

# АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 8 класа  
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі  
з беларускай мовай навучання

Пад рэдакцыяй  
прафесара Л. Б. Шнэпермана

*Датушчана  
Міністэрствам адукацыі  
Рэспублікі Беларусь*

4-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Мінск «Народная асвета» 2015

Правообладатель Народная асвета

УДК 512(075.3=161.3)

ББК 22.14я721

A45

Аўтары:

А. П. Кузнецова, Г. Л. Мураўёва, Л. Б. Шнэперман, Б. Ю. Яшчын

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзент

кафедра «Вышэйшая матэматыка № 3» Беларускага нацыянальнага  
тэхнічнага ўніверсітэта (кандыдат педагогічных навук, дацэнт кафедры

*А. Л. Ярашэўская*)

**Алгебра** : вучэб. дапам. для 8-га кл. устаноў агул. ся-  
A45 рэд. адукацыі з беларус. мовай навучання / А. П. Куз-  
нецова [і інш.] ; пад рэд. праф. Л. Б. Шнэпермана ; пер.  
з рус. мовы Н. М. Алганавай. — 4-е выд., выпр. і дап. —  
Мінск : Народная асвета, 2015. — 310 с. : іл.

ISBN 978-985-03-2391-0.

Папярэдняе выданне выйшла ў 2010 г.

УДК 512(075.3=161.3)

ББК 22.14я721

ISBN 978-985-03-2391-0

© Алганава Н. М., пераклад на беларускую мову, 2015

© Афармленне. УП «Народная асвета», 2015

Правообладатель Народная асвета

## Ад аўтараў

У 8-м класе мы працягнем вывучэнне алгебры і пазнаёмімся з вельмі важнымі для ўсёй матэматыкі паняццямі: «няроўнасць», «ірацыянальны лік», «рэчаісны лік», «квадратнае ўраўненне», «квадратычная функцыя».


Як і ў вучэбным дапаможніку для 7-га класа, практыкаванні ў гэтай кнізе нумаруюцца па раздзелах. Лік перад кропкай абазначае нумар раздзела, лік пасля кропкі — нумар практыкавання ў гэтым раздзеле. Напрыклад, 3.59 — гэта 59-е практыкаванне з 3-га раздзела.


Сярод практыкаванняў сустракаюцца нумары з кружком (напрыклад, 1.35°), нумары з зорачкай (напрыклад, 5.21\*) і нумары без абазначэнняў (напрыклад, 6.58). Кружком вылучаны практыкаванні, якія павінен умець рашаць кожны навучэнец. Усе астатнія практыкаванні адрасаваны тым, хто жадае паглыбіць свае веды. Найбольш складаныя з іх вылучаны зорачкай. Значная частка заданняў павышанага ўзроўню складанасці змешчана ў зборніку задач.


Тлумачэнні да пераўтварэнняў, якія даюцца ў ходзе рашэння прыкладу (іх не трэба запісваць у сшытак), змяшчаюцца паміж дзвюма вертыкальнымі стрэлкамі ( $\downarrow \dots \downarrow$  або  $\uparrow \dots \uparrow$ ); напрамак стрэлак падказвае, якое менавіта пераўтварэнне тлумачыцца.


Заканчэнне доказу сцверджання пазначаецца светлым квадрацікам з дыяганалямі  $\boxtimes$ .

Матэрыял, вылучаны трохвугольнікамі  $\blacktriangle$ , адрасаваны тым, хто збіраецца вывучаць матэматыку сур'ёзна.

Матэрыял, на які трэба звярнуць асаблівую ўвагу, вылучаны клічнікам .

Вагі  нарысаваны там, дзе параўноўваюцца варыянты доказаў, рашэнняў або іх афармлення.

Гістарычныя звесткі, што сустракаюцца ў кнізе, вылучаны знакам .

Знакам  абазначаны пытанні, якія змешчаны пасля кожнага пункта; яны дапамагаюць зразумець і паўтарыць новы матэрыял, вылучыць у ім галоўнае.

Матэрыял для паўтарэння адзначаны знакам .

На форзацах і ў канцы вучэбнага дапаможніка змешчаны даведачныя матэрыялы. У кнізе ёсць прадметны паказальнік.

## Раздзел 1

# ЛІКАВЫЯ НЯРОЎНАСЦІ

### 1.1. Лікавыя няроўнасці

Паняцці дадатнага і адмоўнага лікаў дазваляюць параўноўваць рацыянальныя лікі, г. зн. вызначаць, што адзін рацыянальны лік большы або меншы за другі.

Вызначым паняцці «больш» і «менш» для рацыянальных лікаў.

**Азначэнне.** Няхай  $a$  і  $b$  — рацыянальныя лікі. Гавораць, што  $a$  *больш за*  $b$  (пішуць  $a > b$ ), калі рознасць  $a - b$  дадатны лік, і што  $a$  *менш за*  $b$  (пішуць  $a < b$ ), калі рознасць  $a - b$  адмоўны лік.

Заўважым, што калі  $a - b = 0$ , то  $a = b$ .

**Тэарэма 1.** Для лікаў  $a$  і  $b$  правільная адна і толькі адна з трох суадносін:

$$a > b, \quad a < b, \quad a = b.$$

▲ Доказ. Рознасць  $a - b$  або дадатны лік, або адмоўны лік, або роўная нулю, таму або  $a > b$ , або  $a < b$ , або  $a = b$ . ▢ ▲

Паняцці «больш» і «менш» узаемазвязаныя:

калі  $a > b$ , то  $b < a$ , і наадварот, калі  $b < a$ , то  $a > b$ .

**Прыклад 1.** Які з двух лікаў большы:  $\frac{4}{9}$  або  $\frac{5}{11}$ ?

Рашэнне. Аднімем ад ліку  $\frac{4}{9}$  лік  $\frac{5}{11}$  і вызначым знак гэтай рознасці:

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{11} = \frac{4 \cdot 11}{9 \cdot 11} - \frac{5 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{44 - 45}{99} = \frac{-1}{99}.$$

Атрымалі, што рознасць  $\frac{4}{9} - \frac{5}{11}$  — адмоўны лік, значыць,  $\frac{4}{9} < \frac{5}{11}$ .

Адказ:  $\frac{5}{11}$ .

**Прыклад 2.** Параўнаць лікі  $\frac{11}{300}$  і  $\frac{7}{225}$ .

Рашэнне. Разгледзім рознасць гэтых лікаў:

$$\frac{11}{300} - \frac{7}{225} = \frac{11}{5^2 \cdot 3 \cdot 2^2} - \frac{7}{5^2 \cdot 3^2} = \frac{11 \cdot 3 - 7 \cdot 4}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{33 - 28}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{5}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}.$$

Паколькі гэта рознасць дадатная, то  $\frac{11}{300} > \frac{7}{225}$ .

**Прыклад 3.** Даказаць, што калі  $u$  — любы лік, а  $t$  — дадатны лік, то:

а)  $u + t > u$ ;      б)  $u - t < u$ .

Доказ. а) Разгледзім рознасць  $(u + t) - u$  і вызначым яе знак:

$$(u + t) - u = u + t - u = t.$$

Па ўмове  $t$  — дадатны лік. Значыць,  $u + t > u$ .

Сцверджанне б) дакажыце самастойна. ☒

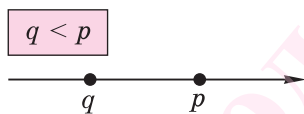
**Прыклад 4.** Даказаць, што:

а) калі  $u$  — дадатны лік, то  $u > 0$ ;

б) калі  $u$  — адмоўны лік, то  $u < 0$ .

Доказ. а) Паколькі рознасць  $u - 0$  — дадатны лік, то па азначэнні  $u > 0$ .

Сцверджанне б) дакажыце самастойна. ☒



Рыс. 1

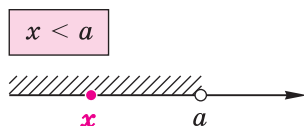
Любы лік можна паказаць пунктам на каардынатнай прамой. З двух лікаў большы той, які паказваецца пунктам, што ляжыць правей (рыс. 1).

Напомнім, што



замест слоў «пункт  $M$  з каардынатай  $a$ » гавораць: «пункт  $M$  адпавядае ліку  $a$ », «пункт  $M$  паказвае лік  $a$ » або нават проста «пункт  $a$ ».

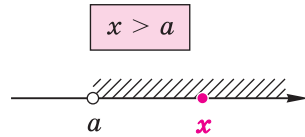
Няхай  $a$  — некаторы лік. Адзначым штрыхоўкай частку каардынатнай прамой лявей за пункт  $a$  (рыс. 2). Каб падкрэсліць, што пункт  $a$  не належыць заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой, вылучым гэты пункт светлым (незафарбаваным) кружком.



Рыс. 2

Калі пункт  $x$  ляжыць на каардынатнай прамой лявей за пункт  $a$ , то  $x < a$ .

Наадварот, калі  $x < a$ , то пункт  $x$  ляжыць на каардынатнай прамой левей за пункт  $a$ .



Рыс. 3

На рысунку 3 штрыхоўкай вылучана частка каардынатнай прамой правей за пункт  $a$  і адзначаны пункт  $x$  такі, што  $x > a$  (пункт  $a$ , які вылучаны светлым кружком, не належыць заштрыхаванай частцы прамой).

**Азначэнне.** Няроўнасць — гэта два выразы  $A$  і  $B$  (лікавыя або са зменнымі), злучаныя адным са знакаў « $<$ » або « $>$ ». Выраз  $A$  называюць *левай часткай няроўнасці*  $A < B$  ( $A > B$ ), а выраз  $B$  — *яе правай часткай*.

Няроўнасці  $A < B$  і  $C < D$  (а таксама  $A > B$  і  $C > D$ ) называюць *няроўнасцямі аднаго знака*, а няроўнасці  $A < B$  і  $C > D$  — *няроўнасцямі розных знакаў*. Знакі няроўнасцей « $<$ » і « $>$ » называюць *процілеглымі*.

Няроўнасць называецца *лікавай*, калі кожная з яе частак з'яўляецца лікавым выразам. Лікавая няроўнасць  $A < B$  называецца *правільнай*, калі значэнне яе левай часткі меншае за значэнне яе правай часткі.

Аналагічнае азначэнне даецца для  $A > B$ .

Напрыклад,  $3 < 5$  і  $-2 < 6$  — правільныя лікавыя няроўнасці аднаго знака, а  $3 < 5$  і  $6 > 4$  — правільныя лікавыя няроўнасці розных знакаў. Няроўнасці

$$13 < 8; \quad -7 + 2 \cdot 5 < -9; \quad 24 > 32$$

— няправільныя лікавыя няроўнасці.



У гэтым пункце, а таксама ў п. 1.2—1.5, фармулюючы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, мы будзем гаварыць *толькі аб правільных лікавых няроўнасцях*.

**Тэарэма 2.** Калі  $a < b$  і  $b < c$ , то  $a < c$ .

**Доказ.** *Спосаб 1.* Паколькі  $a < b$  і  $b < c$ , то  $a - b$  і  $b - c$  — адмоўныя лікі. Сума адмоўных лікаў з'яўляецца адмоўным лікам, значыць,  $(a - b) + (b - c)$  — адмоўны лік. Але  $(a - b) + (b - c) = a - c$ , таму  $a - c$  — адмоўны лік. А гэта азначае, што  $a < c$ .  $\square$



**Способ 2.** Разгледзім рознасць  $a - c$  і вызначым яе знак:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

Паколькі па ўмове  $a < b$  і  $b < c$ , то лікі  $a - b$  і  $b - c$  адмоўныя, а сума адмоўных лікаў — адмоўны лік. Такім чынам,  $a - c < 0$ , г. зн.  $a < c$ . ☒

Тэарэма сфармулявана для суадносіны «менш». Няцяжка перафармуляваць яе для суадносіны «больш»:

**II** калі  $c > b$  і  $b > a$ , то  $c > a$ .

Для пунктаў на каардынатнай прамой даказаная тэарэма азначае, што



калі пункт  $a$  ляжыць лявей за пункт  $b$  і пункт  $b$  ляжыць лявей за пункт  $c$ , то пункт  $a$  ляжыць лявей за пункт  $c$  (рыс. 4).



У гэтым раздзеле тэарэмы будуць фармулявацца і даказвацца толькі для адной з суадносін: «менш» або «больш». А для другой суадносіны вы можаце зрабіць гэта самастойна.

**Прыклад 5.** Аб ліках  $a$  і  $b$  вядома, што  $a < b$ . Даказаць, што:

а) калі  $a$  — дадатны лік, то і  $b$  — дадатны;

б) калі  $b$  — адмоўны лік, то і  $a$  — адмоўны.

**Доказ.** а) Па ўмове  $a > 0$ . Гэта значыць, што  $0 < a$ . А паколькі  $a < b$ , то згодна з тэарэмай 2 атрымаем  $0 < b$ , г. зн.  $b > 0$ . Інакш кажучы,  $b$  — дадатны лік. ☒

Сцверджанне б) даказваецца аналагічна.

**Прыклад 6.** Ці правільна, што:

а) калі  $\frac{6a-7}{23a^4+1} < 0$ , то  $6a-7 < 0$ ;

б) калі  $(3a+16)(-a^2-3) > 0$ , то  $3a+16 < 0$ ?

**Рашэнне.** а) Паколькі назоўнік дробу  $23a^4+1$  дадатны, а дроб па ўмове адмоўны, то яго лічнік  $6a-7$  павінен быць адмоўным лікам, значыць,  $6a-7 < 0$ .



б) Паколькі па ўмове здабытак двух множнікаў дадатны, а множнік  $(-a^2 - 3)$  адмоўны, то і другі множнік павінен быць адмоўным, значыць,  $3a + 16 < 0$ .

Адказ: а) правільна; б) правільна.

▲ **Прыклад 7.** Даказаць, што

$$\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} < \frac{1}{5}.$$

Доказ. Разгледзім наступныя правільныя лікавыя роўнасці:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5 \cdot 6} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6}; & \frac{1}{6 \cdot 7} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{7}; & \frac{1}{7 \cdot 8} &= \frac{1}{7} - \frac{1}{8}; \\ \frac{1}{8 \cdot 9} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{9}; & \dots; & & \frac{1}{98 \cdot 99} &= \frac{1}{98} - \frac{1}{99}. \end{aligned}$$

Склаўшы іх пачленна, г. зн. склаўшы іх левыя часткі і склаўшы іх правыя часткі, атрымаем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} = \frac{1}{5} - \frac{1}{99} < \frac{1}{5}. \quad \square \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**А**

Знакі няроўнасці «<» і «>» для запісу вынікаў парайвання лікаў прапанаваў англійскі матэматык Томас Гарыёт у 1631 г. Яны хутка атрымалі ўсеагульнае прызнанне. Гэта тлумачыцца і тым, што ў друкарнях выкарыстоўвалася лацінская літара «V», з дапамогай якой лёгка было атрымаць знакі «<» і «>». Таму знакі няроўнасці адразу з'явіліся ў матэматычных кнігах тых гадоў.

**?**

1. У якім выглядзе можна запісаць любы рацыянальны лік?
2. Які рацыянальны лік  $\frac{k}{n}$  (дзе  $k$  — цэлы лік,  $n$  — натуральны) з'яўляецца:
  - а) дадатным; б) адмоўным?
3. Калі гавораць, што лік  $a$  большы за лік  $b$  (лік  $a$  меншы за лік  $b$ )?
- 4\*. Дакажыце, што для лікаў  $a$  і  $b$  правільная адна і толькі адна з трох суадносін:  $a > b$ ,  $a < b$ ,  $a = b$ .
5. Як з дапамогай знакаў «>» і «<» запісаць сцверджанне:
  - а)  $-3p$  — дадатны лік;
  - б)  $p^{-3}$  — адмоўны лік?

6. Няхай  $m < k$ . Як розмішчаны на каардынатнай прамой адносна адзін аднаго пункты  $m$  і  $k$ ?
7. Прывядзіце прыклад лікавай няроўнасці. Назавіце яе левую частку, правую частку.
8. Прывядзіце прыклады дзвюх правільных лікавых няроўнасцей: а) аднаго знака; б) розных знакаў.
9. Прывядзіце прыклад няправільнай лікавай няроўнасці.
10. Аб ліках  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вядома, што  $a < b$  і  $b < c$ . Што можна сцвярджаць аб суадносіне паміж  $a$  і  $c$ ?

