов $2a^2+ab-c^2-(-2a^2+ab-c^2)$.	$2a^2+ab-c^2-(-2a^2+ab-c^2)=$ $=2a^2+ab-c^2+2a^2-ab+c^2=$ $=4a^2$.
Представление многочлена в виде суммы и разности многочленов	
3. Представьте двумя способами многочлен $7b^5-3b^4+5b^2-b-8$ в виде суммы двух многочленов.	$7b^5-3b^4+5b^2-b-8=$ $=7b^5-3b^4+(5b^2-b-8)$; $7b^5-3b^4+5b^2-b-8=$ $=7b^5-3b^4+5b^2+(-b-8)$.
4. Представьте двумя способами многочлен $7b^5-3b^4+5b^2-b-8$ в виде разности двух многочленов.	$7b^5-3b^4+5b^2-b-8=$ $=7b^5-3b^4-(-5b^2+b+8)$; $7b^5-3b^4+5b^2-b-8=$ $=7b^5-3b^4+5b^2-(b+8)$.

1. После раскрытия скобок при сложении многочленов может ли число членов быть:
а) меньше, чем число членов в многочленах вместе;
б) больше, чем число членов в многочленах вместе;
в) равным числу членов в многочленах вместе?
2. Сколькими способами можно представить трехчлен в виде разности одночлена и двучлена, составленных только из членов данного трехчлена?

2.168. Упростите выражение, используя тождественные преобразования:
а) $4a + (2a + 8b)$; б) $6b + (-3b + 2c)$;
в) $7x + (7y - x)$; г) $9m + (-7m - 2n)$;
д) $8c - (6c + b)$; е) $3x - (-5y + 3x)$;
ж) $6a - (5a - k)$; з) $6n - (-5m - 6n)$.

2.169. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
а) $(5a + 2b) + (3a - b)$; б) $(3x^2 + x) + (-x^2 + 1)$;
в) $(n^2 - 5n) + (3n^2 - n)$; г) $(t^3 - 2t) - (t^3 + 3t)$;
д) $(5y^2 + y) - (-3y + 1)$;
е) $(2a^4 - 9bc) - (-6a^4 - 9bc)$.

2.170. Найдите сумму и разность многочленов:
а) $6a^2 - 5a$ и $3a - 7a^2$;
б) $y^2 - 4y - 6$ и $-3y^2 + 4y - 6$.

2.171. Упростите выражение $A - B$, если:
а) $A = m + n$, $B = m - n$;
б) $A = m - n$, $B = m + n$;
в) $A = m - n$, $B = -m - n$.

2.172. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $2{,}1x^2 - 5{,}7x - (2{,}1x^2 - 0{,}7x)$;
б) $-0{,}3a^3 + 2a^2 + (-0{,}6a^3 + a^2)$;

в) $-3n^4 + 2{,}1n^2 - 8 - (2n^4 - n^2 + 1)$;
г) $7y^5 + 8{,}3xy^2 - y - (-7y^5 + 8{,}3xy^2 - y)$.

Определите степень полученного результата.

2.173. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:
а) $(7x - 9) + (2x - 8) = 19$;
б) $(0{,}2x - 7) - (6 - 0{,}1x) = 2$;
в) $1{,}3 + 0{,}2x - (0{,}5x - 1{,}1) = 1{,}9$.

2.174. Найдите, при каком значении переменной разность многочленов $2{,}3x - 1{,}4$ и $2{,}8 - 0{,}7x$ равна $-4{,}2$.

2.175. Упростите выражение:
а) $6c - (c + 9) + (5c + 1)$;
б) $10ab - (ab - 2c) - (3ab + 4c)$;
в) $3a - 2b - (-2b + 4c) + (5c - 2a)$.

2.176. Какие преобразования нужно выполнить для упрощения выражения $(m - 5n) - (7m - 2) - (9n - 6m)$? Упростите выражение и найдите его значение при $n = -\frac{2}{7}$.

2.177. В выражении $N - (x^2 - xy) = x^2 + xy - y^2$ замените N многочленом так, чтобы получилось тождество.

2.178. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $5 - x^2 - (4x - 2x^2) + (7 + 4x - x^2)$;
б) $5{,}7 + 8a^2b - (1 - 3a^2b) - (11a^2b - 2{,}3)$.

2.179. Найдите значение выражения:
а) $5^{n-1} : 5^{n+2}$; б) $3^{4n+1} \cdot 3^{3-4n}$;
в) $2^{5n-3} \cdot 2^{7n+4} : 2^{12n-1}$.

2.180. Представьте двумя способами многочлен:
а) $3a^4 - 4a^3 + 5a^2 + a$ в виде суммы многочленов стандартного вида;
б) $-8a^3b^2 + 6a^2b^2 - a^2b + 5b^3$ в виде разности многочленов стандартного вида.

2.181. Представьте двумя способами многочлен в виде суммы двучлена и трехчлена, имеющих стандартный вид:

а) $5x^4 - 2x^3 - 7x^2 + x - 8$;

б)* $6m^5n - 7m^3n^2 + nm$.

2.182*. Упростите выражение

$$2c - (3c - (2c - (c + 1)) - 3).$$

2.183. Упростите выражение:

а) $5x + (3x + 7y)$; б) $7a + (-2a + c)$;

в) $9b + (8c - b)$; г) $5k + (-8n - 3k)$;

д) $9t - (8t - n)$; е) $7a - (-9b + 7a)$;

ж) $b - (c - 2b)$; з) $8x - (-7x - 2y)$.

2.184. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $(8m - 9n) + (-7m + n)$;

б) $(5a^2 - a) + (-5a^2 - 2a)$;

в) $(x^2 + 5x) - (8x^2 - 5x)$;

г) $(7y^3 - 3xz) - (-2y^3 - 3xz)$.

2.185. Найдите сумму и разность многочленов $2x^2 - 3x + 5$ и $9 - 2x^2$. Определите степень полученного результата.

2.186. Упростите выражение $A + B$, если:

а) $A = -m - n$, $B = m + n$;

б) $A = m - n$, $B = -m - n$.

2.187. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $7{,}2k^2 + 0{,}1pk + (-7{,}2k^2 + 1{,}9pk)$;

б) $-5{,}7x^6 + 6x^3 - x - (0{,}3x^6 - 6x^3 - x)$.

2.188. Решите уравнение $12x + 5 - (7 - 3x) = 13$.

2.189. Найдите, при каком значении переменной разность многочленов $23x - 14$ и $7x - 28$ равна 14.

2.190. Упростите выражение:

а) $2b + (3b - 5) - (b + 1)$;
б) $5ax - 2y + (3z - 4ax) - (-2y + 4z)$.

2.191. Упростите выражение

$$5b - 7a - (8b - 6a) + (5b + a)$$

и найдите его значение при $b = 5\frac{1}{3}$.

2.192. Докажите, что значение выражения

$$3n^2 + 8n - 4 - (5n^2 + 3n) - (-2n^2 + 5n - 1)$$

не зависит от значения переменной.

2.193. Представьте многочлен $5a^4 - 8a^3 + 5a^2 - 7a$ в виде: а) суммы одночлена и трехчлена; б)* разности трехчлена и двучлена.

2.194*. Упростите выражение $3a - (6a - (2a - 1))$.

2.195. Округлите число 8,6751 до сотых.

2.196. Вычислите: $\left(2\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-13}$.

2.197. При варке варенья клубнику, сахар и воду берут в отношении $3 : 2 : 1$ соответственно. У хозяйки имеется 5,5 кг сахара. Достаточно ли этого, чтобы сварить варенье из 8 кг клубники?

§ 10. Умножение и деление многочлена на одночлен

2.198. Запишите в виде выражения:

а) произведение числа 9 и суммы чисел a и b;
б) частное разности чисел m и n и числа 10.

2.199. Выполните действия:

а) $0,5x^2y \cdot \left(-\frac{1}{3}xy^3\right)$; б) $-12a^4b^3c : (-2abc)$.

Умножение одночлена на многочлен

Рассмотрим задачу. При очистке парка от последствий урагана использовались контейнеры с измерениями a, b и c (рис. 6). В первый день было заполнено $3x$ таких контейнера, во второй — $4y$, а в третий — $5z$. Каков объем всех контейнеров, заполненных за три дня? Для решения этой задачи составим выражение $abc(3x + 4y + 5z)$, которое представляет собой произведение одночлена и многочлена.

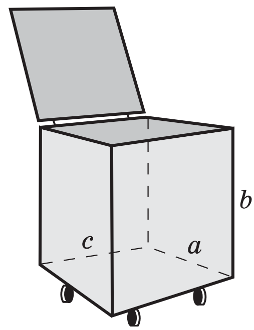


Рис. 6

Для умножения одночлена на многочлен применяется распределительный закон умножения чисел относительно сложения: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно:

1) умножить одночлен на каждый член многочлена;
2) полученные произведения сложить.

Например:

а) $3xy(4x - 7y) = 3xy \cdot 4x - 3xy \cdot 7y = 12x^2y - 21xy^2$;

б) $-5c(2a^2c + 3ac - 4a) = -10a^2c^2 - 15ac^2 + 20ac$.

$$2a\,(a^2 + 3a - 1) =$$
$$= 2a \cdot a^2 + 2a \cdot 3a - 2a \cdot 1 =$$
$$= 2a^3 + 6a^2 - 2a$$

Умножение одночлена на многочлен является тождественным преобразованием.

Деление многочлена на одночлен

Правило «чтобы найти неизвестный множитель, нужно произведение разделить на известный множитель» применяется при делении многочлена на одночлен.

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно:

1) разделить каждый член многочлена на этот одночлен;

2) полученные частные сложить.

$$(4x^4 - 6x^3 + 8x^2) : (2x^2) =$$
$$= 4x^4 : (2x^2) - 6x^3 : (2x^2) + 8x^2 : (2x^2) =$$
$$= 2x^2 - 3x + 4$$

Например, $(3m^3n^2 - m^2n - m) : m =$
$= (3m^3n^2) : m - (m^2n) : m - m : m = 3m^2n^2 - mn - 1.$

Результат деления многочлена на одночлен может:

а) являться многочленом, например,
$(5x^4y^3 + 3x^3y - xy) : (xy) = 5x^3y^2 + 3x^2 - 1;$

б) не являться многочленом, например,
$(5x^4y^3 + 3x^3y - xy) : (x^3y) = 5xy^2 + 3 - x^{-2}.$

Умножение одночлена на многочлен	
1. Выполните умножение одночлена на многочлен: а) $3a(2b - c)$; б) $(7x^2 + 3x - 4) \cdot 6x^3$.	а) $3a(2b - c) = 3a \cdot 2b - 3a \cdot c =$ $= 6ab - 3ac$; б) $(7x^2 + 3x - 4) \cdot 6x^3 =$ $= 7x^2 \cdot 6x^3 + 3x \cdot 6x^3 - 4 \cdot 6x^3 =$ $= 42x^5 + 18x^4 - 24x^3$.
Деление многочлена на одночлен	
2. Выполните деление многочлена на одночлен $(27x^{10} + 3x^5 - 24x^3) : (3x^3)$.	$(27x^{10} + 3x^5 - 24x^3) : (3x^3) =$ $= 27x^{10} : (3x^3) + 3x^5 : (3x^3) -$ $- 24x^3 : (3x^3) = 9x^7 + x^2 - 8$.
3. Выполните действия и приведите результат к многочлену стандартного вида $(9x^2 - 6x) : (3x) - (3x + 2)$.	Установим порядок действий: 1) деление многочлена на одночлен;

	2) вычитание многочлена из многочлена, полученного в результате деления. Выполним действия: $(9x^2 - 6x):(3x) - (3x + 2) =$ $= 3x - 2 - 3x - 2 = -4.$

1. В результате умножения одночлена на многочлен получился многочлен, содержащий 5 членов. Сколько членов было у данного многочлена?

2. В результате деления многочлена, содержащего 5 членов, на одночлен получился многочлен, содержащий 4 члена. Верно ли выполнено деление?

3. Можно ли узнать степень многочлена, полученного при умножении одночлена второй степени на многочлен пятой степени?

2.200. Выполните умножение одночлена на многочлен:

а) $3(a - b)$; б) $2(x + 1)$;
в) $(3m - n) \cdot 5$; г) $-8(y + 7)$;
д) $a(x + y)$; е) $3m(m - n)$;
ж) $(2a + 1) \cdot (-3a)$; з) $-k(-k - 5b)$.

2.201. Выполните умножение:

а) $6xy(x - y)$; б) $-2ab(a - b)$;
в) $(k^2 + 1) \cdot (-2k^2)$; г) $7b(b^2 + b - 2)$;
д) $-n^2(2n^3 + 6n^2 - n)$; е) $5x^2y(-x^2 - xy + y^2)$.

2.202. Выполните необходимые тождественные преобразования и приведите результат к многочлену стандартного вида:

а) $5(b - c) + 9(b + c)$;
б) $8(2a - 3b) - 3(3a - 2b)$;
в) $5(x - y) - 4(2x + 3y)$;
г) $8(-a - 2) + 6(-a + 9)$;

д) $-9(n - m) - (7n + m)$;
е) $-4(3m + 2n) - 7(-2m - 3n)$;
ж) $-7(3x + 1) - 5(1 - 3x) - 6(x - 2)$;
з) $-8(-3x - y) - 2(x - 5y) + 4x$.

2.203. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $3a(a^2 - 1) - 2a(a^2 - 2)$;
б) $(4a^2 - 3b)2b - (-3a^2 - 4b)3b$;
в) $ab(3a + 2b) - 3ab^2(a - 4)$;
г) $2mn(n - m) - 3mn(n + m) + mn^2$.

Определите степень полученного многочлена.

2.204. Найдите значение выражения

$$7(4a + 3b) - 6(5a + 7b) \text{ при } a = 2,\ b = -3.$$

2.205. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:
а) $8x - 5(2 - x) = 16$;
б) $6(x - 3) - 2(x + 2) = 10$;
в) $-5(1 - x) - 4(2 - x) = 3$.

2.206. Выполните деление многочлена на одночлен:
а) $(3a^3 - 4a^2) : a$;
б) $(8x^5 + 4x^4 - 2x^2) : (-2x^2)$;
в) $(5x^4y^2 - 3x^3y^3) : (x^2y^2)$;
г) $(35m^5n^4 - 10m^6n^5 + 5m^3n^4) : (-5m^3n^4)$.

2.207. Выполните действия и приведите результат к многочлену стандартного вида:
а) $(4a^2 - 3a) : a - (7a + 1)$;
б) $(3x^3 + 6x^2) : (3x^2) - 5(x^2 - x)$;
в) $(6b^4 - 2b^2) : (2b^2) + (-b^2 + 1)$.

2.208. Докажите, что значение выражения $2^{8n-2} : 32^{n+7} \cdot 8^{-n+3}$ не зависит от значения переменной.

2.209. Найдите, при каком значении переменной:

а) разность выражений $8x - 1$ и $-3(2x + 3)$ равна 20;
б) сумма выражений $6x(7 + x)$ и $3x(-2x + 1)$ равна 90.

2.210*. Восстановите равенство, вписав вместо знаков $*$ необходимые члены:

а) $3(* - y) = 21x - 3y$;
б) $* \cdot (6n + 5m) = -30n - 25m$;
в) $* \cdot (4a - *) = 20a^2 - 15ab$;
г) $-4c(* + *) = -12ac - 16c^2$.

2.211*. Решите уравнение

$$6x(2 - 3x) - 4{,}5x(1 - 4x) - 6{,}5x + 2 = 9.$$

2.212. Выполните умножение одночлена на многочлен:

а) $9(x + y)$; б) $7(b - 1)$; в) $(a + 4b) \cdot 3$;
г) $-6(m - 5)$; д) $m(a - b)$; е) $5x(-x + y)$;
ж) $-t(t + c)$; з) $(4k - 9) \cdot (-6k)$.

2.213. Выполните умножение:

а) $5ab(a + b)$; б) $-3m^2n(m + n)$;
в) $(y - 3) \cdot (-6y^3)$; г) $3a(a^2 - 3a - 2)$;
д) $-x^2(-x^2 + x - 1)$; е) $9ab^2(a^2 + ab - b^2)$.

2.214. Выполните тождественные преобразования и приведите результат к многочлену стандартного вида:

а) $5(a - 6b) - 2(8a - b)$;
б) $4(-a - 2) - 6(-3a - 1)$;
в) $-7(2x - y) - 3(-3x + 2y)$;
г) $(8a - b) - 2(-a - 2b) - (a + 4b)$.

2.215. Найдите значение выражения

$a(2b + 1) - b(2a - 1)$ при $a = 0{,}01$, $b = -5$.

2.216. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:

а) $10x - 2(x - 3) = 30$;
б) $7(x - 1) - 4(x - 2) = 25$;
в) $-2(4x + 8) - 3(1 - 5x) = 10$.

2.217. Выполните деление многочлена на одночлен:

а) $(5x^4 - 2x^2) : x$; б) $(15a^4 - 10a^3 - 5a) : (5a)$;
в) $(18a^4b^3 - 24a^5b^4 + 6a^2b^3) : (-6a^2b^3)$.

2.218. Выполните действия и приведите результат к многочлену стандартного вида:

а) $(5x^2 - 3x) : x - 8(2x - 5)$;
б) $(9t^5 + 3t^3) : (-3t^3) - (2t^2 + 1)$.

2.219. Докажите, что значение выражения $10\,000^{n-1} \cdot 0{,}01^{n-3} : 100^n$ не зависит от значения переменной.

2.220. Найдите, при каком значении переменной разность выражений $4(1 - x)$ и $2(3 - 5x)$ равна 1.

2.221*. Решите уравнение

$$2x(-2 - 3x) - 6x(-8 - x) = 33.$$

2.222. Найдите число, если 10 % его равны 0,18.

2.223. Найдите все буквы белорусского алфавита, имеющие ось симметрии.

2.224. Вычислите, применяя рациональные приемы счета: $28 \cdot 3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} \cdot 18 + 0{,}125 \cdot 29 \cdot 8$.

2.225. На футбольный матч было продано 6300 билетов, что составило $\frac{7}{9}$ всех имеющихся билетов. Заполнятся ли трибуны полностью, если к началу матча будет продано еще 1300 билетов?

§ 11. Умножение многочленов

2.226. Выполните умножение:

а) $9x(2 - x^3)$; б) $3a^2(a^2 - 2a - 1)$.

2.227. Упростите выражение:

а) $3(2b - 4) + 12$; б) $2(5m + n) - 5(n - 2m)$.

Рассмотрим задачу. Для полива каждого из трех цветников площадью a, четырех цветников площадью b и семи цветников площадью c в июне затрачено $2k$ литров воды на единицу площади, а в июле — $3v$ литров воды на единицу площади. Сколько литров воды затрачено на полив всех цветников за оба летних месяца? Решение этой задачи приводит к произведению многочленов:

$$(2k + 3v)(3a + 4b + 7c).$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно применить распределительный закон умножения.

Например, найдем произведение $(a + b)(c + d)$. Обозначим $(c + d)$ через x и получим:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx = a(c + d) + b(c + d).$$

Снова применим распределительный закон:

$$a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Таким образом, $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Получили **правило умножения многочлена на многочлен.**

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно:

1) умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена;

2) полученные произведения сложить.

Например:

а) $(x+3)(4x-2) = x \cdot 4x - x \cdot 2 + 3 \cdot 4x - 3 \cdot 2 =$
$= 4x^2 - 2x + 12x - 6 = 4x^2 + 10x - 6;$

б) $(5m-n)(m-3n) =$
$= 5m \cdot m - 5m \cdot 3n -$
$- n \cdot m + n \cdot 3n =$
$= 5m^2 - 15mn - mn + 3n^2 =$
$= 5m^2 - 16mn + 3n^2.$

$$(a+b)(c+d) =$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Замена произведения многочленов на многочлен является тождественным преобразованием.

Умножение многочленов	
1. Выполните умножение многочленов $(x^2+3)(x^2-4)$.	$(x^2+3)(x^2-4) =$ $= x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 4 =$ $= x^4 - 4x^2 + 3x^2 - 12 =$ $= x^4 - x^2 - 12.$
2. Умножьте многочлен $x+3$ на многочлен $x^2 - 4x + 1$.	$(x+3)(x^2-4x+1) =$ $= x \cdot x^2 - x \cdot 4x + x \cdot 1 +$ $+ 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 4x + 3 \cdot 1 =$ $= x^3 - 4x^2 + x + 3x^2 - 12x + 3 =$ $= x^3 - x^2 - 11x + 3.$
3. Выполните действия: $(a-b)(a+2b)-(a-3b)(a+b)$.	$(a-b)(a+2b)-(a-3b)(a+b) =$ $= a^2 + 2ab - ab - 2b^2 - (a^2 + ab -$ $- 3ab - 3b^2) = a^2 + 2ab - ab - 2b^2 -$ $- a^2 - ab + 3ab + 3b^2 = b^2 + 3ab.$
4. Докажите, что значение выражения $(2x-y)(y-3x)+y(y-5x)$ не зависит от значения переменной y.	Выполним действия по порядку: умножение многочленов, умножение многочлена на одночлен и сложение полученных многочленов: $(2x-y)(y-3x)+y(y-5x) =$ $= 2xy - 6x^2 - y^2 + 3xy + y^2 -$ $- 5xy = -6x^2.$ Полученный результат не зависит от y.

1. Найдите ошибку в утверждении: «Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить члены одного многочлена на члены другого многочлена и полученные произведения сложить».

2. Возможно ли при умножении двух двучленов получить многочлен, содержащий: а) четыре члена; б) три члена; в) пять членов?

2.228. Выполните умножение многочленов:

а) $(a + m)(b + n)$;
б) $(x + 1)(x + 4)$;
в) $(3 + b)(b + 4)$;
г) $(a - c)(b + d)$;
д) $(x - y)(x + y)$;
е) $(b - 3)(b + 1)$;
ж) $(a - 2)(a - 5)$;
з) $(-x + 3)(x - 2)$.

2.229. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2x + y)(2y + x)$;
б) $(5a + 2b)(3a + 7b)$;
в) $(5c + 2a)(3c - a)$;
г) $(3x - 2y)(2x - 5y)$;
д) $(3n - 1)(5 - 3n)$;
е) $(-a - b)(3a - 2b)$;
ж) $(-2x + 1)(3x + 2)$;
з) $(-2n - 3m)(-3n + m)$.

2.230. Выполните умножение многочленов и определите степень произведения:

а) $(b^2 - c)(b + c^2)$;
б) $(3m - 2)(5m^3 - 2m)$;
в) $(4y^2 - 3y)(y + 1)$;
г) $(5a^2 - 3b^2)(3a^2 - 5b^2)$.

2.231. Выполните умножение:

а) $(a + b)(2c - d)$;
б) $(5y - 1)(3y + 2)$;
в) $(4m + n)(n - 4m)$;
г) $(x - 3y)(x + 6y)$.

Сколько членов в полученном многочлене?

2.232. Решите уравнение, выполнив тождественные преобразования в его левой части:

а) $(5 - x)(x + 3) + x^2 = 20$;

б) $(2x - 3)(3x - 1) - 6x^2 = 16$.

2.233. Представьте в виде трехчлена выражение:

а) $-(a - b)(a + 3b)$; б) $-(2x + 3)(x + 1)$;

в) $-(5n - 3m)(2n - m)$; г) $-(x^2 + y)(x^2 - 2y)$.

2.234. Упростите выражение $7 - (x - 2)(x + 2)$ и найдите его значение при $x = -2$.

2.235. Докажите, что значение выражения $a^6 - (a^3 - 5)(a^3 + 5)$ не зависит от значения переменной.

2.236. Выполните умножение многочленов:

а) $(x^2 - 2x - 1)(x - 3)$; б) $(a - 1)(a^2 + 2a - 3)$;

в) $(4n^2 - 3n - 1)(2n + 3)$; г) $(5b + 4)(b^2 - b - 1)$.

Можно ли определить степень результата, не выполняя умножения?

2.237. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $5(x - 2)(x - 4)$; б) $-6(d - 3)(d + 2)$;

в) $2a(a - 3)(a + 4)$; г) $b(2b - 1)(2b + 1)$;

д) $-2c(5c - 3)(5c - 4)$; е) $-x(x + 6)(2x + 3)$.

2.238. Упростите выражение, используя тождественные преобразования:

а) $(2a + 6b)(3a - 5b) - 8ab$;

б) $(3n + 7m)(2n - 3m) - 5mn$;

в) $(a - 2)(a + 2) - 2a(5 - a)$;

г) $-(y - 3)(1 + y) - 5y(2 + y)$;

д) $4x(2x - 1) - (x - 3)(x + 3)$;

е) $-3c(3c - 2) - (3c + 2)(2 - 3c)$.

2.239. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(x - 4)(x - 1) - (x + 3)(x + 2)$ при $x = 0{,}26$;

б) $(a + 2)(a - 5) - (a - 1)(a - 4)$ при $a = 1{,}125$;

в) $-(x - 2)(5x - 4) + (5x - 1)(x + 3)$ при $x = -1{,}05$.

2.240. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $3a(a - 2) - (a - 2)(3a - 1) - a$;

б) $(2x - 1)(3x + 1) - (x + 1)(6x - 1) + 3(2x - 1)$.

2.241. Решите уравнение:

а) $(x+3)(x-3)+(4-x)x-3x=12$;
б) $-x(2x-1)-(x-3)(3+x)+3x^2=10$.

2.242. Упростите выражение

$(2a+3x)(5a-x^2)-(a+x^2)(10a-3x)$ и найдите его значение при $a=\frac{1}{6}$ и $x=-0{,}5$.

2.243. Упростите выражение

$$(a+5b)(a-b+3)-(a-b)(a+5b-3).$$

2.244*. Известно, что $a^2+b^2=7$. Найдите значение выражения $2(a+1)(b+1)-(a+b)(a+b+2)$.

2.245*. Докажите, что значение выражения $6(9x^3+2)-2(1-3x+9x^2)(3x+1)$ не зависит от значения переменной.

2.246*. При каком значении a значение выражения $(x-a)(x+8)-(x+4)(x-1)$ не зависит от x?

2.247*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения $(n-2)(n+15)-(n+5)(n-6)$ кратно 14.

2.248*. Даны четыре последовательных натуральных числа. Докажите, что произведение крайних чисел меньше произведения средних на 2.

2.249. Выполните умножение многочленов:

а) $(b+c)(b-c)$; б) $(a-4)(a-3)$;
в) $(x+1)(5-x)$; г) $(4a-1)(2-3a)$;
д) $(6c-7b)(2c+3b)$; е) $(5m-2n)(3n-5m)$;
ж) $(-x+y)(2x-y)$; з) $(-2a-3b)(-3a+4b)$.

2.250. Представьте выражение в виде многочлена и определите его степень:

а) $(a^2+b)(a-b^2)$; б) $(x+4)(2x^3-3x)$;
в) $(8n^2+3n)(n-1)$; г) $(3x^2-7y^2)(7x^2-3y^2)$.

2.251. Решите уравнение $(7-2x)(x-3)+2x^2=5$.

2.252. Преобразуйте в многочлен:

а) $-(x+y)(x-y)$; б) $-(3a-1)(a+1)$;

в) $-(7c+2d)(2c+5d)$; г) $-(a^2-b)(b^2-a)$.

2.253. Упростите выражение $16-(x^2-4)(x^2+4)$ и найдите его значение при $x=-3$.

2.254. Выполните умножение многочленов:

а) $(y^2+3y-2)(y-1)$; б) $(3c+4)(2c^2-c-1)$.

2.255. Выполнив тождественные преобразования, представьте в виде многочлена выражение:

а) $3y(5y-1)(5y+1)$; б) $-n(7n+2)(n-3)$.

2.256. Упростите выражение:

а) $(6x-2y)(5x+3y)-8xy$;

б) $(x-2)(x+3)-4x(x+1)$;

в) $2c(1+c)-(c-2)(c+4)$;

г) $-2a(2a-3)-(2a+3)(3-2a)$.

2.257. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(y-3)(y+2)-(y-1)(y-5)$ при $y=2\frac{1}{4}$;

б) $-(m+2)(9m-1)+(m+3)(9m-8)$ при $m=-3{,}5$.

2.258. Докажите, что значение выражения $(n-2)(n-3)-(n+4)(n-5)+2(2n-1)$ не зависит от значения переменной.

2.259. Решите уравнение
$x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2=15$, выполнив тождественные преобразования в его левой части.

2.260. Упростите выражение

$$(4a-2b)(3a+b^2)-(6a-b^2)(2a+2b)$$

и найдите его значение при $a=-\frac{1}{3}$ и $b=0{,}5$.

2.261. Упростите выражение

$$(x+3y)(x+y+2)-(x+y)(x+3y+2).$$

2.262*. Докажите, что при любом натуральном значении переменной значение выражения

$$(n-1)(n+12)-(n-3)(n+4) \text{ кратно } 10.$$

2.263*. Найдите, при каком значении a значение выражения $(x+a)(x-3)-(x-5)(x+3)$ не зависит от x.

2.264. Найдите значение выражения:
а) $25^{-4}\cdot 5^{8}$; б) $9^{-6}:3^{-13}$.

2.265. Вычислите: $(32{,}24:4-2{,}1)\cdot 0{,}1$.

2.266. Представьте 60 % в виде десятичной дроби и в виде обыкновенной дроби.

2.267. Фермер для уборки урожая нанял 10 работников, которые должны были собрать весь урожай за 8 дней. Когда они проработали 2 дня, прогноз погоды резко ухудшился и, чтобы не пропал урожай, фермеру потребовалось закончить работу за 3 дня. Сколько еще нужно нанять работников?

2.268. На круговой диаграмме (рис. 7) показано распределение числа плодовых деревьев в саду. Сколько в саду слив, если яблонь на 212 больше, чем груш?

2.269. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 20 км, навстречу друг другу одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Скорость велосипедиста в 4 раза больше скорости пешехода. Они встретились через некоторое время после начала движения. Сколько километров осталось идти пешеходу после встречи до пункта B?

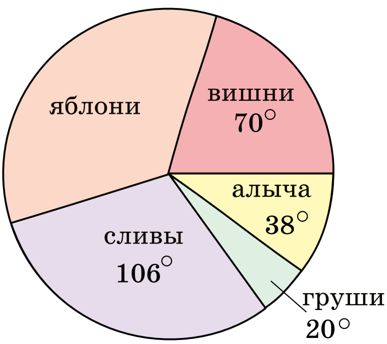


Рис. 7

§ 12. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

2.270. Прочитайте выражения:

$$2ab;\ a^2;\ b^2;\ (a-b)^2.$$

2.271. Запишите выражение:

а) удвоенное произведение выражений m и b;

б) квадрат суммы выражений x и y.

2.272. Представьте в виде квадрата выражение:

а) 16; б) $36x^2$; в) $25x^2y^4$.

2.273. Запишите выражение в виде произведения:

а) m^2; б) $-x^2$; в) $(a+b)^2$; г) $(c-2)^2$.

2.274. Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида:

а) $2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}ab$; б) $2 \cdot 5a \cdot 7b^2$.

Рассмотрим произведение двух двучленов $(a+b)(a+b)$, которое можно записать $(a+b)^2$ и прочитать «квадрат суммы двух выражений a и b».

Выполним умножение двучленов $(a+b)(a+b)$ по правилу умножения многочленов:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
Квадрат суммы двух выражений (a и b) равен квадрату первого выражения (a^2) плюс удвоенное произведение первого и второго выражений ($2ab$) плюс квадрат второго выражения (b^2)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Рассмотрим квадрат разности выражений a и b:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Квадрат разности двух выражений (a и b) равен квадрату первого выражения (a^2) минус удвоенное произведение первого и второго выражений ($2ab$) плюс квадрат второго выражения (b^2)

Таким образом, получили формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений. С помощью этих формул умножение равных двучленов можно выполнить сокращенно.

Их называют **формулами сокращенного умножения.**

Чтобы представить квадрат суммы двух выражений в виде трехчлена, нужно:

① Назвать первое и второе выражения.	Представьте в виде трехчлена выражение $(3a+5b)^2$.
	① $3a$ и $5b$.
② Записать квадрат первого выражения и знак «плюс».	② $9a^2+$
③ Записать удвоенное произведение первого и второго выражений и знак «плюс».	③ $9a^2+30ab+$
④ Записать квадрат второго выражения.	④ $9a^2+30ab+25b^2$
	$(3a+5b)^2=9a^2+30ab+25b^2.$

Например:

а) $(m+4)^2=m^2+2\cdot m\cdot 4+$
$+4^2=m^2+8m+16;$

б) $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1.$

$$(2k+7n)^2=$$
$$=(2k)^2+2\cdot 2k\cdot 7n+(7n)^2=$$
$$=4k^2+28kn+49n^2$$

Чтобы представить квадрат разности двух выражений в виде трехчлена, нужно:

① Назвать первое и второе выражения.	Представьте в виде трехчлена выражение $(x-2y)^2$.
② Записать квадрат первого выражения и знак «минус».	① x и $2y$.
③ Записать удвоенное произведение первого и второго выражений и знак «плюс».	② $x^2 -$
④ Записать квадрат второго выражения.	③ $x^2 - 4xy +$
	④ $x^2 - 4xy + 4y^2$
	$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$.

Например:

а) $(3n - 1)^2 =$
$= (3n)^2 - 2 \cdot 3n \cdot 1 + 1^2 =$
$= 9n^2 - 6n + 1;$

б) $(y^3 - 2)^2 = y^6 - 4y^3 + 4.$

$$(4a-3b)^2 = \\ =(4a)^2-2\cdot4a\cdot3b+(3b)^2= \\ =16a^2-24ab+9b^2$$

Формулы сокращенного умножения применяются как слева направо, так и справа налево:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Если члены трехчлена представляют собой квадрат одного выражения, квадрат второго выражения, удвоенное произведение этих выражений, то этот трехчлен можно представить в виде квадрата двучлена.

Чтобы записать трехчлен в виде квадрата двучлена, нужно:

① Назвать два члена из трех, которые являются квадратами выражений.	Представьте в виде квадрата двучлена трехчлен $x^2 - 10xy + 25y^2$.
② Определить выражения, которые были возведены в квадрат.	① x^2 и $25y^2$.
③ Назвать удвоенное произведение этих выражений.	② x и $5y$.
	③ $2 \cdot x \cdot 5y = 10xy$.

④ Если удвоенное произведение совпадает с третьим членом трехчлена (со знаком «плюс» или «минус»), то записать квадрат суммы (квадрат разности) этих выражений.	④ $x^2 - 10xy + 25y^2 = (x - 5y)^2$.

Представим в виде квадрата двучлена трехчлен $36x^2 + 12xy + y^2$:

① $36x^2$ и y^2 — квадраты выражений;

② $6x$ и y — выражения, которые были возведены в квадрат;

③ $12xy$ — удвоенное произведение этих выражений;

④ $12xy$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «плюс»), значит,

$$36x^2 + 12xy + y^2 = (6x + y)^2.$$

Представим в виде квадрата двучлена трехчлен $25m^2 - 20mn + 4n^2$:

① $25m^2$ и $4n^2$ — квадраты выражений;

② $5m$ и $2n$ — выражения, которые были возведены в квадрат;

③ $20mn$ — удвоенное произведение этих выражений;

④ $20mn$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «минус»), значит,

$$25m^2 - 20mn + 4n^2 = (5m - 2n)^2.$$

Тождественно равны выражения:

а) $(a + b)^2$ и $(-a - b)^2$;

б) $(a - b)^2$ и $(b - a)^2$.

Покажем это:

а) $(-a - b)^2 = (-1 \cdot (a + b))^2 = (-1)^2 (a + b)^2 = (a + b)^2$;

б) $(a - b)^2 = (-1 \cdot (-a + b))^2 = (-1)^2 (b - a)^2 = (b - a)^2$.

Формулы квадрата суммы и квадрата разности являются тождествами.

Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений	
1. Представьте в виде трехчлена: а) $(x+3)^2$; б) $(7n-1)^2$; в) $(-5a-2b)^2$; г) $(-c+1)^2$.	а) $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 =$ $= x^2 + 6x + 9$; б) $(7n-1)^2 = (7n)^2 - 2\cdot 7n\cdot 1 +$ $+ 1^2 = 49n^2 - 14n + 1$; в) $(-5a-2b)^2 = (5a+2b)^2 =$ $= 25a^2 + 20ab + 4b^2$; г) $(-c+1)^2 = (c-1)^2 =$ $= c^2 - 2c + 1$.
2. Используя формулы сокращенного умножения, вычислите: а) 1001^2; б) $7{,}8^2$.	а) Запишем число 1001 как сумму чисел 1000 и 1 и воспользуемся формулой квадрата суммы: $1001^2 = (1000+1)^2 =$ $= 1000^2 + 2\cdot 1000\cdot 1 + 1^2 =$ $= 1\,000\,000 + 2000 + 1 =$ $= 1\,002\,001$; б) $7{,}8^2 = (8-0{,}2)^2 =$ $= 8^2 - 2\cdot 8\cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 =$ $= 64 - 3{,}2 + 0{,}04 = 60{,}84$.
3. Используя алгоритм, представьте в виде квадрата двучлена трехчлен: а) $x^2 - 8x + 16$; б) $a^4 + 6a^2 + 9$.	а) ① x^2 и 16 — квадраты выражений; ② x и 4 — выражения, которые возведены в квадрат; ③ $8x$ — удвоенное произведение этих выражений; ④ $8x$ совпадает со вторым членом трехчлена (со знаком «минус»), значит, $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$; б) $a^4 + 6a^2 + 9 = (a^2)^2 +$ $+ 2\cdot a^2\cdot 3 + 3^2 = (a^2+3)^2$.

4. Используя алгоритм, представьте, если возможно, в виде квадрата двучлена трехчлен $36m^2 - 12mn + 4n^2$.	① $36m^2$ и $4n^2$ — квадраты выражений; ② $6m$ и $2n$ — выражения, которые были возведены в квадрат; ③ $24mn$ — удвоенное произведение этих выражений; ④ $24mn$ не совпадает со вторым членом $12mn$, значит, трехчлен $36m^2 - 12mn + 4n^2$ невозможно представить в виде квадрата двучлена.

1. Верно ли, что формула квадрата суммы (разности) двух выражений используется для сокращенного умножения двучленов?

2. Если трехчлен содержит сумму квадратов двух выражений, то каким должен быть третий член, чтобы получить формулу квадрата двучлена?

2.275. Примените формулу квадрата суммы и представьте выражение в виде многочлена стандартного вида, используя алгоритм:

а) $(x+y)^2$; б) $(a+3)^2$; в) $(8+c)^2$;
г) $(b+1)^2$; д) $(3a+1)^2$; е) $(7+2m)^2$;
ж) $(5k+n)^2$; з) $(3b+4c)^2$; и) $(8c+3d)^2$.

2.276. Примените алгоритм и представьте выражение в виде трехчлена:

а) $(m-n)^2$; б) $(x-2)^2$; в) $(6-b)^2$;
г) $(a-1)^2$; д) $(5k-1)^2$; е) $(8-3a)^2$;
ж) $(9z-5)^2$; з) $(2x-3y)^2$; и) $(5p-2k)^2$.

2.277. Представьте в виде трехчлена, используя формулы сокращенного умножения:

а) $(x+0,4)^2$; б) $(0,6a-1)^2$;
в) $\left(\frac{1}{3}m+3\right)^2$; г) $(5n-0,1k)^2$.

2.278. Представьте в виде трехчлена квадрат двучлена:

а) $(a^2 - b)^2$; б) $(n^2 + m^2)^2$;
в) $(x^3 - y^2)^2$; г) $(p^4 + q^3)^2$;
д) $(10n^4 - 1)^2$; е) $(3 - 2a^2)^2$;
ж) $(2k - c^2)^2$; з) $\left(\frac{1}{6}x^2 + 3y^4\right)^2$.

2.279. Представьте в виде трехчлена, используя формулы сокращенного умножения:

а) $(-a + 1)^2$; б) $(-2b - 5)^2$;
в) $(-3m + 4n)^2$; г) $(-x^2 - 3y)^2$.

2.280. Найдите ошибки в преобразованиях:

а) $(2x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 9$;
б) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 6x + 9$;
в) $(2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

Выполните преобразование верно.

2.281. Примените формулу квадрата суммы и вычислите:

а) 31^2; б) 501^2; в) $7{,}2^2$; г) $\left(8\frac{1}{9}\right)^2$.

2.282. Примените формулу квадрата разности и вычислите:

а) 89^2; б) 499^2; в) $7{,}8^2$; г) $3{,}99^2$.

2.283. Упростите выражение:

а) $2(3a + 1)^2$; б) $\frac{1}{2}(-m - 8n)^2$;
в) $-(2x - 5y)^2$; г) $-5(-0{,}2b + 4c)^2$.

2.284. Представьте в виде многочлена, выполнив тождественные преобразования:

а) $3(x - 4)^2 - 3x^2$; б) $7(-a + b)^2 + 14ab$;
в) $8xy + 4(x - y)^2$; г) $9x^4 - 3(x^2 + y)^2$.

2.285. Упростите выражение:

а) $(y-9)^2-3y(y+1)$;

б) $4c(c-2)-3(c-4)^2$;

в) $(-a-1)^2-(a-1)(a+3)$;

г) $(m+3)(m-11)-(m+6)^2$.

2.286. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(3a+b)^2+(3a-b)^2$ при $a=0{,}1$; $b=7$;

б) $(5a^2+b)^2-(5a^2-b)^2$ при $a=0{,}5$; $b=24$.

2.287. Решите уравнение:

а) $16x^2-(4x-5)^2=15$;

б) $x(x+3)-(x-1)^2=4$;

в) $(2x+3)^2-(2x-3)^2=48$.

2.288. Докажите, что значение выражения $(5a-1)^2-(4a+1)^2-9a(a-2)+4$ не зависит от значения переменной.

2.289. Найдите, при каком значении переменной квадрат двучлена $x+5$ больше квадрата двучлена $x-1$ на 126.

2.290. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) a^2+6a+9; б) $x^2-4xy+4y^2$;

в) $25m^2+10m+1$; г) $4n^2-12nk+9k^2$;

д) y^2+2y+1; е) $1-2b+b^2$;

ж) a^4+16a^2+64; з) $9c^4-30c^2b+25b^2$.

2.291. Вместо знаков $*$ подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:

а) $*+2mn+m^2=(n+*)^2$;

б) $4x^2-4xy+*=(*-*)^2$;

в) $*+12ab+9b^2=(*+3b)^2$.

2.292. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $x^2 - 2x + 1$ при $x = 10;\ 0{,}1;\ -89$;

б) $25m^2 + n^2 + 10mn$ при $m = 0{,}2,\ n = 49$.

2.293. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $y^2 + 2y$; б) $m^2 - 6mn$; в) $49x^2 + 1$.

2.294. Найдите значение выражения:

а) $101^2 - 2 \cdot 101 \cdot 91 + 91^2$; б) $27^2 + 146 \cdot 27 + 73^2$.

2.295. Представьте трехчлен двумя способами в виде квадрата двучлена:

а) $100a^2 + 1 - 20a$; б) $m^6 - 6m^3n^2 + 9n^4$;

в) $-4x^2y + x^4 + 4y^2$; г) $36k^8 + c^2 - 12k^4c$.

2.296. Упростите выражение:

а) $(-x - 8)^2 - 2(x + 8)(x - 3) + (-x + 3)^2$;

б) $3(3a - 1)^2 - 2(-4a - 2)^2 + 5$.

2.297. Упростите выражение

$$(-7x + 2)^2 - (5x - 3)(5x + 1) - (x + 7)(3 - x)$$

и найдите его значение при $x = 0{,}2$.

2.298*. Какое выражение надо прибавить к квадрату разности двух чисел, чтобы получить квадрат суммы тех же чисел?

2.299*. Выделите квадрат двучлена в выражении:

а) $x^2 + 6x + 10$; б) $y^2 - 16y + 70$.

2.300*. Докажите, что выражение $81a^2 - 18a + 4$ принимает только положительные значения.

2.301. Используя формулы квадрата суммы и квадрата разности, представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(c + d)^2$; б) $(b - 5)^2$; в) $(3 + k)^2$;
г) $(n - 1)^2$; д) $(4x + 1)^2$; е) $(2 - 7y)^2$;
ж) $(6a + b)^2$; з) $(5p - 2q)^2$; и) $(8a + 3b)^2$.

2.302. Представьте в виде трехчлена:

а) $(a - 0,2)^2$; б) $(0,3x + 1)^2$;
в) $\left(\frac{1}{5}b - 5\right)^2$; г) $(0,1n + 4m)^2$.

2.303. Представьте в виде трехчлена квадрат двучлена:

а) $(n^3 + m)^2$; б) $(a^4 - b^3)^2$;
в) $(1 + 10x^2)^2$; г) $\left(\frac{1}{4}b^2 - 2c^3\right)^2$.

2.304. Представьте в виде трехчлена:

а) $(-b + 2)^2$; б) $(-3a - 1)^2$;
в) $(-5x - 4y)^2$; г) $(-y^3 + 8z)^2$.

2.305. Примените формулу квадрата суммы или квадрата разности и вычислите:

а) 61^2; б) 799^2; в) $9,2^2$; г) $5,98^2$.