### Практыкаванні

1.1°. 1) Размясціце ў парадку нарастання:

$$2\frac{1}{4}; -3,6; -7,1; -2,8; 1\frac{2}{9}; 2,26.$$

2) Размясціце ў парадку спадання:

$$(-6)^2; 3^2; (-2)^3; (-1)^2; (-1)^3; (-4)^2.$$

1.2°. Размясціце ў парадку нарастання:

$$1) 90 : (-15), -\frac{1}{7} : (-7) \text{ і } -7 : \left(-\frac{1}{7}\right);$$

$$2) -5(-0,8) : 4, -8(-4) : 16 \text{ і } -25(-6) : (-15).$$

1.3. Параўнайце значэнні выразаў:

$$1) 15 \cdot 4 \text{ і } 231(-0,3) \cdot 0; \quad 2) -4\left(-\frac{3}{4}\right) \text{ і } 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0;$$

$$3) -\frac{3}{11}\left(-\frac{22}{9}\right) \text{ і } -5 \cdot 7(-2); \quad 4) 9 \cdot 2(-0,5) \cdot 3 \text{ і } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}(-3).$$

Параўнайце лікі (1.4—1.5).

$$1.4°. 1) 2,7 \text{ і } 2,07; \quad 2) \frac{1}{4} \text{ і } 0,26; \quad 3) -3,14 \text{ і } -\frac{22}{7};$$

$$4) -\frac{5}{8} \text{ і } -0,62; \quad 5) \frac{4}{9} \text{ і } \frac{5}{11}; \quad 6) -\frac{6}{7} \text{ і } -\frac{5}{6}.$$

$$1.5. 1) \frac{17}{28} \text{ і } \frac{7}{34}; \quad 2) \frac{13}{111} \text{ і } \frac{6}{11}; \quad 3) \frac{11}{36} \text{ і } \frac{11}{48};$$

$$4) \frac{10}{21} \text{ і } \frac{10}{49}; \quad 5) \frac{2015}{2016} \text{ і } \frac{2016}{2017}; \quad 6) \frac{2561}{2562} \text{ і } \frac{2562}{2563}.$$

1.6. Параўнайце значэнні выразаў  $A$  і  $B$ :

$$1) A = 4^{-1} + (-3)^{-2}, B = (-6)^{-2} - 5^{-1} + 0,2 - \frac{1}{36};$$

$$2) A = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} - 5^{-2} + 0,04 - \left(\frac{5}{2}\right)^3, B = \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} + 3^{-3};$$

$$3) A = (-0,1)^{-2} + (-0,2)^{-2}, B = 0,2^{-2} + 0,3^{-2};$$

$$4) A = (-0,1)^{-4} - (-0,3)^{-2}, B = (-0,4)^{-2} + (-0,1)^{-5}.$$

Параўнайце з нулём (1.7—1.8).

$$1.7^\circ. \quad 1) |6|; \quad 2) |-3|; \quad 3) |24|;$$

$$4) |-7|; \quad 5) |a| + 0,6; \quad 6) |-a| + 3,7.$$

$$1.8^\circ. \quad 1) (-2)^{-8}; \quad 2) (-3)^{-7}; \quad 3) (-4,2)^{-121};$$

$$4) -(-15)^0; \quad 5) -1,8^0; \quad 6) -15,2^{-1}.$$

1.9°. Параўнайце з адзінкай:

$$1) \left(\frac{10}{3}\right)^{-3}; \quad 2) \left(\frac{8}{13}\right)^{-2}; \quad 3) -\left(-\frac{9}{13}\right)^{-7};$$

$$4) -(-2,6)^{-4}; \quad 5) -\left(\frac{41}{23}\right)^{-3}; \quad 6) -\left(\frac{16}{25}\right)^{-4}.$$

1.10°. Пастаўце замест шматкроп'я знак «>», «=» або «<» так, каб атрыманае сцверджанне было правільным:

$$1) -5\frac{2}{3} \dots -\frac{16}{3}; \quad 2) -0,001 \dots -0,01;$$

$$3) -0,06 \dots -0,07; \quad 4) -9\frac{4}{15} \dots -9\frac{8}{21};$$

$$5) 0,3^3 \dots 0,1^2; \quad 6) 0,2^2 \dots 0,4^3.$$

1.11°. Дакажыце, што:

$$1) \frac{29}{76} > \frac{11}{38}; \quad 2) \frac{2}{3} > \frac{2}{7}; \quad 3) \frac{5}{6} < \frac{9}{10};$$

$$4) \frac{15}{16} < \frac{16}{17}; \quad 5) -\frac{2}{7} > -\frac{3}{10}; \quad 6) \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$

1.12°. Запішыце некалькі значэнняў  $m$ , пры якіх правільная няроўнасць:

$$1) m + 1 > 3; \quad 2) m + 3,2 > 3,8; \quad 3) m - 4 < (-1)^3;$$

$$4) m + 6 > (-3)^3; \quad 5) m + 6 > (-3)^2; \quad 6) m - 8 < -4^2.$$

1.13°. Няхай  $m < 0$ . Ці правільна, што:

$$1) -270\,530 - m > -270\,530; \quad 2) 19\,104,1 + m > 19\,104,1?$$

1.14°. Няхай  $p > 0$ . Ці правільна, што:

$$1) -80,295 + p < -80,295; \quad 2) -20\,316 - p < -20\,316?$$

1.15°. Параўнайце лікі  $a$  і  $b$ , калі рознасць  $a - b$  роўная:

- 1) 63,57;      2)  $(-1)^{19} \cdot 6$ ;      3)  $0^7$ ;      4)  $(-23)^6$ .

1.16°. Параўнайце з нулём лік  $c$ , калі:

- 1)  $-c > 0$ ;      2)  $-8c < 0$ ;      3)  $4,2c > 0$ ;  
4)  $c : (-6,1) < 0$ ;      5)  $|-7|c > 1$ ;      6)  $|4,5|c < -9$ .

1.17. Вядома, што  $a > 0$ ,  $b < 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $b - a < 0$ ;      2)  $3a - 4b > 0$ ;      3)  $b - |a| > 0$ ;  
4)  $5b - 4|a| < 0$ ;      5)  $4 + a + |b| > 0$ ;      6)  $\frac{a^4 + |b|}{-b^7} > 0$ ?

1.18. Вядома, што  $a < 0$ ,  $b > 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $7a > 1$ ;      2)  $4b < -1$ ;      3)  $a|a| > 0$ ;  
4)  $\frac{|b|}{b} > 0$ ;      5)  $(b^4 + 6) \cdot a < 0$ ;      6)  $a^5 |b|^2 < 0$ ?

1.19. Ці можа сума лікаў  $p + k$  быць:

- 1) меншай за  $p$ ;      2) большай за  $k$ ;  
3) роўнай  $-p$ ;      4) роўнай 0?

1.20. Ці можа рознасць лікаў  $x - y$  быць:

- 1) большай за  $x$ ;      2) меншай за  $y$ ;  
3) роўнай  $y$ ;      4) роўнай  $-x$ ?

1.21. Вядома, што лік  $m$  большы за 5. Ці правільна, што дадатым лікам з'яўляецца:

- 1)  $2 - m$ ;      2)  $m - 8$ ;      3)  $m - 5$ ;      4)  $5 - m$

1.22. Параўнайце значэнні выразаў

$A = (x^{-2} - x^0) : (x^{-1} + 1)$  і  $B = (x^2 - 4) : (x^{-1} + 2^{-1})$  пры  $x$ , роўным:

- 1)  $\frac{1}{2}$ ;      2)  $-\frac{1}{2}$ ;      3)  $\frac{2}{7}$ ;      4)  $-\frac{2}{7}$ .

1.23. Параўнайце значэнні выразаў

$C = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-2}$  і  $D = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-2} \cdot \frac{(a+1)^{-3}}{a^0} \cdot \frac{5^0}{(a-1)^{-3}}$

пры  $a$ , роўным:

- 1) 1,3;      2) -1,3;      3)  $1\frac{2}{3}$ ;      4)  $-1\frac{2}{3}$ .

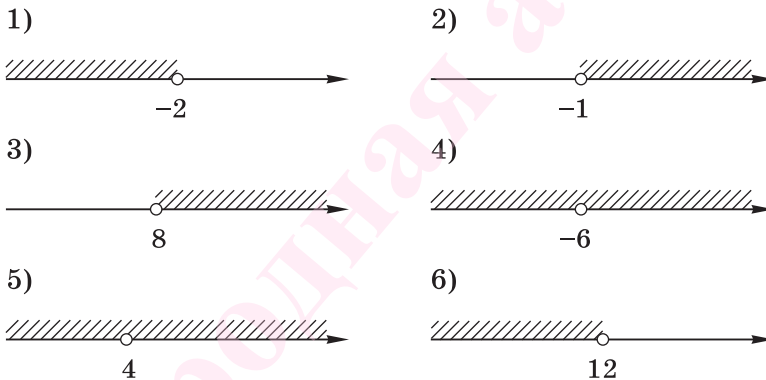
1.24°. Пазначце на каардынатнай прамой некалькі пунктаў, каардынаты якіх:

- 1) меншыя за 8;                      2) большыя за 5;  
3) большыя за  $-2,4$ ;                4) меншыя за  $-3,2$ .

1.25°. Адзначце на каардынатнай прамой пункты  $M$  і  $N$  і запішыце іх каардынаты, калі яны знаходзяцца на адлегласці:

- 1) 5 адзінак ад пункта  $A(4)$ ;  
2) 4 адзінкі ад пункта  $B(-7)$ .

1.26°. Па рысунку 5 запішыце ўмову, якую павінна задавальняць каардыната  $n$  пункта  $K(n)$ , калі яго размясціць на заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой.



Рыс. 5

1.27°. Адзначце штрыхоўкай тую частку каардынатнай прамой, дзе можа ляжаць пункт з каардынатай  $m$ , якая задавальняе ўмову:

- 1)  $m > 4$ ;            2)  $m < 8$ ;            3)  $m < -2$ ;            4)  $m > -6$ .

1.28°. Ці правільна, што на каардынатнай прамой пункт  $x$  ляжыць правей за пункт  $y$ , калі:

- 1)  $y - x = -8^2$ ;                      2)  $y - x = (-5)^3$ ;  
3)  $x - y = -(-5)^2$ ;                4)  $x - y = (-8)^2$ ;

**1.29.** Няхай  $k > 0$  і  $p < 0$ . Визначыце, правей або лявей за пункт  $O$  (пачатак адліку) на каардынатнай прамой ляжыць пункт, каардыната якога роўная:

- 1)  $2k - p$ ;      2)  $4p - 2k$ ;      3)  $k^2 p^3$ ;      4)  $k^3 p^2$ ;  
 5)  $k^5 : p^2$ ;      6)  $k^2 p^5$ ;      7)  $p^2 |p|^3$ ;      8)  $p^3 |p|^2$ .

**1.30°.** Вядома, што  $t > 0$ . Які з двух пунктаў каардынатнай прамой ляжыць правей:

- 1)  $P(36 + t)$  або  $B(36)$ ;      2)  $K(-17 + t)$  або  $T(-17)$ ;  
 3)  $A(91 - t)$  або  $F(91)$ ;      4)  $C(-45 - t)$  або  $E(-45)$ ?

**1.31.** Вядома, што  $k < 0$ . Які з двух пунктаў каардынатнай прамой ляжыць лявей:

- 1)  $A(p)$  або  $F(p - k^5)$ ;      2)  $A(p)$  або  $M(p + 6k)$ ;  
 3)  $A(p)$  або  $N(p + k^6)$ ;      4)  $A(p)$  або  $T(p - k^0)$ ?

**1.32°.** Размясціце лікі  $a, b, c, d$  у парадку спадання, калі:

- 1)  $a > b, c > a, d < b$ ;      2)  $a > b, c < b, d > a$ ;  
 3)  $a < b, c > b, d < a$ ;      4)  $a < b, a > c, d < c$ .

**1.33.** Параўнайце лікі  $m$  і  $n$ , ведаючы, што іх рознасць  $m - n$  роўная:

- 1)°  $(-5)^{46}$ ;      2)°  $(-9)^{71}$ ;      3)°  $(-1,4)^{13}$ ;  
 4)°  $(-3,2)^{24}$ ;      5)  $(-3,5)^{6k}$ ;      6)  $(-2,9)^{8k-1}$ ;  
 7)  $(-1)^{2k}$ ;      8)  $(-1)^{2k+1}$ ,

дзе  $k$  — цэлы лік.

**1.34°.** Вядома, што лікі  $p, k, c$  дадатныя. Ці правільная лікавая няроўнасць:

- 1)  $p^2 kc + 4 > 0$ ;      2)  $pk^2 c + 5 < 0$ ;      3)  $pk^3 c > 0$ ;  
 4)  $p^2 kc^2 < 0$ ;      5)  $\frac{2c}{-7pk} < 0$ ;      6)  $\frac{-3pc}{5k} > 0$ ?

**1.35°.** Вядома, што лікі  $m, n, k$  адмоўныя. Ці правільная лікавая няроўнасць:

- 1)  $mn^2 k^2 - 12 < 0$ ;      2)  $m^6 n^7 k^4 < 0$ ;  
 3)  $\frac{4m - 8k^2}{k^4 n^3 - 1} > 0$ ;      4)  $\frac{-3n^2 m + 1}{-6k^4 m^2 - 3} < 0$ ?

**1.36°.** Ці правільна, што лікі  $m$  і  $k$  дадатныя, калі:

- 1)  $m > k$  і  $k > 7$ ;      2)  $m < k$  і  $k < -3$ ;  
 3)  $m + 1 > k$  і  $k > 7$ ;      4)  $m - 1 < k$  і  $k < -3$ ;  
 5)  $m + 4 > k$  і  $k > 7$ ;      6)  $m + 6 < k$  і  $k < -3$ ?

1.37°. Ці правільна, што лік  $p$  адмоўны, калі:

- 1)  $p^4 p^5 > 0$ ;                      2)  $p^6 p^3 < 0$ ;                      3)  $p^7 p^4 < 0$ ;  
 4)  $p^4 : p > 0$ ;                      5)  $|p| \cdot p < 0$ ;                      6)  $p : |p| > 0$ ;  
 7)  $p^3(1 + p^4) < 0$ ;                      8)  $p^5(2 + p^2) > 0$ ?

1.38°. Дакажыце, што:

- 1) калі  $k < 7$  і  $p > 7$ , то на каардынатнай прамой пункт  $k$  ляжыць лявей за пункт  $p$ ;  
 2) калі  $k > -10$  і  $p < -10$ , то на каардынатнай прамой пункт  $k$  ляжыць правей за пункт  $p$ ;  
 3) калі  $k < p$  і  $p < t$ , то  $k < t$ ;  
 4) калі  $k - 6 < p$  і  $p < 0$ , то  $k - 6$  — адмоўны лік;  
 5) калі  $k < p + 7$  і  $k > 0$ , то  $p + 7$  — дадатны лік;  
 6) калі  $k^2 - 9 > k$  і  $k > 1$ , то  $k^2 - 9 > 1$ .

1.39°. Назавіце дзве пары значэнняў  $x$  і  $y$ , для якіх выконваюцца наступныя ўмовы:

- 1)  $x - y > 0$  і  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;                      2)  $x - y > 0$  і  $x < 0$ ,  $y < 0$ ;  
 3)  $x - y < 0$  і  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;                      4)  $x - y > 0$  і  $x > 0$ ,  $y < 0$ ;  
 5)  $x - y = 0$  і  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;                      6)  $x - y = 0$  і  $x < 0$ ,  $y < 0$ .

1.40°. Ці правільна, што:

- 1) калі  $x < y$  і  $y > 0$ , то  $x > 0$ ;  
 2) калі  $x < y$  і  $y < 0$ , то  $x < 0$ ;  
 3) калі  $x < y$  і  $x > 0$ , то  $y > 0$ ;  
 4) калі  $x < y$  і  $x < 0$ , то  $y < 0$ ?

1.41°. Ці правільна, што:

- 1) калі  $\frac{5k+8}{17k^2+1} > 0$ , то  $5k+8 > 0$ ;  
 2) калі  $\frac{9k-13}{-8k^4-19} < 0$ , то  $9k-13 < 0$ ;  
 3) калі  $(k+2)(5k^6+3) > 0$ , то  $k+2 > 0$ ;  
 4) калі  $-(10-k)(21k^2+4) < 0$ , то  $10-k < 0$ ?

1.42. Ці правільная лікавая няроўнасць:

- 1)  $18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 7 + 7^2 > 0,09 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,04$ ;  
 2)  $6,72^2 - 3,28^2 < 2 + 4,53^2 + 5,73^2 - 2 \cdot 5,73 \cdot 4,53$ ;  
 3)  $300,1 - (2,95^2 + 2,95 \cdot 2,5 \cdot 2 + 6,25) < 72,8^2 - 27,2^2$ ;  
 4)  $7,98^2 - 2 \cdot 7,98 \cdot 6,58 + 6,58^2 < 5,94 \cdot 37,2^2 - 7,5^2 \cdot 5,94$ ?