2.306. Представьте в виде многочлена:

а) $5(2 - a)^2 - 5a^2$; б) $3a(a - 2) - (-a + 3)^2$.

2.307. Упростите выражение $(2x - 3y)^2 - (2x + 3y)^2$ и найдите его значение при $x = \frac{7}{24}$, $y = 5$.

2.308. Решите уравнение $(-x - 5)^2 - x(x + 3) = 39$.

2.309. Докажите, что значение выражения $(3x - 1)^2 - 3(x - 1)^2 - 6(x^2 - 1) - 8$ не зависит от значения переменной.

2.310. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 - 10x + 25$; б) $n^2 + 2n + 1$;
в) $16a^2 + 8ab + b^2$; г) $m^4 - 18m^2 + 81$.

2.311. Найдите значение выражения $y^2 + 6y + 9$ при $y = 97$.

2.312. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученное выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 - 4a$; б) $25y^2 + 1$; в) $24c + 4$.

2.313. Найдите значение выражения

$$99^2 - 2 \cdot 99 \cdot 111 + 111^2.$$

2.314. Представьте трехчлен двумя способами в виде квадрата двучлена:

а) $9x^2 + 1 - 6x$; б) $-10ab^2 + a^2 + 25b^4$.

2.315*. Выделите квадрат двучлена в выражении $a^2 + 2a + 3$.

2.316*. Докажите, что выражение $4x^2 - 4x + 3$ принимает только положительные значения.

2.317. Из точек $K(-11)$; $M(0)$; $P(-11,2)$; $T(-13)$ выберите ту, которая расположена на координатной прямой левее точки $N(-12)$.

2.318. Вычислите: $(0,5 - 0,75) : (-2,75)$.

2.319. Одну и ту же книгу ученик прочитывает за 7 дней, а его младшая сестра — за 9 дней. Кто прочитает больше: ученик за 5 дней или его сестра за 6 дней?

2.320. Сравните значения выражений $a^{-1} - b^{-1}$ и $(a - b)^{-1}$ при $a = 0,6$, $b = 1,2$.

2.321. На счет положили 800 р. Через месяц на счету стало 816 р. На сколько процентов увеличилась сумма вклада?

2.322. В классе 28 учащихся. Из них 15 человек любят читать детективы, 17 человек — фантастику, а 3 человека не любят читать. Найдите, сколько учащихся любят одновременно детективы и фантастику, если читательские интересы всех учащихся известны.

§ 13. Формулы сокращенного умножения: произведение суммы и разности двух выражений

2.323. Запишите выражение:
а) разность выражений $4m$ и $7b$; б) разность квадратов выражений $3x$ и $2y$; в) произведение суммы выражений $5a$ и $4c$ и их разности.

2.324. Представьте в виде квадрата одночлена выражение: а) 36; б) b^4; в) $9x^2$; г) $0{,}01m^{12}$.

Рассмотрим произведение двучленов $(a + b)(a - b)$.

Первый множитель — это сумма выражений a и b, второй множитель — их разность. Все выражение — произведение суммы и разности двух выражений. Выполним умножение по правилу умножения многочленов: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Получили формулу сокращенного умножения суммы и разности двух выражений.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Произведение суммы $(a + b)$ и разности $(a - b)$ двух выражений равно разности квадратов $(a^2 - b^2)$ этих выражений

Чтобы выполнить сокращенное умножение суммы и разности двух выражений, нужно:

① Назвать сумму и разность выражений. ② Назвать первое и второе выражения. ③ Записать квадрат первого выражения. ④ Поставить знак «минус». ⑤ Записать квадрат второго выражения.	Представьте в виде многочлена $(2a + 3b)(2a - 3b)$. ① $2a + 3b$ и $2a - 3b$. ② $2a$ и $3b$. ③ $4a^2$ ④ $4a^2 -$ ⑤ $4a^2 - 9b^2$ $(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$.

Например:

а) $(x + 8y)(x - 8y) =$
$= x^2 - (8y)^2 = x^2 - 64y^2$;

б) $(a^2 + 5)(a^2 - 5) =$
$= (a^2)^2 - 5^2 = a^4 - 25$.

$$(6m + 7n)(6m - 7n) =$$
$$= (6m)^2 - (7n)^2 =$$
$$= 36m^2 - 49n^2$$

Формула произведения суммы и разности двух выражений применяется как слева направо, так и справа налево:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Чтобы представить в виде произведения двучленов разность квадратов двух выражений, нужно:

① Назвать квадрат первого выражения. ② Назвать первое выражение. ③ Назвать квадрат второго выражения. ④ Назвать второе выражение. ⑤ Записать произведение суммы и разности этих выражений.	Представьте в виде произведения разность квадратов выражений $9a^2 - 16b^2$. ① $9a^2$. ② $3a$. ③ $16b^2$. ④ $4b$. ⑤ $(3a + 4b)(3a - 4b)$. $9a^2 - 16b^2 = (3a + 4b)(3a - 4b)$.

Например:

а) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 =$
$= (x + 2)(x - 2);$

б) $b^4 - 25a^4 =$
$= (b^2)^2 - (5a^2)^2 =$
$= (b^2 + 5a^2)(b^2 - 5a^2).$

$$64c^2 - 81d^2 =$$
$$= (8c)^2 - (9d)^2 =$$
$$= (8c + 9d)(8c - 9d)$$

Сокращенное умножение суммы и разности двух выражений

1. Представьте в виде многочлена выражение: а) $(3b + 7c)(3b - 7c)$; б) $(4x - 5)(4x + 5)$; в) $(4m^2 + n)(4m^2 - n)$; г) $(5y^2 + 0{,}1x^3)\ (0{,}1x^3 - 5y^2)$.	а) Выражение представляет собой произведение суммы $(3b + 7c)$ и разности $(3b - 7c)$ выражений $3b$ и $7c$. Квадрат первого выражения равен $9b^2$, квадрат второго — $49c^2$. Таким образом, $(3b + 7c)(3b - 7c) =$ $= (3b)^2 - (7c)^2 = 9b^2 - 49c^2$; б) $(4x - 5)(4x + 5) =$ $= (4x)^2 - 5^2 = 16x^2 - 25$; в) $(4m^2 + n)(4m^2 - n) =$ $= (4m^2)^2 - n^2 = 16m^4 - n^2$; г) $(5y^2 + 0{,}1x^3)(0{,}1x^3 - 5y^2) =$ $= (0{,}1x^3)^2 - (5y^2)^2 =$ $= 0{,}01x^6 - 25y^4$.
2. Вычислите: $199 \cdot 201$.	$199 \cdot 201 = (200 - 1)(200 + 1) =$ $= 200^2 - 1^2 = 40000 - 1 = 39999$.
3. Используя алгоритм, представьте в виде произведения разность квадратов выражений $36m^2 - 25$.	а) ① $36m^2$ — квадрат первого выражения; ② $6m$ — первое выражение; ③ 25 — квадрат второго выражения; ④ 5 — второе выражение; ⑤ $36m^2 - 25 = (6m + 5)(6m - 5)$.

4. Представьте в виде произведения разность квадратов выражений: а) $x^4 - 9$; б) $1 - 0{,}04a^6$.	а) $x^4 - 9 = (x^2)^2 - 3^2 =$ $= (x^2 + 3)(x^2 - 3)$; б) $1 - 0{,}04a^6 = 1^2 - (0{,}2a^3)^2 =$ $= (1 + 0{,}2a^3)(1 - 0{,}2a^3)$.
5. Найдите значение выражения $\left(5\frac{5}{7}\right)^2 - \left(1\frac{2}{7}\right)^2$.	$\left(5\frac{5}{7}\right)^2 - \left(1\frac{2}{7}\right)^2 =$ $= \left(5\frac{5}{7} + 1\frac{2}{7}\right)\left(5\frac{5}{7} - 1\frac{2}{7}\right) =$ $= 7 \cdot 4\frac{3}{7} = 31$.

? **1.** Верно ли, что произведение разности и суммы двух одночленов есть многочлен, содержащий: а) два члена; б) три члена?

2. Верно ли, что разность квадратов двух выражений можно записать в виде произведения: а) одночленов; б) двучлена и одночлена; в) двучленов?

2.325. Используя алгоритм, представьте в виде многочлена произведение суммы и разности двух выражений:

а) $(c + d)(c - d)$; б) $(x - y)(x + y)$;
в) $(n + 7)(n - 7)$; г) $(a - 2)(a + 2)$;
д) $(a - b)(b + a)$; е) $(k + c)(c - k)$;
ж) $(m - 1)(1 + m)$; з) $(y + 5)(5 - y)$.

2.326. Представьте в виде многочлена:

а) $(3m + 1)(3m - 1)$; б) $(2a - b)(2a + b)$;
в) $(5k + 7c)(5k - 7c)$; г) $(x - 4y)(x + 4y)$;
д) $(6n + m)(m - 6n)$; е) $(1 - 9p)(9p + 1)$;
ж) $(b + 8c)(8c - b)$; з) $(3a - 4b)(4b + 3a)$.

2.327. Выполните умножение многочленов:

а) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$; б) $(7 + k^3)(k^3 - 7)$;
в) $(d^4 - d)(d^4 + d)$; г) $(x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$.

2.328. Выполните тождественные преобразования:

а) $(7a^2 + 2)(7a^2 - 2)$; б) $(9x^4 - y)(9x^4 + y)$;
в) $(5b^2 + 4c^5)(4c^5 - 5b^2)$; г) $(3m^6n^3 - 2)(2 + 3m^6n^3)$.

2.329. Вычислите:

а) $49 \cdot 51$; б) $9,9 \cdot 10,1$; в) $5\frac{1}{6} \cdot 4\frac{5}{6}$.

2.330. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $\left(\frac{1}{3}a + 6b\right)\left(\frac{1}{3}a - 6b\right)$;
б) $\left(0,4x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 0,4x\right)$;
в) $(2a - 0,3b^2)(2a + 0,3b^2)$;
г) $\left(0,1m^3 + \frac{1}{2}kn\right)\left(\frac{1}{2}kn - 0,1m^3\right)$.

2.331. Верно ли, что:

а) $(-a + b)(a + b) = b^2 - a^2$;
б) $(-m - n)(m - n) = n^2 - m^2$?

2.332. Используя тождественные преобразования, выполните умножение двучленов:

а) $(-p + k)(p + k)$; б) $(-n - m)(n - m)$;
в) $(c + d)(-d + c)$; г) $(y - x)(-x - y)$.

2.333. Используя формулы сокращенного умножения, представьте в виде многочлена произведение:

а) $(-4y + 3x^2)(4y + 3x^2)$;
б) $(-5mn - 1)(5mn - 1)$;
в) $(7a^3 + 2a)(-2a + 7a^3)$;
г) $(0,2b^4 - c^2)(-c^2 - 0,2b^4)$.

2.334. Упростите выражение:

а) $6(2y-1)(2y+1)$;

б) $-2k(4+9k)(9k-4)$;

в) $(x-8)(x+8)-x^2$;

г) $25a^2-(3+5a)(5a-3)$;

д) $(n^2+6m)(n^2-6m)+36m^2$.

2.335. Выполните тождественные преобразования в левой части уравнения и решите его:

а) $(x-3)(x+3)-x^2+2x=1$;

б) $12x^2+6x+3(2x+5)(5-2x)=81$.

2.336. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(3x-4)(3x+4)-4(3x-4)$;

б) $-5x(5x-2)-(5x+2)(2-5x)$;

в) $(x-4)(x+4)-(x-3)^2$;

г) $(x+6y)^2-(6y+x)(6y-x)$.

2.337. Упростите выражение $(a+5)(a-5)-(8-a)^2$ и найдите его значение при $a=2{,}5$.

2.338. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(-4x+3)(-4x-3)-8(2x^2+3)$;

б) $(6x-1)(-6x-1)-(2-9x)(1+4x)-x+2$.

2.339. Используя алгоритм, представьте в виде произведения разность квадратов выражений:

а) n^2-m^2; б) k^2-c^2; в) x^2-4;

г) a^2-1; д) $36-n^4$; е) x^6-y^2;

ж) $1-c^8$; з) k^4-25; и) $9-a^{10}$.

2.340. Представьте в виде произведения разность квадратов выражений:

а) $25y^2-4$; б) $9x^2-1$; в) $49n^2-64m^2$;

г) $100k^2-c^2$; д) a^2c^2-4; е) $16m^2n^2-1$;

ж) $25-x^4y^2$; з) $49-4a^2b^6$; и) $9a^4-c^6d^8$.

2.341. Представьте в виде произведения разность квадратов выражений:

а) $\frac{1}{9}a^2 - \frac{9}{16}b^2$; б) $0{,}25x^2 - 0{,}81b^2$;

в) $0{,}01x^4 - y^2$; г) $0{,}49n^6m^6 - 1$.

2.342. С помощью формулы разности квадратов вычислите:

а) $59^2 - 41^2$; б) $111{,}3^2 - 11{,}3^2$.

2.343. Используя формулу разности квадратов, упростите выражение:

а) $(a - b)^2 - a^2$; б) $n^2 - (m + n)^2$;

в) $(x + y)^2 - 4x^2$; г) $9c^2 - (5b - c)^2$.

2.344. Используя формулы сокращенного умножения, вычислите $\frac{3{,}6^2 - 2 \cdot 3{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4^2}{1{,}4^2 - 1{,}8^2}$.

2.345. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$.

2.346. Решите уравнение

$(3x - 2)(3x + 2) - (2x + 1)^2 - (5x - 1)(x + 2) = 23$.

2.347*. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение

$(-b^2 - 2b)^2 - b^2(b - 1)(b + 1) + 4b(1 - b)(b + 2) - (8b + 1)$.

2.348*. Докажите тождество

$$(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16) = a^8 - 256.$$

2.349. Используя формулу разности квадратов двух выражений, представьте в виде многочлена произведение:

а) $(b + c)(b - c)$; б) $(x - 7)(x + 7)$;

в) $(n - m)(m + n)$; г) $(y + 5)(5 - y)$;

д) $(4x-1)(4x+1)$; е) $(2a+b)(b-2a)$;
ж) $(3-5c)(5c+3)$; з) $(7n+2m)(2m-7n)$.

2.350. Найдите ошибки в преобразованиях:

а) $(n+m)(m-n)=n^2-m^2$;

б) $(a+b)(a-b)=a^2+b^2$.

Выполните преобразования верно.

2.351. Выполните умножение многочленов:

а) $(x^2+1)(x^2-1)$; б) $(5-a^4)(a^4+5)$;
в) $(6m^2-5n^5)(6m^2+5n^5)$; г) $(3+b^6c)(b^6c-3)$.

2.352. Найдите значение выражения:

а) $98\cdot 102$; б) $4{,}9\cdot 5{,}1$.

2.353. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $\left(8n+\frac{1}{4}m\right)\left(8n-\frac{1}{4}m\right)$;

б) $\left(0{,}2a-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+0{,}2a\right)$;

в) $(0{,}4x^2+3b)(0{,}4x^2-3b)$;

г) $\left(0{,}1pn+\frac{2}{5}m^4\right)\left(\frac{2}{5}m^4-0{,}1pn\right)$.

2.354. Выполните умножение двучленов:

а) $(-n^2+m)(n^2+m)$; б) $(-5a^4-3)(5a^4-3)$.

2.355. Упростите выражение:

а) $-4(x+5)(x-5)$;

б) $(6a^2-b)(b+6a^2)-36a^4$;

в) $0{,}49n^2-(0{,}7n+n^2)(0{,}7n-n^2)$.

2.356. Решите уравнение

$$(3x-1)(1+3x)-9x^2+2x+8=12.$$

2.357. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(x+3)^2-(x-2)(x+2)$;

б) $(m+4n)(m-4n)-(m-4n)^2$.

2.358. Упростите выражение $(a-1)^2-(5+a)(a-5)$ и найдите его значение при $a=-3{,}5$.

2.359. Докажите, что значение выражения

$$(-2x+1)(2x+1)+(2x+1)^2-4(x-1)$$

не зависит от значения переменной.

2.360. Используя алгоритм, представьте в виде произведения разность квадратов двух выражений:

а) x^2-y^2; б) a^2-9; в) m^2-1;
г) $1-b^6$; д) $49a^2-16$; е) $64x^8-25z^4$.

2.361. Используя формулу разности квадратов, представьте в виде произведения выражение:

а) $\frac{1}{25}n^2-\frac{4}{9}m^2$; б) $0{,}09a^2-0{,}64c^4$;
в) $0{,}04b^4c^2-1$; г) $\frac{1}{9}x^6y^4-\frac{1}{25}z^2$.

2.362. Вычислите значение выражения, не выполняя действия возведения в квадрат:

а) 67^2-33^2; б) $324{,}7^2-224{,}7^2$.

2.363. Используя формулу разности квадратов, упростите выражение:

а) $(x-y)^2-x^2$; б) $b^2-(a+b)^2$;
в) $(n+m)^2-16n^2$; г) $4c^2-(k-3c)^2$.

2.364. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение $(b-5)(b+5)(b^2+25)$.

2.365*. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение

$$3(2-x)^2-(2x^2+x-5)(x^2-2)+(x^2+4)(4-x^2).$$

2.366. Расположите в порядке возрастания числа:
$-2\frac{1}{4}$; -2; $-2{,}2$; $-2{,}26$; $-2\frac{7}{8}$.

2.367. Выполните действия:

а) $4^7 : 2^{14}$; б) $17^4 : (8,5)^4$.

2.368. Учащийся прочитал $\frac{1}{4}$ книги, а если он прочитает еще 77 страниц, то будет прочитано 69 % всей книги. Найдите, сколько всего страниц в книге.

2.369. Среднее арифметическое четырех чисел равно 45, а среднее арифметическое двенадцати других чисел равно 35. Найдите среднее арифметическое этих шестнадцати чисел.

§ 14. Разложение многочлена на множители

2.370. Найдите НОД (51, 85).

2.371. Примените распределительный закон умножения и вычислите устно:

а) $17 \cdot 513 + 17 \cdot 487$; б) $2,7 \cdot 560 - 2,5 \cdot 560$.

2.372. Выполните деление:

а) $15x^3 : (5x^2)$; б) $7m^4n^2 : (-m^3n^2)$.

При умножении одночлена на многочлен в результате получается многочлен. Поставим обратную задачу: 1) представить многочлен в виде произведения одночлена и многочлена.

При умножении двух многочленов в результате также получается многочлен. Обратная задача: 2) представить многочлен в виде произведения многочленов.

Задачи 1) и 2) можно объединить в одно задание: разложить многочлен на множители.

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения одночлена и многочлена или произведения многочленов.

Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки

Рассмотрим произведение одночлена и многочлена $a(3b + c^2)$. Результат умножения есть многочлен $3ab + ac^2$.

Обратная задача: представить многочлен $3ab + ac^2$ в виде произведения одночлена и многочлена, или разложить многочлен на множители. Один из множителей будет одночленом, а другой — многочленом. **Общий множитель должен содержаться в каждом члене многочлена, а результат деления каждого члена данного многочлена на этот множитель дает второй множитель:**

$$3ab + ac^2 = a(3ab : a + ac^2 : a) = a(3b + c^2).$$

Такой способ разложения многочлена на множители **называется вынесением общего множителя за скобки.**

Вынести общий множитель за скобки — это значит представить данный многочлен в виде произведения одночлена и многочлена.

Чтобы вынести общий множитель за скобки, нужно:

① Определить общий множитель у всех членов многочлена. ② Записать его и открыть скобку. ③ Разделить каждый член многочлена на множитель, записанный перед скобкой. ④ Записать сумму полученных результатов деления каждого члена многочлена на одночлен и закрыть скобку.	Вынесите общий множитель за скобки в выражении $15x^2y + 10xy^2$. ① $5xy$. ② $5xy($ ③ $15x^2y : (5xy) = 3x$; $10xy^2 : (5xy) = 2y$. ④ $5xy(3x + 2y)$. $15x^2y + 10xy^2 = 5xy(3x + 2y)$.

Например, $2ab + 4ac - 6ad = 2a(b + 2c - 3d)$.

В многочлене $2ab + 4ac - 6ad$ было три члена. После вынесения за скобки общего множителя в скобках получился многочлен $b + 2c - 3d$, содержащий также три члена.

$$12m^5n^2 - 18m^8n = \\ = 6m^5n(2n - 3m^3)$$

Сколько слагаемых было до вынесения общего множителя за скобки, ровно столько же должно остаться в скобках после вынесения.

Если общий множитель совпадает с одним из слагаемых, на месте этого слагаемого после вынесения общего множителя за скобки остается единица.

Например: а) $2ab + b = b(2a + 1)$;

б) $4x^3 + 3x^2 - x = x(4x^2 + 3x - 1)$.

Разложение многочлена на множители способом группировки

Рассмотрим многочлен $xy - 3x + 2y - 6$. У всех членов этого многочлена нет общего множителя, но этот многочлен можно разбить на группы членов, которые имеют общий множитель, и заключить их в скобки, т. е. **сгруппировать.**

Например, можно сгруппировать первый и второй, а также третий и четвертый члены: $(xy - 3x) + (2y - 6)$. Вынесем в каждой группе членов общий множитель: $x(y - 3) + 2(y - 3)$. Заметим, что в полученных произведениях есть общий множитель $(y - 3)$, обозначим его через z и вынесем за скобки: $x(y - 3) + 2(y - 3) = xz + 2z = z(x + 2) = (y - 3)(x + 2)$. Таким образом, многочлен $xy - 3x + 2y - 6$ разложили на множители $(y - 3)(x + 2)$ способом группировки.

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

① Сгруппировать, т. е. заключить в скобки, члены многочлена, которые имеют общий множитель.	Разложите на множители многочлен $2ab - 4a + bc - 2c$. ① $(2ab - 4a) + (bc - 2c)$.
② В каждой группе членов вынести за скобки общие множители.	② $2a(b - 2) + c(b - 2)$.
③ Вынести за скобки общий множитель полученных произведений.	③ $(b - 2)(2a + c)$. $2ab - 4a + bc - 2c =$ $= (b - 2)(2a + c)$.

Члены многочлена можно группировать по-разному.

Так, в многочлене $2ab - 4a + bc - 2c$ можно сгруппировать первый член с третьим и второй с четвертым:

$$2ab - 4a + bc - 2c = (2ab + bc) + (-4a - 2c) =$$
$$= b(2a + c) - 2(2a + c) = (2a + c)(b - 2).$$

Не каждая группировка членов многочлена позволяет разложить его на множители.

Группируя в многочлене $2ab - 4a + bc - 2c$ первый член многочлена с четвертым и второй с третьим, не удается выполнить разложение его на множители:

$$2ab - 4a + bc - 2c = (2ab - 2c) + (-4a + bc) =$$
$$= 2(ab - c) + (-4a + bc).$$

Пример. Разложите на множители многочлен

$$a^3 + a + ab^2 - a^2b - b - b^3.$$

Решение. ① Сгруппируем члены многочлена по два: первый — с четвертым, второй — с пятым, третий — с шестым:

$$(a^3 - a^2b) + (a - b) + (ab^2 - b^3).$$

② В первой группе вынесем за скобки общий множитель a^2, во второй группе общего множителя нет, в третьей — b^2:

$$a^2(a-b)+(a-b)+b^2(a-b).$$

③ Общий множитель $(a-b)$ вынесем за скобки:

$$(a-b)(a^2+1+b^2).$$

Не забываем поставить единицу на место $(a-b)$!

Таким образом,

$$a^3+a+ab^2-a^2b-b-b^3=(a-b)(a^2+1+b^2).$$

Можно предложить другой вариант группировки:

① Сгруппируем члены многочлена по три: первый — со вторым и третьим, а четвертый — с пятым и шестым:

$$(a^3+a+ab^2)+(-a^2b-b-b^3).$$

② В первой группе вынесем общий множитель a, а во второй — $(-b)$ и получим:

$$a(a^2+1+b^2)-b(a^2+1+b^2).$$

③ Общий множитель (a^2+1+b^2) вынесем за скобки:

$$(a^2+1+b^2)(a-b).$$

Таким образом,

$$a^3+a+ab^2-a^2b-b-b^3=(a^2+1+b^2)(a-b).$$

Применение формул сокращенного умножения для разложения многочлена на множители

При изучении формул сокращенного умножения мы уже раскладывали многочлены на множители. Если многочлен есть разность квадратов выражений, то он равен произведению суммы и разности этих выражений:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Например, $36a^2-b^2=(6a+b)(6a-b)$.

Если многочлен — сумма трех выражений: квадрата одного выражения, квадрата другого и удвоенного произведения этих выражений — то этот многочлен равен квадрату суммы или разности этих выражений:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Например, $25x^2 + 10x + 1 = (5x + 1)^2$.

Комбинации различных способов разложения многочленов на множители

При разложении многочленов на множители иногда приходится применять не один, а сразу несколько способов.

Например, при разложении на множители многочлена $25a^3 - a$ сначала вынесем общий множитель за скобки: $25a^3 - a = a(25a^2 - 1)$. Затем применим формулу разности квадратов: $a(25a^2 - 1) = a(5a + 1)(5a - 1)$.

Разложим на множители многочлен $9x^2 - y^2 + 6x + 2y$. Для этого воспользуемся способом группировки и формулой разности квадратов:

$$9x^2 - y^2 + 6x + 2y = (9x^2 - y^2) + (6x + 2y) =$$
$$= (3x + y)(3x - y) + 2(3x + y) = (3x + y)(3x - y + 2).$$

Применим формулы квадрата суммы и разности квадратов и разложим многочлен $m^2 + 4mn + 4n^2 - k^2$ на множители:

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - k^2 = (m + 2n)^2 - k^2 =$$
$$= (m + 2n + k)(m + 2n - k).$$

Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки	
1. Вынесите общий множитель за скобки в выражении $6a^3b^4 + 9a^2b^2c$.	Так как НОД (6, 9) = 3, то в общий множитель войдет число 3. Переменная a входит в первое слагаемое в третьей степени, во второе — во второй, значит, в общий множитель войдет a^2, также в него войдет b^2.

	Переменная c не является общим множителем, так как не входит в первое слагаемое. Общий множитель членов многочлена равен $3a^2b^2$. Поскольку $6a^3b^4:(3a^2b^2)=2ab^2$; $9a^2b^2c:(3a^2b^2)=3c$, то $6a^3b^4+9a^2b^2c=$ $=3a^2b^2(2ab^2+3c)$.
2. Разложите на множители многочлен: а) $7x^2y-3xy+5xy^2$; б) $16c^4k^2+4c^2k-12c^2k^2$.	а) Общим множителем членов многочлена $7x^2y-3xy+5xy^2$ является одночлен xy. Тогда $7x^2y-3xy+5xy^2=$ $=xy(7x-3+5y)$. б) Общий множитель $4c^2k$ многочлена $16c^4k^2+4c^2k-$ $-12c^2k^2$ совпадает со вторым слагаемым. Не забываем записать 1 на месте этого слагаемого! $16c^4k^2+4c^2k-12c^2k^2=$ $=4c^2k(4c^2k+1-3k)$.
Разложение многочлена на множители способом группировки	
3. Разложите на множители многочлен $ax+7a-3x-21$.	Сгруппируем слагаемые попарно: $(ax+7a)+(-3x-21)$. Вынесем за скобки общий множитель в каждой группе: $a(x+7)-3(x+7)$. Общий множитель $(x+7)$ вынесем за скобки: $(x+7)(a-3)$. Получим: $ax+7a-3x-21=$ $=(x+7)(a-3)$.

4. Разложите на множители многочлен $6x-3y-4x^2y+2xy^2$.	$6x-3y-4x^2y+2xy^2=$ $=(6x-3y)+(-4x^2y+2xy^2)=$ $=3(2x-y)-2xy(2x-y)=$ $=(2x-y)(3-2xy)$.
Применение формул сокращенного умножения для разложения многочлена на множители	
5. Разложите на множители многочлен: а) $\frac{9}{25}m^4-n^6$; б) $49x^2-28xy+4y^2$.	а) $\frac{9}{25}m^4-n^6=\left(\frac{3}{5}m^2\right)^2-(n^3)^2=$ $=\left(\frac{3}{5}m^2+n^3\right)\left(\frac{3}{5}m^2-n^3\right)$; б) $49x^2-28xy+4y^2=$ $=(7x)^2-2\cdot 7x\cdot 2y+(2y)^2=$ $=(7x-2y)^2$.
6. Представьте в виде произведения многочлен: а) $a-3b+9b^2-a^2$; б) $(a+b)^2-a^2+b^2$; в) $9-p^2+q^2-6q$.	а) $a-3b+9b^2-a^2=$ $=(a-3b)+(9b^2-a^2)=$ $=(a-3b)-(a^2-9b^2)=$ $=(a-3b)-(a-3b)(a+3b)=$ $=(a-3b)(1-(a+3b))=$ $=(a-3b)(1-a-3b)$; б) $(a+b)^2-a^2+b^2=$ $=(a+b)^2-(a^2-b^2)=$ $=(a+b)^2-(a+b)(a-b)=$ $=(a+b)(a+b-a+b)=$ $=2b(a+b)$; в) $9-p^2+q^2-6q=$ $=q^2-6q+9-p^2=$ $=(q^2-6q+9)-p^2=$ $=(q-3)^2-p^2=$ $=(q-3+p)(q-3-p)$.

? **1.** Объясните почему:

а) $ab+ac-a\neq a(b+c)$; б) $6xy-3x^2+x\neq 3x(2y-x)$.

2. Объясните, почему $a(c-d)-b(d-c)\neq(a+b)(d-c)$.

2.373. Назовите общий множитель многочлена и вынесите его за скобки:

а) $3a + 3b$; б) $8x - 8y$; в) $6m + 18n$;
г) $15k - 5p$; д) $-8c + 12d$; е) $-10t - 15q$.

2.374. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $xy + xz$; б) $ab - ca$; в) $-mk + nk$;
г) $-ad - db$; д) $mn + n$; е) $c - bc$;
ж) $-xy + y$; з) $-p - pt$; и) $-ab - b$.

2.375. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $6xy + 6yz$; б) $7ab - 8ac$; в) $3mn - 9mk$;
г) $5b - 10bc$; д) $-8xy - 10y$; е) $8kt - 2t$.

2.376. Разложите многочлен на множители:

а) $4a^2 - 12a$; б) $3x^2 + x$;
в) $y^2 - yz$; г) $m^2n + n$;
д) $x^2y - xy^2$; е) $15a^2b + 3ab$;
ж) $-10mn^2 + 25m^3n$; з) $-a^3b^3 - ab$.

2.377. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $9x + 12y + 6$; б) $-15a + 10b - 5$;
в) $mn - mk + m^2$; г) $6c^2 - 3c + 12bc$;
д) $a^2 - 3a^4 + 5a^6$; е) $-y^5 - 5y^7 - 2y^4$;
ж) $-2x^4y^3 + x^2y^3 - 4x^2y$; з) $8m^4n^2 - 12m^2n^3 + 4m^2$.

2.378. Найдите значение выражения:

а) $m^2 - 4,7m$ при $m = 3,7$;
б) $-4a^3b^2 + \frac{1}{3}a^2b^3$ при $a = 1,5$, $b = \frac{2}{3}$.

2.379. Вместо $*$ подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство $6ab^4 - * = 3ab^4(* - 5a^3b^4)$.

2.380. Придумайте два примера разложения на множители трехчлена седьмой степени так, чтобы общий множитель являлся одночленом пятой степени с коэффициентом, равным –3.

2.381. Представьте в виде произведения многочлен:

а) $(a+b)c+(a+b)d$; б) $3(m-n)-k(m-n)$;
в) $2y(x-3y)+5(3y-x)$; г) $(b-c)+a(b-c)$;
д) $2p(n-k)-(n-k)$; е) $3d(k-t)-(t-k)$.

2.382. Разложите многочлен на множители:

а) $b(c+d)+(3c+3d)$; б) $(8a-8b)+(ac-bc)$;
в) $(mn+mk)-(n+k)$; г) $(ax-ay)-(bx-by)$;
д) $(bc-bd)+(7d-7c)$; е) $(ac-ap)-(3p-3c)$.

2.383. Представьте в виде произведения:

а) $3x(y+z)+y+z$; б) $4(a-b)+ac-bc$;
в) $3tk-kn+5(3t-n)$; г) $8a(b+c)-b-c$;
д) $6(x-y)-bx+by$; е) $8n-6l-(3al-4an)$.

2.384. Используя способ группировки, разложите многочлен на множители:

а) $ac+bc+2ad+2bd$;
б) $xy+xn-3mn-3my$;
в) $3ax-4ay+3bx-4by$;
г) $2ax-bx-4a+2b$;
д) $5ay-3bx+ax-15by$;
е) $6ad-8ab-12bc+9cd$.

2.385. Разложите многочлен на множители, сгруппировав слагаемые двумя различными способами:

а) $8ax+16ay-3bx-6by$;
б) $14am-7an-8bm+4bn$.

2.386. Разложите многочлен на множители:

а) $2x^2+x+2xy+y$; б) $bk-k^2+bc-ck$;
в) $a^4+a^3b-ab^2-b^3$; г) x^4-x^3-2x+2;
д) $7xy-4ay+7x^2-4ax$;
е) $16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$.

2.387. Найдите значение выражения:

а) $x^2 - 3xy - 2x + 6y$ при $x = 3$, $y = -\frac{1}{3}$;

б) $18k^2 + 7y - 7ky - 18k$ при $k = \frac{1}{9}$, $y = \frac{2}{7}$.

2.388. Вычислите наиболее удобным способом:

а) $6{,}4 \cdot 4{,}1 + 3{,}6 \cdot 2{,}2 + 6{,}4 \cdot 2{,}2 + 3{,}6 \cdot 4{,}1$;

б) $0{,}85 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 - \frac{1}{6} \cdot 0{,}65 - 0{,}65 \cdot \frac{1}{3}$.

2.389. Разложите многочлен на множители:

а) $30x^3y - 15x^2y^2 - 20x^4y^2 + 10x^3y^3$;

б) $-24a^4b^4 + 8a^3b^4 + 12a^2b^3 - 4ab^3$.

2.390. Разложите многочлен на множители:

а) $ax^2 + bx^2 - ay - by^2 - ay^2 - by$;

б) $y^4 + xy^2 - y^3 - 3y^2 - 3x + 3y$.

2.391*. Разложите многочлен на множители:

а) $x^2 - 4x + 3$; б) $a^2 + 6ab + 5b^2$.

2.392. Используя формулу разности квадратов, разложите многочлен на множители:

а) $4x^2 - 9$; б) $36a^2 - 1$; в) $0{,}25m^2 - n^2$;

г) $\frac{1}{9}b^2 - 49c^2$; д) $a^4 - b^6$; е) $16 - k^8$;

ж) $25x^2y^2 - 1$; з) $0{,}04a^8 - 9b^2$.

2.393. Вычислите:

а) $11{,}213^2 - 12{,}213^2$; б) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

2.394. Используя формулу квадрата суммы или квадрата разности, разложите многочлен на множители:

а) $y^2 - 6y + 9$; б) $4a^2 + 4a + 1$;

в) $1 - 8y^2 + 16y^4$; г) $36 - 12x^3 + x^6$;

д) $b^2 - 10bc + 25c^2$; е) $m^4 + 2m^2n + n^2$;

ж) $4c^4 - 12c^2k^2 + 9k^4$; з) $25x^6 + 30x^3y + 9y^2$.

2.395. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{53^2 + 2 \cdot 53 \cdot 47 + 47^2}{76^2 - 2 \cdot 76 \cdot 51 + 51^2}$; б) $\dfrac{2{,}9^2 + 2 \cdot 2{,}9 \cdot 2{,}1 + 2{,}1^2}{2{,}6^2 - 2{,}4^2}$.

2.396. Представьте в виде произведения:

а) $-36 + x^2$; б) $-16x^2 + y^2$;

в) $-0{,}25 + a^4$; г) $-\dfrac{4}{9}m^2 + 49n^4$.

2.397. Разложите многочлен на множители:

а) $-x^2 + 2x - 1$; б) $-9 - 6a - a^2$;

в) $-4a^2 + 4ab - b^2$; г) $-25m^4 - 10m^2n - n^2$.

2.398. Разложите многочлен на множители:

а) $(x + 5)^2 - 1$; б) $(y - 8)^2 - 9$;

в) $36 - (a + 2)^2$; г) $49m^2 - (3m - 7)^2$;

д) $(a + b)^2 - c^2$; е) $(m - 2n)^2 - n^2$;

ж) $(x + 1)^2 - 25x^2$; з) $9b^2 - (b + 1)^2$.

2.399. Представьте в виде произведения:

а) $(x + 6)^2 - (x - 3)^2$; б) $(3y - 4)^2 - (y + 1)^2$;

в) $(5x + 2)^2 - (4x - 2)^2$; г) $(a - 3b)^2 - (4a + b)^2$.

2.400. Найдите значение выражения

$(2a + b)^2 - (2a - b)^2$ при $a = 10$, $b = \dfrac{3}{8}$.

2.401. Разложите многочлен на множители:

а) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; б) $-6a^2 - 12ab - 6b^2$.

2.402. Найдите значение выражения

$8a^2 - 16ab + 8b^2$ при $a = 2\dfrac{3}{4}$, $b = 0{,}75$.

2.403. Разложите многочлен на множители:

а) $25 - 16(m - 3)^2$; б) $(x - 6)^2 - 4(x + 2)^2$.

2.404. Найдите значение выражения

$36(x - 1)^2 - (6x - 5)^2$ при $x = -\dfrac{5}{12}$.

2.405. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $36a^2 + 1 + 12a$; б) $m^4 + 9n^2 - 6m^2n$;

в) $12c^2d^3 + 4c^4 + 9d^6$.

2.406. Используя комбинацию различных способов, разложите многочлен на множители:

а) $3x^2 - 3$; б) $a^5 - a^3$;

в) $16m - 4m^3$; г) $32x^4y - 2x^2y$.

2.407. Вычислите: $19{,}7^2 - 8{,}3^2 + 28 \cdot 8{,}6$.

2.408. Используя комбинацию различных способов, разложите многочлен на множители:

а) $(x^2 + 2xy + y^2) - z^2$; б) $4 - (a^2 - 4ab + 4b^2)$;

в) $m^2 - 6mn + 9n^2 - 1$; г) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

2.409. Используя комбинацию различных способов, разложите многочлен на множители:

а) $x^2 - y^2 + x + y$; б) $a - b - 3a^2 + 3b^2$;

в) $a^3 + a^2 - a - 1$; г) $xy - zy - x^2 + 2xz - z^2$.

2.410. Представьте выражение $(a^2+3)^2-10(a^2+3)+25$ в виде квадрата двучлена.

2.411*. Разложите многочлен на множители:

а) $(3x - a)y^2 - 4(a - 3x)y - 4a + 12x$;

б) $(xy + y^2)(x^2 + 4x) - (x^2 + xy)(y^2 + 4y)$;

в) $(5 - x)(5 + x) - a(a - 2x)$;

г) $b^2c^2 - 4bc - b^2 - c^2 + 1$.

2.412*. Найдите значение выражения $81x^2 + 4y^2 + 9x - 2y - 36xy + 5$, если $4{,}5x - y = 1{,}5$.

2.413*. Докажите, что значение выражения $(n + 4)^2 - n^2$ при натуральных n кратно 8.

2.414*. Докажите, что значение выражения $9^{15} - 3^{28}$ кратно 72.

2.415. Назовите общий множитель многочлена и вынесите его за скобки:

а) $2x + 2y$; б) $6a - 9b$; в) $-nm + kn$;
г) $-bc - cd$; д) $a + ab$; е) $kt - t$.

2.416. Представьте в виде произведения:

а) $9ab - 9ac$; б) $7x + 21xy$; в) $3b^2 - 18bc$;
г) $5m^2 + m$; д) $-4x^2y + 6xy$; е) $-p^2q^2 - pq$.

2.417. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $42c - 7d + 21$; б) $a^2b - ab^2 - b$;
в) $m^4 - 3m^3 + 4m^2$; г) $-x^5 + 2x^3 - x^2$;
д) $3a^3b - 6a^3b^2 + 9a^4b$; е) $-bc^4 - 2b^2c^3 + 3b^3c^2$.

2.418. Найдите значение выражения $0{,}3b^2 - b^3$ при $b = -0{,}7$.

2.419. Представьте в виде произведения:

а) $(m - n)k + (m - n)t$; б) $4b(a - c) - 5(a - c)$;
в) $5a(2b - l) + 3c(l - 2b)$; г) $(x + y) + a(x + y)$;
д) $(a - b) - 7c(a - b)$; е) $8z(x - c) - (c - x)$.

2.420. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $a(x - y) - 6(x - y)$;
б) $(7m + 14n) - (am + 2an)$;
в) $(bk - kc) + (5c - 5b)$;
г) $7x(b - c) + b - c$;
д) $6k - 2t - (at - 3ak)$.

2.421. Используя способ группировки, разложите многочлен на множители:

а) $ac + ad + 3bd + 3bc$; б) $bk - ck + 5bl - 5cl$;
в) $5ax - bx + by - 5ay$; г) $mx - 2m - 2a + ax$;
д) $2bx - 3ay - 6by + ax$; е) $2lx - ny + nx - 2ly$.

2.422. Разложите многочлен на множители:

а) $a^2 - 3ab + a - 3b$; б) $cd - ac + ad - a^2$;
в) $xy - 3y^2 - 3y + x$; г) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$;
д) $a^3 - a^2 + a - 1$; е) $5ab - 2bc + 5a^2 - 2ac$.

2.423. Представьте в виде произведения:

а) $a^3 - 5a^2b + ab^2 - 5b^3$;
б) $48xz^2 + 32xy^2 - 15yz^2 - 10y^3$.

2.424. Найдите значение выражения

$15m^2 + 15mn - 2n - 2m$ при $m = \frac{2}{15}$, $n = -2$.

2.425. Вычислите наиболее удобным способом:

$$5 \cdot \frac{5}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} - \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.$$

2.426. Разложите многочлен на множители

$$ax^2 + by^2 + ay - ay^2 - by - bx^2.$$

2.427. Используя формулу разности квадратов, разложите многочлен на множители:

а) $16a^2 - 25$; б) $\frac{4}{9}m^2 - n^2$;
в) $0{,}01a^6 - b^8$; г) $1 - 49x^4y^2$.

2.428. Вычислите:

а) $167^2 - 33^2$; б) $6{,}134^2 - 4{,}134^2$.

2.429. Используя формулу квадрата суммы (квадрата разности), разложите многочлен на множители:

а) $x^2 + 10xy + 25y^2$; б) $36a^2 - 12a + 1$;
в) $9 + 6m^2 + m^4$; г) $49b^4 - 28b^2c^3 + 4c^6$.

2.430. Вычислите: $\dfrac{5{,}9^2 - 4{,}1^2}{5{,}9^2 + 2 \cdot 5{,}9 \cdot 4{,}1 + 4{,}1^2}$.

2.431. Разложите многочлен на множители:

а) $-49 + a^2$; б) $-25m^2 + n^2$;
в) $-16 + 8b - b^2$; г) $-b^4 - 18b^2 - 81$.

2.432. Разложите многочлен на множители:

а) $(a+7)^2-1$; б) $25-(b+3)^2$;
в) $(m-n)^2-k^2$; г) $(y-5)^2-9y^2$;
д) $25a^2-(4a-5)^2$; е) $(3x+2)^2-(3x-1)^2$.

2.433. Найдите значение выражения

$-6x^2-12xy-6y^2$ при $x=2\frac{2}{5}$, $y=0{,}6$.

2.434. Разложите многочлен на множители:
а) $36-49(n+2)^2$; б) $(x+5)^2-9(x-1)^2$;
в) $4(3a^2+2b)^2-(3a^2-2b)^2$.

2.435. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:
а) $1+49b^2-14b$; б) $2m^2n+m^4+n^2$.

2.436. Используя комбинацию различных способов, разложите многочлен на множители:
а) $5a^2-5$; б) x^3-x; в) $5y^4-20y^2$.

2.437. Найдите значение выражения

$$97\cdot 2{,}2+2{,}6^2-99{,}6^2.$$

2.438. Разложите многочлен на множители:
а) $(a^2-2ab+b^2)-c^2$; б) $9-(x^2+6xy+9y^2)$;
в) $b^2-4bc+4c^2-1$; г) $k^2-l^2+10ln-25n^2$.

2.439. Разложите многочлен на множители:
а) m^2-n^2-m-n; б) $2x^2-2y^2-x+y$.

2.440*. Разложите многочлен на множители:
а) $(2a-3b)x^2-6(3b-2a)x+18a-27b$;
б) $(ab+b^2)(a^2+6a)-(a^2+ab)(b^2+6b)$;
в) $(4-y)(4+y)-b(b-2y)$.

2.441*. Найдите значение выражения
$49a^2+4b^2+7a+2b+28ab-12$, если $3{,}5a+b=2{,}5$.

2.442. Вычислите: $(-7{,}5 - 0{,}5) \cdot 4 + 2{,}5 : 0{,}2$.

2.443. Пятую часть числа 20 025 уменьшите на 157 и полученный результат уменьшите в 4 раза. Верно ли, что полученное число является простым?

2.444. Найдите массу одной молекулы кислорода, если масса $3 \cdot 10^{23}$ молекул равна 16 г.