1.43. Ці правільна, што  $A > B$ , калі:

$$1) A = -(-5)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - (-47,25)^0 - \left(7\frac{2}{3}\right)^3,$$

$$B = -\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} - (-5)^2 - (-28,5)^0 + \left(12\frac{1}{5}\right)^2;$$

$$2) A = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} + (-9)^2 + (95,5)^0 - \left(-2\frac{3}{5}\right)^2,$$

$$B = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} - (-2)^4 - (-193,8)^0 - \left(13\frac{1}{3}\right)^3?$$

1.44. Параўнайце значэнні выразаў:

$$1) \frac{3^5}{7^8} : \frac{3^3}{7^7} \text{ і } \frac{8^3}{9^4} : \frac{2^8}{3^6};$$

$$2) \frac{2^5}{5} : \frac{2^4}{15} \text{ і } \frac{3^9}{4} : \frac{3^7}{8};$$

$$3) \frac{2^4}{5^3} : \frac{2^6}{5^2} \text{ і } \frac{2^5}{3^7} : \frac{2^8}{3^8};$$

$$4) \frac{3^4}{2^7} : \frac{3^3}{2^9} \text{ і } \frac{9^4}{5^6} : \frac{3^5}{5^7}.$$

1.45\*. Параўнайце значэнні выразаў:

$$1) A = \frac{a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3}{a^2n + amn} \text{ і } B = \frac{a - an + m - mn}{1 - 4n + 4n^2 - n^3},$$

$$\text{калі } a = -0,75, m = n = -\frac{1}{3};$$

$$2) A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{(a - b)^{-2}} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \text{ і } B = \frac{(a^{-2} - 1) \cdot b^{-1}}{a^{-2} - b^{-1}} + ((-a)^{-1})^{-2},$$

$$\text{калі } a = -\frac{1}{2}, b = 1.$$

1.46\*. Дакажыце, што правільнае сцверджанне:

$$1) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{32 \cdot 35} < \frac{1}{6};$$

$$2) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10^2} > \frac{9}{22}.$$

## 1.2. Уласцівасці лікавых няроўнасцей, звязаныя з дзеяннямі складання і аднімання

**Тэарэма.** Калі  $a < b$ , то  $a + c < b + c$ .

Доказ. Разгледзім рознасць  $(a + c) - (b + c)$  і вызначым яе знак:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Паколькі па ўмове  $a < b$ , то  $a - b$  — адмоўны лік. Значыць,  $(a + c) - (b + c)$  — адмоўны лік, і, такім чынам,  $a + c < b + c$ .  $\square$



**А**

З часоў эпохі Адраджэння заканчэнне доказу тэарэмы абазначалася матэматыкамі скарачэннем «*Q.E.D.*» (па-руску «ч. т. д.») ад лацінскага выразу «*Quod Erat Demonstrandum*» — «*Что и требовалось доказать*». З 1978 г. у камп'ютарнай вёрстцы сталі для гэтага выкарыстоўваць сімвал амерыканскага матэматыка Пола Рычарда Халмоша — ■ або іншыя знакі, напрыклад ☐.

Сцверджанне, што

$$\text{калі } a < b, \text{ то } a - c < b - c, \quad (1)$$

дакажыце самастойна.

Гэтыя ўласцівасці лікавых няроўнасцей фармулююцца так:

**!**

калі да абедзвюх частак правільнай лікавай няроўнасці дадаць адзін і той жа лік, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака;  
калі ад абедзвюх частак правільнай лікавай няроўнасці адняць адзін і той жа лік, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака.

**Вывіск.** Калі  $a + k < b$ , то  $a < b - k$ .

Гэта ўласцівасць фармулюецца так:

**!**

калі ў правільнай лікавай няроўнасці перанесці складаемае з адной часткі ў другую з процілеглым знакам, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака.

Доказ. Няхай  $a + k < b$ . Ад левай і правай частак гэтай няроўнасці аднімем  $k$ . Атрымаем правільную лікавую няроўнасць

$$(a + k) - k < b - k.$$

А паколькі  $(a + k) - k = a$ , то маем:  $a < b - k$ . ☐

**Прыклад 1.** Няхай  $k > t$ . Параўнаць лікі  $k - 17y^2$  і  $t - 17y^2$ .

Рашэнне. Па ўласцівасці лікавых няроўнасцей (1), адняўшы ад абедзвюх частак дадзенай няроўнасці  $k > t$  адзін і той жа лік  $17y^2$ , атрымаем правільную лікавую няроўнасць

$$k - 17y^2 > t - 17y^2.$$

**Прыклад 2.** Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыць няроўнасць  $(b - 4)(b + 4) < (b + 3)^2 - 8$  так, каб яе правая частка не змяшчала літар.

Рашэнне.  $(b - 4)(b + 4) < (b + 3)^2 - 8$ ;

↓ выкарыстаем формулы скарачанага множання ↓

$$b^2 - 16 < b^2 + 6b + 9 - 8;$$

↓ па выніку з тэарэмы маем ↓

$$b^2 - b^2 - 6b < 9 - 8 + 16;$$

↓ прывядзём падобныя члены і выканаем вылічэнні ↓

$$-6b < 17.$$



1. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму аб дадаванні аднаго і таго ж ліку да абедзвюх частак лікавай няроўнасці.
2. Сфармулюйце і дакажыце:
  - а) уласцівасць (1) аб адніманні ліку ад абедзвюх частак няроўнасці;
  - б) вынік з тэарэмы гэтага пункта.

### Практыкаванні

**1.47°.** Запішыце няроўнасць, якая атрымаецца, калі да абедзвюх частак няроўнасці  $-8 < 5$  дадаць лік:

- 1) 2,9;      2) 7,2;      3) -8,2;      4) -3,9.

**1.48°.** Запішыце няроўнасць, якая атрымаецца, калі да абедзвюх частак няроўнасці  $-6 < 10$  дадаць лік:

- 1)  $10 + y$ ;      2)  $5 - b$ ;      3)  $-8m$ ;      4)  $4n$ .

**1.49°.** Да абедзвюх частак няроўнасці  $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$  дадайце лік:

- 1)  $\frac{1}{2}$ ;      2)  $-\frac{1}{3}$ ;      3)  $-2\frac{1}{4}$ ;      4)  $3\frac{1}{5}$ .

**1.50°.** Ад абедзвюх частак няроўнасці  $-4 > -18$  адніміце лік:

- 1) 3,1;      2) 2,9;      3) -2,1;      4) -9,5.

**1.51.** Ад абедзвюх частак няроўнасці  $-12 < -6$  адніміце лік:

- 1)  $k + 9$ ;      2)  $5 - t$ ;      3)  $-8 - 7m$ ;      4)  $-9 - 2n$ .

**1.52°.** Ад абедзвюх частак няроўнасці  $\frac{2}{7} < \frac{5}{8}$  адніміце лік:

- 1)  $\frac{1}{3}$ ;      2)  $-\frac{1}{4}$ ;      3)  $-4\frac{1}{6}$ ;      4)  $2\frac{1}{5}$ .

**1.53°.** Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыце дадзеную няроўнасць так, каб яе правая частка была роўная нулю:

- 1)  $2a^2 - 6a + 7 > 2a^2 - 3a + 4$ ;
- 2)  $7c^2 - 5(c - 2) + 3 < 11c - 4 + 7c^2$ ;
- 3)  $(9 - k)(9 + k) < -19 + k^2 - 3k$ ;
- 4)  $(p - 3)(p + 3) > (p + 4)(p + 3)$ .

**1.54°.** Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыце дадзеную няроўнасць так, каб яе правая частка не змяшчала літар:

- 1)  $(7 - b)^2 < (b - 3)(b + 5) + 2$ ;
- 2)  $(n + 4)^2 > 1 - 6n + n^2$ ;
- 3)  $(a^2 - 5)^2 > -10a + a^4 + 2$ ;
- 4)  $(2a + 1)(a + 1) - (a + 6)(2a - 1) < 3a(a - 1) - 3a^2$ ;
- 5)\*  $2c^3 - 3 > (c - 3)(c^2 + 3c + 9)$ ;
- 6)\*  $(k + 2)(k^2 - 2k + 4) < 10 + 3k^3$ .

**1.55.** Пераўтварыце дадзеную лікавую няроўнасць у няроўнасць, левая частка якой будзе роўная квадрату сумы лікаў  $a$  і  $b$ :

- 1)  $2ab < 13$ ;
- 2)  $a^2 + 4ab > 7$ ;
- 3)  $b^2 - 3ab > -4$ ;
- 4)  $a^2 + b^2 < -10$ ;
- 5)  $5a^2 + b^2 < 1$ ;
- 6)  $2ab - b^2 > 2$ .

**1.56.** Пераўтварыце дадзеную лікавую няроўнасць у няроўнасць, левая частка якой будзе роўная квадрату рознасці лікаў  $m$  і  $n$ :

- 1)  $6mn > 5$ ;
- 2)  $m^2 - 10mn < 3$ ;
- 3)  $m^2 + 5mn < -2$ ;
- 4)  $m^2 + n^2 > 8$ ;
- 5)  $16n^2 + 9m^2 > 4$ ;
- 6)  $n^2 + 8mn < 10$ .

**1.57.** Дакажыце, што калі  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ , то:

- 1)  $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$ ;
- 2)  $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$ ;
- 3)  $\frac{c-2d}{d} < \frac{a-2b}{b}$ ;
- 4)  $\frac{c+6d}{d} < \frac{a+6b}{b}$ .

**1.58\*.** Няхай  $b < 0$ . Ці правільная лікавая няроўнасць:

- 1)  $\frac{1}{2b^2 - 5b} + \frac{1}{5b + 2b^2} < \frac{4}{4b^2 - 25}$ ;
- 2)  $\frac{b^2(b^2 + 2)}{(b - 1)^2} + \frac{b^2(1 + b)}{1 - b} < \frac{3(2b - 1)}{(1 - b)^2}$ ?

**1.59\*.** Няхай  $p > 0$ . Ці правільная лікавая няроўнасць:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{p^2}{p-3} > \frac{3p}{p-3}; & 2) \frac{16-p^2}{5-p} < \frac{10}{5-p}; \\ 3) \frac{16-p^2}{5-p} < \frac{24}{5-p}; & 4) \frac{4p^2-5}{1-2p} > \frac{4}{2p-1}? \end{array}$$

**1.60\*.** Параўнайце лік  $-5$  са значэннем выразу

$$\frac{2m}{n-2m} - \frac{n^2-6mn}{4m^2-n^2}$$

пры:

$$1) n = -1; m = 3; \quad 2) n = 3; m = -1.$$

**1.61\*.** 1) Ці правільна, што пры  $a \neq -1$  значэнне выразу

$$\frac{3a+1}{2a+2} - \frac{5a+2}{3a+3} \text{ адмоўнае?}$$

2) Ці правільна, што пры  $a \neq 2$  значэнне выразу

$$\frac{2a-1}{3a-6} - \frac{a+3}{5a-10} \text{ дадатнае?}$$

**1.62.** 1) Ці правільна, што пры  $a = -4$  значэнне выразу

$$-\frac{5a}{4a-4} + \frac{2a}{5-5a} \text{ меншае за } 1?$$

2) Ці правільна, што пры  $a = 5$  значэнне выразу

$$\frac{8}{a^2-16} - \frac{2a}{a^2+4a} \text{ большае за } 1?$$

**1.63\*.** Ці правільна, што:

$$1) \text{ калі } \left( \frac{3}{c} + \frac{3}{c+d} \right) \cdot \frac{c}{18(2c+d)} > 0, \text{ то } c+d > 0;$$

$$2) \text{ калі } \left( \frac{k+6}{3k+9} - \frac{1}{k+3} \right) : \frac{k+2}{27} < 0, \text{ то } k+2 < 0?$$

### 1.3. Уласцівасці лікавых няроўнасцей, звязаныя з дзеяннямі множання і дзялення

**Тэарэма 1.** Калі  $a < b$  і  $c > 0$ , то  $ac < bc$ .

Доказ. Паколькі  $a < b$ , то  $a - b$  — адмоўны лік. Памножыўшы яго на дадатны лік  $c$ , атрымаем адмоўны лік  $(a - b)c$ . Але  $(a - b)c = ac - bc$ . Значыць,  $ac - bc$  — адмоўны лік, таму  $ac < bc$ . ☒

**Вынік 1.** Калі  $a < b$  і  $c > 0$ , то  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

Доказ. Лік  $c$  дадатны, значыць, і адваротны яму лік  $\frac{1}{c}$  дадатны. Згодна з тэарэмай 1

$$a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{c}, \text{ г. зн. } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}. \quad \square$$

Даказаныя ўласцівасці лікавых няроўнасцей фармулююцца так:



*калі абедзве часткі правільнай лікавай няроўнасці памножыць (падзяліць) на адзін і той жа дадатны лік, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака.*

**Вынік 2.** Калі лікі  $a$  і  $b$  аднаго знака і  $a < b$ , то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Доказ. Падзяліўшы абедзве часткі няроўнасці  $a < b$  на дадатны лік  $ab$  (патлумачце, чаму  $ab > 0$ ), атрымаем пасля скарачэння дробаў  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ . Значыць,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ .  $\square$

**Тэарэма 2.** Калі  $a < b$  і  $c < 0$ , то  $ac > bc$ .

Доказ. Паколькі  $a < b$ , то  $a - b$  — адмоўны лік. Памножыўшы яго на адмоўны лік  $c$ , атрымаем дадатны лік  $(a - b)c$ . Але  $(a - b)c = ac - bc$ . Значыць,  $ac - bc$  — дадатны лік, таму  $ac > bc$ .  $\square$

**Вынік 3.** Калі  $a < b$  і  $c < 0$ , то  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

Дакажыце вынік 3 самастойна.

Гэтыя ўласцівасці лікавых няроўнасцей фармулююцца так:



*калі абедзве часткі правільнай лікавай няроўнасці памножыць (падзяліць) на адзін і той жа адмоўны лік і замяніць знак няроўнасці на процілеглы, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць.*



▲ Дакажыце тэарэмы 1, 2 і вынікі з іх, адразу разглядаючы рознасць адпаведных выразаў і вызначаючы яе знак. ▲

**Прыклад 1.** Запісаць вынік множання абедзвюх частак няроўнасці  $-2 < 13$ : а) на 3; б) на  $-4$ ; в) на лік  $z$ .

Адказ: а)  $-6 < 39$ ; б)  $8 > -52$ ; в)  $-2z < 13z$ , калі  $z > 0$ ;  
 $-2z = 13z$ , калі  $z = 0$ ;  $-2z > 13z$ , калі  $z < 0$ .

**Прыклад 2.** Няхай  $p < c$ . Падзяліць абедзве часткі няроўнасці  $(p - c)^7 < (p - c)^6$  на:

а)  $(p - c)^5$ ;                      б)  $(p - c)^6$ .

Рашэнне. а) Паколькі  $p - c < 0$  (патлумачце чаму) і 5 — няцотны лік, то  $(p - c)^5 < 0$ . Па ўмове  $(p - c)^7 < (p - c)^6$ .

Па ўласцівасці няроўнасцей, падзяліўшы абедзве часткі няроўнасці на адмоўны лік  $(p - c)^5$ , атрымаем  $(p - c)^2 > p - c$ .

(Звярніце ўвагу, што знак няроўнасці змяніўся.)

б) Паколькі  $p - c < 0$  (патлумачце чаму) і 6 — цотны лік, то  $(p - c)^6 > 0$ . Па ўмове

$$(p - c)^7 < (p - c)^6.$$

Па ўласцівасці няроўнасцей, падзяліўшы абедзве часткі няроўнасці на дадатны лік  $(p - c)^6$ , атрымаем

$$p - c < 1.$$



1. Сфармулюйце і дакажыце ўласцівасці множання (дзялення) абедзвюх частак лікавай няроўнасці на дадатны лік.
2. Сфармулюйце і дакажыце ўласцівасці множання (дзялення) абедзвюх частак лікавай няроўнасці на адмоўны лік.
- 3\*. Дакажыце тэарэмы 1, 2 і вынікі з іх двума спосабамі.

## Практыкаванні

**1.64°.** Запішыце няроўнасці, якія атрымаюцца, калі абедзве часткі няроўнасці:

- 1)  $-14 < -3$  памножыць на 5, на 10, на  $-3$ , на  $-1$ ;
- 2)  $8 > -14$  падзяліць на 2, на 3, на  $-4$ , на  $-1$ ;
- 3)  $\frac{2}{9} < 1$  памножыць на 3, на 6, на  $-9$ , на  $-1$ ;
- 4)  $-1 < 2\frac{1}{3}$  падзяліць на 2, на 3, на  $-6$ , на  $-1$ .

**1.65°.** Памножце абедзве часткі няроўнасці:

- 1)  $29 > -4$  на 3;                      2)  $-3,2 < 5,1$  на 4;
- 3)  $-4,8 < 1,7$  на  $-3$ ;                      4)  $-1,3 < -0,7$  на  $-11$ ;
- 5)  $4p < 5k$  на  $\frac{3}{4}$ ;                      6)  $5a^3 > \frac{1}{4}b^3$  на  $-\frac{2}{5}$ .