2.445. На координатной плоскости отметьте точки $A(-4; 3)$ и $B(6; 0)$. Найдите координаты точек, симметричных данным точкам относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

Практическая математика

2.446. Под посадку картофеля фермер отвел прямоугольный участок периметром 60 м. Однако, поразмыслив, решил увеличить длину и ширину участка на 1 м. Найдите, какой дополнительный урожай картофеля соберет фермер, если средняя урожайность картофеля 1,6 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$.

2.447. Новоселы решили облицевать плиткой пол кухни, имеющей форму квадрата со стороной a м. Мастер по укладке плитки предложил выделить на полу меньший квадрат со стороной b м и облицевать его обычной плиткой, а оставшуюся часть украсить мозаикой (рис. 8). Мозаику для укладки мастер подготовил на прямоугольном участке длиной $(a + b)$ м и шириной $(a - b)$ м. Хватит ли мастеру мозаики для облицовки пола кухни?

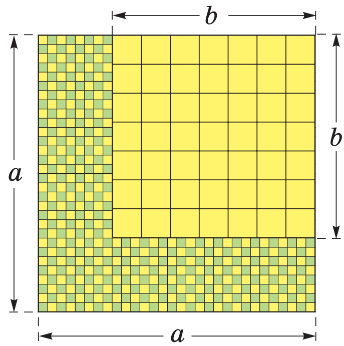


Рис. 8

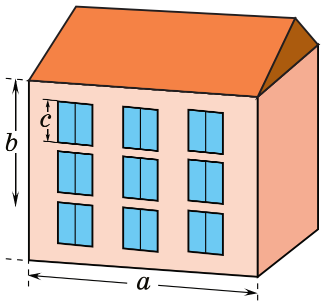


Рис. 9

2.448. Строительная фирма специализируется на утеплении фасадов домов. В связи с увеличением количества заказов технологами фирмы была разработана формула, по которой можно вычислить, сколько квадратных метров утеплителя окажется на фасаде дома длиной a м, высотой b м, если имеется n квадратных оконных проемов размером $c \times c$ м (рис. 9). Составьте такую формулу и подсчитайте, сколько квадратных метров утеплителя пойдет на фасад дома длиной 80 м, высотой 15 м с 50 квадратными оконными проемами размером $1{,}3 \times 1{,}3$ м. Поскольку часть утеплителя идет в отходы, то требуется закупить на 10 % больше материала, чем получено при подсчете по формуле. Достаточно ли будет закупить 1300 м^2 утеплителя, чтобы обшить фасад этого дома?

2.449. Семья решила приобрести дачный участок. Из всех предложенных вариантов глава семьи делает выбор между участком в форме квадрата и участком прямоугольной формы, длина которого больше стороны квадрата на 3 м, а ширина — меньше стороны квадрата на 3 м. Стоимость участков одинакова. Какая покупка окажется более выгодной?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определения одночлена и многочлена;
- уметь применять тождественные преобразования одночленов и многочленов: приведение к стандартному виду, приведение подобных членов, умно-

жение одночленов, умножение одночлена на многочлен и умножение многочленов;

• уметь выполнять деление одночлена на одночлен и многочлена на одночлен;

• знать формулы сокращенного умножения и уметь применять их для сокращенного умножения многочленов и разложения многочленов на множители;

• уметь применять различные способы разложения многочленов на множители;

• уметь применять формулы сокращенного умножения и преобразования многочленов и одночленов для вычисления значений выражений;

• уметь находить область определения выражений с переменными.

Я проверяю свои знания

1. Прочитайте выражения: $2mn$; $x^2 + y^2$; $(3c - d)^2$. Выпишите выражение, являющееся квадратом суммы выражений a и $2b$: а) $a^2 + (2b)^2$; б) $(a + 2b)^2$; в) $(a - 2b)^2$.

2. Какие из выражений называются одночленами? Из предложенных выражений выберите одночлен стандартного вида, коэффициент которого равен 7:
а) $7x + y$; б) ab^7c; в) $7m^4n^9$; г) c^3k^4.

3. Верно ли, что областью определения выражения $(2x^2 + 1) : 3 - 7x$ являются все числа? Выберите число, при котором выражение $(x - 5) : (x + 4)$ не имеет смысла: а) 5; б) 0; в) 4; г) –4.

4. Упростите выражение $-2(1,5a - 3,5) + 2,5a - 7$ и найдите его значение при $a = -2$.

5. Какими способами можно разложить многочлен на множители? Выберите подходящий способ и разложите на множители многочлен:
а) $3m - 7nm$; б) $8x^3 - 12x^6$;

в) $3c + 3c^2 - a - ac$; г) $9c^2 - 49$;
д) $y^2 + 16y + 64$; е) $25a^4 - 30a^2 + 9$.

6. Определите порядок выполнения действий в выражении $(-3a^5b^3)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^5\right) : (0{,}1a^7b^4)^2$. Выполните действия и представьте полученный результат в виде одночлена стандартного вида.

7. Верно ли, что выражения $(m+n)^2$ и $(-m-n)^2$ тождественно равны? Представьте в стандартном виде многочлен, полученный в результате тождественных преобразований выражения

$$(-a+3)^2 - (a+2)(a-2) + a(-6a+5).$$

Определите степень полученного многочлена.

8. Примените комбинацию различных способов и разложите на множители многочлен:
а) $a^2 - b^2 - 4b - 4a$; б) $2x + 2y - x^2 - 2xy - y^2$.

9. Преобразуйте выражение $((2x-6)^2 - (3x+6)^2)^2$ в многочлен стандартного вида. Какова степень полученного многочлена?

10. Найдите значение выражения $64m^2 + n^2 - 16m + 2n - 16mn + 13$, если известно, что $m - 0{,}125n = \frac{7}{8}$.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательская задача 1. а) Известно, что $\left(\frac{1}{a} + a\right)^2 = \frac{1}{a^2} + a^2 + 2$. Пользуясь этим тождеством, найдите $\frac{1}{a^2} + a^2$, если известно, что $\frac{1}{a} - a = 3$.
б) Составьте задачи, идея решения которых содержится в предыдущем задании. Выполните обобщение. в) Сформулируйте обобщенный результат и

составьте задачи на применение этого результата. г) Предложите эти задачи друзьям.

Исследовательская задача 2. а) Разложим на множители многочлен

$$a^4 + 4 = a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a).$$

Придумайте пример на разложение многочлена на множители, в котором можно использовать эту идею. б) Выполните обобщение этого приема и сформулируйте его в виде правила. в) Придумайте примеры на применение этого приема и предложите их друзьям.

Готовимся к олимпиадам

1. Учительница попросила двух семиклассников подготовить раздаточный материал для занятий с пятиклассниками. Один ученик вырезал из бумаги один большой квадрат и четыре одинаковых маленьких квадрата, а другой вырезал четыре одинаковых прямоугольника, у которых длина одной стороны равна стороне большого квадрата, а длина другой стороны равна длине стороны маленького квадрата. Найдите отношение длин сторон прямоугольника, если мальчики использовали одинаковое количество бумаги.

2. Попробуйте решить задачу, предложенную на XIX турнире Архимеда. Рассеянный математик, переселившийся в новый район, забыл номер своей квартиры. Он лишь помнил, что номер двузначный, является разностью квадратов двух чисел, меньшее из которых равно цифре десятков и вдвое больше числа единиц номера квартиры. Можно ли по этим данным восстановить номер квартиры?

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 15. Линейные уравнения с одной переменной

3.1. Найдите значение выражения $-5x+4$ при:

а) $x=-2$; б) $x=0$; в) $x=3{,}2$.

3.2. Упростите выражение $(x+1)^2-2x(1-x)$.

3.3. Вычислите: $\frac{1}{15}-\frac{1}{18}$.

Рассмотрим задачу. В двух вагонах электропоезда 120 пассажиров. Если из первого вагона во второй пересядут 15 человек, то во втором вагоне пассажиров станет в два раза больше, чем было в первом первоначально. Сколько пассажиров было в первом вагоне первоначально?

Обозначим через x количество пассажиров в первом вагоне до пересадки, тогда после пересадки в первом вагоне осталось $(x-15)$ пассажиров, а во втором вагоне стало $(2x)$ пассажиров. По условию в двух вагонах вместе 120 пассажиров, значит, $x-15+2x=120$. Получили равенство с переменной, т. е. **уравнение.** Приведем подобные слагаемые в левой части уравнения и получим $3x-15=120$, или $3x=135$, откуда $x=45$. При подстановке числа 45 в уравнение получим верное равенство: $45-15+2\cdot45=120$. Значит, число 45 является **корнем уравнения.** По условию задачи 45 — это число пассажиров в первом вагоне до пересадки.

Определение Равенство с переменной называется **уравнением.**

Например, $3x - 1 = 2x$; $5(x + 1) - 4x = 6$ — уравнения.

Определение **Корнем уравнения** называется значение переменной, которое обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $2x - 5 = -3x + 10$, так как при подстановке числа 3 в уравнение получается верное числовое равенство: $2 \cdot 3 - 5 = -3 \cdot 3 + 10$; $1 = 1$.

Определение **Решить уравнение** — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Решите уравнение $5x - 2(x - 1) = 8$.

Решение. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой части уравнения: $5x - 2x + 2 = 8$; $3x = 6$; $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение $2{,}5x - 5(0{,}5x - 1) = 9$.

Решение. Выполним тождественные преобразования в левой части уравнения: $2{,}5x - 2{,}5x + 5 = 9$; $0 \cdot x = 4$; $0 = 4$. Получили неверное числовое равенство, значит, уравнение $2{,}5x - 5(0{,}5x - 1) = 9$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Линейные уравнения

Многие задачи приводят к уравнениям вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная.

Определение Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называется **линейным**.

Уравнение $3x = -0{,}9$ является линейным, $a = 3$, $b = -0{,}9$. Решим это уравнение и получим $x = -0{,}3$.

Уравнение $0 \cdot x = -8$ тоже является линейным, $a = 0$, $b = -8$. Заметим, что левая часть этого уравнения при любом значении переменной равна нулю, а правая не равна нулю, значит, уравнение не обращается в верное равенство ни при каком значении переменной, т. е. это уравнение не имеет корней.

Рассмотрим линейное уравнение $0 \cdot x = 0$, где $a = 0$, $b = 0$. Левая часть этого уравнения при любом значении переменной равна нулю, правая часть этого уравнения тоже равна нулю, значит, это уравнение имеет бесконечно много корней.

Таким образом, линейное уравнение с одной переменной $ax = b$ может:

• **иметь единственный корень;**	Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ — корень уравнения.	$-4x = 8$; $x = -2$. *Ответ*: -2.
• **не иметь корней;**	Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b$. Нет корней.	$0 \cdot x = 15$. *Ответ*: нет корней.
• **иметь бесконечно много корней.**	Если $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$. Корнем является любое число.	$0 \cdot x = 0$. *Ответ*: любое число.

Равносильные уравнения

Уравнения $3x - 15 = 120$, $3x = 135$, $x = 45$ имеют один и тот же корень. Такие уравнения называют **равносильными**. Уравнения, которые не имеют корней, тоже называют равносильными.

Определение Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются **равносильными**.

Чтобы получить уравнение, равносильное данному, можно:

• прибавить к обеим частям уравнения одно и то же выражение, что практически означает перенос слагаемого из одной части уравнения в другую с противоположным знаком. Например:

$3x - 2 = 8x + 5;$

$3x - 2 + 2 = 8x + 5 + 2;$

$3x = 8x + 7;$

$15x + 1 = -7x - 6;$

$15x + 7x = -6 - 1.$

• разделить (умножить) обе части уравнения на одно и то же число, не равное нулю. Например:

$5x = -35;$	$\frac{1}{6}x = 7;$
$(5x) : 5 = -35 : 5;$	$\left(\frac{1}{6}x\right) \cdot 6 = 7 \cdot 6;$
$x = -7;$	$x = 42;$

• выполнить тождественные преобразования в левой и правой частях уравнения. Например:

$6x - 2(x + 3) = -(x + 2);$

$6x - 2x - 6 = -x - 2;$

$4x - 6 = -x - 2.$

Решение уравнений, сводящихся к линейным

Чтобы решить уравнение, сводящееся к линейному, можно:

① Раскрыть скобки. ② Привести подобные слагаемые. ③ Перенести слагаемые с переменной в одну часть уравнения, а без переменной — в другую. Поменять знаки перенесенных слагаемых на противоположные! ④ Привести подобные слагаемые. ⑤ Решить полученное линейное уравнение.	Решите уравнение $7(x + 2) - 3(5x + 4) = 3(x + 1) - 23.$ ① $7x + 14 - 15x - 12 = 3x + 3 - 23.$ ② $-8x + 2 = 3x - 20.$ ③ $-8x - 3x = -20 - 2.$ ④ $-11x = -22.$ ⑤ $x = -22 : (-11);$ $x = 2.$ *Ответ*: 2.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $-4(x-3)+2x=1-2(x+1)$;

б) $-(2x-3)-(10x+12)=-2(6x+4)-1$.

Решение.

а) ① $-4x+12+2x=$
$=1-2x-2$;
② $-2x+12=-2x-1$;
③ $-2x+2x=-12-1$;
④ $0\cdot x=-13$.
⑤ *Ответ*: нет корней.

б) ① $-2x+3-10x-12=$
$=-12x-8-1$;
② $-12x-9=-12x-9$;
③ $-12x+12x=-9+9$;
④ $0\cdot x=0$.
⑤ *Ответ*: любое число.

Определение линейного уравнения с одной переменной	
1. Какие из данных уравнений линейные: а) $3x=-12$; б) $7x=0$; в) $x^2=25$; г) $0\cdot x=10$? Решите линейные уравнения.	а) Уравнение $3x=-12$ — линейное, $a=3$, $b=-12$. *Решение*: $x=-12:3$; $x=-4$ — корень уравнения. б) Уравнение $7x=0$ — линейное, $a=7$, $b=0$. *Решение*: $x=0:7$; $x=0$ — корень уравнения. в) Уравнение $x^2=25$ не является линейным, так как содержит переменную во второй степени. г) Уравнение $0\cdot x=10$ — линейное, $a=0$, $b=10$. Уравнение не имеет корней.
Равносильные уравнения	
2. Равносильны ли уравнения: а) $2x+1=0$ и $2x=1$; б) $3x=9$ и $x=3$; в) $4x-2+3x=7$ и $7x=5$; г) $-2x+7=-9$ и $2x=16$; д) $0\cdot x=-13$ и $0\cdot x=27$?	а) Найдем корни первого и второго уравнений: $2x+1=0$; $2x=1$; $2x=-1$; $x=0{,}5$. $x=-0{,}5$. Корни уравнений не совпадают, уравнения не равносильны.

	б) Второе уравнение получено делением обеих частей первого уравнения на 3, уравнения равносильны. в) Первое уравнение с помощью приведения подобных слагаемых и переноса слагаемых приводится к виду: $7x = 9$. Уравнения не равносильны. г) Второе уравнение получено из первого переносом слагаемого из левой части в правую и умножением обеих частей уравнения на (–1). Уравнения равносильны. д) Уравнения не имеют корней, значит, равносильны.
Решение уравнений, сводящихся к линейным	
3. Решите уравнение $8(3x - 4) = 4 - (x + 6)$.	① $24x - 32 = 4 - x - 6$; ② $24x - 32 = -x - 2$; ③ $24x + x = -2 + 32$; ④ $25x = 30$; ⑤ $x = 30 : 25$; $x = 1,2$. *Ответ*: 1,2.
4. Решите уравнение $\frac{5x-1}{3} - \frac{4x+3}{6} = 2x$.	Умножим обе части уравнения на 6: $6 \cdot \frac{5x-1}{3} - 6 \cdot \frac{4x+3}{6} = 6 \cdot 2x$. Получим: $2(5x - 1) - (4x + 3) = 12x$. Решим полученное уравнение: $10x - 2 - 4x - 3 = 12x$; $10x - 4x - 12x = 2 + 3$; $-6x = 5$; $x = -\frac{5}{6}$. *Ответ*: $-\frac{5}{6}$.

1. Найдите ошибку в предложении: «Уравнения, имеющие одинаковые корни, называются равносильными».
2. Некоторое уравнение имеет один корень. Обе части этого уравнения умножили на 3, а затем к обеим частям прибавили 5, получили новое уравнение. Можно ли определить, сколько корней имеет полученное уравнение?

3.4. Проверьте, является ли число –3 корнем уравнения:

а) $-3x = 1$; б) $2x - 7 = -13$;

в) $\frac{1}{3}x = -1$; г) $5(x - 2) + 1 = 4x$.

3.5. Покажите, что число 10 не является корнем уравнения:

а) $0,02x = 0,002$; б) $8,9x + 8,9 = 98,9$;

в) $\frac{x}{5} = 50$; г) $-x - 9x = -90$.

3.6. Какое из чисел 5; 2,1; –8; $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $5x + 57 = -4x - 15$?

3.7. Составьте уравнение вида $ax = b$, корнем которого является число: а) 4; б) –1; в) 0; г) $\frac{2}{7}$.

3.8. Определите, какие уравнения являются линейными. Для линейных уравнений назовите a и b:

а) $2x = -7$; б) $8x^2 = 1$; в) $-x = 9,1$;

г) $0,2x = 3$; д) $\frac{x}{3} = 8$; е) $-5x^3 = 1$;

ж) $0x = 12$; з) $3x = 0$; и) $0x = 0$.

3.9. Придумайте по два примера линейных уравнений, для которых числа a и b являются:

а) противоположными; б) взаимно обратными.

3.10. Равносильны ли уравнения:

а) $3x - 4 = 0$ и $3x = 4$;

б) $-5x = 35$ и $x = -7$;
в) $0,1x = 9$ и $x = 0,9$?

3.11. Из данных уравнений выберите уравнения, равносильные уравнению $x - 2 = 3 - 2x$:

а) $2 - x = 2x - 3$; б) $5(x - 2) = 5(3 - 2x)$;
в) $\frac{x-2}{4} = \frac{3-2x}{4}$; г) $x - 2x = 3 - 2$.

Придумайте еще два примера уравнений, равносильных данному.

3.12. Решите линейное уравнение:

а) $-5x = 45$; б) $24x = 8$; в) $-x = 2,8$;
г) $-4x = 1$; д) $-7x = -\frac{1}{8}$; е) $0,5x = -9$;
ж) $\frac{2}{7}x = \frac{8}{9}$; з) $-0,6x = \frac{1}{3}$; и) $-8x = 0$;
к) $\frac{x}{7} = 5$; л) $3,5x = 2\frac{1}{3}$; м) $1,6x = -0,64$.

3.13. Придумайте линейное уравнение, корнями которого являются любые числа.

3.14. Из данных уравнений выпишите уравнения, не имеющие корней:

а) $8x = 0$; б) $0x = -2$; в) $-3x = 1$;
г) $0x = \frac{1}{3}$; д) $0x = 0$; е) $0,2x = 0$.

Придумайте еще два примера линейных уравнений, не имеющих корней.

3.15. Решите уравнение:

а) $7x - 21 = 0$; б) $10x + 36 = 0$;
в) $8 - x = 0$; г) $15 - 3x = 0$;
д) $9x - 1 = 17$; е) $-3x + 22 = 19$;
ж) $7 - 2x = 8$; з) $-12 - 0,3x = 9$.

3.16. При каком значении переменной значение выражения $8 - 0,1x$ равно: а) -1; б) 0; в) 8?

3.17. Решите уравнение:

а) $6x - 11 = 4x - 7$; б) $7 - x = 4 + 4x$;
в) $0{,}7x + 1 = 0{,}4x - 5$; г) $6x - 10{,}3 = -2x - 0{,}3$.

3.18. Найдите, при каком значении переменной равны значения выражений:

а) $1{,}8x - 5$ и $0{,}6x + 1$; б) $0{,}5x - 3$ и $0{,}8 - 1{,}4x$.

3.19. Решите уравнение, используя алгоритм:

а) $3x - (x - 14) = 5$; б) $18 - (6x + 5) = 4 - 7x$;
в) $(7x - 3) - (3x + 4) = 6$;
г) $(4x + 15) - (15 - 3x) = 120 - x$.

3.20. Найдите значение переменной, при котором:

а) разность значений двучленов $5 - \frac{1}{3}x$ и $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ равна нулю; б) значение выражения $0{,}6x - 13$ на 21 меньше значения выражения $\frac{3}{5}x + 8$.

3.21. Решите уравнение:

а) $4x + 5 = 6 + 5(x - 3)$;
б) $19x - (3x - 4) = 4(5x - 1)$;
в) $2(x - 1) - 4 = 6(x + 2)$;
г) $3(x - 2) - 5(x + 1) = -8x$;
д) $4(x + 1) = 15x - 7(2x + 5)$;
е) $5x + 8 + 2(6 - x) = 1 - 3(2x - 3)$;
ж) $3\left(2x - \frac{1}{3}\right) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4x$.

3.22. Найдите корень уравнения:

а) $4(0{,}25x - 6) = 8(0{,}125x + 3) + x$;
б) $0{,}5(6x - 0{,}8) = \frac{1}{6}\left(3x + 4{,}2\right)$.

3.23. Найдите (если это возможно) значение переменной, при котором:

а) значение двучлена $10y + 18$ в два раза больше значения двучлена $5y + 1$;

б) разность выражений $0{,}7(2x - 3)$ и $1{,}3(6 - 5x)$ равна $1{,}95$.

3.24. Умножьте обе части уравнения на одно и то же число и решите его:

а) $\frac{1}{3}(2x + 1) - \frac{1}{2}(2 - 3x) = x$;

б) $\frac{2}{3}(2x - 1) - \frac{3}{4}(x + 6) = 1\frac{1}{2}$.

3.25. Решите уравнение:

а) $\frac{x + 3}{4} - \frac{x}{2} = 3$;

б) $\frac{2x}{5} - \frac{x - 3}{2} = 1$;

в) $\frac{x - 4}{3} - \frac{x + 1}{2} = 3$;

г) $\frac{2x}{3} - \frac{2x + 1}{6} = \frac{3x - 5}{4}$;

д) $\frac{1 - 2x}{3} - \frac{x + 3}{4} = \frac{2 - 4x}{5}$;

е) $\frac{3 + 4x}{2} + 6 = \frac{2x - 3}{2} - \frac{1 - 5x}{7}$.

3.26. Покажите, что любое число является корнем уравнения $\frac{3y - 3}{4} - 1 = \frac{6y - 14}{8}$.

3.27. Покажите, что уравнение $\frac{5 + 3x}{4} - \frac{5x + 2}{12} = \frac{x - 1}{3}$ не имеет корней.

3.28. Найдите значение переменной, при котором:

а) сумма значений выражений $\frac{m - 4}{5}$ и $\frac{2m - 41}{9}$ равна 9; б) значение выражения $\frac{6n + 7}{7}$ на 3 больше значения выражения $\frac{5n - 3}{8}$.

3.29. Выполните тождественные преобразования в левой и правой частях уравнения и решите его:

а) $(3 - x)(x + 3) = x(1 - x)$;

б) $(x - 3)(x + 4) = x(x + 1) - 12$;

в) $8 - (x - 1)(x + 2) = (2 - x)(x + 1)$.

3.30. Найдите значение переменной, при котором сумма значений выражений $(6-x)(x+2)$ и $x(x-3)$ равна 12.

3.31. Примените формулы квадрата суммы и квадрата разности и решите уравнение:

а) $(8x-3)(2x+1)=(4x-1)^2$;

б) $(x+4)^2-x(x+1)=2$;

в) $(2x+3)^2-4(1-x)^2=1$;

г) $6x-(x+3)^2=4x-(x+2)^2-5$.

3.32. Примените формулы сокращенного умножения и решите уравнение:

а) $16x^2-(4x-1)(4x+1)+2x=7$;

б) $(2x-5)^2-(2x-3)(2x+3)=0$;

в) $(3x+2)^2+(4x-1)(4x+1)=(5x-1)^2$;

г) $(3x-1)^2-8(x+1)^2=(x+2)(x-2)$.

3.33. Решите уравнение

$$\frac{(x+1)^2}{6}+\frac{(x-1)^2}{12}-\frac{x^2-1}{4}=1.$$

3.34*. Найдите, при каком значении a уравнение $ax-1=2x$: а) не имеет корней; б) имеет единственный корень.

3.35*. Определите, при каком значении a уравнения $5x-1=2a-2$ и $3x+2=a+5$ равносильны.

3.36. Проверьте, является ли число 8 корнем уравнения:

а) $-8x=64$; б) $0{,}125\cdot x-1=0$;

в) $7x-13=x+35$; г) $8(x-4)+3=8x$.

3.37. Равносильны ли уравнения:

а) $8x+2=5$ и $8x=3$; б) $1{,}3x=-4$ и $13x=-0{,}4$;

в) $2x + 4 = -3x + 6$ и $2x + 3x = 6 - 4$;
г) $15x = -55$ и $3x = -11$?

3.38. Решите линейное уравнение:

а) $-6x = 18$; б) $15x = 5$; в) $-x = -3{,}4$;
г) $-6x = \frac{2}{7}$; д) $3x = 0$; е) $-1{,}2x = 24$;
ж) $-1\frac{2}{3}x = -2\frac{1}{3}$; з) $\frac{x}{9} = -2$; и) $-0{,}1x = \frac{2}{15}$.

3.39. Приведите пример линейного уравнения, не имеющего корней.

3.40. Из данных уравнений выберите уравнения, имеющие единственный корень:

а) $0x = 0$; б) $-x = 4$; в) $0x = 1$;
г) $5x = \frac{1}{3}$; д) $0x = -9$; е) $\frac{1}{7}x = 0$.

Придумайте еще два примера линейных уравнений, имеющих единственный корень.

3.41. Решите уравнение:

а) $5x + 50 = 0$; б) $13 - 2x = 0$;
в) $7x - 2 = 10$; г) $32 - 5x = 6$.

3.42. Решите уравнение:

а) $5x - 9 = 2x - 6$; б) $-x + 6 = 14 + 3x$;
в) $7x - 9{,}7 = -3x - 1{,}7$; г) $1{,}3x - 4 = 2{,}6x + 9$.

3.43. При каком значении переменной равны значения двучленов $1{,}7 - 0{,}3x$ и $1{,}7x + 2$?

3.44. Решите уравнение:

а) $15 - (6x - 3) = 5 - 7x$; б) $10 - 2x = x - (2 - 4x)$.

3.45. Найдите, при каком значении переменной:

а) значение выражения $17x - 2$ на 9 меньше значения выражения $18x + 5$; б) разность значений выражений $\frac{2}{3}x - 4$ и $\frac{1}{2}x - 3$ равна 1.

3.46. Найдите корень уравнения:

а) $3x - 2 = 2(x + 1) - 4$;
б) $10x - (2x - 4) = 4(3x - 2)$;
в) $3(x + 1) - 9 = 6(x + 2)$;
г) $5(x - 1) - 3(x + 2) = -5x$;
д) $5(x - 3) = 14 - 2(7 - 2x)$;
е) $4x + 6 - 3(x + 1) = 5 - 2(x - 3)$.

3.47. Решите уравнение:

а) $16(0{,}25x - 1) = 5(0{,}8x - 3{,}2)$;
б) $0{,}8(0{,}5x + 1{,}5) = \frac{2}{7}(1{,}4x + 8{,}4)$.

3.48. Найдите, при каком значении переменной значение выражения $5y - 6$ в три раза меньше значения выражения $8y + 3$.

3.49. Решите уравнение:

а) $\frac{x - 2}{6} - \frac{x}{2} = 2$;
б) $\frac{x - 2}{5} - \frac{x - 1}{3} = 3$;
в) $\frac{3 - x}{3} - \frac{x + 1}{2} = \frac{5x}{4}$;
г) $\frac{2x + 3}{2} = \frac{x + 2}{3} - \frac{1 - x}{4}$.

3.50. Найдите, при каком значении переменной значение выражения $\frac{x + 17}{5}$ на 2 меньше значения выражения $\frac{3x - 7}{4}$.

3.51. Выполните тождественные преобразования в левой и правой частях уравнения и решите его:

а) $(2 - x)(x + 2) = x(3 - x)$;
б) $x(x - 2) - 8 = (x + 2)(x - 4)$;
в) $2(x + 3)(x - 2) - 7 = (2x + 1)(x - 3)$;
г) $13x(6x - 1) - 6x(13x - 9) = -13 - 24x$.

3.52. Найдите значение переменной, при котором разность значений выражений $(1 - 2m)(1 - 3m)$ и $m(6m - 1)$ равна -1.

3.53. Примените формулы квадрата суммы и квадрата разности и решите уравнение:

а) $(4x - 5)(x + 3) = (2x - 3)^2$;

б) $(x - 5)^2 - x(x + 2) = 1$;

в) $(2x + 5)^2 - 4(1 + x)^2 = 3$;

г) $6x + (x - 3)^2 = 4x + (x - 2)^2 - 5$.

3.54. Примените формулы сокращенного умножения и решите уравнение:

а) $4x^2 - (2x + 3)(2x - 3) - 5x = 14$;

б) $(4x - 3)(4x + 3) - (4x - 1)^2 = 3x$;

в) $(3x - 1)^2 + (4x + 2)^2 = (5x - 1)(5x + 1)$;

г) $(2x + 1)^2 - 3(x - 5)^2 = (3 + x)(x - 3)$.

3.55*. Определите, при каком значении a уравнение $ax + 3 = x + 3$ имеет бесконечно много корней.

3.56*. Определите, при каком значении a уравнения $2x + 1 = a + 5$ и $3x - 7 = 2a - 2$ равносильны.

3.57. Найдите значение выражения:

а) $85,75 : 0,7$; б) $33,6 : 1,5$.

3.58. На координатной плоскости отмечены точки A, B, C, D и E (рис. 10). Назовите точки, абсцисса которых равна –2.

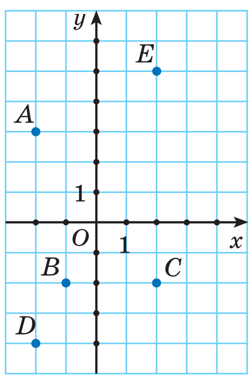


Рис. 10

3.59. Вычислите:

$$\left(5\frac{1}{3} : 2,4 - 2\right) \cdot 2\frac{2}{5} - 4,8.$$

3.60. Запишите три различных способа представления степенью с показателем, большим 1, числа:

а) 3^{45}; б) 3^{18}.

3.61. В Беларуси около 9,35 млн жителей. Городское население составляет 78 % всех жителей, из них 18 % — дети до 16 лет. Сколько детей до 16 лет среди горожан?

3.62. Поезд должен проехать 1800 км за 24 ч. Оказалось, что 52 % пути он преодолел за 12 ч. Найдите, с какой скоростью ему надо двигаться дальше, чтобы прибыть в пункт назначения по расписанию.

3.63. Разложите многочлен на множители $3a + 3a^2 - b - ab$.

3.64. В книге 150 страниц. В пятницу семиклассник начал ее читать и прочитал b страниц, в субботу — на 30 страниц меньше, чем в пятницу. Сколько страниц осталось прочитать семикласснику?

3.65. Дизельный генератор марки A потребляет 8 л топлива за 15 ч, а марки B — 4 л за 7 ч. Генератор какой марки выгоднее выбрать, если все остальные их характеристики одинаковы?

3.66. Масса атмосферы Земли приближенно равна $5{,}15 \cdot 10^{15}$ т. Кислород составляет около 20 % массы атмосферы. Сколько тонн кислорода в атмосфере Земли?

§ 16. Решение текстовых задач с помощью линейных уравнений

3.67. Найдите число, если: а) в 4 раза большее число равно 48; б) в 2 раза меньшее число равно 10; в) на 15 большее число равно 59; г) на 12 меньшее число равно 34.

3.68. Решите уравнение:

а) $5x - (x - 20) = 8$; б) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

3.69. Найдите 25 % от 0,32.

Рассмотрим задачу. В мотке было несколько метров кабеля. После того как от мотка отрезали 6 м кабеля, в нем осталось в три раза меньше кабеля, чем было. Сколько метров кабеля было в мотке?

Выполним анализ условия задачи и решим ее с помощью линейного уравнения.

1. Выясним, о каких величинах идет речь в задаче. 2. Выясним, какие значения величин и зависимости между ними известны. 3. Выясним, значения каких величин неизвестны. 4. Обозначим одну неизвестную величину через x (лучше меньшую), а остальные выразим через x и зависимости между величинами. 5. Используя зависимость между известными и неизвестными значениями величин, составим уравнение. Полученное уравнение будет математической моделью процесса, описанного в условии задачи. 6. Решим линейное уравнение и запишем ответ в соответствии с требованием задачи.	1. В задаче говорится о количестве метров кабеля. 2. Отрезали 6 м кабеля, осталось в 3 раза меньше, чем было. 3. Неизвестно количество метров кабеля, которое было первоначально в мотке и которое осталось. 4. Пусть x м кабеля осталось, тогда $(3x)$ м кабеля было первоначально, значит, $(3x - x)$ м кабеля отрезали от мотка. 5. Так как отрезали 6 м кабеля, то разность $3x$ и x равна шести. Получим уравнение $3x - x = 6$. 6. Решим полученное линейное уравнение: $3x - x = 6,\ 2x = 6,\ x = 3.$ Получили, что $x = 3$ (м) кабеля осталось, значит, $3 \cdot 3 = 9$ (м) кабеля было в мотке. *Ответ*: 9 м.

Для решения задач с помощью уравнений можно выполнить следующую последовательность действий:

① Выяснить, о каких величинах и зависимостях между ними идет речь в задаче.

② Выяснить, какие значения величин и зависимости между ними известны.

③ Выяснить, какие значения величин и зависимости не известны.

④ Обозначить одно неизвестное значение через x, а остальные выразить через x, используя зависимости между величинами.

⑤ Составить уравнение, используя зависимости между известными и неизвестными значениями величин.

⑥ Найти неизвестное значение величины x, решив уравнение. Записать ответ в соответствии с требованием задачи.

Для решения задачи с помощью уравнения можно использовать различные модели условия задачи. Например, таблицы, рисунки, схемы.

Решение практических задач с помощью линейных уравнений

Задача 1. За 5 ч до наступления Нового года на елке было в 5 раз меньше игрушек, чем в коробке. В последующие полчаса елка была украшена еще 15 игрушками, и игрушек на елке стало на 2 меньше, чем в коробке. Сколько игрушек было на елке за 5 ч до наступления Нового года?

Решение: ① В задаче речь идет о количестве игрушек для украшения елки.

② Известна зависимость между количеством игрушек на елке и в коробке, еще известно, сколько игрушек повесили на елку за полчаса.

③ Неизвестно, сколько игрушек было на елке и в коробке.

Можно составить таблицу, которая моделирует условие задачи.

Количество игрушек	За 5 ч до Нового года	В последующие полчаса	Через полчаса
На елке	В 5 раз меньше, чем в коробке	+15	На 2 меньше, чем в коробке
В коробке	В 5 раз больше, чем на елке	–15	На 2 больше, чем на елке

④ Обозначим через x количество игрушек на елке за 5 ч до Нового года, тогда в это время в коробке было $(5x)$ игрушек. В последующие полчаса на елке стало $(x+15)$ игрушек, а в коробке $(5x-15)$ игрушек.

⑤ По условию задачи $(x+15)$ на 2 меньше, чем $(5x-15)$. Значит, $(5x-15)-(x+15)=2$.

Решим полученное уравнение: $5x-15-x-15=2$; $4x=32$; $x=8$.

⑥ За 5 ч до наступления Нового года на елке было 8 игрушек.

Ответ: 8 игрушек.

Задача 2. Протяженность шоссе между городами A и B равна 18 км. Из города A в город B выехал велосипедист. В то же время навстречу ему из города B в город A вышел пешеход. Их встреча произошла через 36 мин после начала движения. Найдите скорости пешехода и велосипедиста при условии, что пешеход на путь между городами A и B затратил время, в 5 раз большее, чем велосипедист.

Решение: ① В задаче речь идет о процессе движения.

② Составим таблицу для описания известных и неизвестных значений величин.

Процесс движения	Скорость, $\frac{км}{ч}$	Время, ч	Расстояние, км
Пешехода и велосипедиста навстречу друг другу	$v_1 + v_2$	36 мин $= \frac{3}{5}$ ч	18
Пешехода	v_1 в 5 раз меньше, чем v_2	t_1 в 5 раз больше, чем t_2	18
Велосипедиста	v_2	t_2	18

③ Так как известно, что один и тот же путь пешеход пройдет за время, в 5 раз большее, чем велосипедист, то его скорость в 5 раз меньше, чем скорость велосипедиста.

④ Обозначим скорость пешехода через x $\frac{км}{ч}$, тогда скорость велосипедиста — $(5x)$ $\frac{км}{ч}$. Скорость их сближения равна $(5x + x)$ $\frac{км}{ч}$, а пройденный путь за $\frac{3}{5}$ ч равен $(5x + x) \cdot \frac{3}{5}$ км.

⑤ По условию задачи путь, пройденный велосипедистом и пешеходом вместе, равен 18 км, так как протяженность шоссе между городами равна 18 км. Составим уравнение $(5x + x) \cdot \frac{3}{5} = 18.$ Решим его: $6x = 30,$ $x = 5.$ Следовательно, скорость пешехода равна 5 $\frac{км}{ч}$.

⑥ Скорость велосипедиста $5 \cdot 5 = 25$ $\left(\frac{км}{ч}\right)$.

Ответ: 5 $\frac{км}{ч}$, 25 $\frac{км}{ч}$.

Задача 3*. Два маляра, работая вдвоем одновременно, покрасили стену площадью 200 м^2 за 10 ч. Известно, что за одно и то же время первый маляр красит площадь, на 50 % большую, чем второй. За какое время эту стену покрасил бы первый маляр, работая в одиночку?

Решение: ① В задаче речь идет о процессе работы.

② Составим таблицу для описания известных и неизвестных значений величин.

Процесс работы	Скорость, $\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}$	Время, ч	Результат, м^2
Двух маляров	$v_1 + v_2$	10	200
Первого маляра	v_1 в 1,5 раза больше, чем v_2	t_1 — ?	200
Второго маляра	v_2	t_2 — ?	200

③ Так как известно, что за одно и то же время первый маляр красит площадь, на 50 % большую, чем второй, то скорость его работы в 1,5 раза больше скорости работы второго маляра.

④ Обозначим скорость работы второго маляра через x $\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}$, тогда скорость работы первого — $(1{,}5x)$ $\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}$, скорость их совместной работы — $(1{,}5x + x)$ $\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}$, а выполненная работа за 10 ч равна $10 \cdot (1{,}5x + x)$ м^2.

⑤ Составим уравнение $10(1{,}5x + x) = 200$. Решим его: $2{,}5x = 20$, $x = 8$. Следовательно, скорость работы второго маляра равна 8 $\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}$.

⑥ Скорость работы первого маляра $1{,}5 \cdot 8 = 12 \left(\frac{\text{м}^2}{\text{ч}}\right)$. Значит, всю стену он покрасил бы за $200 : 12 = 16\frac{2}{3}$ (ч).

Ответ: $16\frac{2}{3}$ ч.

1. О каких величинах может идти речь в задаче?
2. Если одно число в n раз больше другого, то как составить математическую модель этой зависимости?
3. Если одно число на b больше другого, то как составить математическую модель этой зависимости?

Составьте математическую модель для решения задачи и найдите ответ в соответствии с требованием задачи.

3.70. Одно из чисел на 8 меньше другого, их сумма равна 100. Найдите эти числа.

3.71. Одно из чисел больше другого в 3 раза, их сумма равна 20. Найдите эти числа.

3.72. В первом вагоне метро пассажиров в 3 раза больше, чем во втором. Когда из первого вагона вышли 30 человек, а во второй зашли 10 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?

3.73. В двух амбарах сложено зерно. Во втором зерна в 3 раза меньше, чем в первом. После того как из первого амбара взяли 20 т зерна, а во второй добавили 20 т, оказалось, что масса зерна во втором амбаре равна $\frac{5}{7}$ массы зерна, оставшегося в первом. Сколько тонн зерна было первоначально во втором амбаре?

3.74. На первом складе было 230 банок с краской, а на втором — 321 такая же банка. С первого склада отпускали ежедневно по 30 банок краски, а со второго — по 39 банок. Через сколько дней на втором складе будет в полтора раза больше банок краски, чем на первом?

3.75. Сколько килограммов макулатуры сдал 7 А класс, если 7 Б сдал на 25 кг меньше, чем 7 А, 7 В — в 2 раза больше, чем 7 А, а все вместе три седьмых класса сдали 327 кг макулатуры?

3.76. В фермерском хозяйстве собрали урожай перца, кабачков и баклажанов — всего 425 кг овощей. Найдите, сколько килограммов баклажанов собрали, если известно, что их собрано на 65 кг больше, чем перца, и в 3 раза меньше, чем кабачков.

3.77. Студент решил прочитать книгу, в которой 190 страниц, за три дня. В пятницу он прочитал в 1,2 раза страниц меньше, чем в субботу, а в субботу на 20 страниц меньше, чем в воскресенье. Сколько страниц студент прочитал в субботу?

3.78. Турист проходит путь от пункта A до пункта B за 5 ч. Если бы его скорость была на 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше, то он прошел бы этот путь за 4 ч. Найдите скорость туриста.

3.79. Лыжник предполагал преодолеть путь за 2 ч, но увеличил намеченную скорость на 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и затратил на этот путь $1\frac{2}{3}$ ч. Найдите длину пути.

3.80. Длина пути, преодоленного велосипедистом за 2 ч, на 4 км меньше длины пути, пройденного пешеходом за 6 ч. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что она на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости пешехода.

3.81. Два брата едут на велосипедах с одинаковой скоростью. Если старший брат увеличит скорость на 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а младший — уменьшит на 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то старший брат за 3 ч проедет на 6 км больше, чем младший за 4 ч. С какой скоростью едут братья?

3.82. Найдите скорость грузовика, если за 2 ч он проезжает на 20 км больше, чем автобус за 1 ч, а скорость автобуса в 1,5 раза больше скорости грузовика.

3.83. На путь между двумя селами пешеход затратил на 5 ч больше, чем велосипедист. Скорость велосипедиста 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, скорость пешехода составляет 25 % скорости велосипедиста. Найдите длину дороги между селами.

3.84. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 10 км, со скоростью 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ вышел пешеход, а через полчаса из пункта A в пункт B по той же дороге со скоростью 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ выехал велосипедист. Сколько километров осталось идти пешеходу до пункта B после того, как его догнал велосипедист?

3.85. За 6 ч по течению реки катер проходит такой же путь, какой за 9 ч — против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера равна 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.86. За 6 ч по озеру и 3 ч вниз по течению реки теплоход проходит 153 км. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.87. Расстояние между двумя базами при попутном ветре вертолет преодолевает за 45 мин, а при встречном — за 1 ч. Найдите это расстояние, если скорость ветра 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.88. Теплоход прошел расстояние между пунктами A и B по течению реки за 4 ч 30 мин, а обратно — за 6 ч 18 мин. Найдите расстояние между пунктами A и B, если собственная скорость теплохода равна 14,4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.89. Заказ на станки завод выполнил за 18 дней вместо планируемых 20, так как выпускал ежедневно по 2 станка сверх плана. Сколько станков выпустил завод?

3.90. На изготовление одной детали мастер затрачивает в полтора раза меньше времени, чем практикант. Сколько деталей мастер изготовит за 4 ч, если за это время практикант изготовит на 12 деталей меньше?

3.91. За 5 ч работы один оператор колл-центра сделал на 20 звонков больше другого, так как делал на 20 % звонков в час больше. Сколько звонков было сделано за один час работы двумя операторами колл-центра?

3.92. В книге три главы. Число страниц второй главы книги составляет 36 % числа страниц первой главы, а число страниц третьей главы составляет $\frac{2}{3}$ числа страниц второй главы. Сколько страниц занимает вторая глава, если в книге 480 страниц?

3.93. Ученик покупает каждый месяц тетрадь и карандаш. После того как цена тетради выросла на 15 %, а карандаша — на 5 %, суммарная стоимость покупки выросла на 13 %. Найдите, сколько стоила тетрадь, если карандаш стоил 60 к.

3.94. Торговой сети принадлежат овощной магазин и кондитерская. Совместная выручка овощного магазина и кондитерской составляет 500 р. в день. После расширения торговых площадей дневная выручка овощного магазина увеличилась на 30 %, а кондитерской — на 20 %, и их совместная дневная выручка стала равна 630 р. Найдите первоначальную дневную выручку овощного магазина.

3.95. По плану бригада должна была собрать 240 ц яблок. После двух дней работы бригадир заметил, что 80 % собранного урожая яблок в 2,5 раза меньше того, что осталось собрать. Найдите, за сколько дней бригада выполнит план.

3.96. Одна из сторон треугольника на 2 см меньше другой и в 2 раза меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 22 см.

3.97. Найдите площадь прямоугольника, зная, что при увеличении его ширины на 5 см получается квадрат, площадь которого больше площади прямоугольника на 40 см^2.

3.98. Найдите три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 81.

3.99. Найдите три последовательных натуральных числа, зная, что квадрат наименьшего из них на 20 меньше произведения двух других чисел.

3.100. Произведение двух последовательных целых чисел на 38 меньше произведения следующих двух последовательных целых чисел. Найдите эти числа.

3.101. Можно ли разменять 1 р. на монеты по 5 к. и 2 к. так, чтобы всего было:

а) 32 монеты; б) 27 монет?

3.102*. Первая труба наполняет бассейн за 50 % того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба наполняет бассейн на 5 ч дольше первой. За сколько часов наполняет бассейн каждая труба?

3.103*. Заболевшего программиста заменили два стажера. Одному из них на выполнение всей работы нужно в 3 раза больше времени, чем программисту, а другому — в 2 раза больше. За сколько часов программист сделал бы всю работу, если два стажера, работая вместе, выполнили ее за 6 ч?

3.104*. Автобус прошел $\frac{3}{4}$ пути со скоростью 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а затем задержался на 2 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, оставшуюся часть пути он шел со скоростью 70 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите путь, пройденный автобусом.

3.105*. Из пункта *A* в пункт *B* выехал велосипедист со скоростью 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Он проехал 30 км, когда из пункта *A* со скоростью 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ выехал второй велосипедист, который прибыл в пункт *B* на 20 мин позже первого. Найдите расстояние между пунктами *A* и *B*.

3.106*. Известно, что за 1 ч первый маляр красит площадь, на 10 % меньшую, чем второй, а третий — на 10 % большую, чем второй маляр. Втроем, работая одновременно, маляры покрасили стену площадью 300 м^2 за 10 ч. За сколько часов покрасил бы эту стену второй маляр, работая отдельно?

3.107*. Одно из двух чисел оканчивается нулем. Если нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа, если их сумма равна 363.

3.108*. Если к двузначному числу приписать справа и слева по 1, то оно увеличится в 21 раз. Найдите это число.

3.109*. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если цифру 2 перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первого. Найдите первоначальное число.

Составьте математическую модель для решения задачи и найдите ответ в соответствии с требованием задачи.

3.110. Найдите два числа, одно из которых на 6 больше другого, если их сумма равна 38.

3.111. Найдите два числа, одно из которых в 4 раза меньше другого, если их разность равна 36.

3.112. На первом складе было в 2 раза больше угля, чем на втором. Из первого склада вывезли 75 т угля, а на второй склад привезли 35 т, после чего на двух складах угля стало поровну. Сколько тонн угля было первоначально на каждом складе?

3.113. В магазине канцелярских товаров на верхней полке находилось 100 тетрадей, а на нижней — 75. Когда на нижнюю полку положили на 25 тетрадей меньше, чем на верхнюю, на верхней полке стало в 1,5 раза больше тетрадей, чем на нижней. Сколько тетрадей положили на каждую полку?

3.114. За ручку, карандаш и циркуль покупатель заплатил 5 р. 30 к. Известно, что ручка в 4 раза дороже карандаша и на 1 р. 70 к. дешевле циркуля. Сколько стоил карандаш?

3.115. Автомобиль проезжает путь из города A в город B за 3 ч. Если бы он ехал со скоростью, на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньшей, то затратил бы на этот же путь 4 ч. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

3.116. Расстояние между городами поезд проходит за 3 ч 15 мин. Если скорость поезда увеличится на 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то это расстояние он пройдет за 2 ч 30 мин. Найдите расстояние между городами.

3.117. Два спортсмена бегут с одинаковой скоростью. Если первый из них уменьшит скорость на 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второй увеличит на 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то первый спортсмен за 2 ч пробежит на 7 км больше, чем второй за 1 ч. С какой скоростью бегут спортсмены?

3.118. Путь от поселка до города велосипедист проехал за 2 ч, а пешеход прошел за время, в 1,5 раза большее. Скорость велосипедиста на 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости пешехода. Найдите скорость велосипедиста и длину пути от поселка до города.

3.119. Теплоход проходит за 18 ч против течения реки такой же путь, какой за 12 ч по течению. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость теплохода равна 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.120. За 7 ч при движении вверх против течения реки и 2 ч по озеру катер проходит 103 км. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.121. При попутном ветре за 2 ч 45 мин самолет пролетит такое же расстояние, какое в обратном направлении за 3 ч при условии, что ни скорость, ни направление ветра не меняются. Найдите расстояние, которое пролетит самолет туда и обратно, если собственная скорость самолета равна 805 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.122. Две бригады цветоводов высаживали на клумбах города цветы. Одна бригада работала в полтора раза быстрее другой, поэтому к концу рабочего дня высадила на 200 цветов больше. Сколько цветов высадили две бригады за этот день?

3.123. Два курьера за день доставили 340 рекламных буклетов. Первый курьер доставил на 30 % буклетов меньше, чем второй. Сколько буклетов доставил первый курьер?

3.124. В трех ящиках находится 32 кг фруктов. Масса фруктов во втором ящике составляет 35 % массы фруктов, находящихся в первом ящике, а масса фруктов в третьем ящике составляет $\frac{5}{7}$ массы фруктов, находящихся во втором ящике. Сколько килограммов фруктов во втором ящике?

3.125. На двух заводах работало 6400 человек. После расширения производства число рабочих мест на первом заводе увеличилось на 20 %, а на втором — на 15 %. Сколько рабочих мест добавилось на первом заводе, если на двух заводах теперь работает 7440 человек?

3.126. Одна из сторон треугольника на 6 см меньше другой и на 9 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 33 см.

3.127. Найдите площадь прямоугольника, если при уменьшении его длины на 4 см получается квадрат, площадь которого меньше площади прямоугольника на 12 см^2.

3.128. У каких двух последовательных целых чисел разность их квадратов равна 49?

3.129. Найдите три последовательных натуральных числа, если произведение двух меньших чисел меньше произведения двух больших на 14.

3.130. Найдите значение выражения:

а) $6\frac{4}{77} : (-2)$; б) $-5\frac{3}{43} \cdot 3$;

в) $3\frac{1}{8} - 5{,}125$; г) $5\frac{2}{7} : \left(-\frac{1}{7}\right)$.

3.131. На координатной плоскости отметьте точки $A(4;\ 2)$, $B(4;\ 6)$, $C(4;\ 4)$ и $D(8;\ 2)$. Найдите координаты общей точки отрезков AB и CD.

3.132. Найдите значение выражения $\frac{6^{14} \cdot 4^{12}}{3^{12} \cdot 8^{12}}$.

3.133. На координатной прямой отмечено число a (рис. 11). Расположите в порядке возрастания числа a; $\frac{1}{a}$ и a^2.

Рис. 11

3.134. Разложите многочлен $1 - x^2 + 2xy - y^2$ на множители.

3.135. Найдите сумму всех делителей числа 24.

§ 17. Числовые неравенства

3.136. На координатной прямой отмечены точки D, F, K, M, N, P (рис. 12). Укажите:

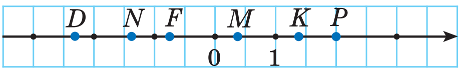


Рис. 12

а) точки, координаты которых противоположны;
б) точку, координата которой равна 1,4;
в) точку, соответствующую числу $-2\frac{1}{3}$;
г) точку, координата которой меньше нуля, но больше -1.

3.137. Придумайте по два числа, которые расположены между числами:

а) 10 и 12; б) -3 и -2.

Определение понятий «больше» и «меньше» для чисел

Условия различных задач часто содержат зависимости между значениями величин, выраженные терминами «больше» или «меньше». Если эти значения (числа) отметить на координатной прямой, то можно заметить, что большее число расположено

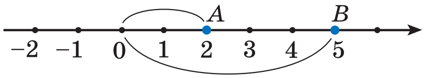


Рис. 13

правее меньшего, т. е. разность большего и меньшего чисел есть число положительное.

Например, число 5 больше числа 2. Точка $B(5)$ расположена правее точки $A(2)$ (рис. 13). Разность $5 - 2 = 3$ — положительное число.

Определение **Число a больше числа b**, если разность $(a - b)$ — число положительное.

Число a меньше числа b, если разность $(a - b)$ — число отрицательное.

Знак «>» читается «**больше**». Знак «<» читается «**меньше**».

$a > b$, если $(a - b)$ — положительное число;
если $(a - b)$ — положительное число, то $a > b$

$a < b$, если $(a - b)$ — отрицательное число;
если $(a - b)$ — отрицательное число, то $a < b$

Для любых данных чисел a и b возможно только одно из соотношений: $a = b$; $a > b$; $a < b$.

Если выражения соединены знаком «>» или «<», то такая запись называется **строгим неравенством**. Например, $8 < 11$; $-5 < 0$; $x > y$ — строгие неравенства.

Знак «$\geqslant$» читается «**больше или равно**», либо «**не меньше**», а знак «$\leqslant$» читается «**меньше или равно**», либо «**не больше**».

Если выражения соединены знаком «$\geqslant$» или «$\leqslant$», то такая запись называется **нестрогим неравенством**. Например, $3 \leqslant 10$; $2{,}01 \geqslant 2{,}0013$; $-7 \leqslant 0$; $m \geqslant n$ — нестрогие неравенства.

Положительное число больше нуля.
a — положительное число, значит, $a > 0$

Отрицательное число меньше нуля.
a — отрицательное число, значит, $a < 0$

Свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a > b$, то $b < a$

Доказательство. Рассмотрим разность чисел b и a: $b - a = -(a - b)$.

Применим определения понятий «больше» и «меньше». Так как $a > b$, то $(a - b)$ — положительное число. Тогда $-(a - b)$ — отрицательное число. Значит, $b - a$ — отрицательное число. Поскольку $b - a$ — отрицательное число, то по определению $b < a$.

2. Если к обеим частям неравенства прибавить какое-либо число, то знак неравенства не изменится, т. е. если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Если $a > b$, c — любое число, то $a + c > b + c$

Доказательство. Рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + c$: $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Так как $a > b$, то $a - b$ — число положительное, значит, разность чисел $a + c$ и $b + c$ является положительным числом, тогда по определению $a + c > b + c$.

3. Если обе части неравенства умножить на положительное число, то знак неравенства не изменится, а если обе части неравенства умножить на отрицательное

Если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$

число, то знак неравенства изменится на противоположный, т. е. если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$, а если $a > b$, $c < 0$, то $ac < bc$.

Если
$a > b$, $c < 0$,
то $ac < bc$

Доказательство. Рассмотрим разность чисел ac и bc: $ac - bc = c(a - b)$.

а) Если c — положительное число, то $ac - bc = c(a - b)$ — положительное число как произведение двух положительных чисел. Значит, $ac > bc$ по определению понятия «больше».

б) Если c — отрицательное число, то $ac - bc = c(a - b)$ — отрицательное число как произведение двух чисел разных знаков. Значит, $ac < bc$ по определению понятия «меньше».

4. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Если
$a > b$ и $b > c$,
то $a > c$

Доказательство. Так как $a > b$ и $b > c$, то $a - b$ и $b - c$ — положительные числа. Сумма двух положительных чисел $a - b$ и $b - c$ равна $a - b + b - c = a - c$ и является положительным числом, т. е. $a - c$ — положительное число, тогда по определению $a > c$.

5. Если $a > b$ и числа a и b — положительные, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Если $a > b$
и $a > 0$, $b > 0$,
то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Доказательство. Рассмотрим разность: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$. Числитель этой дроби — отрицательное число, а знаменатель — положительное, значит, разность $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ является отрицательным числом, тогда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Аналогично рассмотренным доказательствам неравенств со знаком «$>$» проводятся доказательства неравенств со знаками «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$».

Сложение и умножение неравенств

1. Неравенства одного знака можно почленно складывать, т. е. если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если
$a > b$ и $c > d$,
то $a + c > b + d$

Доказательство. Рассмотрим разность чисел $a + c$ и $b + d$: $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = a - b + c - d = (a - b) + (c - d)$.

Так как $a > b$ и $c > d$, то числа $(a - b)$ и $(c - d)$ положительные, поэтому их сумма — положительное число, значит, $a + c > b + d$.

2. Неравенства одного знака с положительными частями можно почленно умножать, т. е. если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Если
$a > b$, $c > d$
и $a > 0$, $b > 0$,
$c > 0$, $d > 0$,
то $ac > bd$

Доказательство. При доказательстве этого свойства будем опираться на третье и четвертое свойства неравенств. По третьему свойству: так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$; так как $c > d$ и $b > 0$, то $cb > db$. По четвертому свойству неравенств, поскольку $ac > bc$ и $cb > db$, то $ac > bd$.

3. Если обе части неравенства с положительными частями возвести в одну и ту же натуральную степень, то получится верное неравенство, т. е. если $a > b$ и a и b — положительные числа, то $a^n > b^n$, где n — натуральное число.

Если $a > b$
и $a > 0$, $b > 0$,
то $a^n > b^n$

Доказательство. Для доказательства этого свойства используем предыдущее свойство об умножении неравенств. Выполним почленное умножение двух одинаковых неравенств: $a > b$ и $a > b$ — и получим $a^2 > b^2$. Выполним почленное умножение неравенств $a^2 > b^2$ и $a > b$, будем иметь $a^3 > b^3$ и т. д. Выполняя почленное умножение неравенств, получим $a^n > b^n$ для любого натурального n.

Двойные неравенства

Неравенства вида $m < a < n$, $m < a \leqslant n$, $m \leqslant a < n$, $m \leqslant a \leqslant n$ называются **двойными**.

Их читают, начиная с середины: «a больше m, но меньше n». Для двойных неравенств справедливы все рассмотренные ранее свойства неравенств.

Определение понятий «больше» и «меньше» для чисел	
1. Докажите, что для любого a верно неравенство $a^2 + 2 \geqslant 2a + 1$.	Для доказательства найдем разность левой и правой частей неравенства: $a^2 + 2 - (2a + 1) = a^2 + 2 - 2a - 1 = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$. Выражение $(a - 1)^2$ неотрицательно для любых a. Так как разность левой и правой частей неравенства неотрицательна, то по определению $a^2 + 2 \geqslant 2a + 1$.
Свойства неравенств	
2. Если $a > b$, то является ли верным неравенство: а) $3a > 3b$;	а) Неравенство $3a > 3b$ верное, так как обе части данного неравенства умножили на одно и то же положительное число.

б) $-4a < -4b$; в) $a + 0{,}5 > b + 0{,}5$; г) $a - 0{,}7 > b - 0{,}7$?	б) Неравенство $-4a < -4b$ верное, так как обе части данного неравенства умножили на одно и то же отрицательное число и поменяли знак неравенства. Неравенства в), г) верные, так как к обеим частям каждого из этих неравенств прибавили одно и то же число.
3. Если $a < b$, то верно ли неравенство: а) $a + 3x < b + 3x$; б) $a - 5n < b - 5n$; в) $-2a > -2b$; г) $5a < 5b$?	Неравенства а) и б) верны по свойству 2. Неравенства в) и г) верны по свойству 3.
Сложение и умножение неравенств	
4. Докажите, что если $2 < x < 3$, $-1 < y < 7$, то $1 < x + y < 10$.	По свойству сложения неравенств сложим почленно двойные неравенства: $+\begin{array}{r} 2 < x < 3, \\ -1 < y < 7, \\ \hline 1 < x + y < 10. \end{array}$ Получили то, что требовалось доказать.
5. Стороны треугольника a, b, c таковы, что $3 < a < 5$, $2 < b < 4$, $4 < c < 6$, а периметр треугольника — P. Докажите, что $9 < P < 15$.	Так как периметр треугольника равен сумме трех его сторон, то сложим почленно три данных неравенства и получим: $+\begin{array}{l} 3 < a < 5, \\ 2 < b < 4, \\ 4 < c < 6, \\ \hline 9 < a + b + c < 15. \end{array}$ Значит, $9 < P < 15$.

6. Известно, что S — площадь прямоугольника, a и b — его стороны, причем $3{,}9 < a < 5$, $2 < b < 3$. Докажите, что $7{,}8 < S < 15$.	По свойству умножения неравенств с положительными частями умножим двойные неравенства почленно и получим: $$\times\begin{array}{r} 3{,}9 < a < 5, \\ 2 < b < 3, \\ \hline 7{,}8 < ab < 15. \end{array}$$ Так как $S = ab$, то $7{,}8 < S < 15$.

1. Можно ли сравнить два числа, зная их разность?
2. Если одно число больше числа 10, а другое больше числа 1, то можно ли сравнить эти числа?
3. Если сложить почленно два верных неравенства, то всегда ли получится верное неравенство?
4. Если перемножить почленно два верных неравенства, то всегда ли получится верное неравенство?
5. Если обе части неравенства умножить на 0,1, то изменится ли знак этого неравенства?
6. Если обе части неравенства умножить на –1, то изменится ли знак этого неравенства?

3.138. Прочитайте неравенства:

а) $-4 < 8$; б) $a \geqslant 13$;
в) $m \leqslant -1$; г) $-5{,}01 < -5$.

Какие из данных неравенств являются строгими, а какие — нестрогими? Придумайте по два примера строгих и нестрогих неравенств.

3.139. Из данных неравенств выпишите верные числовые неравенства:

а) $6 > -3$; б) $-1\frac{2}{3} \geqslant -1\frac{1}{3}$;

в) $-5^2 < 25$; г) $\frac{1}{7} > 1$.

Придумайте три примера верных числовых неравенств.

3.140. Пользуясь определением понятий «больше» и «меньше» для чисел, сравните числа m и n, если известно, что:

а) $m - n = 8$; б) $n - m = -5$;
в) $m - n = -7^2$; г) $m - n = 0$.

3.141. Известно, что точка $A(n)$ на координатной прямой расположена левее точки $B(m)$. Верно ли, что:

а) $n - 3 > m + 2$; б) $n - 1 \leqslant m$;
в) $n + 6 < m + 6$; г) $n - 5 = m - 5$;
д) $n < m + \frac{1}{2}$; е) $n - 9 < m + 2$?

3.142. Известно, что $a > b$. Расположите числа $a + 5$; $b - 4$; $a + 10$; b; $b - 7$; a в порядке убывания.

3.143. Отметьте на координатной прямой точки $A(m)$, $B(n)$, $C(k)$ и $D(p)$, если известно, что $p < n$, $k > n$ и $p > m$.

3.144. Докажите неравенство:

а) $a^2 - 10a + 25 \geqslant 0$; б) $a^2 + 2 > 2a$.

3.145. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $(a - 7)^2 > a(a - 14)$; б) $a^2 + 1 \geqslant 2(3a - 4)$.

3.146. Докажите неравенство:

а) $(a + 1)(a + 3) > a(a + 4)$;
б) $2b(b + 12) < (3b + 4)^2$;
в) $\frac{a^2 + 1}{2} \geqslant a$.

3.147. Сравните значения выражений $(a-2)^2$ и $4(1-a)$.

3.148. Пользуясь свойствами числовых неравенств, прибавьте к обеим частям неравенства:

а) $-8 < 3{,}5$ число 3;
б) $-0{,}1 > -0{,}8$ число $-2{,}1$;
в) $1\frac{2}{3} > \frac{1}{12}$ число $\frac{1}{3}$;
г) $-3\frac{4}{9} < 0$ число -8.

3.149. Пользуясь свойствами числовых неравенств, умножьте обе части неравенства:

а) $-7 < -2$ на 6;
б) $1{,}8 > -2{,}2$ на 5;
в) $-5{,}6 < -2{,}3$ на -1;
г) $10 > 1{,}2$ на $-\frac{1}{2}$.

3.150. Используя свойства числовых неравенств:

а) умножьте обе части верного числового неравенства $c > b$ на -5;
б) разделите обе части верного числового неравенства $p \geqslant t$ на -1.

3.151. Известно, что точка $A(m)$ на координатной прямой расположена правее точки $B(n)$. Верно ли, что:

а) $7n > 7m$;
б) $-8n > -8m$;
в) $n + 6 > m + 6$;
г) $n - 5 < m - 5$;
д) $-\frac{n}{2} < -\frac{m}{2}$;
е) $-3n < -3m$?

3.152. Известно, что $a > b$. Сравните:

а) $-11a$ и $-11b$;
б) $\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{7}$;
в) $0{,}8a$ и $0{,}8b$;
г) $-\frac{a}{11}$ и $-\frac{b}{11}$.

3.153. Определите знак числа a, если известно, что:

а) $4a < 3a$; б) $7a > a$;
в) $-2a < 2a$; г) $-10a > -3a$.

3.154. Известно, что число a — положительное, а число b — отрицательное. Сравните:

а) $a - b$ и 0; б) a и $b - a$; в) $2a - 3b$ и b.

3.155. Известно, что $a < b$, $c > b$. Сравните значения выражений $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$, если a, b, c — положительные числа.

3.156. Пользуясь свойствами числовых неравенств, сложите почленно неравенства:

а) $-18 < 13$ и $-21 < -18$;

б) $7\frac{2}{9} > -1$ и $2\frac{7}{9} > \frac{3}{17}$;

в) $6{,}85 > -0{,}03$ и $1{,}25 > -0{,}18$.

3.157. Пользуясь свойствами числовых неравенств, умножьте почленно неравенства:

а) $5 < 12$ и $2 < 8$;

б) $1\frac{2}{7} > 1$ и $\frac{7}{9} > \frac{1}{3}$;

в) $7{,}23 > 0{,}03$ и $10 > 0{,}1$.

3.158. Верно ли, что если:

а) $a > 5$, $b > 6$, то $a + b > 10$;
б) $a < 8$, $b < 2$, $a > 0$, $b > 0$, то $ab < 16$;
в) $a > 3$, $b > 8$, то $ab > 25$?

3.159. Пусть $a > 3$ и $b > 5$. Докажите, что:

а) $a + b > 8$; б) $ab > 15$; в) $2a + b > 11$;
г) $4ab > 60$; д) $a^2 + b^2 > 34$.

3.160. Длина прямоугольника больше 10 см, а ширина в 2,5 раза меньше длины. Докажите, что периметр прямоугольника больше 28 см.

3.161. Известно, что $-9 \leqslant a < 2$. Верно ли, что:

а) a меньше -9 и больше 2;
б) a не меньше -9 и меньше 2;
в) a больше -9 и меньше 2;
г) a больше -9 и не меньше 2?

3.162. Известно, что $5 < a < 9$. Оцените:

а) $2a$; б) $a + 3$; в) $-3a$; г) $a - 4$.

3.163. Известно, что $-3 \leqslant b < 8$. Оцените:

а) $\frac{1}{4}b$; б) $b + 2$; в) $-b$; г) $b - 3$.

3.164. Для перевозки учебников в новую библиотеку их складывают в стопки, по 10 книг в каждой. Какой высоты могут получиться стопки, если толщина книг варьируется от 15 до 24 мм?

3.165. Периметр квадрата равен P см. Известно, что $2{,}4 \leqslant P \leqslant 2{,}8$. Оцените сторону квадрата a.

3.166. Известно, что $3 < n < 5$ и $2 < m < 7$. Оцените:

а) $n + m$; б) $m - n$; в) nm; г) $\frac{m}{n}$.

3.167. Известно, что $2 \leqslant n < 8$ и $3 < m < 9$. Оцените:

а) $n + m$; б) $m - n$; в) nm; г) $\frac{m}{n}$.

3.168. Зная, что $5 < a \leqslant 9$ и $2 < b \leqslant 7$, оцените значение выражения $5a - \frac{b}{3}$.

3.169. Куплено 9 карандашей и 3 блокнота. Цена карандаша не превышает 15 к., а блокнота — не превышает 1 р. Оцените стоимость покупки.

3.170. В зависимости от скидки 1 кг яблок в магазине стоит от 2,9 р. до 3 р., а 1 кг груш — от 5,1 р. до 5,2 р. Оцените стоимость покупки 1 кг груш и 2 кг яблок.

3.171. Дан треугольник со сторонами a, b и c и периметром 180. Известно, что $30 < a < 34$ и $84 < b < 86$. Оцените длину стороны c.

3.172*. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 \geqslant 2(a + b - 1)$; б) $x^2 - 2xy + 2y^2 \geqslant 0$.

3.173*. Даны три последовательных натуральных числа. Сравните квадрат среднего из них с произведением двух других чисел.

3.174. Пользуясь определением понятий «больше» и «меньше» для чисел, сравните числа a и b, если известно, что:

а) $a - b = -3$; б) $b - a = 0{,}01$;
в) $a - b = (-8)^2$; г) $b - a = 0$.

3.175. Отметьте на координатной прямой точки $A(m)$, $B(n)$, $C(k)$ и $D(p)$, если известно, что $n < m$, $p < n$ и $p > k$.

3.176. Расположите числа $a + 9$; $b - 3$; a; $a + 4$; $b - 2$; b в порядке возрастания, если $a > b$.

3.177. Докажите неравенство:

а) $a^2 + 6a + 9 \geqslant 0$; б) $a^2 + 5 > -4a$.

3.178. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $(a + 5)^2 > a(a + 10)$; б) $a^2 + 5 \geqslant 10(a - 2)$.

3.179. Докажите неравенство:

а) $a(a+3) > 3a-7$; б) $(b-5)(b-7) < (b-6)^2$.

3.180. Сравните значения выражений $(b+3)^2$ и $(b+2)(b+4)$.

3.181. Пользуясь свойствами числовых неравенств, прибавьте к обеим частям неравенства:

а) $10{,}5 > -8{,}5$ число 2,5; б) $-4\frac{3}{7} < 0$ число $-\frac{4}{7}$.

3.182. Пользуясь свойствами числовых неравенств, умножьте обе части неравенства:

а) $-9 < 5$ на число 2;
б) $3{,}3 > -1{,}2$ на число -10.

3.183. Используя свойства числовых неравенств:

а) разделите обе части верного числового неравенства $m \leqslant n$ на $-0{,}1$;
б) умножьте обе части верного числового неравенства $p < k$ на -1.

3.184. Известно, что $a < b$. Верно ли, что:

а) $-13a < -13b$; б) $\frac{a}{9} > \frac{b}{9}$?

3.185. Известно, что $m < n$. Сравните числа:

а) $m+2$ и $n+2$; б) $m-8{,}9$ и $n-8{,}9$;
в) $5m$ и $5n$; г) $-m$ и $-n$;
д) $\frac{m}{5}$ и $\frac{n}{5}$; е) $-\frac{m}{7}$ и $-\frac{n}{7}$.

3.186. Пользуясь свойствами числовых неравенств, сложите почленно неравенства:

а) $-24 < 15$ и $-41 < -19$;

б) $8\frac{2}{7} > -2$ и $3\frac{5}{14} > \frac{2}{9}$.

3.187. Пользуясь свойствами числовых неравенств, умножьте почленно неравенства:

а) $3 < 18$ и $5 < 10$;
б) $8,43 > 0,04$ и $10 > 0,1$.

3.188. Верно ли, что если:

а) $a > 6$, $b > 7$, то $ab > 43$;
б) $a < 3$, $b < 5$, $a > 0$, $b > 0$, то $ab < 15$;
в) $a > 2$, $b > 6$, то $a + b > 7$?

3.189. Длины сторон треугольника не превышают 8 см; 12 см и 17 см. Оцените периметр данного треугольника.

3.190. Известно, что $7 < b < 10$. Оцените:

а) $3b$; б) $b + 2$;
в) $-2b$; г) $b - 1$.

3.191. Известно, что $-2 < a \leqslant 5$. Оцените:

а) $\frac{1}{2}a$; б) $a + 1$;
в) $-a$; г) $a - 3$.

3.192. Сторона квадрата равна a см. Известно, что $0,3 \leqslant a \leqslant 0,4$. Оцените периметр квадрата P.

3.193. Известно, что $7 < n < 10$ и $3 < m < 8$. Оцените:

а) $n + m$; б) $n - m$;
в) nm; г) $\frac{n}{m}$.

3.194. Зная, что $5 \leqslant a < 8$ и $2 \leqslant b < 9$, оцените значение выражения $\frac{a}{6} - 7b$.

3.195*. Даны три последовательных натуральных числа. Сравните удвоенный квадрат среднего из них с суммой квадратов двух других чисел.

3.196. Из неисправного крана в сутки вытекает 150 л воды. Сколько денег «утечет» через этот кран за 10 дней, если за 1 м^3 воды нужно заплатить 90 к.?

3.197. На столбчатой диаграмме (рис. 14) отражена динамика продаж велосипедов в спортивном магазине за пять дней. Сколько в среднем продавали велосипедов за один день?

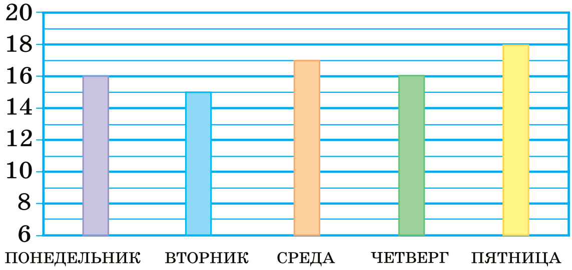


Рис. 14

3.198. Округлите число 234,5998 до:

а) единиц; б) сотых.

3.199. Какая из точек $A(2;\ 0)$; $B(3;\ -7)$; $C(-9;\ 0)$; $D(0;\ -5)$ расположена левее оси ординат?

3.200. Выбрав удобный порядок действий, вычислите: $2\frac{1}{2} \cdot 19 - 9 \cdot 2\frac{1}{2} - 0{,}25 \cdot 31 \cdot 4$.

3.201. Упростите выражение $\frac{a^{-6}}{a^{-3} \cdot a^{-2}}$ и найдите его значение при $a = \frac{2}{3}$.

3.202. Разложите на множители:

а) $2ab - 3a$; б) $6x^6 + 8x^2$;

в) $\frac{1}{4}a^2 - 81$; г) $36x^2 - 12x + 1$;

д) $y(x - 1) - 5(1 - x)$; е) $b^3 - 7b^2c - bc^2 + 7c^3$.

3.203. Решите уравнение $10 - \frac{3x - 1}{2} = \frac{6x + 3}{11}$.

3.204. Почтальон ехал от почты до села на автобусе со скоростью 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На обратный путь он затратил на 1 ч 12 мин больше, так как возвращался пешком со скоростью, составляющей 10 % скорости его движения на автобусе. Найдите длину дороги от почты до села.

§ 18. Линейные неравенства с одной переменной

3.205. Решите уравнение $18x - 5(5x + 1) = 54$.

3.206. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{4}$; б) 1,3 и $1\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{1}{8}$ и $-2{,}125$.

Рассмотрим задачу. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Скорость велосипедиста в 4 раза больше скорости пешехода. Они встретились через 48 мин после начала движения. Какова скорость пешехода, если протяженность шоссе между пунктами A и B больше 20 км?

Обозначим через x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ скорость пешехода, тогда $(4x)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость велосипедиста, а $(4x + x)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость сближения пешехода и велосипедиста. Путь, пройденный ими за 48 мин, равен $5x \cdot 0{,}8 = 4x$ (км). По условию задачи протяженность шоссе больше 20 км, значит, $4x > 20$. Получили **линейное неравенство с одной переменной.**

Определение Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, где a и b — числа, а x — переменная, называются **линейными неравенствами с одной переменной.**

Разделим обе части неравенства $4x > 20$ на 4, по свойству числовых неравенств получим $x > 5$. При подстановке в это неравенство вместо переменной любого числа, большего пяти, неравенство обращается в верное числовое неравенство. Например, при $x = 6{,}2$ получим $6{,}2 > 5$. Это неравенство верное. Число 6,2 есть решение неравенства. Так же и все другие числа, большие 5, являются решениями данного неравенства. Таким образом, скорость пешехода должна быть больше 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Определение **Решением неравенства с одной переменной** называется число, подстановка которого в данное неравенство обращает его в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x < 12$, так как при подстановке числа 3 получается верное числовое неравенство $3 < 12$. Все числа, меньшие 12, являются решениями данного неравенства.

Определение **Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Пример 1. Решите неравенство $5x < -30$.

Решение. Разделим обе части неравенства на 5 и по свойству числовых неравенств получим $x < -6$. Решениями данного неравенства являются все числа, меньшие -6.

Ответ: $x < -6$.

Пример 2. Решите неравенство $0 \cdot x > 15$.

Решение. Данное неравенство при любом значении переменной обращается в неверное числовое неравенство $0 > 15$. Значит, неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Равносильные неравенства

Определение Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называются **равносильными**.

Чтобы получить неравенство, равносильное данному, можно:

• прибавить к обеим частям неравенства одно и то же выражение, что практически означает перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с противоположным знаком. Например:

$x - 0{,}6 > 3;$
$x - 0{,}6 + 0{,}6 > 3 + 0{,}6;$
$x > 3{,}6;$

$2x - 5 < 7x + 8;$
$2x - 7x < 5 + 8;$
$-5x < 13;$

• разделить (умножить) обе части неравенства на одно и то же положительное число. Например:

$2x \geqslant 6;$
$2x : 2 \geqslant 6 : 2;$
$x \geqslant 3;$

$\frac{x}{3} < -2;$
$\frac{x}{3} \cdot 3 < -2 \cdot 3;$
$x < -6;$

• разделить (умножить) обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, при этом изменить знак полученного неравенства на противоположный. Например:

$-3x > 12;$
$x < -4;$

$-0{,}5x \leqslant -6;$
$x \geqslant 12;$

• выполнить тождественные преобразования в левой и правой частях неравенства. Например:

$5x - 2(x - 1) > -(x + 2) + 3;$
$5x - 2x + 2 > -x - 2 + 3;$
$3x + 2 > -x + 1.$

Доказательства этих утверждений опираются на свойства числовых неравенств.

Решение линейных неравенств

Пример 3. Решите неравенство:

а) $-2x < 6$; б) $2{,}5x \leqslant 10$; в) $5x - 4x + 1 > -6 + 2x$.

Решение: а) Разделим обе части неравенства на число -2 и поменяем знак неравенства на противоположный. Получим $x > -3$, т. е. все числа, большие -3, есть решения неравенства. *Ответ*: $x > -3$.

б) Разделим обе части неравенства на 2,5, получим $x \leqslant 4$. Все числа, не превосходящие 4, есть решения неравенства. *Ответ*: $x \leqslant 4$.

в) Перенесем выражение $2x$ из правой части неравенства в левую, а число 1 из левой части в правую с противоположными знаками и приведем подобные слагаемые: $5x - 4x - 2x > -6 - 1$, $-x > -7$. Разделим обе части неравенства на -1 и поменяем знак неравенства. Получим $x < 7$. *Ответ*: $x < 7$.

Решение неравенств, сводящихся к линейным

Чтобы решить неравенство, сводящееся к линейному, можно:

① Раскрыть скобки.	Решите неравенство $5(7 - 2x) + 15 \geqslant 6(x - 5)$.
② Привести подобные слагаемые.	① $35 - 10x + 15 \geqslant 6x - 30$.
③ Перенести слагаемые с переменной в одну часть неравенства, а без переменной — в другую.	② $-10x + 50 \geqslant 6x - 30$.
	③ $-10x - 6x \geqslant -30 - 50$. Меняем знаки перенесенных слагаемых на противоположные!
④ Привести подобные слагаемые.	④ $-16x \geqslant -80$.
⑤ Решить полученное линейное неравенство.	⑤ Делим обе части неравенства на -16 и меняем знак неравенства: $x \leqslant 5$. *Ответ*: $x \leqslant 5$.

Равносильные неравенства	
1. Какие из неравенств: $3x < 1{,}5$; $-7x > -3{,}5$; $x - 1 > -0{,}5$; $x - 2 < -1{,}5$ — равносильны неравенству $x < 0{,}5$?	Неравенство $3x < 1{,}5$ равносильно неравенству $x < 0{,}5$, так как получено умножением обеих частей этого неравенства на число 3. Неравенство $-7x > -3{,}5$ равносильно неравенству $x < 0{,}5$, так как получено умножением обеих частей неравенства на число -7 (знак неравенства изменен на противоположный). Неравенство $x-1 > -0{,}5$ не равносильно неравенству $x < 0{,}5$, так как изменен знак неравенства, а знак неравенства не меняется при прибавлении к обеим частям неравенства -1. Неравенство $x - 2 < -1{,}5$ равносильно неравенству $x < 0{,}5$, так как получено прибавлением к обеим частям этого неравенства числа -2.
Решение линейных неравенств	
2. Решите неравенство: а) $-3x < -1{,}5$; б) $-7x \geqslant 3{,}5$; в) $x - 1 > -3{,}5$; г) $x + 2 \leqslant -1{,}5$.	а) Разделим обе части неравенства $-3x < -1{,}5$ на -3, получим $x > 0{,}5$. б) Разделим обе части неравенства $-7x \geqslant 3{,}5$ на -7, получим $x \leqslant -0{,}5$. в) Перенесем -1 в правую часть неравенства с противоположным знаком и получим $x > -2{,}5$. г) Перенесем 2 в правую часть неравенства с противоположным знаком, получим $x \leqslant -3{,}5$.

3. Решите неравенство: а) $x-1>x-3{,}5$; б) $-6x>1-6x$.	а) Перенесем слагаемые с переменной в левую, а без переменной — в правую часть неравенства, поменяв их знаки. Получим $0\cdot x>-2{,}5$. Левая часть неравенства при любом значении x равна нулю; $0>-2{,}5$ — верное числовое неравенство. Решением данного неравенства является любое число. б) Перенесем слагаемые с переменной в левую часть, а без переменной — в правую часть неравенства, поменяв их знаки. Получим $0\cdot x>1$. Левая часть неравенства при любом значении x равна нулю; $0>1$ — неверное числовое неравенство. Неравенство не имеет решений.
Решение неравенств, сводящихся к линейным	
4. Решите неравенство $8(x-4{,}5)\leqslant 4-2(x-6)$.	① $8x-36\leqslant 4-2x+12$; ② $8x-36\leqslant 16-2x$; ③ $8x+2x\leqslant 16+36$; ④ $10x\leqslant 52$; ⑤ $x\leqslant 5{,}2$. *Ответ*: $x\leqslant 5{,}2$.
5. Решите неравенство $3x+\frac{3-2x}{2}<x-\frac{1-5x}{5}$.	Умножим обе части неравенства на 10: $10\cdot 3x+10\cdot\frac{3-2x}{2}<10\cdot x-$ $-10\cdot\frac{1-5x}{5}$ и получим: $30x+5(3-2x)<10x-$ $-2(1-5x)$.

	Решим полученное неравенство: $30x + 15 - 10x < 10x - 2 + 10x;$ $20x + 15 < 20x - 2;$ $20x - 20x < -2 - 15;$ $0 \cdot x < -17;$ $0 < -17$ — неверное числовое неравенство. *Ответ*: решений нет.

1. Запишите три разных линейных неравенства с одной переменной. Сколько решений имеет каждое из них?

2. Обе части неравенства $x > -3$ умножили на 5. Есть ли среди решений нового неравенства отрицательные числа?

3. Обе части неравенства $x > -3$ умножили на -5. Есть ли среди решений нового неравенства положительные числа?

4. Решение некоторого неравенства есть все числа, меньшие $-0{,}2$, т. е. $x < -0{,}2$. К обеим частям неравенства прибавили число 100. Можно ли определить решение нового неравенства?

3.207. Из данных неравенств выберите неравенства, равносильные неравенству $x < -3$:

а) $x + 1 < -2$; б) $-x > 3$;

в) $5x > -15$; г) $x - 4 > -7$.

Придумайте еще два примера неравенств, равносильных данному.

3.208. Из чисел -6; $-5{,}7$; $-4{,}5$; -4; -3; $-2{,}1$; -1; 0; $1{,}2$ выпишите те, которые являются решениями неравенства $x \geqslant -4$.

Запишите еще два числа, являющихся решениями данного неравенства.

3.209. Решите линейное неравенство, заменив его на равносильное:

а) $7x < 21$; б) $-4x \geqslant 16$; в) $2x \leqslant -9$;
г) $-5x > -12$; д) $4x \geqslant -5$; е) $-0,1x < 7$;
ж) $-x > 3$; з) $-8x \leqslant 0$; и) $-7x > 1$.

3.210. Решите линейное неравенство и укажите два каких-либо числа, которые являются его решениями:

а) $\frac{1}{2}x \leqslant 6$; б) $-\frac{x}{9} \leqslant -1$; в) $-\frac{x}{3} \leqslant 0$.

3.211. Найдите, при каких значениях переменной выражения $2x$; $-5x$; $\frac{x}{8}$; $-x$:

а) принимают отрицательные значения;
б) принимают значения, не меньшие 1.

3.212. Решите неравенство, используя свойства равносильных неравенств:

а) $2x - 3 > 1$; б) $3 - 8x \leqslant 1$;
в) $1 - 5x < 6$; г) $5 - 9x \geqslant 4$.

3.213. Найдите, при каких значениях переменной:

а) двучлен $3x - 1$ принимает положительные значения; б) значение двучлена $5x - 4$ не превосходит 1.

3.214. При каких значениях переменной a значение выражения $9a$ больше значения выражения $3a$?

3.215. Решите неравенство:

а) $4x - 11 < 2x + 13$; б) $11x - 13 \leqslant x + 3$;
в) $7x - 3 > 9x - 8$; г) $4 + 12x \geqslant 7 + 13x$;
д) $17 - 3x > x - 13$; е) $1 - 2x \geqslant 3 + x$;
ж) $5x - 14 \leqslant 8x - 20$; з) $6x + 8 > 10x - 8$.

3.216. Найдите, при каких значениях переменной y значение выражения $15 + y$ меньше значения выражения $16 - y$.

3.217. Решите неравенство, используя алгоритм:

а) $3(x+2) > 4 - x$; б) $-(4 - x) \geqslant 2x + 6$;
в) $1 - (8 + x) \geqslant 3x - 10$; г) $x - 4(x - 3) < 3 - 6x$;
д) $x - 2(3x - 4) < 12 - 3x$;
е) $18 - 8(x - 2) < 10 - 4x$.

3.218. Решите неравенство:

а) $3(2x + 1) - 6 < 2 - 3(1 - 3x)$;
б) $5 - 4(2 - 3x) \leqslant (2x + 1) - 3$;
в) $-(6x + 2) + 3(x - 1) \leqslant 0$;
г) $3(1 - x) - (2 - x) \leqslant 2$;
д) $3(3x - 1) > 2(5x - 7)$;
е) $-(8x - 2) - 2(x - 3) \geqslant 0$.

3.219. Решите неравенство:

а) $9x - 7 > 2(4{,}5x - 2)$;
б) $-2(4x + 9) \leqslant -8(x - 8) + 5$.

Придумайте по два примера неравенств, сводящихся к линейным: а) которые не имеют решений; б) решениями которых являются все числа.

3.220. Решите неравенство:

а) $5(7 - 2x) + 11 \geqslant 6(x - 5) - 4$;
б) $2(3x - 4) - 16 > 3(4 - 3x)$;
в) $10 - (x + 2) \leqslant 4(x - 3) - 5(x - 4)$;
г) $3(2x - 1) - 5(x + 2) \geqslant 2(2x + 3) - 3x + 3$.

3.221. Умножьте обе части неравенства на одно и то же число и решите полученное неравенство:

а) $\frac{5x}{7} - \frac{x}{14} \geqslant 1$; б) $\frac{3x}{5} - \frac{x}{4} < 2$.

3.222. Найдите, при каких значениях переменной значение выражения:

а) $\frac{6x - 1}{4}$ меньше 2; б) $\frac{1 - 2x}{3}$ не больше 5.

3.223. Решите неравенство:

а) $\frac{3x}{5} - x < 2$; б) $\frac{7x}{2} + x \geqslant 0$; в) $x - \frac{x}{9} \leqslant 5$.

3.224. Умножьте обе части неравенства на одно и то же число и решите полученное неравенство:

а) $\frac{3}{5}(4x + 3) > 4x - 3$; б) $\frac{1}{3}(x + 1) - \frac{1}{6}(x + 2) \geqslant 2$.

3.225. Решите неравенство:

а) $2x - \frac{x+1}{2} \leqslant \frac{x-1}{3}$; б) $\frac{x-3}{3} - x > \frac{x+1}{5}$.

3.226. При каких значениях переменной значение выражения $\frac{10x - 2}{3}$ меньше значения двучлена $6 - 4x$?

3.227. Решите неравенство:

а) $\frac{4+3x}{3} - 1 \leqslant \frac{x}{6}$; б) $\frac{3x+1}{5} - \frac{1-2x}{2} \geqslant x$;

в) $\frac{2-3x}{4} \leqslant \frac{6-5x}{8} + \frac{1}{5}$; г) $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} \leqslant \frac{1}{2}$;

д) $x - \frac{3x-1}{3} + \frac{x+1}{2} \geqslant 1$; е) $x - \frac{10x+2}{15} > \frac{x-2}{3}$.

3.228. Найдите, при каких значениях переменной a сумма дробей $\frac{17-2a}{5}$ и $\frac{3-2a}{2}$ неположительна.

3.229. Найдите, при каких значениях переменной y значение дроби $\frac{3y-5}{6}$ не больше значения разности дробей $\frac{3-y}{9}$ и $\frac{6y-7}{15}$.

3.230. Выполните тождественные преобразования многочленов и решите неравенство:

а) $(x + 5)(x - 6) \leqslant x^2$;

б) $9x^2 - 3x(3x + 1) > x$;

в) $5(x^2 - 1) - 5x(x + 2) \geqslant 3$;

г) $x(x - 3) < (x - 2)(x - 1)$.