1.66°. Падзяліце абедзве часткі няроўнасці:

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| 1) $-9 < 3$ на $0,3$ ;       | 2) $2,7 > -1,8$ на $9$ ;                               |
| 3) $-64 < -16$ на $-8$ ;     | 4) $-4,9 > -5,6$ на $-7$ ;                             |
| 5) $-1,21b < 33t$ на $-11$ ; | 6) $-\frac{5a}{36} < \frac{n}{30}$ на $-\frac{1}{6}$ . |

1.67. Падзяліце абедзве часткі няроўнасці:

- 1)  $p^3 < p^2$  на  $-p^2$ ;
- 2)  $p^5 > p^4$  на  $-p^4$ ;
- 3)  $p^3 + 2p < -2p^2 - 4$  на  $p^2 + 2$ ;
- 4)  $p^3 + p < 2p^2 + 2$  на  $p^2 + 1$ .

1.68. Ведаючы, што  $a > b$ , падзяліце абедзве часткі няроўнасці на лік  $a - b$ :

- |                               |                                      |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $a^2 - b^2 > 3a - 3b$ ;    | 2) $a^2 - 2ab + b^2 > 2a^2 - 2b^2$ ; |
| 3)* $a^3 - b^3 > (a - b)^2$ ; | 4)* $(a - b)^3 < a^3 - b^3$ .        |

1.69. Ведаючы, што  $a < b$ , падзяліце абедзве часткі няроўнасці на лік  $a - b$ :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $a^2 - ab > 5ab - 5b^2$ ;           | 2) $a^2 + b^2 - 2ab > 6a^2b^2 - 6ab^3$ ; |
| 3) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 > (a - b)^2$ ; | 4) $a^2 - 2ab + b^2 < 24a^2 - 24b^2$ .   |

1.70. Вядома, што  $c^5 > c^7$  і  $c < 0$ . Ці правільна, што:

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| 1) $c^5 > c^6$ ; | 2) $c^4 > c^5$ ; | 3) $c^3 < c^4$ ; |
| 4) $c^2 < c^3$ ; | 5) $c > c^2$ ;   | 6) $-1 > c?$     |

1.71. Вядома, што  $a^4 < a^3$  і  $a > 0$ . Ці правільна, што:

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| 1) $a^8 > a^7$ ; | 2) $a^2 > a^3$ ; | 3) $a^6 < a^5$ ; |
| 4) $a^6 < a^7$ ; | 5) $a < a^2$ ;   | 6) $1 < a?$      |

1.72. Вядома, што  $(p - k)^5 < (p - k)^3$  і  $p < k$ . Ці правільна, што:

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $(p - k)^4 > (p - k)^3$ ; | 2) $(p - k)^3 > (p - k)^2$ ; |
| 3) $(p - k)^2 < p - k$ ;     | 4) $p - k < -1?$             |

1.73. Вядома, што  $a > b$ . Ці правільная няроўнасць:

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1) $-4a < -4b$ ;           | 2) $\frac{a}{13} > \frac{b}{13}$ ; |
| 3) $5a - 11 > 5b - 11$ ;   | 4) $3,2a + 4 > 3,2b + 4$ ;         |
| 5) $6 - 3,2a < 6 - 3,2b$ ; | 6) $0,1 - 9a < 0,1 - 9b?$          |

1.74°. Параўнайце лік  $t$  з нулём, калі:

- |                  |                  |                 |
|------------------|------------------|-----------------|
| 1) $5t < 7t$ ;   | 2) $2t > 11t$ ;  | 3) $-8t < 8t$ ; |
| 4) $-6t > -2t$ ; | 5) $7t < 3t$ ;   | 6) $4t > t$ ;   |
| 7) $-6t > -9t$ ; | 8) $-13t > 7t$ . |                 |

1.75. Ведаючы, што  $m > n$ ,  $n > 0$ , параўнайце лікі:

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1) $-m$ і $-n$ ;                   | 2) $-m - 5$ і $-n - 5$ ;                   |
| 3) $4 - m$ і $4 - n$ ;             | 4) $-\frac{m}{3}$ і $-\frac{n}{3}$ ;       |
| 5) $\frac{7}{m}$ і $\frac{7}{n}$ ; | 6) $\frac{1}{m} + 4$ і $\frac{1}{n} + 4$ . |

1.76. 1) Ведаючы, што  $m > n$ ,  $p < n$ ,  $m < 0$ , размясціце лікі  $\frac{1}{m}$ ;  $\frac{1}{n}$ ;  $\frac{1}{p}$  у парадку нарастання.

2) Ведаючы, што  $m < n$ ,  $p > n$ ,  $k < m$ ,  $k > 0$ , размясціце лікі  $\frac{1}{m}$ ;  $\frac{1}{n}$ ;  $\frac{1}{p}$ ;  $\frac{1}{k}$  у парадку спадання.

1.77. Ці правільна, што значэнне выразу:

- 1)  $\frac{25a^2}{3a - a^2} \cdot \frac{a^2 - 9}{5a}$  большае за 6 пры  $a = -5$ ;
- 2)  $\frac{a}{a^2 + 4 + 4a} \cdot (4 - a^2)$  меншае за 0 пры  $a = -1,5$ ;
- 3)\*  $\left( \frac{2}{a^2 - 6a} + \frac{1}{2a + 8} + \frac{5}{a^2 - 2a - 24} \right) : \frac{4a + a^2}{2a - 12}$  меншае за 0,3 пры  $a = -2$ ;
- 4)\*  $\left( \frac{1}{a + 2} + \frac{9}{2a^2 - a - 10} + \frac{8}{2a^2 - 5a} \right) \cdot \left( \frac{52}{a + 4} + 2a - 13 \right)$  большае за 2 пры  $a = 1,7$ ;
- 5)\*  $\left( 2a - \frac{4a + 1}{1 - 2a} \right) \cdot \left( \frac{2a}{2a - 1} - \frac{8a}{4a^2 + 2a + 1} - \frac{4a + 1}{8a^3 - 1} \right)$  меншае за 20 пры  $a = 17,5$ ;
- 6)\*  $\left( \frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5 - a} - \frac{a^3 + 25a^2}{a^3 - 125} \right) \cdot \left( a - 5 + \frac{15a}{a - 5} \right)$  большае за -10 пры  $a = -4$ ;



7)\*  $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{a-2}\right) : \frac{8}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+a+6}{4a+8}$  большае за  $-1$  пры  $a = 2,93$ ;

8)\*  $\left(\frac{2b^2}{8b^3-1} \cdot \frac{4b^2+2b+1}{2b+1} - \frac{b}{2b+1}\right) : \frac{b}{8b^2+8b+2} - \frac{8(b+1)}{6b-3}$  большае за  $1$  пры  $b = -1,27$ ?

1.78. Дакажыце, што пры любым дапушчальным значэнні  $a$  значэнне выразу:

1)  $\left(\frac{a+1}{4a^2-1} + \frac{1}{2-4a}\right)^2 \cdot \frac{16a^4+1-8a^2}{8} + 1$  большае за  $0$ ;

2)  $\left(\frac{a+1}{2(a-1)} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$  большае за  $2$ ;

3)  $\left(\frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{2-a} + \frac{1}{a+2}\right) : \left(a-2 + \frac{10-a^2}{a+2}\right) - \frac{a-1}{2-a}$  меншае за  $2$ ;

4)  $\left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{a^2-5}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4}{a^2-1}\right)$  большае за  $3$ ;

5)\*  $\left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1}\right) \cdot \left(a - \frac{6a^2+9a-1}{(a+3)^2}\right)$  большае за  $-2$ ;

6)\*  $\left(\frac{3}{8a^3+1} - \frac{3}{4a^2-2a+1}\right) \cdot \frac{4a^3-2a^2+a}{a+1} + \frac{13a^4+18a^3+7a^2+5}{(2a+1)^2(a+1)^2}$  большае за  $0$ ;

7)\*  $\frac{8-a^3}{2+a} : \left(2 + \frac{a^2}{2+a}\right) - \frac{a^2}{a-2} \cdot \frac{4-a^2}{a^2+2a}$  меншае за  $3$ ;

8)\*  $\left(\frac{1}{2-6a} + \frac{1}{27a^3-1} : \frac{1+3a}{1+3a+9a^2}\right) \cdot \frac{2+6a}{-0,1}$  большае за  $5$ .

#### 1.4. Складанне і множанне лікавых няроўнасцей

**Тэарэма 1.** Калі  $a < b$  і  $c < d$ , то  $a + c < b + d$ .

Доказ. Згодна з тэарэмай п. 1.2 з няроўнасці  $a < b$  вынікае, што  $a + c < b + c$ .

Аналагічна з  $c < d$  вынікае, што  $b + c < b + d$ .

Паколькі  $a + c < b + c$  і  $b + c < b + d$ , то згодна з тэарэмай 2 п. 1.1 маем  $a + c < b + d$ .  $\square$

Гэта ўласцівасць лікавых няроўнасцей фармулюецца так:



калі скласці дзве правільныя лікавыя няроўнасці аднаго знака, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака.

Пры складанні няроўнасцей мы складаем іх левыя часткі і складаем іх правыя часткі (гавораць яшчэ «складаем няроўнасці пачленна»).

**Прыклад 1.** Складзі няроўнасці:

а)  $-1 < 15$  і  $-15 < -1$ ;

б)  $23 > 22$  і  $-25 > -26$ .

Рашэнне.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \quad \quad \quad + \quad -1 < 15 \\ \quad \quad \quad + \quad -15 < -1 \\ \hline -1 + (-15) < 15 + (-1), \\ \quad \quad \quad -16 < 14; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \quad \quad + \quad 23 > 22 \\ \quad \quad \quad + \quad -25 > -26 \\ \hline 23 + (-25) > 22 + (-26), \\ \quad \quad \quad -2 > -4. \end{array}$$

**Тэарэма 2.** Калі  $a < b$ ,  $c < d$  і  $a, b, c, d$  — дадатныя лікі, то  $ac < bd$ .

**Доказ.** *Спосаб 1.* Згодна з тэарэмай 1 п. 1.3 з няроўнасці  $a < b$  вынікае, што  $ac < bc$ . Аналагічна з  $c < d$  вынікае, што  $bc < bd$ . Паколькі  $ac < bc$  і  $bc < bd$ , то згодна з тэарэмай 2 п. 1.1 маем  $ac < bd$ .  $\square$



▲ *Спосаб 2.* Разгледзім рознасць выразаў  $ac$  і  $bd$ . Дадаўшы і адняўшы выраз  $bc$ , атрымаем:

$$\begin{aligned} ac - bd &= ac - bd + bc - bc = (ac - bc) + (bc - bd) = \\ &= c(a - b) + b(c - d) < 0, \end{aligned}$$

паколькі па ўмове тэарэмы  $a - b < 0$ ,  $c - d < 0$ ,  $c > 0$ ,  $b > 0$ . Значыць, па азначэнні паняцця «менш» атрымаем, што  $ac < bd$ .  $\square$

Разважаючы аналагічна, дакажыце тэарэму 1 спосабам 2. ▲

Гэта ўласцівасць лікавых няроўнасцей фармулюецца так:



калі памножыць дзве правільныя лікавыя няроўнасці аднаго знака, левыя і правыя часткі якіх — дадатныя лікі, то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць таго ж знака.

Пры множанні няроўнасцей мы памнажаем іх левыя часткі і памнажаем іх правыя часткі (гавораць яшчэ «памнажаем няроўнасці пачленна»).

**Прыклад 2.** Памножыць лікавыя няроўнасці:

а)  $3 < 5$  і  $7 < 8$ ;

б)  $21 > 5$  і  $10 > 3$ .

Рашэнне.

$$\begin{array}{r} \times \quad 3 < 5 \\ \quad 7 < 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 7 < 5 \cdot 8, \\ 21 < 40; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 21 > 5 \\ \quad 10 > 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 21 \cdot 10 > 5 \cdot 3, \\ 210 > 15. \end{array}$$

Але чаму ў тэарэме ёсць патрабаванне, каб  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  былі дадатнымі лікамі? Калі адмовіцца ад гэтага патрабавання, то няроўнасць  $ac < bd$  можа аказацца як правільнай, так і няправільнай.

Сапраўды:

а) 
$$\begin{array}{r} \times \quad -3 < 5 \\ \quad -7 < -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3 \cdot (-7) < 5 \cdot (-2), \\ 21 < -10 \text{ — няправільна;} \end{array}$$

б) 
$$\begin{array}{r} \times \quad -3 < 2 \\ \quad -7 < 13 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3 \cdot (-7) < 2 \cdot 13, \\ 21 < 26 \text{ — правільна;} \end{array}$$

в) 
$$\begin{array}{r} \times \quad -3 < -2 \\ \quad -7 < 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3 \cdot (-7) < -2 \cdot 5, \\ 21 < -10 \text{ — няправільна;} \end{array}$$

г) 
$$\begin{array}{r} \times \quad -7 < -3 \\ \quad 14 < 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -7 \cdot 14 < -3 \cdot 21, \\ -98 < -63 \text{ — правільна.} \end{array}$$

**Вынік.** Калі  $a$  і  $b$  — дадатныя лікі і  $a < b$ , то  $a^n < b^n$  пры любым натуральным  $n$ .

Сапраўды, калі правільную лікавую няроўнасць  $a < b$  памножыць на правільную лікавую няроўнасць  $a < b$ , то на падставе тэарэмы 2 атрымаецца правільная лікавая няроўнасць

$$a \cdot a < b \cdot b, \text{ г. зн. } a^2 < b^2.$$

Дакладна гэтак жа, калі правільную лікавую няроўнасць  $a^2 < b^2$  памножыць на правільную лікавую няроўнасць  $a < b$ , то атрымаецца правільная лікавая няроўнасць  $a^3 < b^3$ .

Такім жа спосабам паслядоўна можна ўстанавіць, што  $a^4 < b^4$ ,  $a^5 < b^5$ ,  $a^6 < b^6$  і г. д. Такім чынам, пры любым натуральным  $n$  будзе правільнай няроўнасць  $a^n < b^n$ .

**Прыклад 3.** Паказаць, што няроўнасць  $p^2 + 3p > 10$  правільная пры  $p > 2$ .

Рашэнне. Пры ўмове  $p > 2$  будуць правільнымі і няроўнасці  $3p > 6$  і  $p^2 > 4$ . Склаўшы гэтыя дзве няроўнасці (на падставе тэарэмы 1), атрымаем правільную няроўнасць

$$p^2 + 3p > 10. \quad \square$$



- Сфармулюйце і дакажыце тэарэму:
  - аб складанні лікавых няроўнасцей;
  - аб множанні лікавых няроўнасцей.
- Дакажыце, што калі  $m$  і  $k$  — дадатныя лікі і  $m > k$ , то:
 

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| а) $m^2 > k^2$ ; | б) $m^3 > k^3$ ; |
| в) $m^5 > k^5$ ; | г) $m^8 > k^8$ . |

### Практыкаванні

**1.79°.** Складзіце няроўнасці, выкарыстаўшы тэарэму аб складанні няроўнасцей:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $3 < 4$ і $12 < 15$ ;                   | 2) $4,2 < 6,3$ і $5 < 10$ ;                 |
| 3) $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ і $2 < 5$ ; | 4) $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ і $10 > 6$ . |

**1.80°.** Памножце няроўнасці, дадзеныя ў практыкаванні 1.79, выкарыстаўшы тэарэму аб множанні лікавых няроўнасцей.

**1.81°.** Складзіце няроўнасці:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $4 > -3$ і $4 > 3$ ;  | 2) $-7 > -9$ і $6 > 3$ ;  |
| 3) $4 < 9$ і $-3 < 6$ ;  | 4) $5 > 2$ і $-3 > -6$ ;  |
| 5) $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ; | 6) $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$ і $\frac{7}{12} < \frac{3}{4}$ ; |
| 7) $0 < 1$ і $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{12}$ ;                    | 8) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{9}$ і $-1 < 0$ .                   |

1.82°. Памножце няроўнасці:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $3 > 2$ і $8 > 5$ ;                               | 2) $7 < 9$ і $11 < 13$ ;                             |
| 3) $3\frac{2}{5} > 2\frac{1}{4}$ і $20 > 16$ ;       | 4) $9\frac{3}{4} > 8\frac{1}{3}$ і $6 > 4$ ;         |
| 5) $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$ і $\frac{1}{3} < 1$ ; | 6) $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$ і $\frac{1}{4} < 2$ ; |
| 7) $0,6 > 0,4$ і $0,1 > 0,01$ ;                      | 8) $0,02 > 0,002$ і $0,7 > 0,3$ .                    |

1.83°. Складзіце няроўнасці:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $4 < 5^2$ і $4^2 < 5^3$ ;                     | 2) $4 < 3^2$ і $\frac{1}{4^3} < \frac{1}{3^3}$ ;     |
| 3) $8 > 6$ і $\frac{1}{6^2} > \frac{1}{10^2}$ ;  | 4) $\frac{1}{6^3} < \frac{1}{8^2}$ і $2^2 < 3^2$ ;   |
| 5) $3 < 4^2$ і $3^2 < 4^3$ ;                     | 6) $2^3 \cdot 3^3 > 5^2$ і $2^3 > 4$ ;               |
| 7) $2^4 > 6$ і $\frac{1}{2^3} > \frac{1}{6^2}$ ; | 8) $13^2 > 7^2$ і $\frac{1}{13^2} > \frac{1}{7^3}$ . |

1.84°. Памножце няроўнасці з практыкавання 1.83.