3.231. Решите неравенство:

а) $7x^2 - (7x - 1)(x + 2) < 9x + 4$;
б) $(3x + 1)(x - 1) - 3x^2 > 5 - 2x$;
в) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) \geqslant 6$;
г) $(x - 1)(2x - 2) \leqslant (2x - 1)(x + 2)$.

3.232. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $x^2 - (x + 5)(x - 5) < 10x$;
б) $(x + 5)^2 - x \geqslant x(x - 4) - 1$;
в) $5 - (x + 3)^2 > (x - 2)(1 - x)$;
г) $x(x + 7) < (x + 7)^2 - 7$.

3.233. Решите неравенство:

а) $(x - 3)(x + 2) - (x - 3)^2 \geqslant 15x - 10$;
б) $(2x - 5)^2 - 0{,}5x < (2x - 1)(2x + 1) - 15$;
в) $(3x + 5)^2 - (x - 2)^2 \geqslant (2x - 1)(4x + 3)$;
г) $(4x - 5)^2 + (3x - 7)^2 > (5x - 4)^2$.

3.234. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $(1{,}2x + 1{,}5) - 2(1 - 1{,}4x) < 7{,}5$;
б) $\frac{x + 1}{2} - \frac{2x + 5}{6} \leqslant 0$;
в) $(x + 1)(x - 3) \geqslant x(x + 3)$;
г) $(x + 4)^2 - (x - 10)^2 < 140$.

3.235. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $12 + 1{,}5x > 3(13 - 2{,}5x)$;
б) $x + 3 \leqslant \frac{2x - 1}{6} - \frac{5 - 3x}{3}$;
в) $x(x + 5) + 3 > x^2 + x$;
г) $(x - 5)^2 - (x + 7)^2 < 56$.

3.236. Фермер перевозит лук в мешках по 15 кг в грузовике, масса которого без груза равна 4,5 т. Какое наибольшее количество мешков может находиться в грузовике, чтобы он мог переехать через реку по мосту, выдерживающему груз в 7 т?

3.237. Туристы спускаются на катере вниз по реке, скорость течения которой 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Собственная скорость катера 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На какое расстояние от места старта могут отплыть туристы, если нужно вернуться назад не позднее чем через 6 ч?

3.238*. Найдите, при каких значениях a уравнение $6 - 3x = a + 1$ имеет положительный корень.

3.239*. Найдите значение a, при котором неравенство $ax < 5x - 3$ не имеет решений. Существует ли такое значение a, при котором решением данного неравенства является любое число?

3.240*. Выясните, при каких значениях a равносильны неравенства:

а) $ax > 8$ и $x > \frac{8}{a}$; б) $ax < 5$ и $x > \frac{5}{a}$.

3.241. Решите линейное неравенство:

а) $5x > 35$; б) $-6x \leqslant 18$; в) $3x \geqslant -8$;
г) $-2x < -11$; д) $\frac{x}{3} \leqslant -6$; е) $-0{,}01x > 8$;
ж) $-x \leqslant -5$; з) $-3x < 0$; и) $\frac{2}{9}x > 1$.

3.242. Решите неравенство:

а) $2x - 5 < 3$; б) $5 - 6x \geqslant 3$;
в) $3 - 4x > 7$; г) $5 - 8x \leqslant 11$.

3.243. При каких значениях a двучлен $7 - 2a$ принимает отрицательные значения?

3.244. При каких значениях a значение выражения $9a$ меньше значения выражения $4a$?

3.245. Решите неравенство:

а) $3 - 2x \leqslant 5 + x$; б) $3x - 4 > x - 6$;
в) $6x - 9 < 8x + 2$; г) $8 - 10x \leqslant 15 - 9x$.

3.246. При каких значениях m значения двучлена $10m + 1$ больше значений двучлена $8m - 2$?

3.247. Решите неравенство:

а) $2(x - 6) + 7 < 3x - 10$;
б) $2x - 3(x + 1) > 2 + x$;
в) $10x + 6 < 3(5x - 1) - 2x$;
г) $24 - x < 2 - 3(x - 6)$;
д) $5(x + 4) < 2(4x - 5)$;
е) $4(x - 1) - (9x - 5) \geqslant 3$.

3.248. Решите неравенство:

а) $11x - 7 > 2(5{,}5x + 8)$;
б) $4 - 5x \geqslant 2x - 7(x + 4)$.

3.249. Умножьте обе части неравенства на одно и то же число и решите неравенство:

а) $\frac{3x}{8} - \frac{x}{16} \leqslant 1$; б) $\frac{2x}{7} - x < 1$; в) $\frac{5 - 3x}{2} > 0$.

3.250. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{2} \geqslant \frac{2x - 3}{8} + 1$; б) $\frac{x + 3}{4} + \frac{2 - x}{3} < 0$;
в) $x - \frac{x - 3}{4} + \frac{x + 1}{8} \leqslant 2$; г) $1 - \frac{3 + x}{2} < \frac{31 + x}{5} - x$.

3.251. Найдите, при каких значениях переменной a разность дробей $\frac{16 - 3a}{3}$ и $\frac{3a + 7}{4}$ неотрицательна.

3.252. Найдите, при каких значениях переменной y значение дроби $\frac{2y + 5}{18}$ не меньше значения суммы дробей $\frac{7y - 3}{6}$ и $\frac{2 - 5y}{4}$.

3.253. Решите неравенство:

а) $6x^2 - 3x(2x + 4) \geqslant 18$;
б) $(x + 7)(x - 3) \geqslant x^2$;
в) $x(x + 2) < (x + 3)(x - 1)$;
г) $(x + 6)(3x - 8) - 3(x^2 - 1) > 20$;
д) $(x - 3)(2x - 1) \leqslant (2x + 1)(x + 2)$;
е) $(3x + 3)(x + 2) - (3x - 4)(x + 2) > 35$.

3.254. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $x^2 - (x + 6)(x - 6) < 12x$;
б) $(x - 4)^2 + 3x \geqslant x(x - 8)$;
в) $(x - 5)(x + 2) - (x + 3)^2 \geqslant 7 - 14x$;
г) $(3x - 1)^2 - (x + 1)^2 \leqslant (4x + 3)(2x + 1)$.

3.255. Найдите наименьшее целое решение неравенства $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 1$.

3.256. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{2x - 1}{8} \leqslant \frac{3 - x}{6}$.

3.257. Одна из сторон прямоугольника равна 6 см. Найдите, какой должна быть вторая его сторона, чтобы периметр прямоугольника был больше 30 см.

3.258*. Найдите, при каких значениях a уравнение $5x + a = 7$ имеет положительный корень.

3.259. Вычислите:

а) $-8 - 4\frac{5}{7}$; б) $-4\frac{5}{7} + 8$; в) $4\frac{5}{7} - 8$.

3.260. Найдите, сколько процентов от числа 250 составляет третья степень числа 5.

3.261. Выполните тождественные преобразования в выражении $(4x - 3y^2)^2 - 16x^2 + 9y^4$.

3.262. Какую цифру нужно поставить вместо $*$ в число $2*09$, чтобы полученное число делилось на 9?

3.263. Осенью семья расходовала 250 кВт · ч электроэнергии в месяц. Зимой расход увеличился на 20 %, а весной уменьшился на 40 % по сравнению с зимним периодом. Каким стал расход электроэнергии весной?

3.264. Разложите на множители $7a - b - y(b - 7a)$.

3.265. Для приготовления варенья бруснику, сахар и груши берут в отношении $6 : 5 : 4$. Сколько понадобится груш, если нужно приготовить 6 кг варенья?

3.266. В ряду чисел 5, 12, 17, 6, 14, 20 одно число вычеркнули. Среднее арифметическое нового ряда стало равно 12. Найдите вычеркнутое число.

3.267. На координатной прямой отмечены точки $A(-1)$, $B(11)$ и K. Определите координату точки K, зная, что она расположена между точками A и B и $AK : KB = 1 : 3$.

3.268. Одна учительница математики может проверить все контрольные работы за 3 ч, а вторая — за 5 ч. Найдите, за какое время они могут проверить все контрольные работы, если будут работать вместе.

3.269. Из двух городов одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Найдите, какая часть пути будет между ними через 1 ч 24 мин, если один поезд проходит весь путь между городами за 3 ч 20 мин, а второй — за 2 ч 48 мин.

§ 19. Функция

3.270. Запишите координаты двух точек, удовлетворяющие условию: а) абсцисса равна 3; б) ордината равна -1; в) ордината отрицательна.

3.271. Найдите значение выражения $10x + 3$ при $x = 5{,}3;\ -2{,}7;\ 0{,}2$.

При решении текстовых задач выполняется анализ их условия, т. е. выясняется, о каких величинах идет речь в данной задаче, определяются известные и неизвестные значения величин и **зависимости между величинами**.

Например, в задачах на движение зависимость между скоростью движения (v), временем (t) и пройденным путем (s) выражается формулой $s = vt$. При постоянной скорости каждому значению времени соответствует единственное значение пути. Например, при $v = 65\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ $s = 65t$. Тогда, если $t = 1$ ч, то $s = 65$ км; если $t = 1{,}2$ ч, то $s = 78$ км и т. д.

При решении физических задач также используются зависимости между величинами. Например, масса канистры с бензином в зависимости от объема бензина может быть найдена по формуле $m = 0{,}52 + 0{,}71 \cdot V$, где m — масса канистры с бензином (в килограммах), V — объем бензина (в литрах), 0,52 кг — масса пустой канистры, $0{,}71\ \frac{\text{кг}}{\text{л}}$ — плотность бензина. В этой зависимости каждому значению V соответствует единственное значение m. Например, если $V = 2$ л, то $m = 1{,}94$ кг; если $V = 10$ л, то $m = 7{,}62$ кг и т. д.

В повседневной жизни мы тоже встречаемся с зависимостями между величинами. Например, при заказе такси стоимость (C) поездки состоит из оплаты за вызов (a) и оплаты за каждый километр пути (b), т. е. $C = a + b \cdot s$. В этой зависимости каждому значению переменной s (расстоянию) соответствует единственное значение стоимости поездки C.

В приведенных примерах каждому значению одной величины (переменной) соответствует единственное значение другой величины.

Рассмотрим еще один пример: зависимость веса учащихся класса от их роста. В этом случае каждому значению одной величины — росту — соответствует не единственное значение другой величины — веса, так как люди с одинаковым ростом могут иметь разный вес (рис. 15).

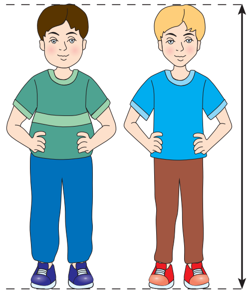


Рис. 15

Зависимости между величинами в первом, втором и третьем примерах называются функциональными, а в четвертом примере зависимость между весом и ростом человека не является функциональной.

Определение Зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению одной переменной (**аргументу**) соответствует единственное значение другой переменной (**функции**), называется **функциональной зависимостью** или **функцией**.

Табличный способ задания функции

Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записано время наблюдения, во второй — температура воздуха в соответствующее время суток.

Время t, ч	15	18	21	24 (0)	3	6	9	12
Температура T, °C	4	3	2	1	–2	4	5	5

С помощью таблицы описана функция, поскольку **каждому** из отмеченных моментов времени (значению одной переменной) соответствует **единственное** значение температуры (другой переменной).

Эта функция задана таблично. Числа, стоящие в первой строке, — это значения аргумента. Числа во второй строке — значения функции.

Для того чтобы записать, что значению аргумента 15 соответствует значение функции 4 (в 15 ч температура воздуха была равна 4 °С), используется обозначение $f(15) = 4$. Читается: «“эф” от пятнадцати равно четырем». Запись $f(3) = -2$ означает, что значению аргумента 3 соответствует значение функции –2, т. е. в 3 ч температура воздуха была равна –2 °С.

В общем виде запись $T = f(t)$ означает, что T — есть функция от t. Читается: «“тэ большое” равно “эф” от “тэ маленькое”». Вместо f можно использовать любую другую букву латинского алфавита.

Графический способ задания функции

Рассмотрим график изменения температуры воздуха (T) в зависимости от времени суток (t) (рис. 16).

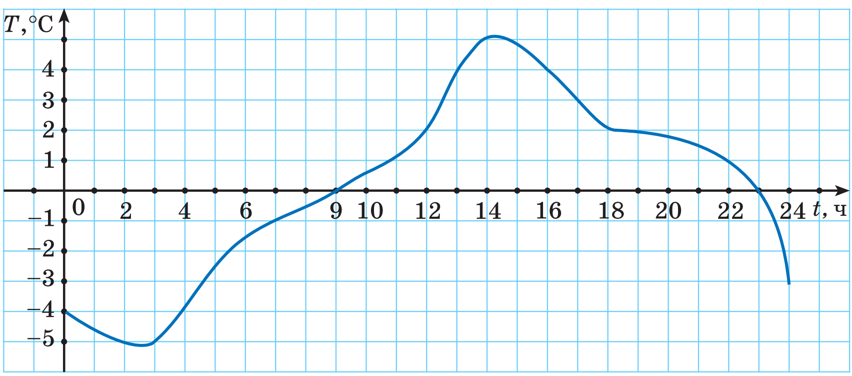


Рис. 16

Зависимость T от t является функцией, так как для **каждого** момента времени можно найти по графику соответствующее **единственное** значение температуры. Эта функция задана графически. Обозначим ее $T = g(t)$. Значения аргумента t отмечены на оси абсцисс, а значения функции T — на оси ординат.

Например, времени $t = 2$ ч соответствует температура $T = -5$ °C. Это можно записать иначе: $g(2) = -5$. Времени $t = 9$ ч соответствует температура $T = 0$ °C, или $g(9) = 0$. Запись $g(16) = 4$ означает, что в 16 ч температура воздуха была равна 4 °C.

Аналитический способ задания функции

В некоторых странах в качестве единицы длины используется миля. Одна миля приблизительно равна 1,6 км. Мили в километры можно перевести по формуле $y = 1{,}6x$, где y — число километров, а x — число миль. По этой формуле можно для **каждого** значения x найти соответствующее **единственное** значение y. Например, если $x = 2$, то $y = 3{,}2$.

Эта функция задана аналитически, или формулой. Переменная x — **аргумент**, а переменная y — **функция** от x. Обозначим ее: $y = 1{,}6x$ или $f(x) = 1{,}6x$.

Запись $f(5) = 8$ означает, что если $x = 5$, то $y = 8$, т. е. 5 миль равны 8 километрам.

Область определения и множество значений функции

Рассмотрим функцию, заданную таблично: зависимость между датой и числом учащихся, присутствующих в классе.

Даты одной из недель декабря	5	6	7	8	9
Число учащихся, присутствующих в классе	23	24	22	21	22

Обозначим эту функцию $y = f(x)$. Тогда запись $f(5) = 23$ означает, что 5 декабря в классе присутствовало 23 учащихся.

В таблице в первой строке указаны значения аргумента: 5, 6, 7, 8, 9.

Определение Множество всех значений, которые принимает аргумент, называется **областью определения функции**.

Область определения функции обозначается $D(f)$ (читается — «“дэ” от “эф”»).

$$D(f) = \{5; 6; 7; 8; 9\}$$

Значения функции во второй строке таблицы образуют множество, состоящее из чисел 21, 22, 23 и 24.

Определение Все значения, которые принимает функция, называются **множеством значений функции**.

Множество значений функции обозначается $E(f)$ (читается — «“е” от “эф”»).

$$E(f) = \{21; 22; 23; 24\}$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную графически (рис. 17). Для данной функции $f(-1) = -7$, $f(0) = 0$, $f(3) = 9$, $f(5) = 5$.

Область определения этой функции — это множество абсцисс точек, лежащих на кривой. Они изменяются от –1 до 5. $D(f)$: $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

Множество значений этой функции — это множество ординат точек, лежащих на кривой. Они изменяются от –7 до 9. $E(f)$: $-7 \leqslant y \leqslant 9$.

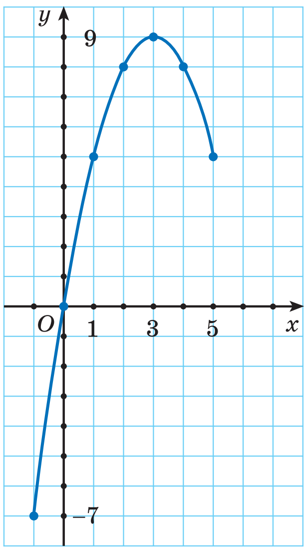


Рис. 17

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^2 + 5$. Если нет описания процесса, который задает эта функция, то область определения функции — это те значения аргумента, при которых выражение, задающее функцию, имеет смысл. Для данной функции область определения — это все числа. $D(f)$: все числа.

Известно, что $x^2 \geqslant 0$, тогда по свойствам неравенств $x^2 + 5 \geqslant 5$. Значит, множество значений данной функции — все числа, не меньшие 5. $E(f)$: $y \geqslant 5$.

Нули функции. Положительные и отрицательные значения функции

Рассмотрим график зависимости температуры воздуха T от времени суток t (рис. 18). Эта зависимость является функцией. Обозначим ее $T = f(t)$.

По графику можно определить, в какое время суток температура воздуха была положительной, отрицательной, равной нулю.

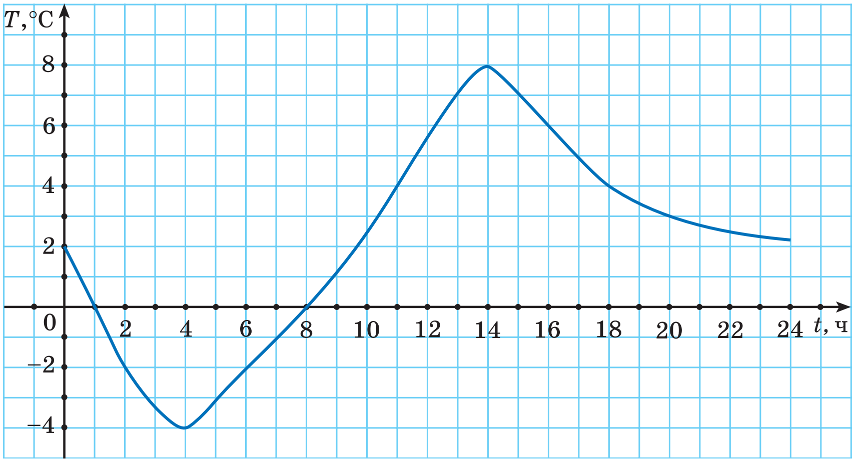


Рис. 18

Например, $f(2)=-2<0$, $f(4)=-4<0$, $f(6)=-2<0$. Можно заметить, что при всех значениях аргумента $1<t<8$ **значения функции отрицательны**, график лежит ниже оси абсцисс.

Положительные значения функция принимает, например, при $t=0$; 0,5; 9; 15; 22, т. е. при $0\leqslant t<1$ и $8<t\leqslant 24$ **значения функции положительны** и график лежит выше оси абсцисс.

Температура воздуха была равной нулю в час ночи и в восемь часов утра, т. е. $f(1)=0$ и $f(8)=0$. График пересекает ось абсцисс в двух точках.

Определение Значения аргумента, при которых значения функции равны нулю, называются **нулями функции**.

Нули данной функции — числа 1 и 8.

Пример. Найдите нули функции $f(x)=2x-2{,}8$.

Решение. Чтобы найти нули функции, нужно найти значения аргумента x, при которых значения функции $f(x)$ равны нулю, т. е. $2x-2{,}8=0$. Это линейное уравнение, решим его: $2x=2{,}8$; $x=1{,}4$.

Ответ: значение аргумента 1,4 является нулем данной функции.

График функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную таблично:

x	–5	–3	–2	0	2	3	5
y	0	–3	4	3	4	–2	0

Каждую пару чисел из столбцов таблицы можно рассматривать как координаты точки. В первой строке таблицы расположены абсциссы точек, а во второй — соответствующие им ординаты. Построим эти точки на координатной плоскости (рис. 19).

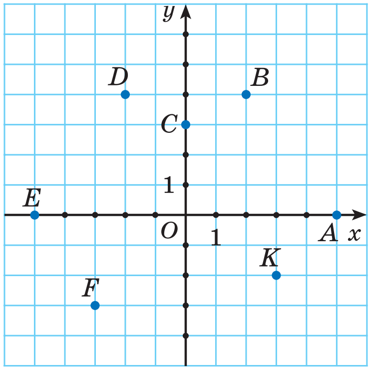


Рис. 19

Множество, состоящее из точек A, B, C, D, E, F и K, называется **графиком функции.**

Определение **Графиком функции** называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — значениям функции.

Чтобы построить график функции, заданной формулой, например $y = x^2$, можно составить таблицу, в первой строке которой задать несколько значений аргумента из области определения функции, а во второй — записать соответствующие значения функции.

x	0	–0,5	0,5	–1	1	–1,5	1,5	–2	2
y	0	0,25	0,25	1	1	2,25	2,25	4	4

Отметим точки с координатами (x; y) на координатной плоскости (рис. 20).

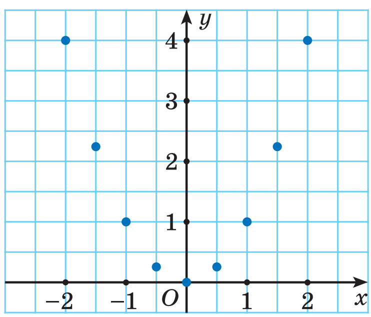


Рис. 20

Все значения аргумента из области определения функции поместить в таблицу невозможно. Однако вид графика можно представить и уточнить, увеличивая количество точек. Соединим

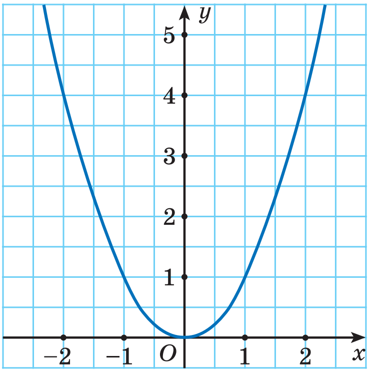


Рис. 21

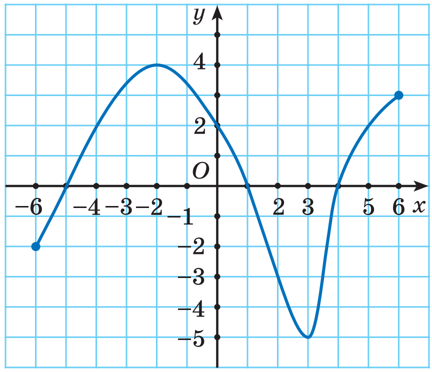


Рис. 22

эти точки плавной линией и получим график функции $y = x^2$ (рис. 21).

График функции дает информацию о ее свойствах: нулях функции, положительных и отрицательных значениях, области определения и множестве значений. Например, по графику функции на рисунке 22 можно увидеть, что ее значения трижды обращаются в нуль. Нулями данной функции являются числа -5; 1 и 4. Функция принимает положительные значения при $-5 < x < 1$ и при $4 < x \leqslant 6$. Значения функции отрицательны при $-6 \leqslant x < -5$ и при $1 < x < 4$. Область определения данной функции $-6 \leqslant x \leqslant 6$, а ее множество значений $-5 \leqslant y \leqslant 4$.

Определение функции	
1. Какие из следующих зависимостей являются функциями: а) зависимость между числом купленных тетрадей и стоимостью покупки; б) зависимость между оценкой за контрольную работу и номером учащегося по списку в журнале;	а) Эта зависимость является функциональной: каждому определенному числу тетрадей соответствует единственное значение их стоимости. б) Эта зависимость не является функциональной, так как одну и ту же оценку могут получить несколько учащихся.

<table>
<tr>
<td>в) зависимость между длиной стороны квадрата и его площадью;
г) зависимость между периметром треугольника и его наибольшей стороной?</td>
<td>в) Эта зависимость является функциональной, так как каждому значению длины стороны квадрата соответствует единственное значение его площади.
г) Эта зависимость не является функциональной, так как один и тот же периметр может быть у треугольников с разными длинами сторон. Например, периметр треугольника равен 14, а длины сторон 4, 4 и 6 или 5, 5 и 4.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Величины смежных углов равны α и β. Задайте формулой зависимость β от α. Является ли зависимость функцией?</td>
<td>Поскольку сумма смежных углов равна 180°, то $\beta = 180^\circ - \alpha$. Эта зависимость является функцией, так как каждому значению α соответствует единственное значение β.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Способы задания функции. Область определения и множество значений функции</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Функция задана таблично.
<table>
<tr><td>x</td><td>–1</td><td>4</td><td>7</td><td>8,6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2</td><td>0</td><td>8</td><td>–5</td><td>–8</td></tr>
</table>
Найдите: а) $f(4)$, $f(8{,}6)$, $f(10)$; б) $D(f)$; в) $E(f)$.</td>
<td>а) $f(4) = 0$, $f(8{,}6) = -5$, $f(10) = -8$;
б) $D(f) = \{-1; 4; 7; 8{,}6; 10\}$;
в) $E(f) = \{-8; -5; 0; 2; 8\}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Функция задана формулой $f(x) = \frac{x}{x+5}$. Найдите $f(-4)$, $f(0)$, $f(3)$.</td>
<td>$f(-4) = \frac{-4}{-4+5} = -4$,
$f(0) = \frac{0}{0+5} = 0$,
$f(3) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$.</td>
</tr>
</table>

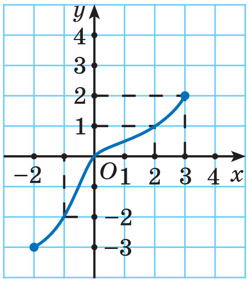
<table>
<tr>
<td>5. По графику функции $y = g(x)$, изображенному на рисунке 23, найдите $g(-1)$, $g(0)$, $g(2)$, $g(3)$.


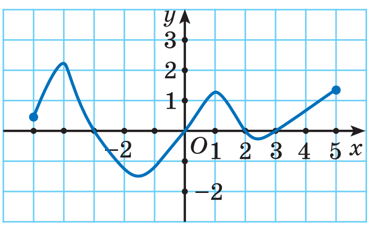
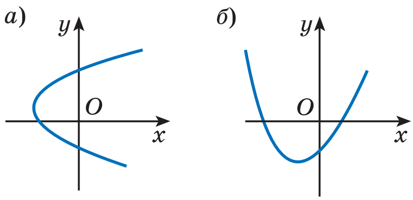
Рис. 23</td>
<td>$g(-1) = -2$, так как абсциссе –1 соответствует точка на графике с ординатой, равной –2;
$g(0) = 0$, так как абсциссе 0 соответствует точка на графике с ординатой, равной 0;
$g(2) = 1$, так как абсциссе 2 соответствует точка на графике с ординатой, равной 1;
$g(3) = 2$, так как абсциссе 3 соответствует точка на графике с ординатой, равной 2.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Нули функции. Положительные и отрицательные значения функции</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 24).
Найдите:
а) нули функции;
б) значения аргумента, при которых значения функции положительны;
в) значения аргумента, при которых значения функции отрицательны.


Рис. 24</td>
<td>а) Значения функции равны нулю при значениях аргумента, равных –3; 0; 2; 3. Полученные значения аргумента являются нулями функции.
б) Значения функции положительны при $-5 \leqslant x < -3$; $0 < x < 2$; $3 < x \leqslant 5$, так как при этих значениях аргумента график функции лежит выше оси абсцисс.
в) Значения функции отрицательны при $-3 < x < 0$; $2 < x < 3$, так как при этих значениях аргумента график функции лежит ниже оси абсцисс.</td>
</tr>
</table>

График функции	
7. Являются ли кривые графиками функций (рис. 25)?  Рис. 25	Кривая на рисунке 25, *а* не является графиком функции, так как значению абсциссы, равному, например, нулю, соответствуют два значения ординаты. На рисунке 25, *б* изображен график функции, так как каждому значению абсциссы соответствует единственное значение ординаты.

1. Площадь прямоугольника с измерениями 7 м и x м равна S. Является ли зависимость площади прямоугольника S от x функцией?

2. Можно ли найти нули функции, не используя график функции?

3.272. Какие из следующих зависимостей являются функциями:

а) зависимость между количеством человек в вагоне поезда и номером вагона; б) зависимость между натуральным числом и количеством его делителей; в) зависимость между порядковым номером месяца в году и числом дней в этом месяце?

Для выбранных функций назовите аргумент.

3.273. Длина, ширина и высота бассейна равны соответственно 25 м, 10 м и x м. Бассейн заполнен водой на $\frac{4}{5}$ его высоты. Задайте формулой зависимость объема воды V от высоты бассейна. Является ли эта зависимость функцией? Найдите объем воды, если высота бассейна равна 3 м. Какой должна быть высота бассейна, чтобы объем воды был равен 500 м^3?

3.274. В таблице записаны результаты измерений температуры в течение суток.

Время, ч	4	8	12	16	20	24
Температура, °C	–4	–1	3	4	1	–3

а) В какое время суток температура была минимальной? б) Какая температура была в полдень? в) Какая температура была в 16 ч? В 24 ч? г) Была ли температура равна 0 °C? Если да, то в какое время суток это было? д) Верно ли, что каждому времени суток соответствует единственное значение температуры? е) Верно ли, что каждому значению температуры соответствует единственное время суток?

3.275. Функция задана таблично.

x	–3	–1	1	4	8	10	12
$f(x)$	–6	–2	2	8	16	20	24

Найдите: а) $D(f)$; б) $E(f)$; в) $f(-3)$, $f(1)$, $f(12)$.

При каком значении аргумента значение функции равно –2; 8; 24? Какую закономерность можно установить между аргументом и функцией?

3.276. Функция задана формулой $f(x) = 5x - 1$. Найдите $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(100)$.

3.277. Из данных функций выберите те, для которых выполняется равенство $f(2) = 7$:

а) $f(x) = 2{,}5x + 2$; б) $f(x) = 2x + 7$;
в) $f(x) = 9 - x$; г) $f(x) = x^2 + 3$.

3.278. Верно ли, что $g(3) + g(5) = g(6)$, если функция задана формулой $g(x) = x^2 + 1$?

3.279. На рисунке 26 изображен график зависимости времени восхода солнца от месяца года в

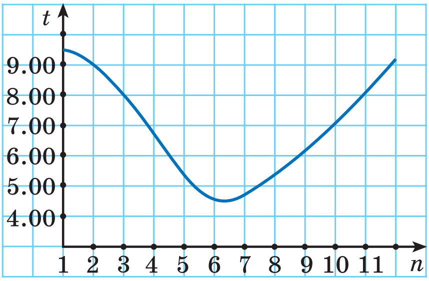


Рис. 26

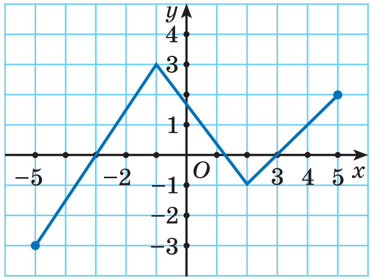


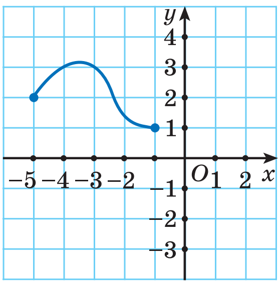
Рис. 27

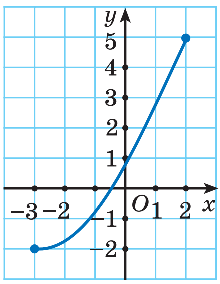
Минске. По оси t отложено время в часах восхода солнца первого дня каждого месяца. По оси n — номер месяца.

а) В какое время взошло солнце 1 февраля? б) В какие месяцы восход наступает в 7 утра? в) В какие месяцы солнце встает раньше 6 утра? г) В каком месяце самый длинный день в году? д) Назовите аргумент функции $t(n)$, изображенной на графике. е) Найдите значение функции при значении аргумента, равном 5; 7; 11. ж) Найдите $t(1)$, $t(3)$, $t(10)$.

3.280. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 27). Найдите $f(-5)$, $f(-3)$, $f(2)$, $f(4)$. Верно ли, что функция принимает значение, равное 1, только один раз?

3.281. На рисунке 28 изображены графики функций. Выберите функцию, у которой:





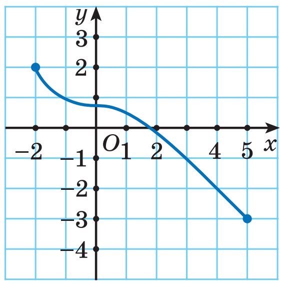


Рис. 28

а) область определения содержит только отрицательные числа; б) множество значений содержит только положительные числа; в) $D(f)$: $-2 \leqslant x \leqslant 5$; г) $E(f)$: $-3 \leqslant y \leqslant 2$.

3.282. Изобразите в тетради график функции, у которой: а) область определения содержит только положительные числа; б) множество значений содержит только отрицательные числа; в) $D(f)$: $-4 \leqslant x \leqslant 5$, а $E(f)$: $-3 \leqslant y \leqslant 4$.

3.283. На рисунке 29 изображен график зависимости температуры T воздуха от времени суток t. а) В какое время суток температура была равна нулю? б) В какие промежутки времени температура была отрицательной? Положительной? в) В какое время суток температура воздуха достигла максимального значения? Верно ли, что зависимость температуры от времени суток является функцией?

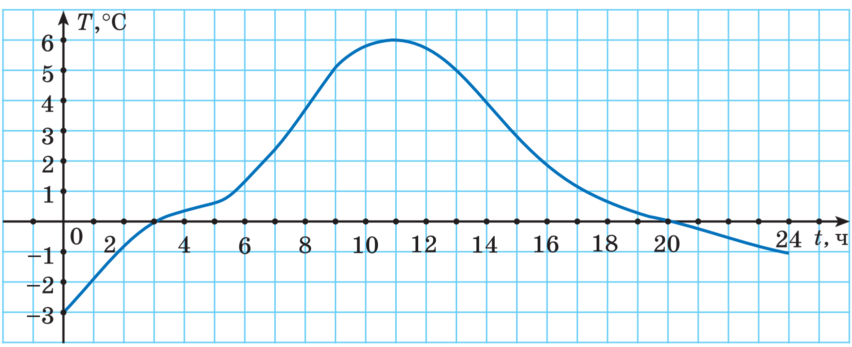


Рис. 29

3.284. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 30). Найдите: а) нули функции; б) при каких значениях аргумента значения функции положительны; в) при каких значениях аргумента значения функции отрицательны.

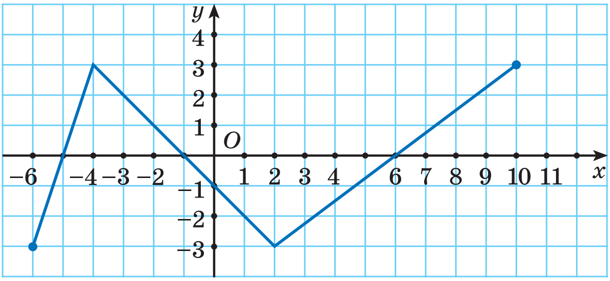


Рис. 30

3.285. Изобразите в тетради график функции, нулями которой являются числа:

а) –2 и 6; б) –5; –1 и 4.

3.286. На рисунке 31 изображены графики функций. Выберите функции:

а) не имеющие нулей; б) для которых верно равенство $f(2) = 1$; в) принимающие положительные значения при $x = -2$.

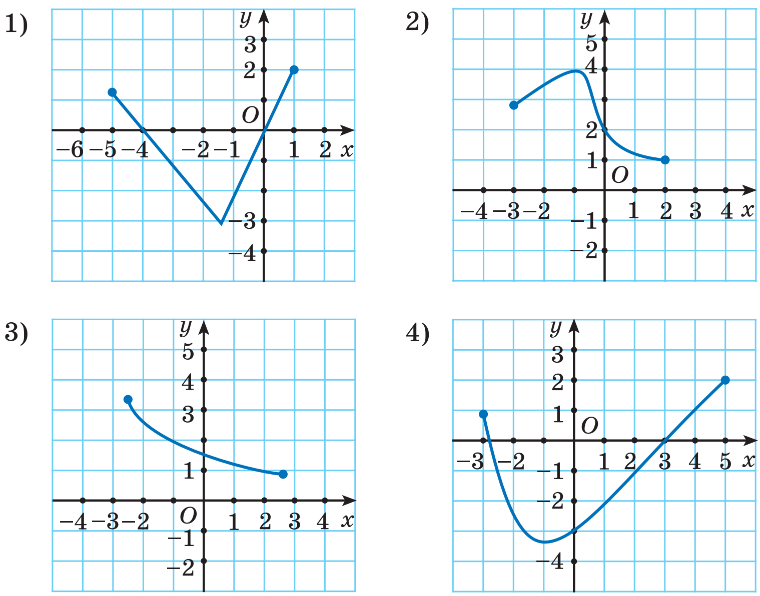


Рис. 31

3.287. Найдите нули функции:

а) $f(x) = 3x + 1$; б) $f(x) = 8 - 12x$.

3.288. Являются ли линии, изображенные на рисунке 32, графиками функций? Объясните свой ответ.

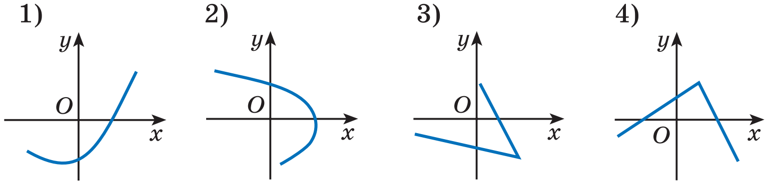


Рис. 32

3.289*. На рисунке 33 изображен график функции $y = f(x)$. С помощью графика расположите в порядке возрастания значения выражений $f(a)$; $f(b)$; $f(0)$; $f(c)$.

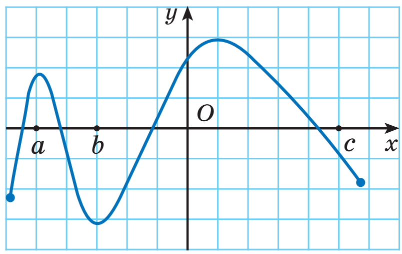


Рис. 33

3.290. Какие из следующих зависимостей являются функциями: а) зависимость между стоимостью билета и протяженностью пути в пригородном транспорте; б) зависимость между натуральным числом и его остатком от деления на 10; в) зависимость между временем выполнения домашнего задания и предметом, по которому его задали; г) зависимость между периметром равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной 6 см, и длиной его основания?

3.291. Запишите формулу зависимости длины окружности от ее диаметра. Является ли эта зависимость функцией? Найдите длину окружности, если ее диаметр равен 10 см (число π округлите до сотых). Чему должен быть равен диаметр окружности, чтобы ее длина оказалась равной 628 м?

3.292. В таблице записаны результаты измерений продолжительности светового дня первого числа каждого месяца.

Номер месяца	1	2	3	4	5	6
Продолжительность светового дня	7 ч 30 мин	8 ч 54 мин	10 ч 48 мин	13 ч 03 мин	15 ч 07 мин	16 ч 45 мин
Номер месяца	7	8	9	10	11	12
Продолжительность светового дня	17 ч 01 мин	15 ч 44 мин	13 ч 43 мин	11 ч 35 мин	9 ч 27 мин	7 ч 48 мин

а) Сколько длился световой день 1 мая? б) В каком месяце первый день самый короткий? в) В какие месяцы продолжительность первого дня превышает 11 ч?

3.293. Функция задана таблично.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49

Найдите: а) $D(f)$; б) $E(f)$; в) $f(1)$, $f(4)$, $f(7)$.

При каком значении аргумента значение функции равно 4; 25; 36? Какую закономерность можно установить между аргументом и функцией?

3.294. Для функции $f(x) = 2x + 3$ найдите $f(-5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(10)$.

3.295. Функция задана формулой $f(x) = x^2 + 3$. Найдите $f(-1)$, $f(0,5)$, $f(10)$.

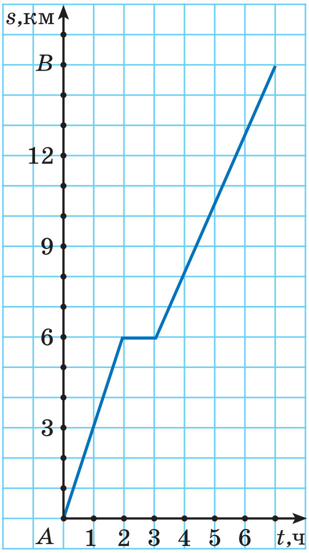


Рис. 34

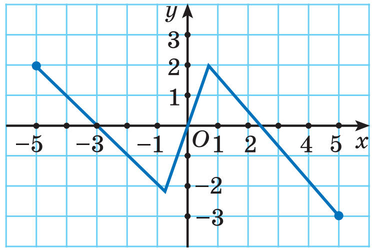


Рис. 35

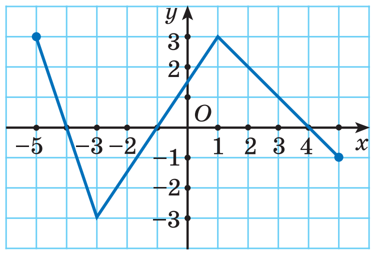


Рис. 36

3.296. На рисунке 34 изображен график движения туриста из города A в город B. По графику найдите: а) какой путь прошел турист за первый час; б) сколько времени длилась остановка; в) сколько времени был в пути турист, когда он прошел 10,5 км; г) какой путь прошел турист за 4,5 ч.

3.297. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 35). Найдите $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(4)$.

3.298. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 36). Найдите: а) нули функции; б) при каких значениях аргумента значения функции положительны; в) при каких значениях аргумента значения функции отрицательны.

3.299. Найдите нули функции, заданной формулой:

а) $f(x) = -3x + 2$;

б) $f(x) = 9 - 4x$.

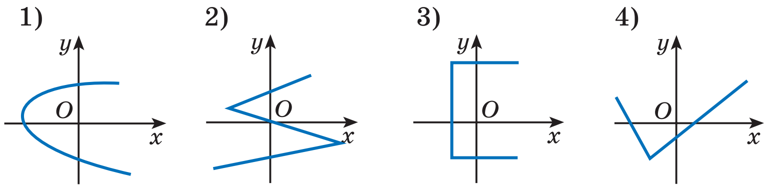


Рис. 37

3.300. Какая из линий (рис. 37) является изображением графика функции? Объясните свой ответ.

3.301. Из дробей $\frac{1}{8}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{25}{36}$ выберите ту, которую нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.

3.302. Вычтите $\frac{2}{3}$ числа 96 из $\frac{7}{8}$ числа 464.

3.303. Готовясь к поступлению в университет, абитуриент в первый день из 42 задач верно решил 35, во второй день из 54 задач — 42, а в третий день из 45 задач — 36. Какой из трех дней оказался наиболее результативным?

3.304. Решите уравнение

$$4(0{,}25x - 6) = 8(0{,}125x + 3).$$

3.305. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

$$(2{,}5 \cdot 10^{12}) : (3{,}2 \cdot 10^{-5}).$$

3.306. Решите неравенство

$$(4x - 3)^2 + (7x + 1)^2 < (5x - 4)(13x + 1).$$

3.307. Три друга решили открыть рекламное агентство, для чего понадобился первоначальный капитал в 24 000 р. Первый друг внес 45 %

первоначального капитала, второй — 3000 р., третий — всю оставшуюся часть. Друзья договорились делить прибыль пропорционально внесенным суммам. Какая сумма от прибыли в 10 000 р. достанется третьему другу?

§ 20. Линейная функция и ее свойства

3.308. Какая из точек $A(-15; 2)$; $B(20; -3)$; $C(14; -99)$; $D(10; -1)$ расположена ближе к оси ординат?

3.309. Найдите значение выражения $-2x+1$ при $x = -6$; 0; 2.

3.310. Решите уравнение $5 - 2(3x - 4) = 4x - 3$.

Решение различных задач на определение зависимостей между величинами приводит к функциям одного и того же вида.

Рассмотрим задачи. 1) Если тело движется прямолинейно и равномерно со скоростью v и находится на расстоянии s_0 от точки A, то расстояние, на котором оно будет через время t от этой точки, равно $s(t) = s_0 + vt$. Например, если $s_0 = 5$, а $v = 3$, то $s(t) = 5 + 3t$.

2) Если биатлонист проходит дистанцию в 5 км, а за каждый неверный выстрел ему приходится бежать еще 150 м, то путь s, который ему придется пройти, равен $s(n) = 5000 + 150 \cdot n$, где n — количество неверных выстрелов.

3) Если карта имеет масштаб m, то расстояние между объектами на местности L и расстояние на карте l связаны зависимостью $L(l) = \frac{1}{m} \cdot l$. Например, если масштаб карты $m = 1 : 100\,000$, то $L(l) = 100\,000 \cdot l$.

Функции в каждом из рассмотренных случаев можно выразить общей формулой $y = kx + b$, где x — значение аргумента, y — значение функции, а k и b — некоторые числа.

Определение Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, а x и y — переменные, называется **линейной функцией**.

Например, линейными являются функции:

а) $y = 5x + 3$; $k = 5$, $b = 3$;

б) $y = -\frac{1}{2}x - 6$; $k = -\frac{1}{2}$, $b = -6$;

в) $y = 4x$; $k = 4$, $b = 0$;

г) $y = 8$; $k = 0$, $b = 8$.

Для любой линейной функции можно найти ее значение по заданному значению аргумента и значение аргумента по заданному значению функции.

Для того чтобы найти значение функции по заданному значению аргумента, нужно:

① Назвать функцию и аргумент. ② В формулу функции вместо аргумента подставить его значение.	Найдите значение линейной функции $y = 6x - 2$ при значении аргумента $x = -3$. ① Функция — $y = 6x - 2$, аргумент — x. ② Значение аргумента $x = -3$ подставим в формулу функции $y = 6x - 2$ и получим $y = 6 \cdot (-3) - 2 = -20$. Значение функции $y = 6x - 2$ при значении аргумента $x = -3$ равно -20.

Для того чтобы найти значение аргумента по заданному значению функции, нужно:

① Назвать функцию и аргумент. ② В формулу функции подставить ее значение. ③ Решить полученное линейное уравнение.	Найдите значение аргумента, при котором значение функции $y = 8x - 3$ равно 1. ① Функция — $y = 8x - 3$, аргумент — x. ② Значение функции, равное 1, подставим в формулу функции $y = 8x - 3$ и получим уравнение $1 = 8x - 3$. ③ Решим линейное уравнение: $1 = 8x - 3$; $-8x = -3 - 1$; $-8x = -4$; $x = 0{,}5$. Функция $y = 8x - 3$ принимает значение, равное 1, при $x = 0{,}5$.

Свойства линейной функции

Область определения линейной функции

Областью определения линейной функции $y = kx + b$ является множество всех чисел.

$D(y)$: все числа

Например, функция $y = 8x - 1$ — линейная. Поскольку выражение, задающее функцию, имеет смысл при любых значениях аргумента, то ее область определения — множество всех чисел.

Множество значений линейной функции

Рассмотрим линейную функцию при $k \neq 0$. В этом случае переменная y может принимать любое значение, значит, множеством значений линейной функции $y = kx + b$ является множество всех чисел. $E(y)$: все числа.

При $k \neq 0$
$E(y)$: все числа

При $k = 0$ получим $y = b$ при любом значении x. В этом случае множество значений линейной функции состоит из единственного числа, равного b. $E(y) = \{b\}$.

При $k = 0$
$E(y) = \{b\}$

Например, множеством значений линейной функции $y = -2x + 1$ является множество всех чисел. А множество значений линейной функции $y = 15$ состоит из единственного числа 15, т. е. $E(y) = \{15\}$.

Нули линейной функции

Найдем те значения аргумента, при которых значения функции равны нулю, т. е. решим уравнение $kx + b = 0$.

При $k \neq 0$ получим $x = -\frac{b}{k}$ — нуль функции.

При $k = 0$ и $b \neq 0$ уравнение $0 \cdot x + b = 0$ не имеет корней, значит, линейная функция не имеет нулей.

При $k = 0$ и $b = 0$ корнем уравнения $0 \cdot x + 0 = 0$ является любое число, значит, нулями линейной функции являются все числа.

При $k \neq 0$ $x = -\frac{b}{k}$ — нуль функции.
При $k = 0$ и $b \neq 0$ нулей нет.
При $k = 0$ и $b = 0$ все числа — нули функции.

Пример 1. Найдите нули линейной функции:

а) $y = 4x + 1$; б) $y = -5$; в) $y = 0$.

Решение. Чтобы найти нули функции, нужно найти значения аргумента x, при которых значения функции равны нулю, т. е. решить линейное уравнение.

а) $4x + 1 = 0$; $4x = -1$; $x = -0{,}25$ — нуль функции;

б) $y = -5$; $y = 0 \cdot x - 5$; $0 \cdot x - 5 = 0$; $0 \cdot x = 5$ — уравнение не имеет корней, значит, функция не имеет нулей;

в) $y = 0$; $y = 0 \cdot x + 0$; $0 \cdot x + 0 = 0$ — верно при любом значении аргумента, нулями функции являются все числа.

Положительные и отрицательные значения линейной функции

Найдем те значения аргумента, при которых функция $y = kx + b$ принимает положительные и отрицательные значения, т. е. решим неравенства $kx + b > 0$ и $kx + b < 0$.

Рассмотрим решение неравенства $kx + b > 0$. При $k > 0$ получим: $kx + b > 0$, $kx > -b$, $x > -\frac{b}{k}$, т. е. $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$.

При $k < 0$ имеем $kx + b > 0$, $kx > -b$. Обе части полученного неравенства делим на отрицательное число, тогда $x < -\frac{b}{k}$, т. е. $y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$.

При $k = 0$ получаем неравенство $0x + b > 0$, $b > 0$, т. е. $y > 0$, если $b > 0$.

Аналогично рассматриваются решения неравенства $kx + b < 0$.

Если $k > 0$, то:
$y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$;
$y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$

Если $k < 0$, то:
$y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$;
$y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$

Если $k = 0$, то:
$y > 0$ при $b > 0$;
$y < 0$ при $b < 0$

Пример 2. Найдите, при каких значениях аргумента функция $y = 6x - 9$ принимает отрицательные значения.

Решение. Решим неравенство $6x - 9 < 0$: $6x - 9 < 0$, $6x < 9$, $x < 1{,}5$. Функция $y = 6x - 9$ принимает отрицательные значения при $x < 1{,}5$.

График линейной функции

Составим таблицу значений линейной функции $y = 3x + 2$, соответствующих некоторым значениям аргумента.

x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–1	2	5	8

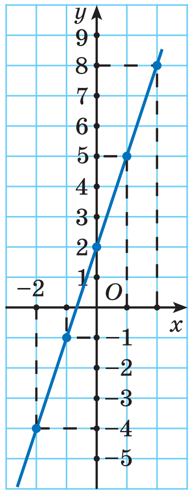


Рис. 38

Построим точки, координаты которых равны соответственно значениям аргумента (абсцисса) и значениям функции (ордината). Заметим, что построенные точки располагаются на одной прямой. Проведем ее (рис. 38).

Графиком линейной функции является прямая.

Так как график линейной функции есть прямая, то для ее построения достаточно найти две точки, через которые проходит прямая.

Для того чтобы построить график линейной функции, нужно:

① Выбрать два произвольных значения аргумента x_1 и x_2. ② Найти соответствующие им значения функции y_1 и y_2. ③ Построить точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.	Постройте график функции $y = -2x + 3$. ① $x_1 = -1$; $x_2 = 3$. ② $y_1 = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$; $y_2 = -2 \cdot 3 + 3 = -3$. ③ Построим на координатной плоскости точки с координатами $(-1; 5)$ и $(3; -3)$.

④ Провести через эти точки прямую.	④ Проведем через полученные точки прямую (рис. 39).

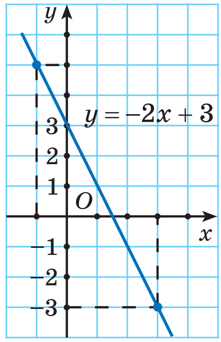


Рис. 39

Геометрический смысл чисел *k* и *b* в формуле $y = kx + b$

Построим график функции $y = 2x - 3$.

1. Выберем два произвольных значения аргумента, например $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

2. Найдем соответствующие им значения функции: $y_1 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$ и $y_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Полученные результаты можно представить в виде таблицы.

x	–1	2
y	–5	1

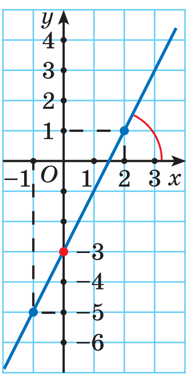


Рис. 40

3. Построим точки с координатами (–1; –5) и (2; 1).

4. Проведем через эти точки прямую (рис. 40).

У линейной функции $y = 2x - 3$ число $k = 2 > 0$, число $b = -3$. Заметим, что прямая, являющаяся графиком данной функции, образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол и пересекает ось ординат в точке (0; –3).

Построим график функции $y = -4x + 2$. Составим таблицу значений функции, соответствующих двум произвольным значениям аргумента.

x	–1	1
y	6	–2

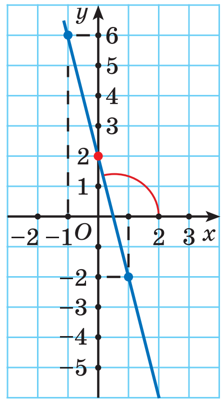


Рис. 41

Построим точки с координатами (–1; 6) и (1; –2) и проведем через эти точки прямую (рис. 41).

Для функции $y = -4x + 2$ число $k = -4 < 0$, а $b = 2$. Прямая, являющаяся графиком данной функции, образует с положительным направлением оси абсцисс тупой угол и пересекает ось ординат в точке (0; 2).

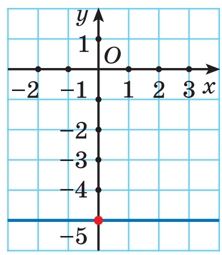


Рис. 42

Построим график функции $y = -5$. Для данной функции число $k = 0$, число $b = -5$. Так как $k = 0$, то значения функции равны –5 при любом значении аргумента. Графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (0; –5) (рис. 42).

Определение Число k называется **угловым коэффициентом прямой**, являющейся графиком функции $y = kx + b$.

По угловому коэффициенту k можно определить угол наклона прямой к оси Ox.

Число b — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

В общем случае для функции $y = kx + b$:

1. Если $k > 0$, то прямая образует с положительным направлением оси Ox **острый угол** (рис. 43).

2. Если $k < 0$, то прямая образует с положительным направлением оси Ox **тупой угол** (рис. 44).

3. Если $k = 0$, то прямая **параллельна оси** Ox (рис. 45).

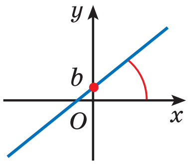


Рис. 43

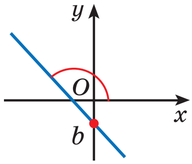


Рис. 44

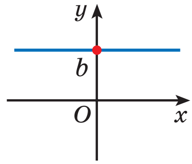


Рис. 45

Взаимное расположение графиков линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

Рассмотрим функции $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$.

Для функции $y = 2x + 1$ составим таблицу значений.

x	–1	2
y	–1	5

Для функции $y = 2x - 3$ составим таблицу значений.

x	–2	3
y	–7	3

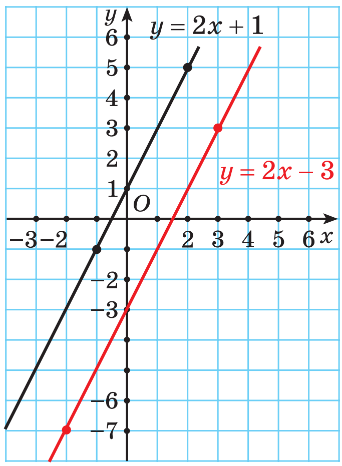


Рис. 46

Построим в одной системе координат графики функций $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$ (рис. 46). Заметим, что у этих функций угловые коэффициенты равны ($k_1 = k_2 = 2$), а $b_1 \neq b_2$. Прямые, являющиеся графиками функций $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 3$, параллельны.

В общем случае для функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

1. Если угловые коэффициенты линейных функций равны $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны (рис. 47).

2. Если угловые коэффициенты линейных функций не равны $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются (рис. 48).

3. Если угловые коэффициенты линейных функций равны $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают (рис. 49).

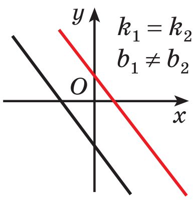


Рис. 47

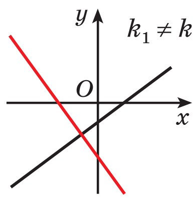


Рис. 48

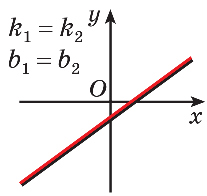


Рис. 49

Определение линейной функции	
1. Определите, какие из функций являются линейными: а) зависимость периметра P квадрата от длины его стороны a; б) зависимость объема V куба от длины его ребра x; в) зависимость площади S прямоугольника с измерениями 8 и x от x.	а) $P(a) = 4a$ — линейная функция вида $y = kx + b$, где $k = 4$, $b = 0$; б) функция $V(x) = x^3$ не является линейной, так как содержит переменную x в третьей степени; в) $S(x) = 8x$ — линейная функция вида $y = kx + b$, где $k = 8$, $b = 0$.
2. Определите, какие из функций являются линейными: а) $y = 2x + 5$;	а) Функция $y = 2x + 5$ линейная, так как имеет вид $y = kx + b$, где $k = 2$, $b = 5$.

б) $y = \frac{2}{x} - 6$; в) $y = 12x^2 + 7$; г) $y = 16x$; д) $y = 6 - x$; е) $y = 12$.	б) Функция $y = \frac{2}{x} - 6$ не является линейной, так как содержит действие деления на переменную x. в) Функция $y = 12x^2 + 7$ не является линейной, так как содержит переменную x во второй степени. г) Функция $y = 16x$ линейная, так как имеет вид $y = kx + b$, где $k = 16$, $b = 0$. д) Функция $y = 6 - x$ линейная, так как имеет вид $y = kx + b$, где $k = -1$, $b = 6$. е) Функция $y = 12$ линейная, так как имеет вид $y = kx + b$, где $k = 0$, $b = 12$.
3. Функция задана формулой $f(x) = -3x + 2$. Найдите значение функции при значении аргумента, равном: а) 3; б) −1; в) 0; г) 5,2.	а) $f(3) = -3 \cdot 3 + 2 = -7$; б) $f(-1) = -3 \cdot (-1) + 2 = 5$; в) $f(0) = -3 \cdot 0 + 2 = 2$; г) $f(5,2) = -3 \cdot 5,2 + 2 = -13,6$.
4. Функция задана формулой $y = 5 - 8x$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: а) −11; б) 0; в) 3.	а) $5 - 8x = -11$; $-8x = -16$; $x = 2$; б) $5 - 8x = 0$; $-8x = -5$; $x = \frac{5}{8}$; в) $5 - 8x = 3$; $-8x = -2$; $x = \frac{1}{4}$.
Свойства линейной функции	
5. Найдите область определения и множество значений линейной функции: а) $y = 4x + 5$; б) $y = -6$.	а) Функция $y = 4x + 5$ линейная, ее область определения $D(y)$ — множество всех чисел. Так как для данной функции $k = 4 \neq 0$, то ее множество значений $E(y)$ — множество всех чисел.

	б) Функция $y = -6$ линейная, ее область определения $D(y)$ — множество всех чисел. Так как для данной функции $k = 0$, то ее множество значений состоит из единственного числа, равного -6, т. е. $E(y) = \{-6\}$.
6. Найдите нули функции: а) $y = 2x - 15$; б) $y = 7 - 8x$.	а) Решим уравнение: $2x - 15 = 0$; $2x = 15$; $x = 7{,}5$ — нуль функции. б) Решим уравнение: $7 - 8x = 0$; $-8x = -7$; $x = \frac{7}{8}$ — нуль функции.
7. Найдите, при каких значениях аргумента функция: а) $y = 3 - x$ принимает положительные значения; б) $y = 1{,}2x + 6$ принимает отрицательные значения.	а) Решим неравенство: $3 - x > 0$; $-x > -3$; $x < 3$. Функция $y = 3 - x$ принимает положительные значения при $x < 3$. б) Решим неравенство: $1{,}2x + 6 < 0$; $1{,}2x < -6$; $x < -5$. Функция $y = 1{,}2x + 6$ принимает отрицательные значения при $x < -5$.
График линейной функции	
8. Определите, принадлежит ли точка $M(-1;\ 5)$ графику линейной функции $y = 2x - 3$.	Подставим в формулу $y = 2x - 3$ значение аргумента $x = -1$ и найдем соответствующее значение функции: $y = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$, оно не совпадает с ординатой данной точки $M(-1;\ 5)$, значит, точка не принадлежит графику.

9. Постройте график функции $y = -x + 3$.

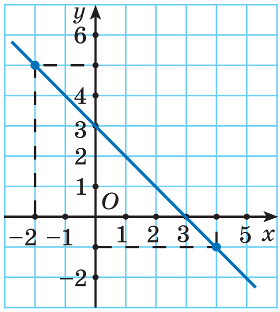


Рис. 50

① Выберем два значения аргумента, например $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$.

② Найдем соответствующие им значения функции:
$y_1 = -1 \cdot (-2) + 3 = 5$ и
$y_2 = -1 \cdot 4 + 3 = -1$.
Полученные результаты запишем в таблицу.

x	-2	4
y	5	-1

③ Построим точки с координатами $(-2; 5)$ и $(4; -1)$.

④ Проведем через эти точки прямую (рис. 50).

Геометрический смысл чисел k и b в формуле $y = kx + b$

10. Определите, график какой из функций: $y = -3x - 4$; $y = 2x + 4$; $y = 4$; $y = -2x + 4$; $y = -4x + 2$ — изображен на рисунке 51.

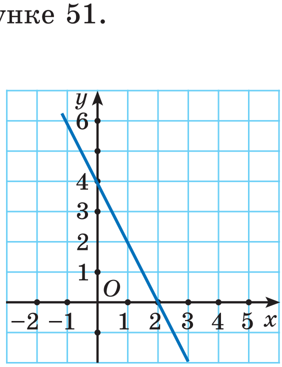


Рис. 51

График функции, изображенный на рисунке 51, составляет тупой угол с положительным направлением оси абсцисс. Значит, угловой коэффициент прямой отрицательный ($k < 0$). График функции пересекает ось ординат в точке с ординатой 4, т. е. у искомой функции $b = 4$. Из предложенных функций выберем функцию, у которой $k < 0$ и $b = 4$.
На рисунке изображен график функции $y = -2x + 4$.

Взаимное расположение графиков линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$	
11. Определите взаимное расположение прямых — графиков линейных функций, не выполняя их построения: а) $y = x - 6$ и $y = 49x$; б) $y = x$ и $y = x + 8$; в) $y = 1{,}5x + 5$ и $y = 9$; г) $y = 5{,}6 - 7x$ и $y = 7x$; д) $y = 0{,}1x$ и $y = 0{,}2x + 0{,}1$.	а) $k_1 = 1$, $k_2 = 49$, $k_1 \neq k_2$, значит, прямые пересекаются; б) $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 8$, $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$, значит, прямые параллельны; в) $k_1 = 1{,}5$, $k_2 = 0$, $k_1 \neq k_2$, значит, прямые пересекаются; г) $k_1 = -7$, $k_2 = 7$, $k_1 \neq k_2$, значит, прямые пересекаются; д) $k_1 = 0{,}1$, $k_2 = 0{,}2$, $k_1 \neq k_2$, значит, прямые пересекаются.

?

1. Если функция задана формулой $y = kx + b$, то верно ли, что ее графиком может быть любая прямая на координатной плоскости?

2. Всегда ли прямая $y = kx + b$ пересекает обе оси координат?

3. Верно ли, что значения функции $y = 3x + 1$ для всех значений аргумента положительны, а значения функции $y = -3x - 1$ для всех значений аргумента отрицательны?

3.311. Определите, какие из функций являются линейными: а) зависимость длины окружности C от длины ее радиуса r; б) зависимость площади квадрата S от длины его стороны a; в) зависимость произведения P двух чисел 7 и x от x.

3.312. Из данных функций выберите линейные:

а) $y = \frac{3}{x} + 1$; б) $y = 3x + 1$;

в) $y = x^2 + 3x$; г) $y = 3 - x$.

Назовите числа k и b для линейных функций.

3.313. Из данных функций выберите ту, которая не является линейной:

а) $y = 100$; б) $y = \frac{x}{7} + 1$; в) $y = \frac{2}{x} - 1$.

Приведите примеры каких-либо линейных функций.

3.314. Придумайте два примера линейных функций, для которых: а) числа k и b противоположны; б) число k в три раза больше числа b.

3.315. Функция задана формулой $y = -2x - 12$. Найдите значение функции при значении аргумента, равном: а) -1; б) 0; в) 4,5.

3.316. Найдите, при каком значении аргумента значение функции $y = 13 - 5x$ равно: а) -2; б) 0; в) 13.

3.317. Функция задана формулой $f(x) = 5x - 7$. Определите: а) значение функции при значении аргумента, равном 2; б) значение аргумента, при котором значение функции равно 3.

3.318. Найдите область определения и множество значений линейной функции:

а) $y = 3x + 4$; б) $y = 5 - 7x$;
в) $y = 4x$; г) $y = -9$.

3.319. Найдите нуль функции:

а) $f(x) = 9x - 1$; б) $f(x) = -6x$;
в) $f(x) = 0{,}1 - 2x$; г) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 12$.

3.320. Приведите пример линейной функции:

а) не имеющей нулей;
б) нулями которой являются все числа.

3.321. Известно, что нулем линейной функции является число 7,1. Определите координаты точки пересечения графика этой функции с осью абсцисс.

3.322. Дана функция $y = 4x - 4$. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

3.323. Не выполняя построения графика функции $f(x) = -3x + 4$, найдите: а) $f(-2,3)$; б) значение аргумента, при котором значение функции равно $-3,5$; в) координаты его точек пересечения с осями координат.

3.324. Для функции $y = -4x + 9$ найдите: а) нуль функции; б) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

3.325. При каких значениях аргумента функция $y = f(x)$ принимает отрицательные значения:

а) $f(x) = 7x$; б) $f(x) = 6 - 3x$;

в) $f(x) = \frac{x}{5} - 12$; г) $f(x) = -8$?

3.326. Приведите пример линейной функции, которая принимает положительные значения для всех значений аргумента.

3.327. Дана функция $y = 3 - 4x$. Выясните, принадлежат ли точки A, B и C графику функции, если $A(0; -1)$; $B(-2; -5)$; $C\ (5; -17)$.

3.328. Функция задана формулой $f(x) = -4,2x - 3,8$. Определите, какая из точек принадлежит графику данной функции:

а) $M(1;\ 0,4)$; б) $P(6; -29)$; в) $T(-5; -16,2)$.

3.329. Выберите функцию, график которой проходит через начало координат:

а) $f(x) = 2x - 1$; б) $f(x) = \frac{x-3}{2}$;

в) $f(x) = -\frac{5x}{3}$; г) $f(x) = 7$.

3.330. Прямая проходит через начало координат и точку $\left(\frac{1}{2};\ 7\right)$. Выберите уравнение соответствующей прямой:

а) $y = \frac{1}{2}x$; б) $y = 7x + 1$; в) $y = \frac{1}{14}x$;

г) $y = 14x$; д) $y = 3,5x - 7$.

3.331. В одной системе координат постройте графики линейных функций $y = 3x - 1$; $y = -x + 4$; $y = \frac{2x}{3} + 2$; $y = 3 - 4x$; $y = \frac{6 - x}{2}$; $y = -5$.

3.332. Постройте график функции $y = 2x - 4$. По графику функции определите:

а) значение функции при $x = -1$;
б) значение аргумента при $y = -2$.

3.333. Определите, какая из прямых $y = 4x + 2$; $y = \frac{x}{2}$; $y = 2$ проходит через начало координат. Постройте эту прямую. Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента соответствующая функция принимает отрицательные значения.

3.334. Постройте графики линейных функций $y = 5 - 2x$; $y = 0{,}25x - 5$; $y = -4x$; $y = \frac{8 - 3x}{4}$. Укажите функции, графики которых составляют тупой угол с положительным направлением оси абсцисс. Можно ли назвать такие функции, не выполняя построения их графиков?

3.335. Чему равен угловой коэффициент прямой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$;
в) $y = \frac{x}{5} + 3$; г) $y = -8$?

Выберите прямые, составляющие острый угол с положительным направлением оси абсцисс. Постройте графики этих прямых.

3.336. Из функций $y = 4x - 1$; $y = 4 - x$; $y = -4x + 2$; $y = -x - 4$ выберите ту, график которой пересекает ось ординат в точке с ординатой 4. Постройте график этой функции. Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения.

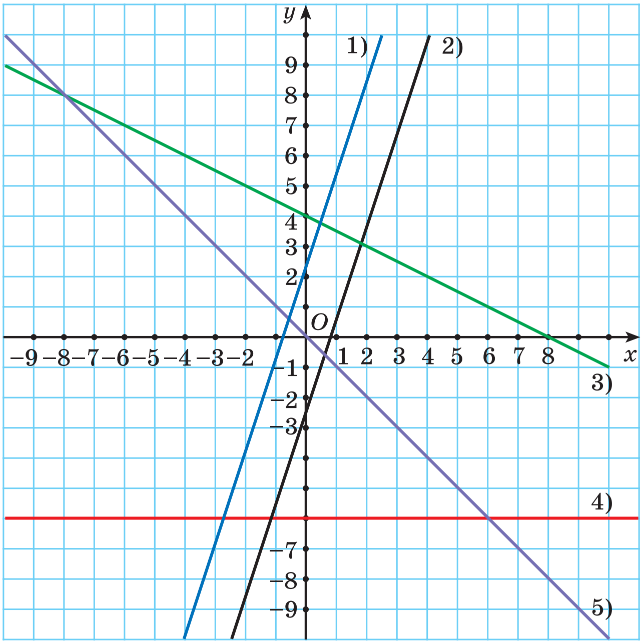


Рис. 52

3.337. На рисунке 52 изображены графики функций:

а) $y = -6$; б) $y = -\frac{x}{2} + 4$; в) $y = \frac{12x + 9}{4}$;

г) $y = 3x - 2{,}5$; д) $y = -x$.

Установите соответствие между формулами функций и их графиками.

3.338. Придумайте по два примера линейных функций, графики которых: а) составляют острый угол с положительным направлением оси абсцисс и пересекают ось ординат в точке с отрицательной ординатой; б) составляют тупой угол с положительным направлением оси абсцисс и проходят через начало координат; в) параллельны оси абсцисс и пересекают ось ординат в точке с положительной ординатой.

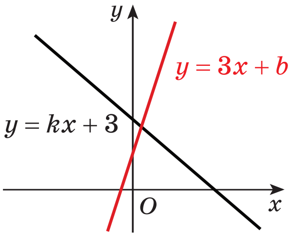


Рис. 53

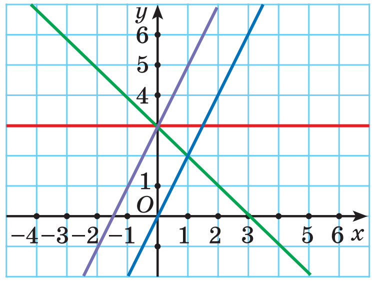


Рис. 54

3.339. Запишите формулу линейной функции, график которой параллелен оси абсцисс и проходит через точку $A(1;\ 5)$. Постройте график этой функции. Запишите координаты каких-либо еще двух точек, принадлежащих графику функции.

3.340. На рисунке 53 изображены графики функций $y = kx + 3$ и $y = 3x + b$. Укажите верное утверждение: а) $b < 0$; б) $b > 3$; в) $b < 3$; г) $b = 3$.

3.341. В одной системе координат постройте графики функций $y = -0{,}5x + 2$; $y = -0{,}5x - 1$; $y = 3$.

3.342. При каком значении k прямые $y = kx + 8$ и $y = -5x + 6$ не пересекаются?

3.343. Укажите функцию, графика которой нет на рисунке 54: а) $y = 2x$; б) $y = 2x + 3$; в) $y = -x + 3$; г) $y = 3$; д) $y = 3x - 2$.

3.344. Запишите функцию, график которой параллелен графику функции $y = 3x - 4$ и пересекает ось ординат в точке $F(0;\ -5)$. Постройте ее график.

3.345. Графики функций $y = -5x$ и $y = kx + b$ параллельны, причем график функции $y = kx + b$ проходит через точку $N(2;\ -7)$. Найдите k и b.

3.346. Постройте график линейной функции, если известно, что он проходит через точку $A(2;\ 1)$ и параллелен графику функции $y = 3x - 1$.

3.347. Постройте графики функций $y = -3x + 8$ и $y = 5x$. Найдите координаты точки их пересечения.

3.348. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = -2x - 1$ и $y = 3x + 5$;

б) $y = \frac{2x+3}{2}$ и $y = \frac{5x-1}{3}$.

3.349. При каких значениях аргумента значения функций $y = -2x + 1$ и $y = -6x$ равны?

3.350. Существует ли значение аргумента, при котором значения функций $y = \frac{7x-2}{2}$ и $y = 3{,}5x + 4$ равны?

3.351*. Постройте график функции

$y = 5(x+1)^2 + (x-3)^2 - 6(x-1)(x+1) - 17.$

Проходит ли построенный график через точку $A(-35;\ 33)$?

3.352*. Две прямые, изображенные на рисунке 55, пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.

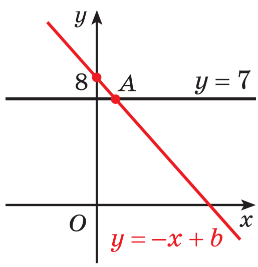


Рис. 55

3.353*. Постройте график функции $y = (x+1)^2 - (x+2)^2 + 6$. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

3.354*. Дана линейная функция $y = kx + 4$. При каком значении k график этой функции: а) не пересекает ось абсцисс; б) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой -2; в) проходит через точку пересечения графиков функций $y = 5 - 3x$ и $y = 2x$?

3.355*. Докажите, что графики функций $y = -5x$, $y = -2x - 3$ и $y = 0{,}4x - 5{,}4$ пересекаются в одной точке.

3.356*. Постройте прямую $y = -2x + 1$ и прямую, симметричную ей относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат. В каждом случае запишите уравнение построенной прямой.

3.357. Определите, какие из функций являются линейными: а) зависимость площади круга S от длины его радиуса r; б) зависимость суммы A двух чисел 5 и x от x.

3.358. Среди функций $y = 5x - 1$, $y = x^2 + 4$, $y = 7 - 8x$, $y = \frac{5}{x} + 6$ выберите линейные. Укажите для них значения чисел k и b.

3.359. Придумайте два примера линейных функций, для которых числа k и b: а) равны; б) являются взаимно обратными.

3.360. Функция задана формулой $y = \frac{1}{3}x - 12$. Найдите значение функции при значении аргумента, равном: а) -6; б) 1; в) 0.

3.361. Найдите, при каком значении аргумента значение функции $y = 6x + 9$ равно: а) -3; б) 0; в) -9.

3.362. Для функции $f(x) = 10x - 3$ найдите: а) значение функции при значении аргумента, равном 3; б) значение аргумента, при котором значение функции равно 7.

3.363. Найдите область определения и множество значений линейной функции:

а) $y = 5x - 7$; б) $y = -6x$; в) $y = 10$.

3.364. Найдите нуль функции:

а) $f(x) = 6x + 2$; б) $f(x) = 3x$; в) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 6$.

Придумайте пример линейной функции, нулем которой является число 12.

3.365. График линейной функции пересекает ось абсцисс в точке $F(-4; 0)$. Найдите нуль этой функции.

3.366. Дана функция $y = 5x - 10$. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

3.367. Для функции $y = -2x + 9$ найдите: а) нуль функции; б) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; в) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

3.368. Через какие из точек $A(-3; -10)$; $B(2; 0)$; $C(0; 4)$ проходит прямая $y = 2x - 4$? Назовите еще какие-либо две точки, через которые проходит эта прямая.

3.369. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2x + 1$; $y = -x + 3$; $y = -\frac{1}{2}x - 2$; $y = 6$. Определите координаты точки пересечения графика каждой функции с осью ординат. Можно ли определить координаты этих точек, не выполняя построения графиков?

3.370. Какая из прямых $y = 2x + 4$; $y = -\frac{x}{4}$; $y = 4x - 2$ проходит через точку $A(0; 4)$? Постройте эту прямую. Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента соответствующая функция принимает положительные значения.

3.371. Выберите прямую, угловой коэффициент которой равен –3:

а) $y = 8x - 3$; б) $y = 5 - 3x$;

в) $y = -3$; г) $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Верно ли, что эта прямая составляет острый угол с положительным направлением оси абсцисс?

3.372. Какой из графиков (рис. 56) может являться графиком функции $y = 2x - 3$?

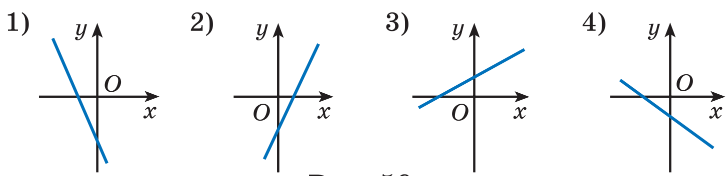


Рис. 56

3.373. Из данных функций выберите те, графики которых составляют тупой угол с положительным направлением оси абсцисс и пересекают ось ординат в точке с положительной ординатой:

а) $y = 4x - 3$; б) $y = -3x + 8$;
в) $y = 1 - x$; г) $y = 4x$.

Постройте графики выбранных функций.

3.374. При каком значении b прямые $y = 3x + b$ и $y = -8x - 2$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат?

3.375. На рисунке 57 изображен график функции $y = -2x + b$. Найдите значение b. Найдите значение функции при $x = -33$.

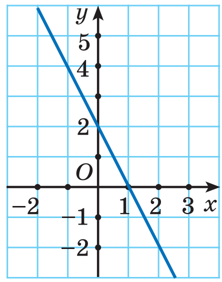


Рис. 57

3.376. Запишите формулу линейной функции, график которой параллелен оси абсцисс и проходит через точку $A(-3;\ -7)$. Постройте график этой функции.

3.377. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2x$; $y = 2x - 3$; $y = 2x + 5$.

3.378. Запишите функцию, график которой параллелен графику функции $y = -3x + 4$ и пересекает ось ординат в точке $B(0;\ 3)$. Постройте ее график.

3.379. Графики функций $y = kx$ и $y = 3x + b$ параллельны, причем график функции $y = 3x + b$ проходит через точку $N(-1;\ 2)$. Найдите k и b.

3.380. Постройте графики функций $y = 3x - 5$ и $y = -2x$. Найдите координаты точки их пересечения.

3.381. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = \frac{x-2}{2}$ и $y = \frac{2x-1}{5}$, не выполняя построения графиков.

3.382. При каких значениях аргумента значения функций $y = 5x - 2$ и $y = -6x$ равны?

3.383*. Постройте график функции

$$y = 2(x-1)^2 + (x+1)^2 - 3(1+x)(x-1) - 2.$$

3.384*. Дана линейная функция $y = 4x + b$. При каком значении b график этой функции проходит через точку пересечения графиков функций $y = -0{,}5x + 1$ и $y = -x - 1$?

3.385*. Постройте график функции $y = (x-3)^2 - (x-2)^2$. Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

3.386. Выразите 0,00025 мм в сантиметрах и запишите ответ в стандартном виде.

3.387. Проездной билет на месяц стоит 50 р. Студент приобрел проездной билет и сделал за месяц 112 поездок. Выясните, удалось ли студенту сэкономить, если стоимость разовой поездки составляет 1,2 % от стоимости проездного билета.

3.388. Найдите НОД и НОК чисел 125; 1575; 2025.

3.389. Вычислите: $\dfrac{1{,}3 \cdot 4 - 3{,}3 \cdot 3 - 1{,}3 \cdot 5 + 3{,}3 \cdot 4}{1{,}1 \cdot 2 + 0{,}7 \cdot 2}$.

3.390. Решите неравенство $\dfrac{x+2}{15} - \dfrac{7x-1}{5} \leqslant \dfrac{5-2x}{9}$.

3.391. Выразите 1 тыс. секунд в часах. Полученный ответ округлите до десятых.

3.392. На конференцию по развитию искусственного интеллекта приехали 165 делегатов из разных стран. Из них 70 человек говорят на английском языке, 70 — на китайском, а 35 человек владеют только французским языком. Найдите число делегатов, говорящих и на английском и на китайском языках.

Практическая математика

3.393. Два давних друга, живущих в разных городах, решили повидаться. Они договорились встретиться на трассе не позднее полудня и провести остаток дня в ближайшем от места встречи городе. В 8.00 они выехали на автомобилях одновременно навстречу друг другу из своих городов, длина трассы между которыми 700 км. Один из них ехал со скоростью 95 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. С какой минимальной скоростью надо ехать другому, чтобы не опоздать на встречу?

3.394. Прогулочный теплоход некоторое время движется вверх против течения реки, а затем возвращается обратно. Программа прогулки на теплоходе для туристов предусматривает: 1) рассказ экскурсовода, продолжающийся весь путь вверх против течения; 2) свободное время в музыкальной каюте на обратной дороге. Скорость течения реки равна 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите, какой должна быть собственная скорость теплохода, чтобы рассказ экскурсовода занял по крайней мере $\frac{3}{4}$ всего времени путешествия.

3.395. Для нормального освещения помещений гостиницы требуется 250 лампочек, каждая из которых стоит не менее 2 р. Каждый месяц требуют замены не менее 10 % лампочек. В какую минимальную сумму обходится бесперебойное обеспечение освещения гостиницы в течение полугода?

3.396. В некоторых странах мира для измерения температуры пользуются шкалой Фаренгейта. Для перевода температуры из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия пользуются формулой $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, где F — температура по Фаренгейту, а C — температура по Цельсию. Выясните: а) в какой сезон года температура могла быть равной 20 °F; б) нормальную температуру человеческого тела (36,6 °С) по Фаренгейту; в) точку таяния льда по Фаренгейту.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать, что называется линейным уравнением;
- знать, сколько корней имеет линейное уравнение в зависимости от коэффициентов;
- знать, какая функция называется линейной;
- знать способы задания различных функций;
- знать, как зависит график линейного уравнения $y = kx + b$ от k и b;
- уметь решать линейные уравнения с помощью равносильных преобразований;
- уметь решать линейные неравенства с использованием равносильных преобразований;
- уметь решать задачи с помощью линейных уравнений.

Я проверяю свои знания

1. Выберите уравнение, корнем которого является любое число:

а) $0 \cdot x = 0$; б) $0 \cdot x = -2$; в) $-3x = 0$.

Сколько корней может иметь линейное уравнение?

2. На рисунке 58 изображены графики функций:

а) $y = -2x - 1$; б) $y = 2x + 1$;

в) $y = -\frac{x}{2} - 1$; г) $y = \frac{x}{2} - 1$.

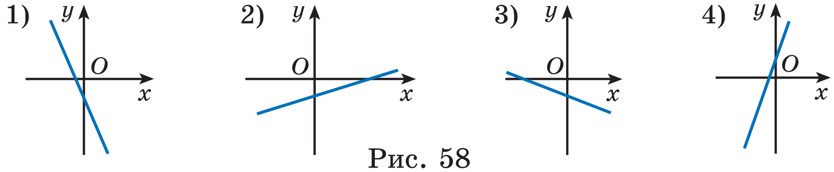


Рис. 58

Установите соответствие между формулами функций и их графиками. Какой смысл имеют числа k и b для линейной функции $y = kx + b$?

3. Известно, что $a < b$. Пользуясь свойствами числовых неравенств, установите, верно ли, что:

а) $a + 3 < b + 3$; б) $a - 4 > b - 4$; в) $7a > 7b$;

г) $-a > -b$; д) $\frac{a}{6} < \frac{b}{6}$; е) $-\frac{a}{2} > -\frac{b}{2}$.

4. Сколько точек достаточно отметить на координатной плоскости, чтобы построить график линейной функции? Почему? В одной системе координат постройте графики функций $y = 3x - 2$; $y = -x + 4$; $y = 3x$; $y = -2$.

При каком условии графики двух линейных функций параллельны? Пересекаются?

5. Решите неравенство:

а) $-6x \geqslant 42$; б) $15x - 24 > -x + 4$.

6. В трех залах музея 510 картин. В первом зале в 3 раза больше картин, чем во втором, и на 20 картин меньше, чем в третьем. Сколько картин во втором зале музея?

7. Выполните необходимые преобразования и решите уравнение:

а) $(4x + 3) - (10x + 11) = 7 + (13 - 4x)$;

б) $5(x - 3) - 2(x - 7) + 7(2x + 6) = 14$;

в) $\frac{3x - 2}{5} = \frac{x + 1}{2} - \frac{3 - 7x}{10}$;

г) $12 - (4 - x)^2 = (x + 1)(1 - x) - 3x$.

8. Верно ли, что линейное неравенство может не иметь решений? Решите неравенство:

а) $x(x + 4) > (x + 3)(x + 1)$; б) $x^2 - 4x < (x - 2)^2$.

9. Найдите, при каком значении n точка $A(1 - n; n)$ принадлежит графику функции $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

10. Найдите, при каких значениях p уравнение $px + 5 = 3 + x$ имеет положительный корень.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. а) Рассмотрим новый способ построения графика линейной функции. Построим график функции $y = \frac{2}{3}x + 1$. Отметим точку $b = 1$ на оси ординат. Так как $k = \frac{2}{3}$, то отложим от точки (0; 1) три клетки вправо и две клетки вверх и отметим точку (3; 3). Проведем прямую через отмеченные точки (рис. 59). Полученная прямая является графиком данной функции. Попробуйте объяснить, почему в алгоритме такие шаги.

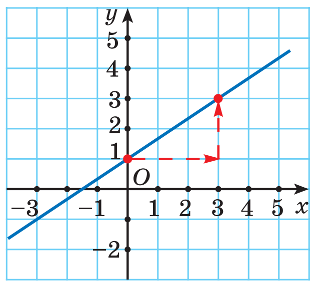


Рис. 59

б) Сформулируйте общий алгоритм. Познакомьте друзей с этим способом построения графика линейной функции.

Готовимся к олимпиадам*

1. Решите числовой ребус: $AAAA - BBB + CC - D = 1234$ (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).

2. Используя смекалку и элементарные знания об окружающем мире, решите уравнение $29m + 30n + 31k = 366$, где m, n и k — натуральные числа.

---

* По материалам сайта www.problems.ru.

Глава 4

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 21. Линейное уравнение с двумя переменными

4.1. Найдите значение выражения:

а) $(-1{,}5 + 4 - 2{,}5)(-6)$;   б) $0{,}25 - \frac{1}{3}$.

4.2. Упростите выражение:

а) $7 - 3(6y - 4)$;   б) $8a + (5 - a) - (9 + 11a)$.

4.3. Найдите значение выражения $-0{,}1x + 5$ при:

а) $x = 10$;   б) $x = -0{,}1$;   в) $x = 0$.

Различные задачи на определение значений величин приводят к уравнениям одного и того же вида.

Рассмотрим задачи. 1) Мука расфасована в пакеты по два и по три килограмма. Сколько пакетов каждого вида нужно взять, чтобы получить 20 кг муки?

Обозначим через x количество пакетов муки по два килограмма, а через y количество пакетов муки по три килограмма, тогда по условию задачи получим $2x + 3y = 20$.

2) Можно ли из монет в 2 к. и 5 к. сложить сумму в 13 к.?

Обозначим через x количество монет по 2 к., а через y количество монет по 5 к., тогда по условию задачи $2x + 5y = 13$.

В каждой из рассмотренных задач получили уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа.

Определение Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа, называется **линейным уравнением с двумя переменными.**

Будем рассматривать уравнения, в которых по крайней мере один из коэффициентов (a или b) не равен нулю.

Решение линейного уравнения с двумя переменными

Вернемся к задаче 1). Заметим, что по условию задачи подойдут значения переменных $x = 7$ и $y = 2$, или $x = 4$ и $y = 4$, или $x = 1$ и $y = 6$.

Убедимся в этом, подставляя эти пары значений в уравнение $2x + 3y = 20$. Полученные числовые равенства: $2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$, $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 20$ — являются верными. Каждая из пар чисел (7; 2); (4; 4); (1; 6) является решением уравнения $2x + 3y = 20$.

В записи пары чисел важно, что на первом месте стоит значение первой переменной (x), а на втором — значение второй переменной (y). В таком случае говорят, что пара чисел (x; y) **упорядоченная.**

Определение Упорядоченная пара чисел (x_0; y_0) называется **решением уравнения $ax + by = c$,** если при подстановке этих чисел в уравнение получается верное числовое равенство, т. е. числовое равенство $ax_0 + by_0 = c$ верное.

$ax + by = c$
$(x_0;\ y_0)$
$ax_0 + by_0 = c$ — верно
$(x_0;\ y_0)$ — решение уравнения

В задаче 2) составили уравнение $2x+5y=13$, которому по условию задачи подойдет только пара чисел $x=4$, $y=1$. Так как $2\cdot4+5\cdot1=13$ — верное равенство, то пара чисел (4; 1) является решением уравнения $2x+5y=13$.

Число решений уравнения $ax+by=c$

Число решений уравнения $ax+by=c$ зависит от условий задачи. В общем случае, если на x и y не накладывается никаких дополнительных условий, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Например, подставляя произвольные значения переменной x в уравнение $2x+3y=20$, получаем линейные уравнения с переменной y, решая которые, находим значения y:

при $x=1$
$2\cdot1+3y=20$;
$y=6$;
(1; 6) — решение уравнения;

при $x=2{,}5$
$2\cdot2{,}5+3y=20$;
$y=5$;
(2,5; 5) — решение уравнения.

Таким же образом, подставляя произвольное значение x в уравнение $ax+by=c$ и решая полученное уравнение относительно y, будем получать пары чисел $(x;\ y)$ — решения уравнения.