1.85°. Ці правільна, што:

- 1) калі  $a > 5$  і  $b > 2$ , то  $a + b > 7$  і  $ab > 10$ ;
- 2) калі  $a > 2$  і  $b > 1,5$ , то  $a + b > 4,5$  і  $ab > 0,3$ ;
- 3) калі  $a < 2$  і  $b < -3$ , то  $ab < -6$ ;
- 4) калі  $a < -2$  і  $b < -3$ , то  $ab < 6$ ?

1.86°. Складзіце няроўнасці:

- 1)  $k + 4 > k$  і  $6 > k$  ( $k > 0$ );
- 2)  $p < p + 5$  і  $p < 2$  ( $p > 0$ );
- 3)  $y^2 > x + 1$  і  $y^2 - 3 > 5x$  ( $x > 0$ );
- 4)  $a^2 - 3 > 4b^2$  і  $2a + 3a^2 > 5$  ( $a > 2$ ).

1.87. Памножце няроўнасці з практыкавання 1.86.

1.88. Няхай  $A > B$  і  $C > D$  — правільныя лікавыя няроўнасці. Запішыце гэтыя няроўнасці і складзіце іх, калі:

- 1)  $A = 18a^2c - 27ab$ ;  $B = 10x^2 + 10xy$ ;  
 $C = 14a^2c - 21ab$ ;  $D = 5x^2 + 5xy$ ;
- 2)  $A = 35ax^2 - 20ay$ ;  $B = 48xy^2 - 15x^2y^3$ ;  
 $C = 24ay - 42ax^2$ ;  $D = 32xy^2 - 10x^2y^3$ .

1.89. Складзіце няроўнасці:

- 1)  $a^2 + b^2 > 2a$  і  $2ab > 3a$ ;
- 2)  $k^2 - 2kp < 3 + p$  і  $p^2 < 1 - p$ ;
- 3)  $x^2 - 3xy + x > y^2$  і  $3xy - x - y^2 > 5$ ;
- 4)  $c^4 - 4c^2 < 5 - 3d$  і  $4c^2 - d^2 < 6d$ ;
- 5)  $4a^2 < b^2 + 2$  і  $2a - 3a^2 < b - 2$ ;
- 6)  $a^2 > b + 1$  і  $2a > b - 5$ .

1.90. Няхай  $A > B$  і  $C > D$  — правільныя лікавыя няроўнасці,  $B, D$  — дадатныя. Памножце гэтыя няроўнасці, калі:

- 1)  $A = \frac{ab - b^2}{b^4}$ ;  $B = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^7}$ ;  $C = \frac{b^5}{a^2 - b^2}$ ;  $D = \frac{a^8}{a - b}$ ;
- 2)  $A = \frac{a^2 - 4b^2}{0,2ab}$ ;  $B = \frac{3b - 2a}{8a^6}$ ;  $C = \frac{12a^2b^3}{a + 2b}$ ;  $D = \frac{32a^8}{4a^2 - 9b^2}$ .

1.91. Дакажыце, што калі  $p > 3$  і  $k > 6$ , то правільная няроўнасць:

- 1)  $4p + 3k > 30$ ;                      2)  $pk - 3 > 15$ ;
- 3)  $p^2 + k^2 > 45$ ;                      4)  $p^3 + k^3 > 243$ .

1.92. Няхай  $m > 0$ ,  $k > 0$ ,  $m > k$ . Дакажыце, што:

- 1)  $m^2 > k^2$ ;                      2)  $m^3 > k^3$ ;                      3)  $m^5 > k^5$ ;
- 4)  $\frac{1}{m^2} < \frac{1}{k^2}$ ;                      5)  $\frac{1}{m^3} < \frac{1}{k^3}$ ;                      6)  $\frac{1}{m^5} < \frac{1}{k^5}$ .

1.93. Няхай  $p > 1$ . Дакажыце, што:

- 1)  $p^2 > p$ ;                      2)  $p^3 > p^2$ ;                      3)  $p^4 > p^3$ ;
- 4)  $p^3 > p$ ;                      5)  $p^{k+1} > p^k$ ,  $k > 1$ ;                      6)  $p^k > p$ ,  $k > 1$ .

1.94. Няхай  $m < 1$  і  $m > 0$ . Дакажыце, што:

- 1)  $m^2 < m$ ;                      2)  $m^3 < m^2$ ;                      3)  $m^4 < m^3$ ;                      4)  $m^3 < m$ .

### 1.5. Строгія і нястрогія няроўнасці

Да гэтага часу мы вывучалі няроўнасці са знакамі «>» і «<», г. зн. няроўнасці выгляду  $A > B$  і  $A < B$ .

Такія няроўнасці называюцца **строгімі**.

Разам са строгімі няроўнасцямі будзем разглядаць таксама і **нястрогія няроўнасці**:  $A \geq B$  і  $A \leq B$ .

Знак « $\geq$ » чытаецца «*больш або роўна*», або «*не менш*», а знак « $\leq$ » чытаецца «*менш або роўна*», або «*не больш*». Напрыклад, няроўнасць « $3 \leq 5$ » чытаецца так: «*тры менш або роўна пяці*», або «*тры не больш за пяць*».



Лікавая няроўнасць  $A \leq B$  правільная, калі правільная няроўнасць  $A < B$  або правільная роўнасць  $A = B$ . Аналагічна для  $A \geq B$ .

Прывядзём яшчэ прыклады нястрогіх няроўнасцей:

а)  $2 \geq 1$ ;    б)  $2 \geq 2$ ;    в)  $2 \leq 2$ ;    г)  $a^2 \geq 0$  ( $a$  — лік).

Разгледзім няроўнасць  $2 \geq 1$ . Яна правільная. Сапраўды, няроўнасць  $2 \geq 1$  азначае, што або  $2 > 1$ , або  $2 = 1$ . Паколькі правільная, што  $2 > 1$ , то няроўнасць  $2 \geq 1$  — правільная. Правільнымі з'яўляюцца і няроўнасці  $2 \geq 2$ ,  $2 \leq 2$ ,  $a^2 \geq 0$  (патлумачце чаму). А, напрыклад, няроўнасці  $2 \geq 3$  і  $a^2 + 1 \leq 0$  ( $a$  — лік) няправільныя (патлумачце чаму).

Усе ўласцівасці строгіх лікавых няроўнасцей, разгледжаныя ў папярэдніх пунктах, правільныя і для нястрогіх лікавых няроўнасцей. Пералічым гэтыя ўласцівасці.

1. Калі  $a \leq b$ , то  $b \geq a$ .
2. а) Калі  $a \leq b$  і  $b \leq c$ , то  $a \leq c$ .  
б) Калі  $a \leq b$  і  $b < c$ , то  $a < c$ .
3. Калі  $a \leq b$ , то  $a + c \leq b + c$ .
4. Калі  $a \leq b$  і  $c > 0$ , то  $ac \leq bc$ .
5. Калі  $a \leq b$  і  $c < 0$ , то  $ac \geq bc$ .
6. а) Калі  $a \leq b$  і  $c \leq d$ , то  $a + c \leq b + d$ .  
б) Калі  $a \leq b$  і  $c < d$ , то  $a + c < b + d$ .
7. а) Калі  $a \leq b$ ,  $c \leq d$  і  $a, b, c, d$  — дадатныя лікі, то  $ac \leq bd$ .  
б) Калі  $a \leq b$ ,  $c < d$  і  $a, b, c, d$  — дадатныя лікі, то  $ac < bd$ .
8. Калі  $a \leq b$  і лікі  $a, b$  — абодва аднаго знака (значыць,  $ab > 0$ ), то  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .
9. Калі  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \geq b$ , то  $a^n \geq b^n$  пры любым натуральным  $n$ .

**А**

Сімвалы для нястрогага параўнання лікаў прапанаваў у 1670 г. англійскі матэматык Джон Валіс. Першапачаткова яны выглядалі так: « $\bar{>}$ » і « $\bar{<}$ ». Агульнае распаўсюджанне і сучасны выгляд (« $\geq$ », « $\leq$ ») яны атрымалі пасля выкарыстання ў працах французскага матэматыка П'ера Бугера ў 1734 г.

**Прыклад 1.** Складзі няроўнасці

$$m + n \geq 5 \text{ і } 2m - 9n > 7.$$

Рашэнне. Па ўласцівасці 6 б), склаўшы дадзеныя няроўнасці, атрымаем:

$$\begin{array}{r} + \quad m + n \geq 5 \\ \quad 2m - 9n > 7 \\ \hline m + 2m + n - 9n > 5 + 7, \\ 3m - 8n > 12. \end{array}$$

**Прыклад 2.** Памножыць няроўнасці  $p \geq 9$  і  $p + 2 \geq p$ .

Рашэнне. Паколькі  $p \geq 9$ , то  $p + 2$  і  $p$  — дадатныя лікі, таму пры множанні гэтых няроўнасцей (гл. уласцівасць 7 а)) атрымаем

$$p^2 + 2p \geq 9p.$$

**Прыклад 3\*.** Няхай  $m < t$ . Ці правільна, што:

- а)  $m + 5 \leq t + 5$ ;      б)  $m + t \geq m + t$ ;      в)  $-7m \leq -7t$ ?

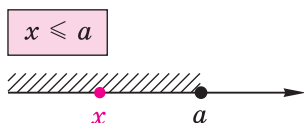
Рашэнне. а) Па ўмове  $m < t$ , значыць, згодна з тэарэмай п. 1.2 правільная няроўнасць  $m + 5 < t + 5$ , а значыць, правільная і няроўнасць  $m + 5 \leq t + 5$  (патлумачце чаму).

б) Паколькі  $m + t = m + t$ , то  $m + t \geq m + t$ .

в) Па ўмове  $m < t$ , значыць, згодна з тэарэмай 2 п. 1.3 правільная няроўнасць  $-7m > -7t$ , і, такім чынам, няроўнасць  $-7m \leq -7t$  — няправільная.

Адказ: а) правільна; б) правільна; в) няправільна.

Няхай  $a$  — некаторы лік. Адзначым штрыхоўкай частку каардынатнай прамой лявей за пункт  $a$  разам з пунктам  $a$  (рыс. 6). Каб падкрэсліць, што



Рыс. 6

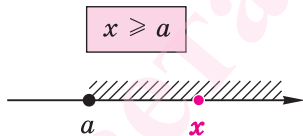


пункт  $a$  належыць заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой, вылучым гэты пункт чорным (зафарбаваным) кружком.

Калі пункт  $x$  каардынатнай ляжыць на каардынатнай прамой левей за пункт  $a$  або супадае з ім, то  $x \leq a$ .

Наадварот, калі  $x \leq a$ , то пункт  $x$  ляжыць на каардынатнай прамой левей за пункт  $a$  або супадае з ім.

На рысунку 7 штрыхоўкай вылучана частка каардынатнай прамой правей за пункт  $a$  разам з пунктам  $a$  і адзначаны пункт  $x$  такі, што  $x \geq a$  (пункт  $a$ , вылучаны чорным (зафарбаваным) кружком, належыць заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой).



Рыс. 7



1. Як чытаюцца знакі « $\leq$ » і « $\geq$ »?
2. Якія няроўнасці называюцца строгімі? Прывядзіце прыклад.
3. Якія няроўнасці называюцца нястрогімі? Прывядзіце прыклад.
4. Калі лікавая няроўнасць  $A \geq B$  правільная?
5. Ці правільная няроўнасць: а)  $a \geq a$ ; б)  $a < a$ ?
- 6\*. Дакажыце ўласцівасці нястрогіх лікавых няроўнасцей 1—9.

### Практыкаванні

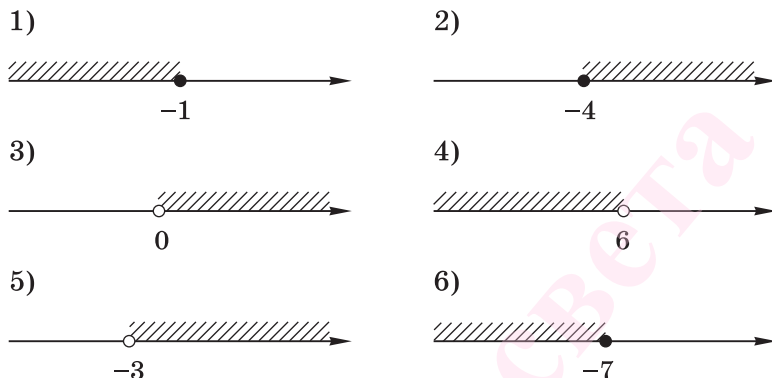
1.95°. Прачытайце няроўнасць:

- |                   |                    |                        |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $0 \leq 3$ ;   | 2) $4 \geq 3$ ;    | 3) $14 \geq 14$ ;      |
| 4) $-6 \leq -9$ ; | 5) $0 \leq 10$ ;   | 6) $n \leq -2$ ;       |
| 7) $x \leq -7$ ;  | 8) $-5,2 \geq a$ ; | 9) $-3,4 \geq -6,8m$ . |

1.96°. Запішыце, выкарыстаўшы знакі няроўнасці, сказ:

- 1) Сёння тэмпература ( $t$ ) паветра не ніжэйшая за  $5^\circ\text{C}$ .
- 2) Тэмпература ( $t$ ) вады ў вадкім стане не меншая за  $0^\circ\text{C}$ .
- 3) Адносная вільготнасць ( $\varphi$ ) паветра ў касмічным караблі не большая за  $60\%$ .
- 4) Колькасць ( $n$ ) азёр і рэк у сістэме Браслаўскіх азёр не меншая за 50.
- 5) Адлегласць ( $l$ ) паміж любымі двума пунктамі на мяжы Беларусі не перавышае  $1000$  км.
- 6) Адзнака ( $n$ ) за выступленне ў фігурным катанні не перавышае 6 балаў.

**1.97.** Па рисунку 8 запішыце ўмову, якую павінна задавальняць каардыната  $n$  пункта  $K(n)$ , размешчанага на заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой.



Рыс. 8

**1.98.** Адзначце штрыхоўкай тую частку каардынатнай прамой, дзе можа знаходзіцца пункт з каардынатай  $m$ , што задавальняе ўмову:

- 1)  $m \geq 4$ ;      2)  $m \leq 8$ ;      3)  $m \leq -2$ ;      4)  $m \geq -6$ .

**1.99°.** Запішыце ў выглядзе нястрогай няроўнасці:

- 1)  $a < b$  або  $a = b$ ;  
 2)  $c > d$  або  $c = d$ ;  
 3)  $a + b < 2$  або  $a + b = 2$ ;  
 4)  $m - n > t$  або  $m - n = t$ ;  
 5)  $a^2 + b^2 > 2ab$  або  $a^2 + b^2 = 2ab$ ;  
 6)  $(a - b)^2 > 0$  або  $(a - b)^2 = 0$ .

**1.100°.** Ці правільная няроўнасць:

- 1)  $2 \leq 5$ ;      2)  $-2 \geq 0$ ;      3)  $5 \geq 5$ ;  
 4)  $6 \leq 6$ ;      5)  $49 \leq 40$ ;      6)  $15 \leq 19$ ;  
 7)  $k + 2 \leq k + 2$ ;      8)  $p - 3 \geq p - 3$ ?

**1.101°.** Складзіце няроўнасці:

- 1)  $2 \geq -1$  і  $3 \geq 3$ ;      2)  $7 \leq 7$  і  $-10 \leq -5$ ;  
 3)  $k \leq 2$  і  $-8 \leq p$ ;      4)  $k \geq 5$  і  $-5 \geq p$ ;  
 5)  $m \leq \frac{1}{9}$  і  $\frac{1}{3} \leq 2m$ ;      6)  $m \geq \frac{4}{7}$  і  $-\frac{3}{14} \geq 4m$ .

1.102°. Памножце няроўнасці:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $2 \geq 1$ і $5 \geq 5$ ;           | 2) $3 \leq 3$ і $2 \leq 8$ ;             |
| 3) $k \geq 2$ і $p \geq \frac{1}{2}$ ; | 4) $k \leq 2,1$ і $\frac{1}{3} \leq p$ ; |
| 5) $m + 3 \leq 3m$ і $2 \leq m$ ;      | 6) $5n \geq n + 7$ і $n \geq 4$ .        |

1.103. Складзіце няроўнасці:

- 1)  $2a + 1 < 5 - n$  і  $-7a + 4 \leq -3n + 1$ ;
- 2)  $7n - 4 \geq 3m + a$  і  $-4n + 5 > 2a - 4m$ ;
- 3)  $x^2 > y + 9$  і  $2x \geq y - 5$ ;
- 4)  $3t^2 \leq p + 1$  і  $2t - t^2 < p^2 - 1$ ;
- 5)  $3a + b < 2k - 1$  і  $3b - 2a \leq 9 - 2k$ ;
- 6)  $3x^2 + 2y > 4z - 2$  і  $5y - 2x^2 \geq 3 - 3z$ .