Линейное уравнение с двумя переменными	
1. Какие из уравнений: а) $2x+3y=7$; б) $x+2y=0$; в) $x^2-6y=-4$; г) $-x-y=1{,}5$; д) $x^2-6y^2=-9$ — являются линейными уравнениями с двумя переменными?	Так как линейным уравнением называется уравнение вида $ax+by=c$, то уравнения а), б) и г) — линейные. В уравнении а) $a=2$, $b=3$, $c=7$, в уравнении б) $a=1$, $b=2$, $c=0$, в уравнении г) $a=-1$, $b=-1$, $c=1{,}5$.

Решение линейного уравнения с двумя переменными	
2. Верно ли, что пары чисел (1; 2), (2; 1) являются решениями уравнения $3x - 2y = 4$?	Подставим в уравнение $3x - 2y = 4$ вместо x значение 1, а вместо y — значение 2. Получим: $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4$. Это равенство неверное, значит, пара чисел (1; 2) не является решением этого уравнения. Для второй пары чисел получим: $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$. Это равенство верное, значит, пара чисел (2; 1) является решением этого уравнения.
3. Найдите несколько решений уравнения $-x + 4y = 5$.	Выберем произвольное значение y, например $y = 3$, подставим это значение в уравнение $-x + 4y = 5$ и получим уравнение $-x + 4 \cdot 3 = 5$. Решим его и найдем значение $x = 7$. Значит, пара чисел (7; 3) — решение данного уравнения. Выберем еще одно значение y, например $y = 0$, подставим это значение в уравнение $-x + 4y = 5$ и получим уравнение $-x + 4 \cdot 0 = 5$. Решим его и найдем значение $x = -5$. Пара чисел (–5; 0) — решение данного уравнения. Если $y = 0{,}5$, то $x = -3$. Пара чисел (–3; 0,5) — решение данного уравнения.

? **1.** Запишите три уравнения вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа. Являются ли записанные уравнения линейными уравнениями с двумя переменными?

2. Пара чисел (1; –1) — решение уравнения $2x - 3y = 5$. а) Существуют ли другие решения этого уравнения? б) Является ли пара чисел (–1; 1) решением этого уравнения?

4.4. Какие из следующих уравнений являются линейными уравнениями с двумя переменными:

а) $2x - 3y = 5$; б) $x^2 + 2y = 7$;
в) $21y + 17x = -3$; г) $xy - 3x = 8$?

Для линейных уравнений с двумя переменными укажите a, b и c.

4.5. Составьте линейное уравнение с двумя переменными по условию задачи:

а) 2 кг яблок и 1 кг апельсинов стоят 5 р.;
б) 2 коробки конфет дороже 3 коробок зефира на 4 р. 20 к.;
в) 3 кг сахара дешевле 4 кг муки на 1 р.

4.6. Проверьте, является ли пара чисел $x = 3\frac{2}{9}$ и $y = 8\frac{7}{9}$ решением уравнения $x + y = 12$. Найдите еще две пары значений переменных, являющихся решением этого уравнения.

4.7. Выберите пары чисел, являющиеся решениями уравнения $3x - 4y = 7$:

а) (1; –1); б) $\left(0;\ 1\frac{3}{4}\right)$;
в) $\left(2\frac{1}{3};\ 0\right)$; г) (0,6; –1,3).

4.8. Выберите уравнения, решением которых является пара чисел (1; 3):

а) $2x - 3y = -5$; б) $-x + y = 2$;
в) $5x - y = 2$; г) $0x - 7y = -21$.

4.9. Верно ли, что уравнение $2x + y = 2$:

а) имеет единственное решение (1; 0);
б) имеет не более двух решений?

4.10. Составьте какое-либо линейное уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяет пара чисел $x = 2{,}5$; $y = 1$.

4.11. Из равенства $x + 2y = 5$ выразите:

а) x через y; б) y через x.

4.12. Выразите y через x в уравнении:

а) $5x - y = -3$; б) $x - 9y = 1$;

в) $0{,}4x - 2y = 1{,}2$; г) $\frac{1}{7}x - 0{,}2y = -1$;

д) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 15$; е) $0{,}3x + \frac{2}{7}y = -6$.

Для каждого уравнения найдите два каких-либо его решения.

4.13. Даны два линейных уравнения с двумя переменными: $x - y = 4$ и $x + y = 8$. Найдите пару чисел, которая:

а) является решением первого уравнения, но не является решением второго;
б) является решением второго уравнения, но не является решением первого;
в) является решением и первого и второго уравнений;
г) не является решением ни первого ни второго уравнений.

4.14. Для награждения победителей школьной олимпиады приобрели m записных книжек по 3 р. и n фоторамок по 5 р. Вся покупка обошлась в 71 р. Сколько записных книжек было куплено? Найдите все решения.

4.15. За каждый час работы в кафе студенту платят 9 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. За семь рабочих дней он заработал 170 р. Сколько всего часов он отработал и сколько разбил тарелок, если он работает не более 3 ч в день?

4.16. Периметр равнобедренного треугольника равен 16 см. Чему могут быть равны длины боковой стороны и основания, если они выражаются целыми числами?

4.17*. Группу туристов из 20 человек нужно разместить в двухместные и трехместные номера. Найдите все варианты возможного размещения туристов.

4.18. Запишите три каких-либо линейных уравнения с двумя переменными.

4.19. Составьте линейное уравнение с двумя переменными по условию задачи:

а) 2 пакета молока и пакет кефира стоят 5 р. 25 к.;
б) 5 одинаковых груш тяжелее 3 одинаковых яблок на 570 г;
в) на изготовление 1 плаща и 3 курток ушло 11 м ткани.

4.20. Проверьте, является ли пара чисел $x = 2\frac{2}{7}$ и $y = -1\frac{5}{7}$ решением уравнения $x - y = 4$. Подберите еще пару значений переменных, являющихся решением этого уравнения.

4.21. Выберите пары чисел, являющиеся решениями уравнения $10x + y = 12$:

а) (3; –20); б) (–2; 12); в) (0,1; 11); г) (1; 2).

4.22. Составьте линейное уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяет пара чисел $x = -3$; $y = 2$.

4.23. Из равенства $x + 4y = 7$ выразите:

а) x через y; б) y через x.

4.24. Выразите x через y в уравнении:

а) $x + 7y = 1$; б) $3x - 12y = 5$;

в) $-x + 6y = 5$; г) $0,5x - 8y = -7$;

д) $\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}y = 4$; е) $1,3x - y = \frac{13}{15}$.

Для каждого уравнения найдите два каких-либо его решения.

4.25. Ученик купил a обложек по 10 к. и b тетрадей по 15 к., уплатив за всю покупку 95 к. Сколько тетрадей купил ученик? Найдите все решения.

4.26. Семиклассники выполняли тест, содержащий задания по алгебре и по геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставлялось 4 балла, а на геометрический — 5 баллов. Семиклассник верно ответил на все вопросы и получил 65 баллов. Сколько в тесте могло быть заданий по алгебре и по геометрии?

4.27*. Среди решений уравнения $3x + 5y = 18$ найдите такую пару, которая состоит из двух противоположных чисел.

4.28. Вычислите: $\frac{2^7 \cdot 2^9}{8 \cdot 2^{11}}$.

4.29. Тетрадь стоит 12 к. Найдите, сколько заплатит покупатель за 50 тетрадей, если при покупке более 45 тетрадей магазин делает скидку 18 % от стоимости всей покупки.

4.30. Когда поезд прошел 37,5 % пути между станциями, то до половины пути ему осталось пройти 20 км. Найдите длину пути между станциями.

§ 22. График линейного уравнения $ax + by = c$ с двумя переменными

4.31. На рисунке 60 изображен график функции $y = -x + 4$. Найдите координаты точки пересечения этого графика с прямой:

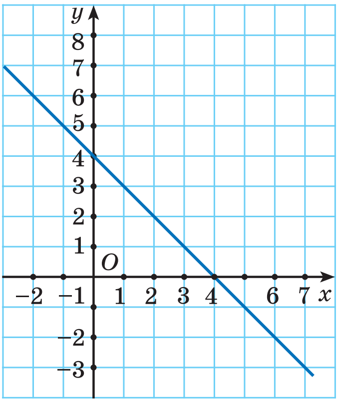


Рис. 60

а) $y = 5$; б) $y = -2$; в) $y = x$.

4.32. Функция задана формулой $y = \frac{1}{3}x - 4$. Найдите:

а) значение функции, если значение аргумента равно 9;

б) значение аргумента, если значение функции равно 8.

4.33. Постройте график функции $y = -2x + 3$. Принадлежит ли этому графику точка:

а) $A(0;\ 3)$; б) $B(-2;\ 3)$; в) $C(100;\ -197)$?

Рассмотрим линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$.

1. Если $b \neq 0$, то разделим обе части уравнения $ax + by = c$ на b и выразим переменную y:

$$\frac{ax}{b} + y = \frac{c}{b};\quad y = -\frac{ax}{b} + \frac{c}{b}.$$

Получили линейную функцию $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Ее график — прямая.

> $ax + by = c,$
>
> $b \neq 0$
>
> $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$
>
> График — прямая

Рассмотрим, например, уравнение $3x + 2y = 6$. Разделим обе части уравнения на 2 и выразим переменную y: $\frac{3x}{2} + y = 3$; $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Это уравнение задает линейную функцию, график которой изображен на рисунке 61.

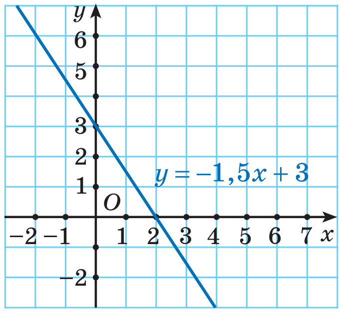


Рис. 61

2. Если $b \neq 0$, $a = 0$, то из уравнения $0x + by = c$, т. е. $by = c$, получим $y = \frac{c}{b}$. Если $c \neq 0$, то графиком линейной функции $y = \frac{c}{b}$ является прямая, параллельная оси абсцисс. Если $c = 0$, то графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

$ax + by = c$,
$b \neq 0,\ a = 0,\ c \neq 0$
$y = \frac{c}{b}$
График — прямая, параллельная оси абсцисс

Например, если $0x + 3y = 6$, то $y = 2$. Это значит, что для любого значения x значение y равно 2. Графически это означает, что все точки графика лежат на прямой, параллельной оси абсцисс, проходящей через точку (0; 2) (рис. 62).

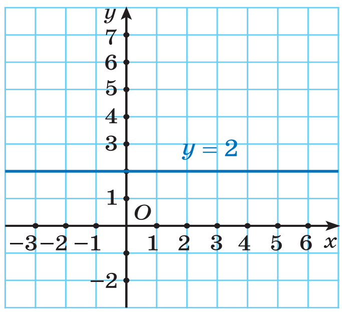


Рис. 62

3. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$ принимает вид $ax = c$, откуда $x = \frac{c}{a}$. Если $c \neq 0$, то его графиком является прямая, параллельная оси ординат. Если $c = 0$, то графиком уравнения $x = 0$ является ось ординат.

$ax + by = c$,
$b = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0$
$x = \frac{c}{a}$
График — прямая, параллельная оси ординат

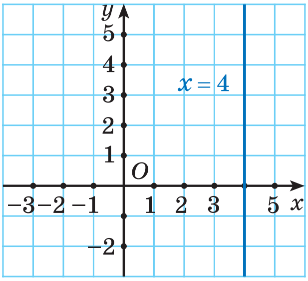


Рис. 63

Например, если $5x + 0y = 20$, то $x = 4$, т. е. для любого значения y значение x равно 4. Графически это означает, что все точки графика лежат на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку (4; 0) (рис. 63).

Графиком линейного уравнения $ax + by = c$ с двумя переменными является прямая.

График линейного уравнения $ax + by = c$ с двумя переменными

Постройте график линейного уравнения:

а) $2x + 3y = -6$; б) $0x - 4y = 8$; в) $4x - 0y = 12$.

Решение: а) Так как коэффициент перед переменной y не равен нулю ($b \neq 0$), то выразим из уравнения переменную y. Получим линейную функцию $y = -\frac{2}{3}x - 2$, графиком которой служит прямая. Построим график, задав две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению. Выберем, например, $x = 3$, тогда $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 - 2$, $y = -4$. Построим точку (3; –4). Выберем еще одно значение: $x = -6$, тогда $y = -\frac{2}{3} \cdot (-6) - 2$, $y = 2$. Построим точку (–6; 2). Проведем прямую через точки (3; –4) и (–6; 2) (рис. 64).

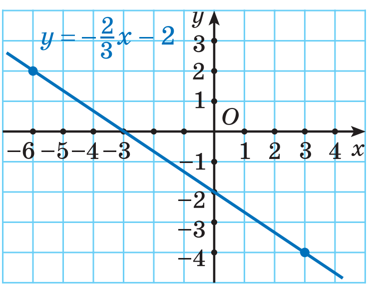


Рис. 64

б) Выразим из уравнения $0x - 4y = 8$ ($b \neq 0$, $a = 0$) переменную y и получим

$y = -2$. График этой функции — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0; -2)$ (рис. 65).

в) Так как коэффициент перед y равен нулю ($b = 0$, $a \neq 0$), то график уравнения $4x - 0y = 12$ — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $(3; 0)$ (рис. 66).

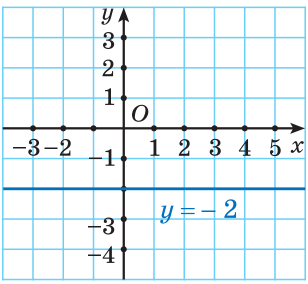


Рис. 65

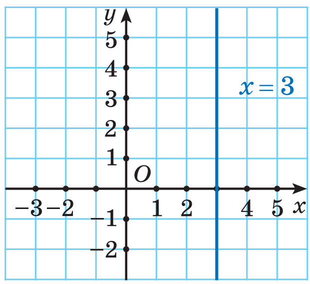


Рис. 66

1. Все точки графика уравнения $3x + 2y = 6$ лежат на прямой, пересекающей обе оси координат. Запишите еще два линейных уравнения с двумя переменными, графики которых пересекают обе оси координат.

2. Все точки графика уравнения $0x + 2y = -8$ лежат на прямой, параллельной оси абсцисс. Запишите еще два линейных уравнения с двумя переменными, графики которых параллельны оси абсцисс.

3. Все точки графика уравнения $3x + 0y = 6$ лежат на прямой, параллельной оси ординат. Запишите еще два линейных уравнения с двумя переменными, графики которых параллельны оси ординат.

4.34. Выберите уравнение, графиком которого является прямая, параллельная оси абсцисс:

а) $5x + 4y = 13$; б) $9x + 0y = 2$;

в) $0x + 8y = 24$; г) $x = 2$.

4.35. Выберите уравнения, графики которых проходят через точку $A(-1;\ 2)$:

а) $3x - y = 5$; б) $x - 2y = 0$;
в) $-x + 10y = 21$; г) $0x + y = 2$.

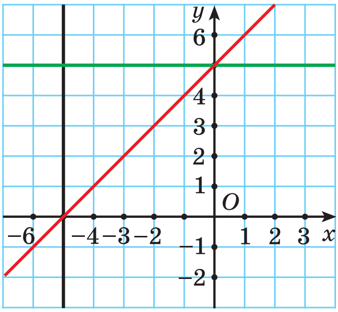


Рис. 67

4.36. Выберите уравнение, графика которого нет на рисунке 67:

а) $x = -5$; б) $5x + y = 0$;
в) $-x + y = 5$; г) $y - 5 = 0$.

4.37. Постройте график уравнения $x + y = 4$.

4.38. Постройте график уравнения $2x - y = 3$.

4.39. Найдите координаты точек пересечения прямой с осями координат:

а) $x - y = 7$; б) $3x + y = 1$.

4.40. Постройте график уравнения:

а) $0x + 4y = 20$; б) $-3x + 0y = -12$;
в) $1{,}2x = -3{,}6$; г) $\frac{y}{2} = 1{,}5$.

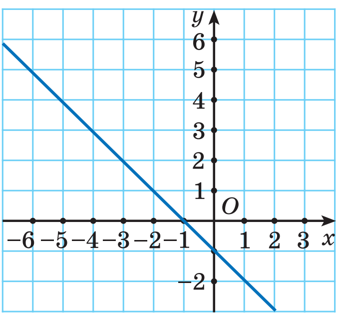


Рис. 68

4.41. По графику линейного уравнения с двумя переменными (рис. 68) найдите три каких-либо его решения.

4.42. Постройте график уравнения:

а) $3x + y - 4 = 0$;
б) $y - 2x = 0$.

4.43. График уравнения $-5x - 6y = 11$ проходит через точку с ординатой 4. Найдите абсциссу этой точки.

4.44. Постройте график уравнения:

а) $3(x+y)-y=4$; б) $(x-2y)-2(x-y)-5=0$.

4.45. График уравнения $x-y=a$ проходит через точку $N(-2;\ 3)$. Найдите число a.

4.46*. Выберите уравнения, графики которых совпадают:

а) $x-2y=3$; б) $-2x+4y=-6$;
в) $0{,}5x-y=1{,}5$; г) $x+2y=3$.

4.47*. Укажите точки первой координатной четверти с целыми координатами, принадлежащие прямой $2x+5y=19$. Дайте ответ, не выполняя построения.

4.48. Выберите уравнение, график которого не пересекает ось ординат:

а) $2x+8y=11$; б) $5x+0y=-8$;
в) $0x-9y=11$; г) $3x-5y=15$.

4.49. Выберите точки, принадлежащие графику уравнения $3x-4y=12$:

а) $A(4;\ -1)$; б) $B(4;\ 0)$;
в) $C(2;\ -1{,}5)$; г) $D(0;\ -3)$.

4.50. Выберите уравнение, график которого изображен на рисунке 69:

а) $y=-2x$;

б) $2x-y+5=0$;

в) $2x+y=1$;

г) $y+x+1=0$.

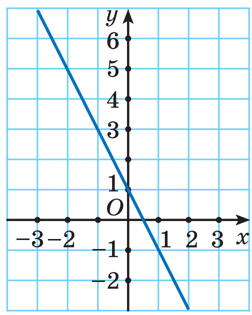


Рис. 69

4.51. Постройте график уравнения:

а) $x + y = 5$; б) $-2x + 3y = 4$;
в) $0x - 8y = 32$; г) $-x + 0y = 3$.

4.52. График уравнения $8x - 5y = 14$ проходит через точку с абсциссой 3. Найдите ординату этой точки.

4.53. График уравнения $x + y = a$ проходит через точку $M(4; -1)$. Найдите число a.

4.54. Найдите значение выражения

$$(2 - 6{,}588 : 6{,}1) : 0{,}01.$$

4.55. Разложите на множители $a^2 - b^2 - 3(a - b)$.

4.56. Файл объемом 60 Мб скачивается с сайта за 5 с. За какое время скачается файл объемом 885 Мб, если скорость скачивания увеличится на 25 %?

§ 23. Система линейных уравнений с двумя переменными

4.57. Найдите отношение значений величин:

а) 15 мин и 1 ч; б) 1,8 м и 12 см.

4.58. Найдите значение выражения $-2m + n^2$ при:

а) $m = 5$; $n = 3$; б) $m = \frac{1}{2}$; $n = -2$.

4.59. Приведите пример линейной функции, график которой:

а) параллелен графику функции $y = -2x + 7$;
б) пересекает график функции $y = x - 8$.

4.60. Проверьте, принадлежит ли точка $(1; 2)$ графику уравнения $2x - y = 0$.

4.61. Даны два линейных уравнения с двумя переменными: $x - y = 3$ и $x + y = 5$. Найдите пару чисел, которая является решением и первого и второго уравнений.

Решение различных задач приводит к необходимости находить общие решения линейных уравнений с двумя переменными.

Рассмотрим задачу. В фермерском хозяйстве под злаковые и овощные культуры отведено 150 га, причем под злаковые — на 30 га больше, чем под овощные. Сколько гектаров отведено под злаковые и под овощные культуры отдельно?

Если обозначить через x га площадь, отведенную под злаковые, а через y га — площадь, отведенную под овощные культуры, то по условию задачи получится два уравнения: $x + y = 150$ и $x - y = 30$.

Известно, что и первое и второе уравнения имеют бесконечно много решений. Но по условию задачи нужно найти общие решения, т. е. найти такие пары чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют и первому и второму уравнениям.

В этом случае говорят, что нужно решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 150, \\ x - y = 30. \end{cases}$

Система двух линейных уравнений с двумя переменными имеет вид $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые числа, а x и y — переменные.

Например, система уравнений $\begin{cases} 2x - y = 150, \\ x + 3y = 35 \end{cases}$

является системой линейных уравнений с двумя переменными. Коэффициенты перед переменными: $a_1 = 2$; $b_1 = -1$; $a_2 = 1$; $b_2 = 3$, а числа в правых частях уравнений (свободные члены) $c_1 = 150$; $c_2 = 35$.

Система уравнений $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ x = 3 \end{cases}$ также является системой линейных уравнений с двумя переменными. Коэффициенты перед переменными: $a_1 = 2$; $b_1 = -5$; $a_2 = 1$; $b_2 = 0$, а числа в правых частях уравнений (свободные члены) $c_1 = 0$; $c_2 = 3$.

Определение **Решением системы уравнений** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ называется упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$, являющаяся одновременно решением и первого и второго уравнений.

Решить систему — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Покажем, что пара чисел (3; 2) является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

Подставим пару чисел (3; 2) в каждое из уравнений системы и получим $\begin{cases} 2 \cdot 3 + 2 = 8, \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5. \end{cases}$ Каждое из уравнений обращается в верное числовое равенство, значит, пара чисел (3; 2) является решением системы уравнений.

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ $(x_0;\ y_0)$

$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$ — верно

$(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений

Число решений системы линейных уравнений с двумя переменными

Так как графиком каждого уравнения системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ является прямая, то число решений системы зависит от взаимного расположения прямых.

1. Если прямые $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ пересекаются (рис. 70), то координаты точки пересечения прямых удовлетворяют и первому и второму уравнениям системы, т. е. являются решением системы. Это решение единственное, так как других общих точек у двух пересекающихся прямых нет.

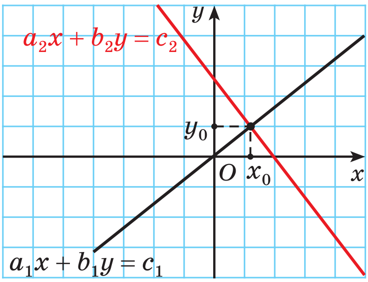


Рис. 70

Прямые
$a_1x + b_1y = c_1$
и $a_2x + b_2y = c_2$
пересекаются,
значит, система
уравнений имеет
единственное решение

2. Если прямые параллельны (рис. 71), то система уравнений не имеет решений, так как у этих прямых нет общих точек, т. е. нет пар чисел, удовлетворяющих одновременно двум уравнениям.

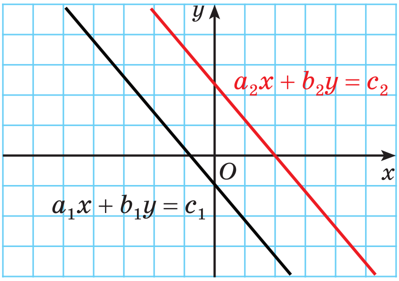


Рис. 71

Прямые
$a_1x + b_1y = c_1$
и $a_2x + b_2y = c_2$
параллельны, значит,
система уравнений
не имеет решений

3. Если прямые совпадают (рис. 72), то система уравнений имеет бесконечно много решений — это координаты точек, лежащих на прямой.

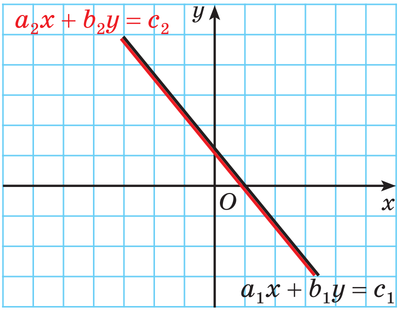


Рис. 72

Прямые
$a_1x + b_1y = c_1$
и $a_2x + b_2y = c_2$
совпадают, значит, система уравнений имеет бесконечно много решений

Система линейных уравнений с двумя переменными	
1. Определите, является ли система системой линейных уравнений с двумя переменными, и назовите коэффициенты перед переменными: а) $\begin{cases} -x + 2y = 12, \\ 5x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$	а) Система $\begin{cases} -x + 2y = 12, \\ 5x - y = 5 \end{cases}$ является системой линейных уравнений, так как имеет вид $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ Коэффициенты перед переменными: $a_1 = -1$; $b_1 = 2$; $a_2 = 5$; $b_2 = -1$. б) Первое уравнение системы $\begin{cases} 2x^2 + y = 1, \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$ содержит переменную x во второй степени, система не является системой линейных уравнений.
Решения системы линейных уравнений с двумя переменными	
2. Верно ли, что пары чисел (1; 3), (–2; 6) являются решениями системы уравнений	Подставим пару чисел (1; 3) в каждое уравнение системы

<table>
<tr><td>

$\begin{cases} 6x + 2y = 12, \\ 8x - y = 5? \end{cases}$

</td><td>

и получим: $\begin{cases} 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 12, \\ 8 \cdot 1 - 3 = 5. \end{cases}$

Каждое уравнение системы обратилось в верное числовое равенство, значит, пара чисел (1; 3) является решением системы уравнений.
Подставим пару чисел (–2; 6) в первое уравнение системы. Поскольку $6 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 = 12$ — неверно, второе уравнение можно не проверять. Пара чисел (–2; 6) не является решением системы уравнений.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Число решений системы линейных уравнений с двумя переменными

</td></tr>
<tr><td>

3. Постройте графики уравнений системы $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ и определите число решений системы.

</td><td>

Выразим переменную y из первого и второго уравнений, получим линейные функции $y = 8 - x$ и $y = 2{,}5 - x$. Построим графики функций (рис. 73).

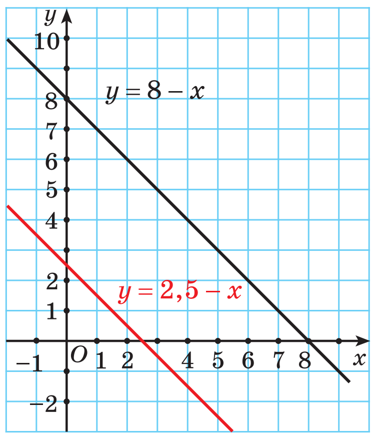


Рис. 73

Графики параллельны ($k_1 = k_2$; $b_1 \neq b_2$), значит, система не имеет решений.

</td></tr>
</table>

1. Верно ли утверждение: «Пара чисел (x; y) называется решением системы уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ если она является решением хотя бы одного уравнения системы»? Ответ поясните.

2. Система уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ не имеет решений. Как расположены графики уравнений системы?

3. Система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ имеет одно решение. Как расположены графики уравнений системы?

4.62. Определите, какие системы являются системами линейных уравнений с двумя переменными. Для систем линейных уравнений назовите коэффициенты перед переменными:

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ -2x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x + 2y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y + \frac{x}{2} = -1, \\ x - y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 0{,}3y = 7, \\ -2x + 0{,}9y = -0{,}7. \end{cases}$

4.63. Является ли пара чисел (40; 20) решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 60, \\ x - y = 20? \end{cases}$

4.64. Из пар чисел (10; 0) и (6; −6) выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 5. \end{cases}$$

4.65. Покажите, что пара чисел (2; 1) не является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

4.66. Выберите систему уравнений, решением которой не является пара чисел (1; –2):

а) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

4.67. Придумайте пример системы двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой будет пара чисел (3; –1).

4.68. Постройте графики уравнений системы и определите число решений системы:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 3. \end{cases}$

4.69. Постройте графики уравнений системы и выберите систему, которая не имеет решений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x - 2y = 5. \end{cases}$

4.70. Постройте графики уравнений системы и выберите систему, которая имеет бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 0{,}5y = 4, \\ -x + 0{,}25y = -2. \end{cases}$

4.71. Первое уравнение системы $x - 2y = 1$. Придумайте второе уравнение системы так, чтобы полученная система:

а) имела бесконечно много решений;
б) не имела решений;
в) имела только одно решение.

4.72*. Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ ax - 5y = 15 \end{cases}$ имеет единственное решение.

4.73*. Найдите все значения b, при которых система уравнений $\begin{cases} 3x + by = 1{,}5, \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

4.74. Является ли пара чисел (4; 3) решением системы уравнений $\begin{cases} 2{,}5x - 3y = 1, \\ 5x - 6y = 2? \end{cases}$

4.75. Какая из пар чисел (0; 2) и (3; –2) является решением системы уравнений $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + y = 4? \end{cases}$

4.76. Покажите, что пара чисел (–1; 4) не является решением системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 6x - y = -9. \end{cases}$

4.77. Выберите систему уравнений, решением которой является пара чисел (–1; 2):

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + 4y = 9, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

4.78. Придумайте пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой будет пара чисел (5; 7).

4.79. Постройте графики уравнений системы и определите число решений системы:

а) $\begin{cases} x - y = 6, \\ -x + y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 3. \end{cases}$

4.80. Первое уравнение системы $2x - y = 3$. Придумайте второе уравнение системы так, чтобы полученная система не имела решений.

4.81*. Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} ax - 3y = 12, \\ 2x - 4y = 16 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

4.82. Зная, что $a < b$, сравните:

а) $3a$ и $3b$; б) $-5a$ и $-5b$;

в) $a - 4$ и $b - 4$; г) $\frac{a}{7}$ и $\frac{b}{7}$.

4.83. Разложите на множители:

а) $-5x^2 - 10xy - 5y^2$; б) $a^2 - 9b^2 + a - 3b$.

4.84. Найдите значение числового выражения $\left(\left(\frac{5}{7}\right)^6\right)^{-3} : \left(\left(\frac{7}{5}\right)^{-4}\right)^{-5}$.

4.85. Футбольный мяч стоит 22 р. Сколько футбольных мячей можно будет купить на 100 р. в период распродажи, когда скидка на мячи составляет 25 %?

§ 24. Способы решения системы линейных уравнений с двумя переменными

4.86. Упростите выражение $3(a - 3b) - 5(a - 2b)$ и найдите его значение при $a = -1{,}5$ и $b = -1$.

4.87. Найдите сумму и разность многочленов $3x + 2y - 1$ и $5y - 2x + 8$.

4.88. Решите уравнение $13 - 3(x + 1) = 4 - 5x$.

4.89. Из равенства $x + 4y = 8$ выразите:

а) x через y; б) y через x.

Рассмотрим, как найти все пары чисел, удовлетворяющие каждому уравнению системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ т. е. **решить систему уравнений.**

Способ подстановки

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно:

① Из одного уравнения системы выразить одну из переменных.	Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - 4y = 5. \end{cases}$
	① Из первого уравнения выразим y: $2x + y = 7$; $y = 7 - 2x$.
② Заменить во втором уравнении эту переменную на ее выражение.	② Подставим выражение для y во второе уравнение системы: $\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 3x - 4(7 - 2x) = 5. \end{cases}$
③ Решить полученное уравнение, найти значение другой переменной.	③ Решим второе уравнение системы: $3x - 4(7 - 2x) = 5;$ $3x - 28 + 8x = 5;$ $11x = 33;$ $x = 3.$
④ Найденное значение переменой подставить в выражение из п. ① и найти значение выраженной переменной.	④ Найденное значение переменной $x = 3$ подставим в выражение для y: $\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ x = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 7 - 2 \cdot 3, \\ x = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases}$
⑤ Записать ответ — упорядоченную пару найденных значений переменных.	⑤ *Ответ*: (3; 1).

Способ сложения

Рассмотрим случай, когда **коэффициенты** перед x или y **являются противоположными** числами.

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, нужно:

① Одно из уравнений системы оставить без изменений, а другое заменить суммой уравнений системы. ② Из полученного уравнения (суммы) найти значение переменной. ③ Подставить это значение переменной в оставленное без изменений уравнение системы. ④ Решить полученное линейное уравнение, т. е. найти значение другой переменной. ⑤ Записать ответ.	Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ способом сложения. ① Заметим, что коэффициенты перед одной из переменных (y) являются противоположными числами. Поэтому одно из уравнений системы оставим без изменений, а другое заменим суммой двух уравнений системы: $2x + 3x + 2y - 2y = 7 + 5$; $5x = 12$. Получим новую систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 5x = 12. \end{cases}$ ② Из второго уравнения этой системы найдем значение x и получим следующую систему: $\begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ x = 2{,}4. \end{cases}$ ③ Найденное значение $x = 2{,}4$ подставим в первое уравнение. Получим: $\begin{cases} 2 \cdot 2{,}4 + 2y = 7, \\ x = 2{,}4. \end{cases}$ ④ Решим первое уравнение системы: $2 \cdot 2{,}4 + 2y = 7$, $2y = 2{,}2$, $y = 1{,}1$. ⑤ Запишем ответ: (2,4; 1,1).

Если **коэффициенты** перед x или y **не являются противоположными** числами, то получить их можно, умножив каждое (или одно) из уравнений системы на дополнительный множитель.

Например, решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+5y=16, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

В этой системе нет противоположных коэффициентов перед одинаковыми переменными. Получим их, умножив первое уравнение (левую и правую его части) системы на 2, а второе — на 5. Имеем:

$$\begin{cases} 4x+10y=32, \\ 15x-10y=25. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} 4x+10y=32, \\ 19x=57; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5y=16, \\ x=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot 3+5y=16, \\ x=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2, \\ x=3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2).

<table>
<tr><th colspan="2">Способы решения системы линейных уравнений с двумя переменными</th></tr>
<tr><td colspan="2">Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=3, \\ 2x-5y=9. \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Способ подстановки
① Выразим переменную y из первого уравнения и получим: $\begin{cases} y=3-2x, \\ 2x-5y=9. \end{cases}$</td><td>Способ сложения
① Умножим первое уравнение на –1, получим:
$\begin{cases} -2x-y=-3, \\ 2x-5y=9. \end{cases}$</td></tr>
</table>

② Подставим выражение $y = 3 - 2x$ во второе уравнение вместо y и получим: $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 2x - 5(3 - 2x) = 9. \end{cases}$ ③ Решим второе уравнение системы: $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 2x - 15 + 10x = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 12x = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x = 2. \end{cases}$ ④ Подставим значение $x = 2$ в первое уравнение: $\begin{cases} y = 3 - 2 \cdot 2, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1, \\ x = 2. \end{cases}$ ⑤ Пара (2; –1) — решение системы уравнений.	② Сложим почленно два уравнения системы и получим $-6y = 6$. ③ Первое уравнение исходной системы оставим без изменений, а второе заменим суммой уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -6y = 6. \end{cases}$ ④ Найдем переменную y из второго уравнения и подставим это значение в первое уравнение: $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 1 = 3, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$ ⑤ Пара (2; –1) — решение системы уравнений.

? **1.** Приведите пример системы линейных уравнений с двумя переменными, которую рациональнее решать способом сложения.

2. Приведите пример системы линейных уравнений с двумя переменными, которую рациональнее решать способом подстановки.

4.90. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x = 7 - 5y, \\ 3x + 2y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 1 - 2x, \\ 5x - 2y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 5y = 0, \\ 3x + 7y = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 2x + 3y = 22. \end{cases}$

4.91. Решите систему уравнений способом подстановки, используя алгоритм:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 5x - 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 5x + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 9y = 3, \\ x + 3y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ -5x + 2y = 1. \end{cases}$

4.92. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x - 3y + 2 = 0, \\ 2x - 4y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x + y) = 8, \\ \frac{1}{4}(x - y) = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{7y - x}{3} = -2, \\ \frac{x + 14y}{3} = 4{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{y}{2} = \frac{x}{5}, \\ 2x + 3y = 16. \end{cases}$

4.93. Решите систему уравнений способом сложения, используя алгоритм:

а) $\begin{cases} 2x + y = 13, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 7y = 40, \\ -4x + 9y = 24; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 7x + 2y = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3x + 5y = 10, \\ 3x + y = 14. \end{cases}$

4.94. Умножьте одно из уравнений системы на (–1) и решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} x + 5y = 8, \\ x + 4y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 4x - 5y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2y - 3x = 9, \\ y - 3x = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 6x - y = 7. \end{cases}$

4.95. Определите, на какое число удобно умножить одно из уравнений системы, и решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y = 2, \\ 6x - 7y = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 5x + 6y = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 4y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

4.96. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 5y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + 2y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x + 6y = 1{,}5, \\ 4x - 9y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 7y = -32, \\ 2x - 3y = -3. \end{cases}$

4.97. Приведите уравнения системы к уравнениям с целыми коэффициентами и решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 0, \\ 2x + y = 26; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x + 1}{5} = \frac{y - 1}{2}, \\ 4x + 5y = 23. \end{cases}$

4.98. Решите систему уравнений наиболее рациональным способом:

а) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}4y = 12, \\ 2{,}5x + 1{,}4y = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}5x - 1{,}25y = 7{,}5, \\ 1{,}2x + 0{,}7y = 8{,}8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}5y = 1{,}18, \\ 1{,}6x + 2y = -3{,}04; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}5x + 5{,}5 = \frac{1}{3}y + 6\frac{1}{3}, \\ 5x = 3y + 8. \end{cases}$

4.99. Среди решений уравнения $2x+y=24$ найдите пару, которая:

а) состоит из двух равных чисел;
б) состоит из двух противоположных чисел.

4.100. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений

$$5x-2y=0 \text{ и } x+2y=12.$$

4.101. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 12x+3y-9=2x+13, \\ 8x+20=10+2(x+2y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x+y)+1=x+4y, \\ 7-2(x-y)=x-8y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1+2(x-y)=3x-4y, \\ 10-4(x+y)=3y-3x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2-5(0{,}2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y). \end{cases}$

4.102. Задайте линейную функцию формулой, если известно, что ее график проходит через точки $A(1;\ 1)$ и $B(2;\ 5)$.

4.103. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=2, \\ \frac{2x}{3}+y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3x}{4}+\frac{3y}{8}=4{,}5, \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{12}=\frac{2}{3}. \end{cases}$

4.104. Запишите формулу, задающую линейную функцию, график которой представлен на рисунке 74.

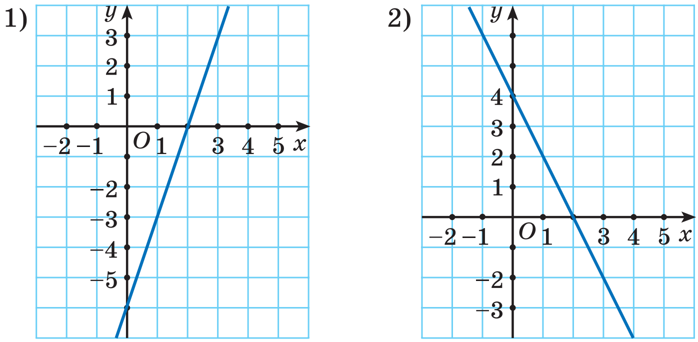


Рис. 74

4.105. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{4} + \dfrac{y-2}{4} = 2, \\ \dfrac{x-2}{3} - \dfrac{y-2}{9} = 1\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{y}{5} = -2, \\ \dfrac{3x}{4} - \dfrac{2x-y}{4} = -1\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{3y-2}{4} - \dfrac{2x-1}{5} = -2, \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{3y+2}{4} = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{3x-7}{4} = \dfrac{2y-3}{5} + 1, \\ \dfrac{2x-y}{2} - 1 = y - 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{1}{9}(x+y) - \dfrac{1}{3}(x-y) = 2, \\ \dfrac{1}{6}(2x-y) - \dfrac{1}{3}(3x+2y) = -20. \end{cases}$

4.106. Проходит ли прямая $3x - 7y = 1$ через точку пересечения прямых $2x + y = -5$ и $5x - y = -9$?

4.107. Выполните преобразования уравнений системы и решите ее:

а) $\begin{cases} (x+5)^2 - (x-4)^2 = (y+4)^2 - (y-5)^2, \\ 13y - 2x(4-x) = (2+x)^2 + (3-x)^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)(y+6) = xy + 13, \\ (y-2)(x+4) = xy - 13. \end{cases}$

4.108. Прямая проходит через точки $A(-1;\ 4)$ и $B(3;\ -4)$. Найдите координаты точки пересечения данной прямой с осью абсцисс.

4.109. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y = 2$ и $2y - x = 1$ и параллельной графику прямой $y = 2x + 13$.

4.110. Найдите расстояние от точки пересечения прямых $x - y = -0{,}2$ и $5x + 5y = 7$ до оси абсцисс; оси ординат.

4.111*. Найдите, при каких значениях a и b пара чисел $(2;\ -1)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = 36, \\ ax - by = 8. \end{cases}$$

4.112*. Решите систему уравнений, используя тождественные преобразования:

а) $\begin{cases} x - 3y = 2, \\ xy - 3y^2 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 3xy + y^2 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 16. \end{cases}$

4.113*. С помощью замены переменных решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{19x + 5y + 7}{12} - \dfrac{21x - 10y + 2}{7} = 3, \\ \dfrac{5(19x + 5y + 7)}{12} - \dfrac{11(21x - 10y + 2)}{7} = 3. \end{cases}$$

4.114*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3|y| - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + |y| = 2, \\ 3x + |y| = 4. \end{cases}$

4.115. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x = 4 + 5y, \\ 4x - 3y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 3x - 3, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x - 3y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - y = 0, \\ 3x - 2y = 21. \end{cases}$

4.116. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 5x - 3y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y = 6, \\ 2x - 5y = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 9x - 4y = -7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 4y = 90, \\ -x + 3y = -10. \end{cases}$

4.117. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} 3x + 7y - 8 = 0, \\ x + 5y - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{6}(x + y) = 4, \\ \frac{1}{3}(x - y) = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{7x - y}{2} = -3, \\ \frac{-8x + 5y}{2} = 1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7}, \\ 2x + 5y = 90. \end{cases}$

4.118. Решите систему уравнений способом сложения, используя алгоритм:

а) $\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 2y - x = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 3y = -15, \\ 5x + 3y = -3. \end{cases}$

4.119. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 9x + 4y = 8, \\ 5x + 2y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3. \end{cases}$

4.120. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-5}{3} = \frac{3y+2}{4}, \\ 4x + 9y = -10. \end{cases}$

4.121. Решите систему уравнений наиболее рациональным способом:

а) $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}3, \\ 0{,}4x + 0{,}5y = 0{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}6x - 0{,}2 = 19 - 3y, \\ 0{,}5y - \frac{5}{6} = 15\frac{2}{3} - 2x. \end{cases}$

4.122. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений

$$4x + 3y = 0 \text{ и } x - 3y = 15.$$

4.123. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3 - (x - 2y) - 4y = 18, \\ 2x - 3y + 3 = 2(3x - y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(y - 2x) - (5y + 2) = 5(1 - x), \\ 7 - 6(x + y) = 2(3 - 2x) + y. \end{cases}$

4.124. Задайте линейную функцию формулой, если известно, что ее график проходит через точки $A(-1;\ 5)$ и $B\ (1;\ 1)$.

4.125. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{5x}{2} + \frac{y}{5} = -4, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{1}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2, \\ \frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y-1}{3} = 2, \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y-15}{6} = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5y-x}{3} - 2 = \frac{2y-x}{2} + 9, \\ \frac{3y-x}{5} = y - 8. \end{cases}$

4.126. Среди решений уравнения $11x - 6y = 25$ найдите пару, которая состоит из двух одинаковых чисел.

4.127. Выясните, проходит ли прямая $9x - 2y = 1$ через точку пересечения прямых $y - 2x = 5$ и $x + y = 11$.

4.128. Прямая проходит через точки $A(8;\ 2)$ и $B\ (-4;\ -1)$. Найдите координаты точки пересечения данной прямой с осью ординат.

4.129. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y = 3$ и $2y - x = 1$ и параллельной графику функции $y = 2x - 9$.

4.130. Вычислите:

а) $25^2 \cdot (-4)^2 \cdot (0{,}01)^3$; б) $\dfrac{4^5 \cdot 8^4}{2^{22}}$.

4.131. Используя переменные x, y и z, запишите два различных одночлена стандартного вида, коэффициент каждого из которых равен 1.

4.132. Разложите на множители:

а) $7x - 7y + a(y - x)$; б) $(2x + 3)^2 - (x - 1)^2$.

4.133. Решите неравенство:

а) $3(x - 2) + 1 \leqslant 4x$; б) $\dfrac{15 + 2c}{9} - \dfrac{1 - c}{5} < \dfrac{c}{3}$.

4.134. Бульдог съедает порцию корма за 5 мин, а такса — за 7 мин. За какое время обе собаки съедят одну порцию корма, если не будут из-за нее конфликтовать?

4.135. На сколько процентов число 120 больше числа 80?

§ 25. Решение текстовых задач с помощью системы линейных уравнений

4.136. На двух улицах 117 домов. На первой улице домов в два раза меньше, чем на второй. Сколько домов на первой улице? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — число домов на первой улице:

а) $2x - x = 117$; б) $2x + x = 117$;

в) $x + \frac{x}{2} = 117$; г) $2x = 117$.

4.137. Разность двух чисел равна 27,5. Второе число составляет 45 % первого. Найдите эти числа.

4.138. Катер прошел по озеру на 6 км больше, чем по реке против течения, затратив на путь по реке на 30 мин больше, чем на путь по озеру. Найдите длину пути, который катер прошел по реке, если его скорость при движении по озеру 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а против течения реки — 8 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решим задачу. Одна чашка кофе стоит 5 р., а одна чашка чая 3 р. В кафе за день продали 120 чашек кофе и чая и получили выручку 500 р. Сколько чашек кофе и сколько чашек чая продали?

Чтобы решить задачу с помощью системы двух линейных уравнений с двумя переменными, нужно:

① Выяснить, о каких величинах идет речь в задаче, какие значения величин известны, а какие нужно найти.	① В задаче речь идет о стоимости одной чашки кофе и одной чашки чая (известные значения), об общем количестве проданных чашек чая и кофе (известное значение), стоимости всех проданных чашек кофе и чая (известное значение), количестве проданных чашек кофе и чая отдельно (неизвестные значения). Решим задачу алгебраическим способом с помощью системы уравнений.

② Выделить два неизвестных значения величин. Одно из неизвестных значений величин обозначить переменной x, а другое — переменной y.	② Обозначим количество проданных чашек кофе через x, а количество проданных чашек чая — через y.
③ Используя условие задачи и зависимости между известными и неизвестными значениями величин, составить два уравнения системы.	③ По условию $x + y = 120$. $5x$ р. — выручка за кофе, $3y$ р. — выручка за чай. По условию $5x + 3y = 500$. Составим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 120, \\ 5x + 3y = 500. \end{cases}$ Полученная система уравнений является математической моделью практической ситуации, описанной в условии задачи.
④ Решить полученную систему двух уравнений.	④ Решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 120 - x, \\ 5x + 3(120 - x) = 500; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 120 - x, \\ 2x = 140; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 50, \\ x = 70. \end{cases}$
⑤ Записать ответ в соответствии с практической ситуацией, описанной в условии задачи.	⑤ x — число проданных чашек кофе, оно равно 70; y — число проданных чашек чая, оно равно 50. *Ответ*: 70 чашек кофе и 50 чашек чая.

Решение текстовых задач с помощью системы линейных уравнений

Задача 1. Из 10 %-го и 15 %-го растворов соли требуется составить 100 г 12 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора надо взять?	**Задача 2.** Можно ли разменять 1 рубль пятикопеечными и двухкопеечными монетами так, чтобы всего было 40 монет?

<table>
<tr><td colspan="2">① Выясним, о каких величинах идет речь в задаче, какие значения величин известны, а какие нужно найти.</td></tr>
<tr><td>В задаче речь идет о массе растворов соли и концентрации соли в растворе. Масса растворов до смешивания неизвестна, а после смешивания — 100 г. Известна концентрация растворов: 10 %, 15 % и 12 %.</td><td>В задаче речь идет о количестве монет достоинством 5 к. и 2 к. и сумме, которую составляют эти монеты. Известно общее количество монет — 40 и сумма — 1 р., или 100 к. Неизвестно количество 5-копеечных и количество 2-копеечных монет.</td></tr>
<tr><td colspan="2">② Выделим два неизвестных значения величин. Одно из неизвестных значений величин обозначим переменной x, а другое — переменной y.</td></tr>
<tr><td>Неизвестную массу 10 %-го раствора обозначим через x, а неизвестную массу 15 %-го раствора обозначим через y. Тогда $(0{,}1x)$ г — масса соли в первом растворе, $(0{,}15y)$ г — масса соли во втором растворе, $0{,}12 \cdot 100 = 12$ (г) — масса соли в смеси растворов.</td><td>Неизвестное количество 5-копеечных монет обозначим через x, а неизвестное количество 2-копеечных монет обозначим через y. Тогда $(5x)$ к. — сумма, составленная 5-копеечными монетами, $(2y)$ к. — сумма, составленная 2-копеечными монетами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">③ Используя условие задачи и зависимости между известными и неизвестными значениями величин, составим два уравнения системы.</td></tr>
<tr><td>По условию задачи запишем первое и второе уравнения системы: $x + y = 100$ и $0{,}1x + 0{,}15y = 12$.</td><td>По условию задачи запишем первое и второе уравнения системы: $x + y = 40$ и $5x + 2y = 100$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">④ Решим полученную систему двух уравнений.</td></tr>
<tr><td>Объединим оба уравнения в систему и решим ее:
$\begin{cases} x + y = 100, \\ 0{,}1x + 0{,}15y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 60, \\ y = 40. \end{cases}$</td><td>Составим и решим систему уравнений:
$\begin{cases} x + y = 40, \\ 5x + 2y = 100; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6\frac{2}{3}, \\ y = 33\frac{1}{3}. \end{cases}$</td></tr>
</table>

⑤ **Запишем ответ в соответствии с практической ситуацией, описанной в условии задачи.**	
60 г — масса 10 %-го раствора; 40 г — масса 15 %-го раствора.	Так как число монет должно быть натуральным числом, то разменять 1 рубль пятикопеечными и двухкопеечными монетами так, чтобы всего было 40 монет, нельзя.

? Установите последовательность шагов в следующем алгоритме решения задачи.

Чтобы решить задачу с помощью системы двух уравнений с двумя переменными, нужно: а) выяснить, о каких величинах идет речь в задаче, какие значения величин известны, а какие нужно найти; б) используя условие задачи и зависимости между известными и неизвестными значениями величин, составить два уравнения системы с двумя переменными; в) решить полученную систему двух уравнений; г) выделить два неизвестных значения величин; одно из неизвестных значений обозначить переменной x, а другое — переменной y; д) записать ответ в соответствии с практической ситуацией, описанной в условии задачи.

Составьте математическую модель для решения задачи и найдите ответ в соответствии с требованием задачи.

4.139. Во время автобусной экскурсии 15 школьников купили 40 сувениров, причем каждая девочка купила 2 сувенира, а каждый мальчик — 3. Сколько девочек и сколько мальчиков побывали на экскурсии?

4.140. Два карандаша и три тетради стоят 1 р. 40 к., а две тетради и три карандаша стоят 1 р. 35 к. Найдите, сколько стоят пять карандашей и шесть тетрадей.

4.141. В поход для 26 туристов взяли двухместные и трехместные палатки. Сколько человек разместилось в трехместных палатках, если туристы взяли 10 палаток?

4.142. Две бригады студентов работали на сборе яблок. В первый день одна бригада работала 3 ч, а вторая — 2 ч, причем вместе они собрали 23 ц яблок. На следующий день первая бригада за 2 ч собрала на 2 ц яблок меньше, чем вторая за 3 ч. Сколько центнеров яблок собирала каждая бригада за 1 ч?

4.143. Двое рабочих изготовили 162 детали. Первый работал 8 дней, а второй — 15 дней. Сколько деталей изготавливал ежедневно каждый рабочий, если первый за 5 дней изготовил на 3 детали больше, чем второй за 7 дней?

4.144. Для школьного кружка приобрели 5 наборов шахмат и 8 наборов шашек на сумму 55 р. Сколько стоит один набор шахмат и один набор шашек, если 2 набора шахмат стоят на 30 к. дороже, чем 3 набора шашек?

4.145. Два друга вышли одновременно из двух поселков, расстояние между которыми 19 км, и встретились через 2 ч. С какой скоростью шел каждый друг, если один из них до встречи прошел на 1 км больше, чем другой.

4.146. Катер проходит 60 км по течению реки за 2 ч, а против течения — за 3 ч. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

4.147. За 2 ч по течению реки и 3 ч против течения моторная лодка прошла 42 км. А за 2 ч против течения и 3 ч по течению — 48 км. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

4.148. Футболом увлекается 5 % первокурсников и 8 % второкурсников университета, что вместе составляет 125 человек. Сколько первокурсников и второкурсников в университете, если всего на двух курсах учится 1900 человек?

4.149. Услугами туристической фирмы зимой воспользовалось 1200 взрослых и детей. Летом число взрослых уменьшилось на 10 %, а число детей увеличилось на 20 %, общее число туристов увеличилось на 75 человек. Сколько взрослых и сколько детей отдыхало летом?

4.150. Предприниматель поместил некоторую сумму денег в банк на два различных вклада: один с доходом 18 % в год, а другой — 15 % в год. Общий годовой доход составил 153 р. Если вклады поменять местами, то годовой доход составит 144 р. Какая сумма внесена в банк?

4.151. Возможна ли такая ситуация: для двух братьев купили одинаковые тетради и шариковые ручки; за 30 тетрадей и 10 ручек для старшего брата заплатили 21 р., а за 15 тетрадей и 5 ручек для младшего брата заплатили 12 р.?

4.152. В двух коробках 300 карандашей. Если в первой коробке число карандашей уменьшить вдвое, а во второй — увеличить их число в 2 раза, то в двух коробках станет 240 карандашей. Сколько карандашей было в каждой коробке первоначально?

4.153. На двух складах вместе 140 т картофеля. После того как с первого склада вывезли 20 т, а на второй привезли еще столько, сколько на нем было, на обоих складах стало 180 т картофеля. Найдите, сколько тонн картофеля было на втором складе.

4.154. В клетках сидят 20 кроликов и цыплят. Число их ног равно 58. Сколько в клетках кроликов и сколько цыплят?

4.155. Студент получил стипендию 60 р. купюрами по 5 р. и монетами по 1 р., всего 24 денежных знака. Сколько всего было выдано студенту купюр и монет отдельно?

4.156. Продаются орехи двух сортов: по 90 к. и по 60 к. за 100 г. Сколько потребуется орехов каждого сорта для получения 10 кг смеси по 84 к. за 100 г?

4.157. Первый турист едет от мотеля со скоростью 50 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и успевает на станцию техобслуживания за 12 мин до ее закрытия. Второй, выехавший одновременно с первым от того же мотеля, едет со скоростью 35 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и опаздывает на 6 мин. Как далеко от мотеля находилась станция техобслуживания?

4.158. Жирность молока составляет 3 %, а жирность сливок — 18 %. Сколько литров молока и сливок нужно взять, чтобы получить 10 л смеси жирностью 6 %?

4.159. Смешав 35 %-й раствор кислоты с 20 %-м раствором этой же кислоты, получили 2 л 32 %-го раствора. Сколько литров 35 %-го раствора было взято?

4.160. Периметр прямоугольника равен 60 см, а разность его смежных сторон равна 20 см. Найдите площадь прямоугольника.

4.161. Среднее арифметическое двух чисел равно 22,5, а $\frac{1}{7}$ их разности равна $\frac{5}{7}$. Найдите большее число.

4.162. Если первое число сложить с половиной второго, то получится 65, а если из второго вычесть $\frac{1}{3}$ первого, то получится первое число. Найдите эти числа.

4.163. Сумма двух чисел равна 80,5. Найдите эти числа, если известно, что 40 % одного равны 75 % другого.

4.164. Утроенная сумма цифр некоторого двузначного числа дает исходное число. Сумма цифр этого числа и 63 дает двузначное число, перестановка цифр которого дает данное число. Найдите данное число.

4.165. Составьте задачу, которая решалась бы с помощью системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 5y = 32, \\ 2x + 3y = 20. \end{cases}$

4.166*. Теплоход, двигаясь по течению реки, прошел расстояние между пристанями за 10 ч. Обратно он прошел это же расстояние за 15 ч. Найдите, за какое время теплоход прошел бы такое же расстояние по озеру.

Составьте математическую модель для решения задачи и найдите ответ в соответствии с требованием задачи.

4.167. За 2 кг груш и 1 кг яблок заплатили 10 р. Сколько стоит 1 кг груш, если 5 кг груш стоят дороже 3 кг яблок на 14 р.?

4.168. В копилку складывали двухрублевые монеты и пятирублевые купюры. Когда копилку вскрыли, в ней оказалось пятирублевых купюр на 32 меньше, чем двухрублевых монет, а всего денег на сумму 120 р. Найдите, сколько рублей пятирублевыми купюрами было в копилке.

4.169. По течению реки моторная лодка проходит 40 км за 2 ч, а против течения — 35 км за 2 ч 30 мин. Найдите скорость течения реки.

4.170. Две линии по производству сока производили за сутки 650 т сока. После реконструкции производительность первой линии увеличилась на 10 %, а второй — на 20 %, в результате чего обе линии за сутки стали производить 750 т сока. Сколько тонн сока производила за сутки первая линия до реконструкции?

4.171. Возможна ли такая ситуация: в седьмом классе училось 20 учеников, после перехода в восьмой класс пришли новые ученики, в результате количество мальчиков возросло в 1,3 раза, общее количество учеников стало равно 25?

4.172. Кассир разменял 50-рублевую купюру на 5-рублевые купюры и 1-рублевые монеты, всего — 22 денежных знака. Сколько было выдано купюр и монет в отдельности?

4.173. На двух полках стояло 210 книг. Когда с верхней полки убрали половину книг, а на нижней увеличили их число вдвое, то на двух полках стало 180 книг. Сколько книг стояло на каждой полке первоначально?

4.174. В первом бидоне было молоко жирностью 3 %, а во втором — 6 %. Сколько надо взять молока из каждого бидона, чтобы получить 9 л молока жирностью 5 %?

4.175. Среднее арифметическое двух чисел равно 36, а 10 % их разности равны 0,4. Найдите меньшее число.

4.176. Сумма двух чисел равна 85. Найдите эти числа, если известно, что $\frac{3}{4}$ одного равны $\frac{2}{3}$ другого.

4.177. На тренировку в секции по легкой атлетике во вторник не пришли одна девочка и пять мальчиков. При этом число девочек на тренировке оказалось в два раза больше числа мальчиков. В среду не пришли один мальчик и девять девочек. Оказалось, что число мальчиков в 1,5 раза больше числа девочек. Сколько детей занимается в секции?

4.178. Вычислите: $5 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-1}$.

4.179. Найдите НОК (15, 18).

4.180. Решите неравенство

$$(x-3)(x+2)-(x-3)^2 \geqslant 15x-10.$$

4.181. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{2}{3}x - 4$; $y = -3x$; $y = 2$.

4.182. В доме, где живет ученик, один подъезд. На первом этаже дома находится 3 квартиры. На каждом следующем этаже, начиная со второго, находится по 5 квартир. Ученик живет в квартире № 40. На каком этаже живет ученик?

Практическая математика

4.183. Семиклассник готовится к новому учебному году и планирует купить 7 карандашей и 10 обложек для тетрадей, имея в кошельке 4 р. 40 к. Его соседка по парте за 6 таких же карандашей и 15 таких же обложек заплатила 4 р. 80 к., а его лучший друг за 5 таких же карандашей и 12 таких же обложек заплатил 3 р. 90 к. Хватит ли семикласснику имеющихся денег на планируемую покупку?

4.184. Новоселы для ремонта квартиры в магазине стройматериалов приобрели 16 кг акриловой и 20 кг масляной краски на общую сумму 620 р. Через неделю магазин проводил акцию и снизил цену акриловой краски на 25 %, а масляной — на $33\frac{1}{3}$ %. В результате та же покупка обошлась бы новоселам на 180 р. дешевле. Оказалось, что для завершения ремонта новоселам нужно докупить еще 2 кг акриловой и 1 кг масляной краски. Во сколько им обойдется эта покупка, если они успеют воспользоваться условиями акции?

4.185. На заводе установлены две линии, круглосуточно изготавливающие йогурты. Число йогуртов, изготовленных первой линией за 3 ч и второй линией за 2 ч, составляет 36 тыс. штук. Четвертая часть йогуртов, изготовленная двумя линиями за 2 ч, составила 7,5 тыс. штук. Завод получил заказ от крупной торговой сети на производство 276 тыс. штук йогуртов, который необходимо выполнить в течение суток. По непредвиденным обстоятельствам первая линия по производству йогуртов вышла из строя. Выясните, какое максимальное время можно потратить на ремонт, чтобы выполнить заказ в срок.

4.186. Волонтеры заработали для приюта 230 р., работая в парке и в теплицах. Сколько времени они работали в парке и сколько в теплицах, если один час работы в теплицах стоит 5 р., в парке — 3 р. и в парке им пришлось поработать на 2 ч дольше?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение линейного уравнения с двумя переменными;
- уметь строить график линейного уравнения с двумя переменными;
- уметь записывать решение линейного уравнения с двумя переменными;
- знать, сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными;
- уметь решать системы линейных уравнений способом подстановки и способом сложения;
- уметь решать задачи с помощью систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

Я проверяю свои знания

1. Какой вид имеет линейное уравнение с двумя переменными? Выберите линейное уравнение с двумя переменными и назовите a, b и c:

а) $7x - y^2 = 6$; б) $-5x + 2y = 13$; в) $xy = 12$.

2. Верно ли, что все точки графика уравнения $0x - 2y = 8$ лежат на прямой, параллельной оси ординат? Укажите уравнение, график которого изображен на рисунке 75:

а) $0x + y = -3$; б) $x + y = -3$;

в) $-x + 0y = 3$; г) $x + 3y = 0$.

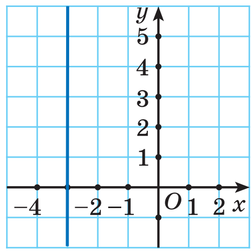


Рис. 75

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = 5 - 2y, \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$ способом подстановки. Какими способами можно решать системы линейных уравнений?

4. Сумма двух чисел равна 8, а их разность равна 12. Найдите их произведение.

5. Постройте график каждого из уравнений системы и укажите систему, которая не имеет решений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x - 2y = 4, \\ 12x - 4y = -8. \end{cases}$

6. Известно, что 4 тетради и 5 карандашей стоят 2 р. Укажите пару чисел, не являющуюся решением уравнения, составленного по данному условию:

а) (0,4; 0,08); б) (0,1; 0,2); в) (0,35; 0,12).

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3y-2}{4} = 2, \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{3y+2}{4} = 0. \end{cases}$

8. В седьмом классе вчера не пришли в школу 4 девочки и 1 мальчик. При этом оказалось, что девочек присутствовало на 2 больше, чем мальчиков. Сегодня не пришли 1 девочка и 5 мальчиков, и оказалось, что девочек в 2 раза больше, чем мальчиков. Сколько человек в классе?

9. Найдите расстояние от точки пересечения прямых $x + 0{,}25y = 2$ и $5x - y = 1$ до оси абсцисс.

10. Найдите все значения числа b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} bx + y = 1, \\ 4x - 2y = b \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание. а) Нарисуйте в системе координат с помощью графиков линейных уравнений, заданных на некоторой области определения, занимательные фигуры. б) Устройте выставку лучших рисунков одноклассников.

Готовимся к олимпиадам*

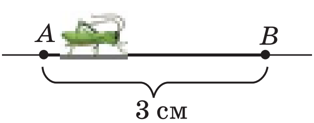


Рис. 76

1. Кузнечик прыгает вперед и назад большими и маленькими прыжками. Большой прыжок составляет 12 см, а малый 7 см. Нарисуйте, как ему попасть из точки A в точку B, если расстояние между этими точками равно 3 см (рис. 76).

2. Попробуйте разгадать несложный шифр — некоторое слово зашифровали, заменив буквы их номерами в алфавите. Какое слово зашифровано записью 22122111121?

---

* По материалам сайта www.problems.ru.

ОТВЕТЫ*

Глава 1
Степень с натуральным и целым показателями

1.64. а) 32; б) 10 000; в) –27; г) $\frac{8}{27}$; д) $11\frac{1}{9}$; е) $\frac{1}{81}$; ж) 0,216; з) 0,0121; и) –0,0000001. **1.65.** а) $5^2 > -5^2$; б) $5^2 = (-5)^2$; в) $-5^2 < (-5)^2$; г) $2^3 > -2^3$; д) $(-2)^3 < 2^3$; е) $-2^3 = (-2)^3$. **1.66.** а) 80; б) –0,567; в) 8,999999; г) $-5\frac{3}{16}$. **1.67.** а) 32; б) 2,625; в) 0,101; г) 11. **1.69.** а) $b^5 \cdot b^7$; б) $b^{10} \cdot b^2$; в) $b^{11} \cdot b$. **1.70.** а) 10^7; б) 10^9; в) 10^{15}; г) 10^8. **1.74.** а) 27; б) $\frac{1}{16}$; в) –2,35; г) 0,04; д) $4\frac{29}{49}$; е) $\frac{1}{16}$. **1.75.** а) 125; б) 0,01; в) 49; г) 3. **1.77.** а) $(5^2)^5$; б) $(5^2)^{11}$; в) $(5^2)^9$; г) $(5^2)^2$. **1.78.** а) $(b^2)^6$; б) $(b^3)^4$; в) $(b^4)^3$; г) $(b^6)^2$. **1.79.** а) 7^{20}; б) 11^{14}; в) -3^{35}; г) b^{20}; д) $-b^{24}$; е) b^{15}. **1.80.** а) a^{42}; б) a^{21}; в) a^{44}; г) a^{21}; д) a^8; е) $a^1 = a$; ж) a^{11}; з) a^{21}; и) a^{22}. **1.81.** а) c; б) c^{10}; в) c^4. **1.82.** а) 9; б) 5; в) 16; г) 2. **1.85.** а) 32; б) 10 000; в) 27; г) 0,01. **1.86.** а) 1; б) 64; в) 64. **1.89.** а) 1 000 000; б) 1; в) –1; г) 32. **1.90.** а) $\frac{1}{3}$; б) –100; в) 4. **1.91.** 4^2. **1.140.** а) $\frac{1}{9}$; б) $4\frac{17}{27}$; в) 0,1; г) 64; д) 3,5; е) 10 000; ж) $\frac{2}{9}$; з) $11\frac{1}{9}$. **1.141.** 5; 5^0; 5^{-1}; 5^{-3}. **1.142.** а) $\frac{8}{9}$; б) $-\frac{2}{125}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 0,2; д) 78; е) 10 149. **1.143.** а) 3^{-6}; б) $3{,}4^{-7}$; в) $(-3)^{-2}$; д) $(-1)^{-8}$; з) $(-7)^0$. **1.144.** а) $(-7)^{-6} > -7^{-6}$; б) $(-2)^{-5} = -2^{-5}$; в) $-(-1)^{-4} = (-1)^{-7}$; г) $(-17)^0 > -17^0$. **1.145.** а) $-\frac{1}{81}$; б) –8; в) $\frac{1}{4}$; г) –125; д) $-\frac{7}{17}$; е) $\frac{81}{121}$. **1.146.** а) $-\frac{1}{2}$; б) –0,00625; в) $-2\frac{5}{9}$; г) $-\frac{1}{108}$; д) –5; е) 10 000,0001. **1.148.** а) $\frac{1}{25}$; б) 1; в) $\frac{1}{4}$; г) 0,01; д) 625; е) $\frac{1}{3}$; ж) 125; з) 81; и) 0,001; к) $\frac{1}{7}$; л) 0,1; м) 25. **1.149.** а) $\frac{1}{16}$; б) 81; в) 0,001; г) 1; д) $\frac{1}{32}$; е) $\frac{1}{64}$. **1.150.** В 100 000 раз. **1.151.** а) 2^{-4}; б) $0{,}25^{-5}$. **1.153.** а) 256; б) 1,5. **1.154.** а) 1; б) 4; в) $-\frac{6}{19}$; г) 1000; д) $\frac{3}{4}$; е) $\frac{1}{5}$; ж) $-\frac{1}{49}$; з) $\frac{1}{2}$. **1.155.** 64. **1.156.** 9. **1.157.** а) 8; б) 16; в) $\frac{1}{14}$. **1.158.** x^{-2}. **1.159.** а) 4; б) $-\frac{2}{3}$; в) 41; г) –1875.

* Полная версия ответов размещена на сайте http://e-vedy.adu.by.

1.160. 4^{19}. **1.161.** а) 2; б) 2130. **1.162.** 11. **1.163*.** а) 2; б) $5\frac{4}{9}$.
1.164*. 2,8. **1.194.** $3 \cdot 10^{-5}$; $4,58 \cdot 10^{-7}$. **1.195.** $4,35 \cdot 10^{7}$ г. **1.196.** $3,4567 \cdot 10^{-1}$ км. **1.197.** $5478 \cdot 10^{-10}$; $0,032 \cdot 10^{-6}$; $0,79 \cdot 10^{-9}$. **1.198.** а) $1,44 \cdot 10^{-2}$; б) $8 \cdot 10^{-3}$. **1.199*.** $3,84 \cdot 10^{-3}$; $2,56 \cdot 10^{-3}$; $2,048 \cdot 10^{-6}$; $2 \cdot 10^{-1}$. **1.203.** Фирмы *B*. **1.204.** Да. **1.205.** а) $6\frac{1}{3} \cdot 10^{4}$ а. е.; б) около 116 суток. **1.206.** $\approx$ 13 000 км; в $\approx 4 \cdot 10^{18}$ раза.

Я проверяю свои знания

1. г). **2.** б). **3.** б) $8,9 \cdot 10^{-6}$. **4.** б). **5.** $(-2,5)^1$; $(-2,5)^{-1}$; $(-2,5)^{-2}$; $(0,25)^{-1}$; $(0,25)^{-2}$. **6.** a^{-4}. **7.** 68. **8.** 64. **9.** 2 или 1. **10.** 2^{4n+2}.

Глава 2
Выражения и их преобразования

2.25. а) -5; б) $-\frac{1}{5}$; в) -1; г) $\frac{10}{27}$. **2.26.** а) $-10,1$; б) -9. **2.30.** а) $3(7-a)$; б) $(a+b):15$; в) $(a+b)^2$. **2.31.** 13; -3; -11. **2.32.** а) $\frac{2}{35}$; г) -6. **2.33.** а) $-8,75$; б) 1003. **2.35.** -2; $-0,28$; $-0,16$. **2.36.** а) Все числа; б) все числа; в) все числа, кроме -7. **2.37.** а) $x = 3$; б) $x = 0$; в) $x = -2,5$. **2.39*.** -8. **2.59.** 4,2. **2.60.** $-1\frac{13}{17}$. **2.62.** а) -8; б) 0,001. **2.84.** а) $8x^{10}$; 8; б) abc; 1; в) $3b^7$; 3; г) $-m^{10}n^5$; -1. **2.86.** а) -1; 3; б) 5; 13; в) -6; 7; г) 1; 17. **2.87.** а) m^3n; б) $2mn^2$; в) $3m^2n^3$. **2.88.** $-0,2$. **2.123.** а) $-10x^2y^5$; б) $-a^3b^3$; в) $-mn^{10}$; г) $7a^9b^5$. **2.124.** а) $-a^7b^{15}$; -1; б) $0,9x^2y^3z^2$; 0,9. **2.125.** 0,5. **2.127.** а) $6x^6y^3$; 9; б) $-6a^2bc^2$; 5; в) $9n^4k^4$; 8; г) $2ab$; 2. **2.128.** а) $-0,5a^3b$; б) $-mn^3$. **2.129.** 42. **2.131.** а) $0,008a^9b^3$; б) $49x^{14}y^6$; в) $-m^{21}n^{14}k^7$. **2.134.** а) $8a^2$; б) $0,03x^5y^{10}$. **2.137.** а) $5b$; б) $-4x^2y$; в) $-7a^4b$; г) $7b^3c^4$. **2.138.** а) $-ab$; б) 0. **2.139.** $-67a^{13}b^4$. **2.140*.** m^3n. **2.161.** а) a^2-7a; б) x^3+xy. **2.162.** а) $8a^2b+a$; 3; б) $7m^4$; 4; в) $10x^3+4y^2$; 3. **2.163.** 20. **2.184.** а) $m-8n$; б) $-3a$; в) $-7x^2+10x$; г) $9y^3$. **2.185.** $-3x+14$; 1; $4x^2-3x-4$; 2. **2.186.** а) 0; б) $-2n$. **2.187.** а) $2pk$; б) $-6x^6+12x^3$.

2.188. 1. **2.189.** 0. **2.190.** а) $4b-6$; б) $ax-z$. **2.191.** $10\frac{2}{3}$. **2.194*.** $-a-1$. **2.213.** а) $5a^2b+5ab^2$; б) $-3m^2n^2-3m^3n$; в) $-6y^4+18y^3$; г) $3a^3-9a^2-6a$; д) $x^4-x^3+x^2$; е) $9a^3b^2+9a^2b^3-9ab^4$. **2.214.** а) $-11a-28b$; б) $14a-2$; в) $-5x+y$; г) $9a-b$. **2.215.** $-4{,}99$. **2.216.** а) 3; б) 8; в) $4\frac{1}{7}$. **2.217.** а) $5x^3-2x$; б) $3a^3-2a^2-1$; в) $-3a^2+4a^3b-1$. **2.218.** а) $-11x+37$; б) $-5t^2-2$. **2.220.** 0,5. **2.221*.** 0,75. **2.250.** а) $-a^2b^2+a^3-b^3+ab$; 4; б) $2x^4+8x^3-3x^2-12x$; 4; в) $8n^3-5n^2-3n$; 3; г) $21x^4+21y^4-58x^2y^2$; 4. **2.251.** 2. **2.252.** а) y^2-x^2; б) $-3a^2-2a+1$; в) $-14c^2-10d^2-39cd$; г) $-a^2b^2+a^3+b^3-ab$. **2.253.** -49. **2.254.** а) y^3+2y^2-5y+2; б) $6c^3+5c^2-7c-4$. **2.255.** а) $75y^3-3y$; б) $-7n^3+19n^2+6n$. **2.256.** а) $30x^2-6y^2$; б) $-3x^2-3x-6$; в) c^2+8; г) $6a-9$. **2.257.** а) 0,25; б) -29. **2.259.** $-8{,}5$. **2.260.** 2,5. **2.261.** $4y$. **2.263*.** 1. **2.302.** а) $a^2-0{,}4a+0{,}04$; б) $0{,}09x^2+0{,}6x+1$; в) $\frac{1}{25}b^2-2b+25$; г) $0{,}01n^2+0{,}8mn+16m^2$. **2.303.** а) $n^6+2mn^3+m^2$; б) $a^8-2a^4b^3+b^6$; в) $1+20x^2+100x^4$; г) $\frac{1}{16}b^4-b^2c^3+4c^6$. **2.304.** а) b^2-4b+4; б) $9a^2+6a+1$; в) $25x^2+40xy+16y^2$; г) $y^6-16y^3z+64z^2$. **2.306.** а) $20-20a$; б) $2a^2-9$. **2.307.** -35. **2.308.** 2. **2.311.** 10 000. **2.312.** а) 4; б) $\pm 10y$; в) $36c^2$. **2.313.** 144. **2.315*.** $(a+1)^2+2$. **2.316*.** Выделите квадрат двучлена. **2.349.** а) b^2-c^2; б) x^2-49; в) n^2-m^2; г) $25-y^2$; д) $16x^2-1$; е) b^2-4a^2; ж) $9-25c^2$; з) $4m^2-49n^2$. **2.351.** а) x^4-1; б) $25-a^8$; в) $36m^4-25n^{10}$; г) $b^{12}c^2-9$. **2.353.** а) $64n^2-\frac{1}{16}m^2$; б) $0{,}04a^2-\frac{1}{9}$; в) $0{,}16x^4-9b^2$; г) $\frac{4}{25}m^8-0{,}01p^2n^2$. **2.354.** а) m^2-n^4; б) $9-25a^8$. **2.355.** а) $-4x^2+100$; б) $-b^2$; в) n^4. **2.356.** 2,5. **2.357.** а) $6x+13$; б) $8mn-32n^2$. **2.358.** 33. **2.360.** а) $(x+y)\times(x-y)$; б) $(a+3)(a-3)$; в) $(m+1)(m-1)$; г) $(1+b^3)(1-b^3)$; д) $(7a+4)(7a-4)$; е) $(8x^4+5z^2)(8x^4-5z^2)$. **2.361.** а) $\left(\frac{1}{5}n+\frac{2}{3}m\right)\times\left(\frac{1}{5}n-\frac{2}{3}m\right)$; б) $(0{,}3a+0{,}8c^2)(0{,}3a-0{,}8c^2)$; в) $(0{,}2b^2c+1)\times$

$\times(0,2b^2c-1)$; г) $\left(\frac{1}{3}x^3y^2+\frac{1}{5}z\right)\left(\frac{1}{3}x^3y^2-\frac{1}{5}z\right)$. **2.363.** а) $-y(2x-y)$; б) $-a(a+2b)$; в) $(m-3n)(m+5n)$; г) $(5c-k)(k-c)$. **2.364.** b^4-625. **2.365*.** $-3x^4-x^3+12x^2-10x+18$. **2.416.** а) $9a(b-c)$; б) $7x(1+3y)$; в) $3b(b-6c)$; г) $m(5m+1)$; д) $-2xy(2x-3)$; е) $-pq(pq+1)$. **2.417.** а) $7(6c-d+3)$; б) $b(a^2-ab-1)$; в) $m^2(m^2-3m+4)$; г) $-x^2(x^3-2x+1)$; д) $3a^3b(1-2b+3a)$; е) $-bc^2(c^2+2bc-3b^2)$. **2.418.** 0,49. **2.419.** а) $(m-n)(k+t)$; б) $(a-c)(4b-5)$; в) $(2b-l)(5a-3c)$; г) $(x+y)(1+a)$; д) $(a-b)(1-7c)$; е) $(x-c)(8z+1)$. **2.420.** а) $(x-y)(a-6)$; б) $(m+2n)(7-a)$; в) $(b-c)(k-5)$; г) $(b-c)(7x+1)$; д) $(3k-t)(2+a)$. **2.421.** а) $(d+c)(a+3b)$; б) $(b-c)(k+5l)$; в) $(x-y)(5a-b)$; г) $(x-2)(m+a)$; д) $(a+2b)(x-3y)$; е) $(x-y)(2l+n)$. **2.422.** а) $(a-3b)(a+1)$; б) $(c+a)(d-a)$; в) $(x-3y)(y+1)$; г) $(x-y)(x^2+y^2)$; д) $(a-1)(a^2+1)$; е) $(5a-2c)(a+b)$. **2.423.** а) $(a-5b)(a^2+b^2)$; б) $(3z^2+2y^2)(16x-5y)$. **2.424.** 0. **2.425.** 1. **2.426.** $(a-b)(x^2+y-y^2)$. **2.427.** а) $(4a+5)(4a-5)$; б) $\left(\frac{2}{3}m+n\right)\left(\frac{2}{3}m-n\right)$; в) $(0,1a^3+b^4)(0,1a^3-b^4)$; г) $(1+7x^2y)\times(1-7x^2y)$. **2.429.** а) $(x+5y)^2$; б) $(6a-1)^2$; в) $(m^2+3)^2$; г) $(7b^2-2c^3)^2$. **2.430.** 0,18. **2.431.** а) $(a+7)(a-7)$; б) $(n+5m)(n-5m)$; в) $-(b-4)^2$; г) $-(b^2+9)^2$. **2.432.** а) $(a+6)(a+8)$; б) $(2-b)(b+8)$; в) $(m-n-k)(m-n+k)$; г) $(-5-2y)(4y-5)$; д) $(a+5)(9a-5)$; е) $3(6x+1)$. **2.433.** -54. **2.434.** а) $(-7n-8)(7n+20)$; б) $4(4-x)(2x+1)$; в) $3(9a^2+2b)(a^2+2b)$. **2.435.** а) $(1-7b)^2$; б) $(m^2+n)^2$. **2.436.** а) $5(a+1)(a-1)$; б) $x(x+1)(x-1)$; в) $5y^2(y+2)(y-2)$. **2.437.** -9700. **2.438.** а) $(a-b-c)(a-b+c)$; б) $(3-x-3y)(3+x+3y)$; в) $(b-2c-1)(b-2c+1)$; г) $(k-l+5n)(k+l-5n)$. **2.439.** а) $(m+n)(m-n-1)$; б) $(x-y)(2x+2y-1)$. **2.440*.** а) $(2a-3b)(x+3)^2$; б) $ab(a+b)(a-b)$; в) $(4-b+y)(4+b-y)$. **2.441*.** 18. **2.446.** 49,6 кг. **2.447.** Да. **2.448.** $S=ab-nc^2$; 1115,5 м^2; да. **2.449.** Покупка квадратного участка.

Я проверяю свои знания

1. б). **2.** в). **3.** г). **4.** 1. **5.** а) $m(3 - 7n)$; б) $4x^3(2 - 3x^3)$; в) $(c + 1) \times$ $\times (3c - a)$; г) $(3c + 7)(3c - 7)$; д) $(y + 8)^2$; е) $(5a^2 - 3)^2$. **6.** $900a^6b$. **7.** $-6a^2 - a + 13$; 2. **8.** а) $(a + b)(a - b - 4)$; б) $(x + y)(2 - x - y)$. **9.** $25x^4 + 600x^3 + 3600x^2$; 4. **10.** 48.

Глава 3
Линейные уравнения. Линейные неравенства. Линейная функция

3.38. а) -3; б) $\frac{1}{3}$; в) 3,4; г) $-\frac{1}{21}$; д) 0; е) -20; ж) 1,4; з) -18; и) $-1\frac{1}{3}$. **3.41.** а) -10; б) 6,5; в) $1\frac{5}{7}$; г) 5,2. **3.42.** а) 1; б) -2; в) 0,8; г) -10. **3.43.** $-0{,}15$. **3.44.** а) -13; б) $1\frac{5}{7}$. **3.45.** а) 2; б) 12. **3.46.** а) 0; б) 3; в) -6; г) $1\frac{4}{7}$; д) 15; е) $2\frac{2}{3}$. **3.47.** а) Любое число; б) нет корней. **3.48.** 3. **3.49.** а) -7; б) -23; в) 0,24; г) $-2{,}6$. **3.50.** 13. **3.51.** а) $1\frac{1}{3}$; б) любое число; в) $2\frac{2}{7}$; г) $-0{,}2$. **3.52.** 0,5. **3.53.** а) $1\frac{5}{19}$; б) 2; в) $-1{,}5$; г) нет корней. **3.54.** а) -1; б) 2; в) $-0{,}6$; г) $1\frac{31}{34}$. **3.55*.** $a = 1$. **3.56*.** $a = 2$. **3.112.** 110 т; 220 т. **3.113.** 50; 25 тетрадей. **3.114.** 40 к. **3.115.** 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.116.** 162,5 км. **3.117.** 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.118.** 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 36 км. **3.119.** 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.120.** 13 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.121.** 4620 км. **3.122.** 1000 цветов. **3.123.** 140 буклетов. **3.124.** 7 кг. **3.125.** 320. **3.126.** 6 см, 12 см, 15 см. **3.127.** 21 см^2. **3.128.** 25 и 24. **3.129.** 6; 7; 8. **3.188.** а) Нет; б) да; в) да. **3.189.** Не превосходит 37 см. **3.190.** а) $21 < 3b < 30$; б) $9 < b + 2 < 12$; в) $-20 < -2b < -14$; г) $6 < b - 1 < 9$. **3.191.** а) $-1 < \frac{1}{2}a \leqslant 2{,}5$; б) $-1 < a + 1 \leqslant 6$; в) $-5 \leqslant -a < 2$; г) $-5 < a - 3 \leqslant 2$. **3.192.** $1{,}2 \leqslant P \leqslant 1{,}6$. **3.193.** а) $10 < n + m < 18$; б) $-1 < n - m < 7$; в) $21 < nm < 80$; г) $\frac{7}{8} < \frac{n}{m} < 3\frac{1}{3}$.

3.194. $-62\frac{1}{6} < \frac{a}{6} - 7b < -12\frac{2}{3}$. **3.195*.** Удвоенный квадрат среднего числа меньше суммы квадратов двух других чисел. **3.245.** а) $x \geqslant -\frac{2}{3}$; б) $x > -1$; в) $x > -5,5$; г) $x \geqslant -7$. **3.246.** $m > -1,5$. **3.247.** а) $x > 5$; б) $x < -2,5$; в) $x > 3$; г) $x < -2$; д) $x > 10$; е) $x \leqslant -0,4$. **3.248.** а) Решений нет; б) любое число. **3.249.** а) $x \leqslant 3,2$; б) $x > -1,4$; в) $x < 1\frac{2}{3}$. **3.250.** а) $x \geqslant 2,5$; б) $x > 17$; в) $x \leqslant 1\frac{2}{7}$; г) $x < 22\frac{1}{3}$. **3.251.** $a \leqslant 2\frac{1}{21}$. **3.252.** $y \geqslant -1\frac{3}{7}$. **3.253.** а) $x \leqslant -1,5$; б) $x \geqslant 5,25$; в) нет решений; г) $x > 6,5$; д) $x \geqslant \frac{1}{12}$; е) $x > 3$. **3.254.** а) $x > 3$; б) $x \geqslant -5\frac{1}{3}$; в) $x \geqslant 5,2$; г) $x \geqslant -\frac{1}{6}$. **3.255.** 0. **3.256.** 1. **3.257.** Больше 9 см. **3.258*.** $a < 7$. **3.291.** 31,4 см, 200 м. **3.294.** –7, 3, 5, 23. **3.295.** 4, 3,25, 103. **3.297.** 2, 0, 0, –2. **3.298.** а) –4; –1; 4; б) $-5 \leqslant x < -4$; $-1 < x < 4$; в) $-4 < x < -1$; $4 < x \leqslant 5$. **3.299.** а) $\frac{2}{3}$; б) 2,25. **3.360.** а) –14; б) $-11\frac{2}{3}$; в) –12. **3.361.** а) –2; б) –1,5; в) –3. **3.362.** а) 27; б) 1. **3.364.** а) $-\frac{1}{3}$; б) 0; в) 9. **3.365.** –4. **3.366.** (0; –10); (2; 0). **3.367.** а) 4,5; б) $x < 4,5$; в) $x > 4,5$. **3.368.** *A*, *B*. **3.372.** 2). **3.373.** б); в). **3.374.** –2. **3.375.** 68. **3.376.** $y = -7$. **3.378.** $y = -3x + 3$. **3.379.** $k = 3$; $b = 5$. **3.381.** (8; 3). **3.382.** $\frac{2}{11}$. **3.384*.** $b = 19$. **3.393.** 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.394.** Не менее 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **3.395.** 300 р. **3.396.** а) Зима; б) ≈ 98 °*F*; в) 32 °*F*.

Я проверяю свои знания

1. а). **2.** а) 1); б) 4); в) 3); г) 2). **3.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) да. **5.** а) $x \leqslant -7$; б) $x > 1,75$. **6.** 70 картин. **7.** а) –14; б) $-1\frac{10}{17}$; в) –1; г) $\frac{5}{11}$. **8.** а) Решений нет; б) любое число. **9.** $n = 10$. **10.** При $p < 1$.

Глава 4
Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

4.23. а) $x = -4y + 7$; б) $y = -\frac{x}{4} + 1\frac{3}{4}$. **4.24.** а) $x = -7y + 1$; б) $x = 4y + 1\frac{2}{3}$; в) $x = 6y - 5$; г) $x = 16y - 14$; д) $x = -\frac{7}{4}y + 6$; е) $x = \frac{10y}{13} + \frac{2}{3}$. **4.25.** 5; 3 или 1. **4.26.** 5 и 9; 10 и 5; 15 и 1. **4.27*.** (–9; 9). **4.52.** $y = 2$. **4.53.** $a = 3$. **4.81*.** $a = 1{,}5$. **4.115.** а) (–1; –1); б) (2; 3); в) (14; 7); г) (–3; –15). **4.116.** а) (4; 3); б) (–42; –16); в) (1; 4); г) (31; 7). **4.117.** а) (1,5; 0,5); б) (24; 0); в) (–1; –1); г) (10; 14). **4.118.** а) (8; 3); б) (12; –21). **4.119.** а) (–2; 6,5); б) (7; 5). **4.120.** а) (4; 6); б) (2; –2). **4.121.** а) (1; 1); б) (7; 5). **4.122.** (3; –4). **4.123.** а) (3; –9); б) (–17; 5). **4.124.** $y = -2x + 3$. **4.125.** а) (–2; 5); б) (5; 8); в) (5; 3); г) (14; 13). **4.126.** (5; 5). **4.127.** Нет. **4.128.** (0;0). **4.129.** $y = 2x - 1$. **4.167.** 4 р. **4.168.** 40 р. **4.169.** 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **4.170.** 300 т. **4.171.** Невозможна. **4.172.** 7 и 15. **4.173.** 160 и 50. **4.174.** 3 л и 6 л. **4.175.** 34. **4.176.** 40 и 45. **4.177.** 30. **4.183.** Да. **4.184.** 40 р. **4.185.** 14 ч. **4.186.** 30 ч и 28 ч.

Я проверяю свои знания

1. б) $-5x + 2y = 13$; $a = -5$; $b = 2$; $c = 13$. **2.** Нет, в). **3.** (3; 1). **4.** –20. **5.** б). **6.** б). **7.** (3; 2). **8.** 33 человека. **9.** 4. **10.** $b = -2$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4
Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

2-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева.* Редактор *Н. М. Алганова.*
Художественный редактор *Е. А. Проволович.* Обложка *Н. В. Кузьменковой.*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *Е. Ю. Агафоновой.*
Корректоры *О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко.*

Подписано в печать 10.02.2022. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,5 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 10,67 + 0,33 форз. Тираж 121 500 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.