1.104°. Няхай  $m \geq n$ . Ці правільна, што:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1) $7 + n \leq m + 7$ ;       | 2) $4^3 m \geq 4^3 n$ ;   |
| 3) $(-1)^5 m \geq (-1)^5 n$ ; | 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 m \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^0 n$ ; |
| 5) $1 - 2m \leq 1 - 2n$ ;     | 6) $\frac{(-2)^5}{-2^4} m \geq \frac{(-2)^5}{-2^4} n$ ?                 |

1.105. Няхай  $k < p$ . Ці правільна, што:

- |                             |                          |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $k + 6,5 \leq p + 6,5$ ; | 2) $k - 3,4 > p - 3,4$ ; |
| 3) $-8k \leq -8p$ ;         | 4) $2,8k \geq 2,8p$ ;    |
| 5) $k - p \geq k - p$ ;     | 6) $kp \geq kp$ ?        |

1.106. Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыце дадзеную няроўнасць у няроўнасць, правая частка якой роўная нулю:

- 1)  $7c^2 + 3c - 4 \leq 7c^2 - 5(c - 1)$ ;
- 2)  $9c - 5c^2 + 1 \geq 2 - 5c(2 + c)$ ;
- 3)  $3n(m - 3) + 5m(m - 3) < 4m^2 + 3mn - 5m$ ;
- 4)  $5a(a - 1) - (1 - a) > 6a^2 - 5a - 1$ ;
- 5)  $10a^2 - (a - 2b) \cdot 4a - 6b^2 \leq 2b(4a - 3b)$ ;
- 6)  $(p - 3) \cdot 8p^2 - 4p^3 \geq 5p^3 - (p^3 - 4p)$ .

**1.107.** Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыце дадзеную няроўнасць у няроўнасць, левая частка якой роўная нулю:

- 1)  $(c - 1)(c + 5) \leq (c - 1)(c + 1)$ ;
- 2)  $(c + 4)(c - 4) \geq (c + 2)(c - 4)$ ;
- 3)  $(4 - c)^2 \leq (c - 3)(c + 2) - 1$ ;
- 4)  $(c - 1)(c + 5) \geq (c + 6)^2 - 15$ ;
- 5)  $c^3 - 42 \geq (c - 5)(c^2 + 5c + 25)$ ;
- 6)  $(c + 3)(c^2 - 3c + 9) \geq c^3 - 20$ .

**1.108.** Няхай  $a$  — лік з натуральнага абсягу вызначэння выразу, які стаіць у левай частцы няроўнасці. Ці правільна, што:

- 1)  $\frac{a^2 - 16}{a^2 - 8a + 16} \cdot \frac{a - 4}{a + 4} \leq 0$ ;
- 2)  $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 + 3a} \cdot \frac{a}{2a - 3} \geq 3$ ;
- 3)  $\left(1 + 3a + \frac{9a^2}{1 + 3a} + \frac{1}{3a - 1} + \frac{6a}{1 - 9a^2}\right) \cdot \frac{1}{a} \leq 6$ ;
- 4)  $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) : \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \geq 0$ ;
- 5)\*  $\frac{3a^3 - 81b^3}{18ab^2 + 6a^2b + 2a^3} + \frac{81a^2b - 54ab^2 + 9b^3}{2ab^2 - 12a^2b + 18a^3} \leq 1,5$ ;
- 6)\*  $\left(\frac{a + 2}{a^3 - 3a^2 - 4a + 12} + \frac{1 - a}{a^2 - 5a + 6}\right) \cdot (a - 3) \geq 0$ ?

## 1.6. Двойныя няроўнасці

Няхай  $c$  — рост самага высокага жыхара Беларусі ў метрах. Паколькі ў Беларусі ёсць людзі, рост якіх большы за 2 м, то  $c > 2$ . У той жа час рост чалавека меншы за 3 м, таму  $c < 3$ . Такім чынам, правільныя адразу абедзве няроўнасці:  $c > 2$  і  $c < 3$ . Гэта запісваюць у выглядзе *двойнай няроўнасці*

$$2 < c < 3$$

(чытаецца звычайна з сярэдзіны: «*c* больш за два і менш за тры»).

Такім чынам, двайная няроўнасць выгляду

$$a < c < b$$

азначае, што адначасова правільныя няроўнасці  $c > a$  і  $c < b$ .



Можна сказаць таксама, што двайная няроўнасць  $a < c < b$  раўназначная сцверджанню «лік  $c$  знаходзіцца паміж лікамі  $a$  і  $b$ ».

Патлумачце самастойна, што азначаюць двайныя няроўнасці выгляду:

$$a \leq c < b;$$

$$a < c \leq b;$$

$$a \leq c \leq b.$$

Прачытайце кожную з гэтых няроўнасцей.

**Прыклад 1.** Няхай  $-1 < p < 5$  і  $-3 < q < -2$ . Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, ацаніць значэнні:

а) сумы  $p + q$ ;

б) рознасці  $p - q$ .

Рашэнне. а) Паколькі няроўнасці аднаго знака можна складаць, то:

$$\begin{array}{r} -1 < p < 5 \\ + \quad -3 < q < -2 \\ \hline -4 < p + q < 3. \end{array}$$

б) Запішам выраз  $p - q$  у выглядзе сумы:  $p - q = p + (-q)$ . Атрымаем двайную няроўнасць для  $-q$ , памножыўшы ўсе часткі няроўнасці  $-3 < q < -2$  на  $-1$ :

$$-3 \cdot (-1) > -q > -2 \cdot (-1).$$

Перапішам гэту няроўнасць ад меншага да большага:

$$2 < -q < 3.$$

Цяпер па правіле складання няроўнасцей аднаго знака атрымаем:

$$\begin{array}{r} -1 < p < 5 \\ + \quad 2 < -q < 3 \\ \hline 1 < p + (-q) < 8, \end{array}$$

г. зн.  $1 < p - q < 8$ .

Адказ: а)  $-4 < p + q < 3$ ; б)  $1 < p - q < 8$ .

**Прыклад 2.** Няхай  $1 \leq m \leq 3$  і  $2 < t < 5$ . Ацаніць значэнні выразу

$$2t - 3m.$$

Рашэнне. Па ўласцівасці лікавых няроўнасцей, памножыўшы ўсе часткі няроўнасці  $2 < t < 5$  на лік 2, атрымаем правільную лікавую няроўнасць з тымі ж знакамі

$$4 < 2t < 10. \quad (1)$$

Памножыўшы ўсе часткі правільнай лікавай няроўнасці  $1 \leq m \leq 3$  на лік  $-3$  і замяніўшы знакі няроўнасці на процілеглыя, атрымаем правільную лікавую няроўнасць

$$-3 \geq -3m \geq -9. \quad (2)$$

Перапісаўшы няроўнасць (2) ад меншага да большага, атрымаем

$$-9 \leq -3m \leq -3. \quad (3)$$

Складзём няроўнасці (1) і (3):

$$\begin{array}{r} + \quad 4 < 2t < 10 \\ + \quad -9 \leq -3m \leq -3 \\ \hline -5 < 2t - 3m < 7. \end{array}$$

Адказ:  $-5 < 2t - 3m < 7$ .

**Прыклад 3.** Няхай  $1 < c < 2$  і  $3 < d < 5$ . Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, ацаніць значэнні:

а) здабытку  $cd$ ;

б) дзелі  $\frac{c}{d}$ .

Рашэнне. а) Паколькі няроўнасці аднаго знака з дадатнымі часткамі можна перамнажаць, то:

$$\begin{array}{r} \times \quad 1 < c < 2 \\ \times \quad 3 < d < 5 \\ \hline 1 \cdot 3 < cd < 2 \cdot 5, \end{array}$$

г. зн.  $3 < cd < 10$ .

б) Запішам выраз  $\frac{c}{d}$  як здабытак:  $\frac{c}{d} = c \cdot \frac{1}{d}$ .

Атрымаем двайную няроўнасць для  $\frac{1}{d}$ , выкарыстаўшы ўласцівасць 2 п. 1.3: паколькі  $3 < d < 5$ , то  $\frac{1}{3} > \frac{1}{d} > \frac{1}{5}$ , або  $\frac{1}{5} < \frac{1}{d} < \frac{1}{3}$ . Цяпер па правіле множання няроўнасцей аднаго знака з дадатнымі часткамі атрымаем:

$$\begin{array}{l} 1 < c < 2 \\ \times \frac{1}{5} < \frac{1}{d} < \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{5} < \frac{c}{d} < 2 \cdot \frac{1}{3}, \end{array}$$

г. зн.  $\frac{1}{5} < \frac{c}{d} < \frac{2}{3}$ .

Адказ: а)  $3 < cd < 10$ ; б)  $\frac{1}{5} < \frac{c}{d} < \frac{2}{3}$ .

**Прыклад 4.** Саша заўважыў, што на ўзважванне тавару для аднаго пакупніка прадавец затрачвае ад 1 мін да 3 мін, а на аплату пакупкі затрачваецца ад 0,5 мін да 1 мін. Ці паспее Саша зрабіць пакупку за 10 мін, калі перад ім у чарзе стаіць 4 чалавекі? За 20 мін? За 7 мін?

Рашэнне. Калі абазначыць час, што затрачваецца на ўзважванне тавару, літарай  $t$ , а час на аплату — літарай  $p$ , то 5 чалавек прадавец абслужыць за  $5(t+p)$  мін. Паколькі  $1 \leq t \leq 3$ , а  $0,5 \leq p \leq 1$ , то  $7,5 \leq 5(t+p) \leq 20$ . Адсюль атрымаем

$$7,5 \leq 5(t+p) \leq 20.$$

Такім чынам, за 10 мін Саша можа паспець, а можа і не паспець зрабіць пакупку; за 20 мін паспее; за 7 мін не паспее.

Адказ: за 10 мін можа не паспець; за 20 мін паспее; за 7 мін не паспее.

**▲ Прыклад 5.** Запісаць найменшае і найбольшае значэнні выразу  $7 - \frac{4}{k}$ , дзе  $2 \leq k \leq 3$ .

Рашэнне. Ацэнім магчымыя значэнні выразу  $7 - \frac{4}{k}$ . Па ўмове маем

$$2 \leq k \leq 3;$$

↓ па ўласцівасці 8 п. 1.5 атрымаем ↓

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2};$$

↓ па ўласцівасці 5 п. 1.5 памножым усе часткі гэтай няроўнасці на  $-4$  ↓

$$\frac{-4}{3} \geq \frac{-4}{k} \geq \frac{-4}{2};$$

↓ скарочім дроб справа і перапішам няроўнасць ↓  
ад меншага да большага

$$-2 \leq -\frac{4}{k} \leq -\frac{4}{3};$$

↓ па ўласцівасці 3 п. 1.5 дададзім да ўсіх частак гэтай ↓  
няроўнасці лік 7

$$7 - 2 \leq 7 - \frac{4}{k} \leq 7 - \frac{4}{3};$$

↓ знойдзем значэнні лікавых выразаў ↓

$$5 \leq 7 - \frac{4}{k} \leq 5\frac{2}{3}.$$

Такім чынам, пры любых  $k$ , што задавальняюць умову  $2 \leq k \leq 3$ , значэнні выразу  $7 - \frac{4}{k}$  не меншыя за 5 і не большыя за  $5\frac{2}{3}$ .

Ці можа значэнне гэтага выразу быць роўным 5? Можа, пры  $k = 2$  (праверце).

Ці можа значэнне гэтага выразу быць роўным  $5\frac{2}{3}$ ? Можа, пры  $k = 3$  (праверце).

Адказ: найменшае значэнне выразу 5; найбольшае значэнне выразу  $5\frac{2}{3}$ . ▲

Сцверджанне, якое мае форму двайной няроўнасці  $a < c < b$ , можна запісаць і інакш — з дапамогай фігурнай дужкі, што замяняе злучнік «і»:

$$\begin{cases} c > a, \\ c < b. \end{cases}$$

Такі запіс называюць **сістэмай няроўнасцей**. Няроўнасці ў сістэме чытаюць па чарзе: « $c$  больш за  $a$  і  $c$  менш за  $b$ ».



1. Што абазначае і як чытаецца кожная з двайных няроўнасцей:  
 $a < c < b$ ,  $a \leq c < b$ ,  $a < c \leq b$ ,  $a \leq c \leq b$ ?
2. Якому сцверджанню раўназначная двайная няроўнасць  $a < c < b$ ?
3. Як можна запісаць двайную няроўнасць з дапамогай фігурнай дужкі «{»? Як называюць і як чытаюць гэты запіс?



4. Вядома, што  $5 < a < 8$  і  $3 < b < 4$ . Ці правільна, што:

- а)  $8 < a + b < 12$ ;      б)  $2 < a - b < 4$ ;  
 в)  $15 < ab < 32$ ;      г)  $\frac{5}{3} < \frac{a}{b} < 2$ ?

5. Якой двойной няроўнасці раўназначная сістэма няроўнасцей

$$\begin{cases} m \leq p, \\ m > k? \end{cases}$$

### Практыкаванні

1.109°. Прачытайце няроўнасць:

- 1)  $-4 < a < 8$ ;      2)  $0 \leq b \leq 9$ ;      3)  $-10 \leq c < 0$ ;  
 4)  $2 < d \leq 15$ ;      5)  $-1 \leq m \leq 1$ ;      6)  $13 < n \leq 21$ .

1.110°. Прачытайце сістэму няроўнасцей:

- 1)  $\begin{cases} a > 12, \\ a < 15; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} b \geq -5, \\ b \leq 15; \end{cases}$       3)  $\begin{cases} c > 0, \\ c \leq 9; \end{cases}$   
 4)  $\begin{cases} d \geq -29, \\ d < 13; \end{cases}$       5)  $\begin{cases} k < 99, \\ k \geq -1; \end{cases}$       6)  $\begin{cases} p > 0, \\ p \leq 1. \end{cases}$

1.111°. Адзначце штрыхоўкай тую частку каардынатнай прамой, дзе можа знаходзіцца пункт з каардынатай  $a$ , што задавальняе ўмову:

- 1)  $2 < a \leq 8$ ;      2)  $-5 \leq a \leq 0$ ;      3)  $-6 \leq a < 1,2$ ;  
 4)  $0,2 < a \leq 5$ ;      5)  $-7 \leq a \leq 3$ ;      6)  $-1 < a < 1$ ;  
 7)  $0 < a < 18$ ;      8)  $-13 \leq a < -1$ .

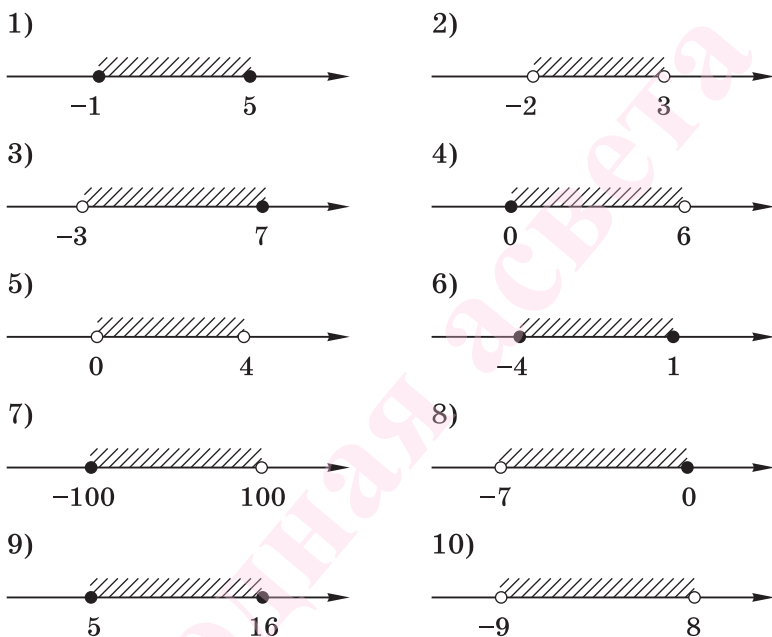
1.112°. Адзначце штрыхоўкай тую частку каардынатнай прамой, дзе можа знаходзіцца пункт з каардынатай  $a$ , што задавальняе ўмову:

- 1)  $\begin{cases} a < 5, \\ a > 3; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} a < 3, \\ a > 5; \end{cases}$       3)  $\begin{cases} a < -12, \\ a \geq -14; \end{cases}$   
 4)  $\begin{cases} a \geq 0, \\ a < 6; \end{cases}$       5)  $\begin{cases} a \geq 0, \\ a \leq -1; \end{cases}$       6)  $\begin{cases} a < -8, \\ a > 8. \end{cases}$

Якую з гэтых умоў можна запісаць у выглядзе двойной няроўнасці?

**1.113°.** Вядома, што пункт  $M(a)$  належыць заштрыхаванай частцы каардынатнай прамой (рыс. 9). Запішыце ўмову, якую павінна задавальняць каардыната  $a$ , у выглядзе:

а) двойной няроўнасці; б) сістэмы няроўнасцей.



Рыс. 9

**1.114°.** Запішыце ў выглядзе сістэмы няроўнасцей двойную няроўнасць:

- |                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| 1) $-3 \leq y < 15$ ; | 2) $13 \leq m \leq 118$ ; |
| 3) $-18 < n < -1$ ;   | 4) $-5 < t \leq 12$ ;     |
| 5) $0 < k \leq 7$ ;   | 6) $-20 \leq p < 0$ .     |

**1.115°.** Запішыце ў выглядзе двойной няроўнасці сістэму няроўнасцей:

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1) $\begin{cases} a < 7, \\ a > 5; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} m \geq -8, \\ m < -4; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} p < 0, \\ p \geq -4; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} k \geq 0, \\ k \leq 2. \end{cases}$ |
|---|--|---|---|

1.116. Вядома, што  $1 < t < 7$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $2t$ ;                      2)  $\frac{t}{4}$ ;                      3)  $-4t$ ;                      4)  $-\frac{t}{7}$ ;  
5)  $t + 1$ ;                      6)  $t - 3$ ;                      7)  $5 - t$ ;                      8)  $4 - 2t$ .

1.117. Вядома, што  $12 \leq t \leq 20$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $t - 10$ ;                      2)  $t + 4$ ;                      3)  $2t - 25$ ;                      4)  $\frac{t}{2}$ ;  
5)  $\frac{t}{4} + 6$ ;                      6)  $\frac{t}{10} + 5$ ;                      7)  $8 - \frac{t}{4}$ ;                      8)  $20 - \frac{t}{8}$ .

1.118. Вядома, што  $3 < a \leq 5$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $5a$ ;                      2)  $7a$ ;                      3)  $-a$ ;                      4)  $-3a$ ;  
5)  $a + 4$ ;                      6)  $a - 5$ ;                      7)  $11 - a$ ;                      8)  $10 - 3a$ ;  
9)  $\frac{a}{3}$ ;                      10)  $\frac{a}{5}$ ;                      11)  $\frac{1}{a} + 2$ ;                      12)  $\frac{1}{a} + 1$ .

1.119. Вядома, што  $2 \leq k \leq 6$  і  $1 < p < 3$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $-k$ ;                      2)  $-p$ ;                      3)  $-4p$ ;                      4)  $-2k$ ;  
5)  $k - p$ ;                      6)  $p - k$ ;                      7)  $5k - 4p$ ;                      8)  $3p - 2k$ ;  
9)  $\frac{1}{p}$ ;                      10)  $\frac{1}{k}$ ;                      11)  $\frac{k}{p}$ ;                      12)  $\frac{p}{k}$ .

1.120. Вядома, што  $4 < x < 12$  і  $2 \leq y \leq 4$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $x + \frac{1}{y}$ ;                      2)  $y + \frac{1}{x}$ ;                      3)  $y + \frac{x}{y}$ ;                      4)  $x + \frac{y}{x}$ ;  
5)  $-\frac{5}{x}$ ;                      6)  $-\frac{7}{y}$ ;                      7)  $\frac{1}{y} - 5x$ ;                      8)  $\frac{1}{x} - 2y$ ;  
9)  $3x - \frac{7}{y}$ ;                      10)  $4y - \frac{5}{x}$ ;                      11)  $-y - \frac{3x}{y}$ ;                      12)  $-x - \frac{2y}{x}$ .

1.121. 1) Пры вымярэнні стараны квадрата  $a$  ў сантыметрах атрымалі:  $3,2 \leq a \leq 3,3$ . Ацаніце значэнні перыметра  $P$  і плошчы  $S$  квадрата.

2) Пры вымярэнні старон прамавугольнага  $a$  і  $b$  у сантыметрах атрымалі:  $6,3 \leq a \leq 6,4$  і  $2,5 \leq b \leq 2,6$ . Ацаніце значэнні перыметра  $P$  і плошчы  $S$  прамавугольнага.

- 1.122.** Дадзены трохвугольнік са старанамі  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Якія значэнні могуць прымаць даўжыня стараны  $c$  і паўперыметр  $p$  гэтага трохвугольніка, калі:
- 1)  $a = 5$  см;  $b = 8$  см;
  - 2)  $a = 12$  см;  $b = 6$  см?
- 1.123.** 1) Перыметр  $P$  паралелаграма большы за 20 см, а даўжыня яго стараны  $a$  меншая за 6 см. Якія значэнні можа прымаць даўжыня стараны  $b$ ?
- 2) Перыметр  $P$  паралелаграма меншы за 30 см, а даўжыня стараны  $a$  большая за 10 см. Якія значэнні можа прымаць даўжыня стараны  $b$ ?
- 1.124.** У кожным з 10 вагонаў электрычкі, што праехала міма, было ад 60 да 95 **пасажыраў**, а на зваротным шляху — ад 75 да 100. Якой можа быць колькасць **пасажыраў**, перавезеных электрычкай за два рэйсы?
- 1.125.** Кожны з 14 хлопчыкаў мае ад 7 да 9 наклеек і ад 3 да 5 марак, а кожная з 16 дзяўчынак мае ад 8 да 10 наклеек і ад 2 да 4 марак. Якімі могуць быць колькасць наклеек і колькасць марак ва ўсіх 30 дзяцей?

### 1.7. Доказ няроўнасцей

Няхай  $A$  і  $B$  — выразы. *Даказаць няроўнасць  $A < B$  ( $A > B$ ,  $A \leq B$ ,  $A \geq B$ )* — гэта значыць даказаць, што яна ператвараецца ў правільную лікавую няроўнасць пры ўсіх значэннях зменных, для якіх абодва выразы  $A$  і  $B$  вызначаны.

**Прыклад 1.** Даказаць, што пры любых значэннях  $a$  і  $b$  правільная няроўнасць

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

**Доказ.** Разгледзім рознасць левай і правай частак няроўнасці і вызначым яе знак пры любых значэннях  $a$  і  $b$ :

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

Такім чынам, мы даказалі, што

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \quad \square$$

**Прыклад 2.** Даказаць, што пры любых значэннях  $a > 0$  правільная няроўнасць

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

**Доказ.** Разгледзім рознасць левай і правай частак няроўнасці і вызначым яе знак пры любых дадатных значэннях  $a$ :

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Паколькі  $a > 0$  па ўмове і  $(a-1)^2 \geq 0$  пры любых значэннях  $a$ , то  $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$ .

Значыць, няроўнасць  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  правільная пры любых значэннях  $a > 0$ .  $\square$

**Прыклад 3.** Даказаць, што пры любых значэннях  $a$  правільная няроўнасць

$$(a-1)(a+1)(a^2+1) < a^4.$$

**Доказ.** Выкарыстаўшы ў левай частцы няроўнасці формулы скарачанага множання, атрымаем:

$$(a-1)(a+1)(a^2+1) = (a^2-1)(a^2+1) = a^4-1.$$

Такім чынам, зыходная няроўнасць раўназначная няроўнасці  $a^4-1 < a^4$ , а гэта няроўнасць правільная пры любым значэнні  $a$ .  $\square$

**Прыклад 4.** Даказаць, што пры любым значэнні  $x$  правільная няроўнасць

$$2x^2 + 2x + 1 > 0.$$

**Доказ.** Паколькі правая частка няроўнасці роўная нулю, то доказ зводзіцца да вызначэння знака яе левай часткі пры любых значэннях  $x$ .

Пераўтворым выраз  $2x^2 + 2x + 1$ :

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x^2 + 2x + 1) = x^2 + (x+1)^2.$$

Паколькі выразы  $x^2$  і  $(x+1)^2$  прымаюць толькі неадмоўныя і ў той жа час не роўныя нулю значэнні (патлумачце чаму), то сума  $x^2 + (x+1)^2$  пры любых значэннях  $x$  прымае дадатныя значэнні. Такім чынам, даказана, што зыходная няроўнасць правільная.  $\square$

**Прыклад 5.** Даказаць, што калі да лічніка і назоўніка няправільнага дробу  $\frac{a}{b}$  ( $a > b > 0$ ) дадаць адзін і той жа дадатны лік  $n$ , то атрыманы дроб будзе меншы за дадзены.

**Доказ.** Разгледзім рознасць дробаў  $\frac{a+n}{b+n}$  і  $\frac{a}{b}$ :

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bn-ab-an}{(b+n)b} = \frac{(b-a)n}{(b+n)b}.$$

Паколькі дроб  $\frac{a}{b}$  няправільны, то  $a > b$ , значыць,  $b-a < 0$ , а паколькі  $b > 0$  і  $n > 0$ , то  $b+n > 0$ . Такім чынам, рознасць дробаў  $\frac{(b-a)n}{(b+n)b}$  прымае толькі адмоўныя значэнні, таму  $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$ . Няроўнасць даказана.  $\square$

**▲ Прыклад 6.** Даказаць, што пры любых значэннях  $a$  і  $b$  правільная няроўнасць

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \quad (1)$$

**Доказ.** Калі адзін з лікаў, напрыклад  $b$ , роўны нулю, то маем

$$|a+b| = |a+0| = |a| = |a| + |0| = |a| + |b|,$$

і, значыць, няроўнасць (1) правільная.

Таму ў далейшым будзем лічыць, што  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ . Пры гэтым магчымы тры выпадкі:

- 1) абодва лікі  $a$  і  $b$  дадатныя;
- 2) абодва лікі  $a$  і  $b$  адмоўныя;
- 3) адзін з лікаў, напрыклад  $a$ , дадатны, а другі — адмоўны. Разгледзім кожны з гэтых выпадкаў.

- 1) Калі  $a > 0$  і  $b > 0$ , то  $a+b > 0$  і  $|a| = a$ ,  $|b| = b$ ,  $|a+b| = a+b$ . Таму маем

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|,$$

і, значыць, няроўнасць (1) правільная.

2) Калі  $a < 0$  і  $b < 0$ , то  $a + b < 0$  і  $|a| = -a$ ,  $|b| = -b$ ,  
 $|a + b| = -(a + b)$ .

Таму маем

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

і, значыць, няроўнасць (1) правільная.

3) Калі  $a > 0$  і  $b < 0$ , то  $|a| = a$ ,  $|b| = -b$ .

а) Магчыма, што  $a + b \geq 0$ . Тады

$$|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b| < |a| + |b|,$$

і, значыць, няроўнасць (1) правільная.

б) Магчыма, што  $a + b < 0$ . Тады

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = -|a| + |b| < |a| + |b|,$$

і, значыць, няроўнасць (1) правільная.  $\square$

Даказаная ў прыкладзе 6 няроўнасць чытаецца так:



модуль сумы двух лікаў не перавышае сумы іх модуляў.

**Прыклад 7.** Даказаць, што пры любых значэннях  $a$  і  $b$  правільная няроўнасць

$$|a + b| \geq |a| - |b|. \quad (2)$$

**Доказ.** Пераўтворым рознасць выразаў  $|a + b|$  і  $|a| - |b|$ :

$$|a + b| + |b| - |a| =$$

↓ на падставе азначэння модуля і няроўнасці (1) ↓  
 атрымаем

$$= (|a + b| + |-b|) - |a| \geq |a + b - b| - |a|.$$

Такім чынам, маем (патлумачце чаму):

$$|a + b| + |b| - |a| \geq 0, \text{ г. зн. } |a + b| \geq |a| - |b|. \quad \square \blacktriangle$$



1. Што значыць даказаць няроўнасць?

2. Апішыце адзін з магчымых спосабаў доказу няроўнасці.

3\*. Дакажыце няроўнасць  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Як яна чытаецца?

4\*. Дакажыце няроўнасць: а)  $|a + b| \geq |a| - |b|$ ; б)  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .

## Практыкаванні

Дакажыце няроўнасць (1.126—1.130).

1.126°. 1)  $5(k+1) - k < 4(2+k)$ ;

2)  $3(k-1) + k - 4(2+k) < 0$ ;

3)  $(k-5)^2 > k(k-10)$ ;

4)  $(3k+2)(2k+1) > 6k\left(k+1\frac{1}{6}\right)$ .

1.127°. 1)  $4a^2 - 6a + 1 > 2a(2a-3)$ ;

2)  $a(a+2) > 2a-3$ ;

3)  $(a+4)(a+2) < (a+3)^2$ ;

4)  $a(a-8) < (a-4)^2$ .

1.128°. 1)  $8b(b-2) > 2(2b-4)(2b+4) - 16b$ ;

2)  $(3b+4)(3b-4) < 9b^2 + 1$ ;

3)  $(2b+5)^2 > 2b(b+10)$ ;

4)  $(9-2b)^2 + 33b < 82 + b(4b-3)$ .

1.129°. 1)  $(c+3)^2 > -2$ ;

2)  $(c-4)^2 > -3$ ;

3)  $c(c+1) > c-4$ ;

4)  $c(c-6) > -2-6c$ ;

5)  $c(c-5) < (c-3)(c-2)$ ;

6)  $(c-1)(c-6) < (c-3)(c-4)$ .

1.130°. 1)  $(8k-3)(8k+3) < 64k^2$ ;

2)  $3k^2 - 12k + 49 > 3k(k-4)$ ;

3)  $(k-3)^2 + k(6-k) > 0$ ;

4)  $(5k-1)(5k+1) < 25k^2$ .

1.131. Ці правільная пры любым значэнні  $k$  няроўнасць:

1)  $26k^2 + 4 \geq 0$ ;

2)  $-(k-3)^2 < 0$ ;

3)  $k^2 + (-k)^2 \geq 0$ ;

4)  $(k+16)^2 \geq 0$ ;

5)  $-(-3k)^2 + (-3k) \cdot 3 \geq 0$ ;

6)  $25 - 10k + k^2 \leq 0$ ?

1.132. Ці правільная пры любым значэнні  $a$  няроўнасць:

1)  $(a+2)(a-6) < (2a-1)^2$ ;

2)  $(a+6)(a-3) > (a-4)(a+7)$ ;

3)  $(a+2)(a-3) \leq (a+3)(a-2)$ ;

4)  $(a-5)(a+1) \geq (a+5)(a-1)$ ;

5)  $(a-4)(a-3) < (a-5)(a-2)$ ;

6)  $(a+8)(a+3) > (a+7)(a+4)$ ?



Дакажыце няроўнасць (1.133—1.139).

1.133°. 1)  $\frac{1+k^2}{2} \geq k$ ;      2)  $4k^2 + 1 \geq 4k$ ;      3)  $k^2 + 2k \geq -1$ ;  
 4)  $\frac{4+k^2}{2} \geq 2k$ ;      5)  $c^2 + \frac{1}{c^2} \geq 2$ ;      6)  $\frac{3}{|a|} + \frac{|a|}{3} \geq 2$ .

1.134°. 1)  $x(y-x) \leq xy$ ;      2)  $4xy \leq 4x^2 + y^2$ ;  
 3)  $x^2 + xy + y^2 \geq -xy$ ;      4)  $x(x-y) \geq y(x-y)$ ;  
 5)  $11p^2 + 5p + 1 \geq 2p^2 - p$ ;      6)  $p + p^2 \leq 26p^2 - 29p + 9$ .

1.135. 1)  $y^2 + \frac{4}{1+y^2} \geq 3$ ;      2)  $\frac{y^2}{1+y^4} \leq \frac{1}{2}$ ;  
 3)  $\frac{y^8+1}{y^4} \geq \frac{1}{0,5}$ ;      4)  $\frac{y^2}{2} + \frac{18}{y^2+2} \geq 5$ .

1.136\*. 1)  $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m+n)$ ;  
 2)  $m^2 + n^2 + k^2 + 3 \geq 2(m+n+k)$ ;  
 3)  $m^2 + n^2 + 10 \geq 6m - 2n$ ;  
 4)  $4m^2 + n^2 + 2 \geq 2n - 4m$ ;  
 5)  $a^2 + ab + b^2 \geq 2ab$ ;  
 6)  $a^2 + 2ab + 9b^2 \geq 4ab$ ;  
 7)  $4m^2 + 9n^2 \geq 12|mn|$ ;  
 8)  $25m^2 + 16n^2 \geq 40|mn|$ .

1.137\*. 1)  $c^2 + d^2 - 2cd + 2c - 2d + 1 \geq 0$ ;  
 2)  $c^2 + 4y^2 + 4y - 4c + 5 \geq 0$ ;  
 3)  $p^2 + k^2 - 2pk(p+k) + 2pk + p^2k^2 \geq 0$ ;  
 4)  $p^2(k^2 + 4) - 4p^2k + 2pk + p^2 + k^2 \geq 0$ .

1.138\*. 1)  $3a^2 + b^2 + 8a + 4b - 2ab + 22 \geq 0$ ;  
 2)  $a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 3 \geq 0$ ;  
 3)  $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \geq 4ab(a^2 + b^2)$ ;  
 4)  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ .

1.139\*. 1)  $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x + y + z);$

2)  $z(x^2 + y^2) + x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) \geq 6xyz;$

3)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz};$

4)  $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+xz}{3}.$

1.140. Дакажыце, што:

1)  $m^2 + k^2 \geq \frac{1}{2},$  калі  $m + k = 1;$

2)  $p^2 + k^2 - 0,5 \geq 0,$  калі  $p - k = 1;$

3)  $\frac{m+k}{n+k} < \frac{m}{n},$  калі  $n > 0, k > 0, m > n;$

4)\*  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6,$  калі  $a > 0, b > 0, c > 0.$

## Раздзел 2

### РЭЧАІСНЫЯ ЛІКІ

#### 2.1. Рэчаісныя лікі

##### 1. Перыядычныя дроби

Дзесятковыя дроби, якія разглядаліся да гэтага часу, мелі пасля коскі канечную колькасць знакаў. Такія дроби называюць *канечнымі дзесятковымі дробамі*.

Ператварыць у канечны дзесятковы можна толькі такі нескарачальны звычайны дроб, назоўнік якога не мае ніякіх простых множнікаў, акрамя 2 і 5. У гэтым выпадку лічнік дзеляць на назоўнік. Напрыклад,

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{7}{80} = 0,0875; \quad \frac{371}{125} = 2,968.$$

Выкарыстаем цяпер гэты ж метада ператварэння звычайнага дроби ў дзесятковы да ліку  $\frac{72}{11}$ . Для гэтага будзем дзяліць «вугалком» 72,000... на 11:

$$\begin{array}{r|l} 72,000... & 11 \\ \hline 66 & 6,5454... \\ \hline -60 & \\ \hline -55 & \\ \hline -50 & \\ \hline -44 & \\ \hline -60 & \\ \hline -55 & \\ \hline -50 & \\ \hline -44 & \\ \hline -6 & \\ \hline \dots & \end{array}$$

Такім чынам,  $\frac{72}{11} = 6,5454545454... .$

Бясконцы дзесятковы дроб, што стаіць у правай частцы гэтай роўнасці, змяшчае групу лічбаў 54, якая перыядычна паўтараецца. Гэта група лічбаў называецца *перыядам* дроби, а сам дроб — *бясконцым дзесятковым перыядычным дробам* (або проста *перыядычным дробам*).

Пры запісе такіх дробаў перыяд змяшчаюць у дужках і пішуць толькі адзін раз:  $\frac{72}{11} = 6,(54)$  (чытаецца «шэсць цэлых, пяцьдзясят чатыры ў перыядзе»).

Яшчэ тры прыклады:

1)  $\frac{5}{6} = 0,83333\ldots = 0,8(3)$  (чытаецца «нуль цэлых, восем дзясятых, тры ў перыядзе»).

2)  $\frac{149}{3300} = 0,04515151\ldots = 0,04(51)$  (чытаецца «нуль цэлых, чатыры сотыя, пяцьдзясят адзін у перыядзе»).

3)  $\frac{6617}{3300} = 2,00515151\ldots = 2,00(51)$  (чытаецца «дзве цэлыя, нуль сотых, пяцьдзясят адзін у перыядзе»).

Дапісваючы да канечнага дзесятковага дробу бясконца многа нулёў, мы атрымліваем бясконцы дзесятковы дроб. Таму канечныя дзесятковыя дробы таксама лічацца перыядычнымі з перыядам 0. Наогул:



кожны рацыянальны лік можна запісаць у выглядзе бясконцага дзесятковага перыядычнага дробу; і наадварот, кожны бясконцы дзесятковы перыядычны дроб уяўляе некаторы рацыянальны лік.

Заўважым, што пры дзяленні двух натуральных лікаў не могуць атрымацца дробы з лікам 9 у перыядзе, таму ў школьным курсе алгебры іх не разглядаюць.

▲ Прывядзём без доказу правіла ператварэння бясконцага перыядычнага дзесятковага дробу ў звычайны.



Каб ператварыць бясконцы перыядычны дзесятковы дроб у звычайны, трэба ад ліку, што стаіць да другога перыяду, адняць лік, што стаіць да першага перыяду, і запісаць рознасць у лічніку, а ў назоўніку напісаць лічбу 9 столькі разоў, колькі лічаў у перыядзе, і пасля дзявятак дапісаць столькі нулёў, колькі лічаў паміж коскай і першым перыядам.

Напрыклад: 1)  $0,8(3) = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$ ;

$$2) 0,04(51) = \frac{451 - 4}{9900} = \frac{447}{9900} = \frac{149}{3300};$$

$$3) 2,00(51) = \frac{20051 - 200}{9900} = \frac{19851}{9900} = \frac{6617}{3300}. \blacktriangle$$

А

У навуковых працах па матэматыцы перыядычныя дзесятковыя дробы з'явіліся ў XVII ст., а ў падручнікі звесткі аб іх ўвайшлі толькі ў XIX ст.

У 1676 г. англійскі матэматык Джон Валіс у сваім трактате па алгебры выклаў найважнейшыя ўласцівасці перыядычных дробаў. Там жа ён апісаў і правіла ператварэння перыядычнага дробу ў звычайны.

## 2. Рацыянальныя і ірацыянальныя лікі

За час вывучэння матэматыкі ў школе мы пазнаёміліся з натуральнымі, цэлымі і рацыянальнымі лікамі.

Мноства ўсіх натуральных лікаў абазначаецца літарай  $N$ .

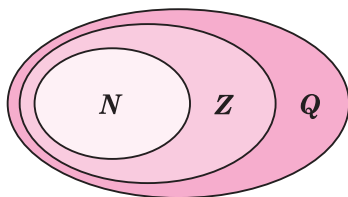
Мноства ўсіх цэлых лікаў абазначаецца літарай  $Z$ .

Мноства ўсіх рацыянальных лікаў абазначаецца літарай  $Q$  (рыс. 10).

Лік 7 натуральны. Мы гаворым яшчэ: «Лік 7 належыць мноству  $N$ » — і пішам: « $7 \in N$ ».

Знак « $\in$ » азначае «належыць». А лік  $-7$  не належыць мноству  $N$ . Гэта запісваецца так: « $-7 \notin N$ ». Знак « $\notin$ » азначае «не належыць».

Прывядзём яшчэ некалькі прыкладаў:



Рыс. 10

$$-5 \notin N; \quad \frac{-3}{1} \in Z; \quad \frac{-6}{2} \in Q; \quad \frac{13}{17} \notin N; \quad \frac{13}{17} \notin Z; \quad \frac{13}{17} \in Q.$$

Нагадаем, што кожны рацыянальны лік можна запісаць у выглядзе нескарачальнага дробу  $\frac{k}{n}$ , дзе  $k \in Z$ ,  $n \in N$ . Калі назоўнік гэтага дробу  $n = 1$ , то лік  $\frac{k}{n}$  — цэлы. Калі назоўнік дробу  $n > 1$ , то рацыянальны лік  $\frac{k}{n}$  не з'яўляецца цэлым, і яго называюць **дробавым лікам**.



Адзначым адну ўласцівасць рацыянальных лікаў: калі лік  $t$  дробавы, то лік  $t^2$  таксама дробавы.

Сапраўды, запішам  $t$  у выглядзе нескарачальнага дробу:

$$t = \frac{k}{n}, \text{ дзе } k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Лікі  $k$  і  $n$  не маюць агульных дзельнікаў, адрозных ад 1, значыць, лікі  $k^2$  і  $n^2$  таксама не маюць агульных дзельнікаў, адрозных ад 1. Таму дроб  $\frac{k^2}{n^2}$  нескарачальны, а паколькі  $n^2 > 1$ , то лік  $t^2 = \frac{k^2}{n^2}$  дробавы.  $\square$

**Тэарэма 1.** Не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2.

▲ Доказ. Няхай  $t$  — такі рацыянальны лік, што яго квадрат роўны 2, г. зн.  $t^2 = 2$ .

Лік  $t$  не можа быць цэлым, паколькі сярод квадратаў цэлых лікаў 0, 1, 4, 9, ... няма ліку 2.

Лік  $t$  не можа быць дробавым, паколькі квадрат дробавага рацыянальнага ліку з'яўляецца дробавым лікам, а  $t^2 = 2$  — цэлы лік.

Паколькі рацыянальны лік або цэлы, або дробавы, а лік  $t$  ні той, ні другі, то ён не можа быць рацыянальным. Значыць, не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2.  $\square$  ▲

Рацыянальныя лікі выкарыстоўваюцца для запісу вынікаў вымярэння розных велічынь, напрыклад даўжынь адрэзкаў. Аднак аказалася, што існуюць адрэзкі, даўжыні якіх рацыянальнымі лікамі не выражаюцца.

**Тэарэма 2.** Даўжыня дыяганалі квадрата са стараной, роўнай адзінцы даўжыні, не можа быць выражана рацыянальным лікам.

▲ Доказ. Разгледзім квадрат  $ABCD$  са стараной, даўжыня якой роўная 1, і пабудуем на яго дыяганалі  $AC$  квадрат  $ACEF$  (рыс. 11). Даўжыню гэтай дыяганалі абазначым літарай  $t$ . Будзем меркаваць, што  $t$  — рацыянальны лік.

Па формуле плошчы квадрата маем:

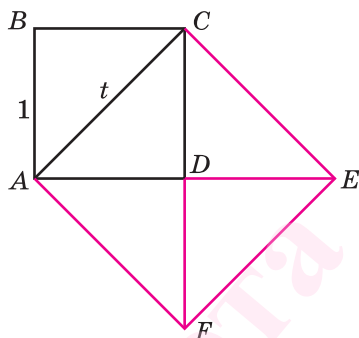
$$S_{ABCD} = AB^2 = 1; \quad S_{ACEF} = AC^2 = t^2. \quad (1)$$

Квадрат  $ABCD$  складаецца з двух роўных трохвугольнікаў (гл. рыс. 11), а квадрат  $ACEF$  — з чатырох такіх жа трохвугольнікаў (абгрунтуйце гэта). Значыць,  $S_{ACEF} = 2S_{ABCD}$ . З гэтай роўнасці і з роўнасцей (1) атрымаем:

$$t^2 = AC^2 = S_{ACEF} = 2S_{ABCD} = 2AB^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Значыць,  $t^2 = 2$ , а згодна з тэарэмай 1 не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2.

Такім чынам, вынік вымярэння даўжыні дыяганалі квадрата са стараной, роўнай адзінцы, не можа быць выражаны рацыянальным лікам. Значыць, рацыянальных лікаў недастаткова для вымярэння адрэзкаў. ☒ ▲



Рыс. 11

А

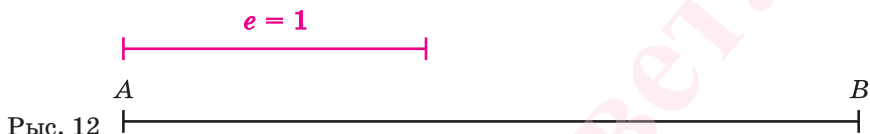
Знакаміты старажытнагрэчаскі матэматык і філосаф Піфагор і яго вучні, якія жылі ў VI ст. да н. э., не ведалі іншых лікаў, акрамя рацыянальных. У аснове філасофіі піфагарэйцаў ляжала паняцце аб ліку як аснове ўсіх рэчаў і з'яў прыроды. І раптам яны вынайшлі, што дыяганаль квадрата, старана якога роўная 1, не можа быць выражана ніякім лікам, паколькі піфагарэйцы выкарыстоўвалі толькі рацыянальныя лікі. Такое адкрыццё было вялікім ударам па вучэнні Піфагора, і таму яго паслядоўнікі доўга трымалі ў тайне гэты факт. Паводле падання, вучань Піфагора, які адкрыў гэту тайну, быў пакараны багамі і загінуў падчас караблекрушэння.

Адкрытыя піфагарэйцамі новыя лікі назвалі «ірацыянальнымі», г. зн. «неразумнымі» («ratio» ў перакладзе з лацінскага азначае «розум»), а звыклых «старых» зразумелых лікі сталі называць «разумнымі», г. зн. «рацыянальнымі».

Паколькі даўжыня дыяганалі квадрата са стараной, роўнай адзінцы даўжыні, не выражаецца рацыянальным лікам, то паўстае пытанне: а як усё ж вызначыць даўжыню гэтай дыяганалі?

У матэматыцы вызначэнне даўжыні адвольнага адрэзка ажыццяўляецца зыходзячы з наступнага практычнага прыёму вымярэнняў: *калі даўжыню адрэзка нельга вымераць цэлай адзінкай, то выкарыстоўваюць дзясятую, сотую, тысячную і г. д. долю гэтай адзінкі.*

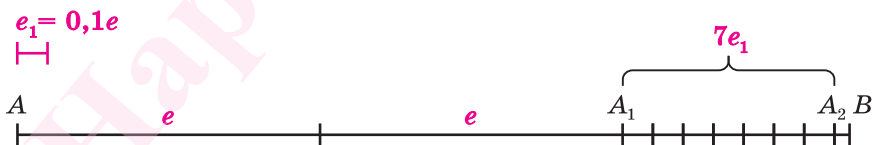
Няхай, напрыклад, трэба вымераць даўжыню адрэзка  $AB$ , г. зн. параўнаць гэты адрэзак з адзінкавым адрэскам  $e$  (рыс. 12). Для гэтага будзем адкладваць адрэзак  $e$  на адрэзку  $AB$ .



Можа здарыцца, што адрэзак  $e$  ўкладзецца на адрэзку  $AB$  цэлы лік разоў, напрыклад роўна 2 разы (рыс. 13). Тады мы гаворым, што даўжыня адрэзка  $AB$  роўная 2.



Калі ж пасля таго, як адрэзак  $e$  на адрэзку  $AB$  укладзецца 2 разы, застанецца адрэзак  $A_1B$ , меншы за  $e$ , то працягнем працэс. Цяпер на адрэзку  $A_1B$  будзем адкладваць ад пункта  $A_1$  адрэзак  $e_1 = 0,1e$  (рыс. 14).



Калі пасля таго, як адрэзак  $e_1$  на адрэзку  $A_1B$  укладзецца, напрыклад, 7 разоў, застанецца адрэзак  $A_2B$ , меншы за  $e_1$ , то працягнем працэс. Пры гэтым (калі спатрэбіцца) будзем выкарыстоўваць для вымярэння адрэзкі  $e_2 = 0,01e$ ,  $e_3 = 0,001e$  і г. д.



Працэс вымярэння можа скончыцца на якімсьці кроку, тады даўжыня адрэзка  $AB$  выразіцца канечным дзесятковым дробам, напрыклад  $AB = 2,7854$ . Але тэарэтычна магчыма (вядома, толькі мысленна), што кожны раз будзе заставацца кавалачак вымяраемага адрэзка і тады працэс вымярэння не будзе мець канца, г. зн. прывядзе да бясконцай паслядоўнасці лічбаў пасля коскі. Вынікам у гэтым выпадку будзе **дадатны бясконцы дзесятковы дроб**.

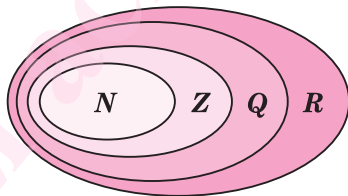
Паставіўшы перад дадатным бясконцым дзесятковым дробам знак «мінус», атрымаем **адмоўны бясконцы дзесятковы дроб**. Напрыклад,  $-2,7854\dots$ .

Бясконцыя дзесятковыя дробы, як дадатныя, так і адмоўныя, і нуль называюцца **рэчаіснымі лікамі**.

**Мноства ўсіх рэчаісных лікаў** абазначаецца літарай  $R$ , яно ўключае ўсе вядомыя нам лікавыя мноствы (рыс. 15).

Рэчаісныя лікі называюць яшчэ **сапраўднымі**.

Такім чынам,



Рыс. 15



любы адрэзак мае даўжыню, роўную некатораму дадатнаму рэчаіснаму ліку;  
і наадварот,  
для любога дадатнага рэчаіснага ліку існуе адрэзак, даўжыня якога роўная гэтаму ліку.

Бясконцы дзесятковы дроб можа быць або перыядычным або непэрыядычным. Як мы ведаем, кожны бясконцы дзесятковы перыядычны дроб уяўляе некаторы рацыянальны лік. Але аказваецца, што ёсць яшчэ і **непэрыядычныя бясконцыя дзесятковыя дробы**. Напрыклад, даўжыня дыяганалі квадрата са стараной, роўнай адзінцы даўжыні, не з'яўляецца рацыянальным лікам, а значыць, не можа быць бясконцым дзесятковым перыядычным дробам.

Бясконцыя дзесятковыя непэрыядычныя дробы называюцца **ірацыянальнымі лікамі**.

Прыкладзём некалькі прыкладаў ірацыянальных лікаў, запісаных у выглядзе бясконцага дзесятковага дробу.

1) Лік  $a = 0,12345678910111213\dots$ .

Тут пасля коскі запісаны без пропускаў у парадку нарастання ўсе лікі натуральнага рада, такім чынам, дроб  $a$  — перыядычны, і, значыць,  $a$  — ірацыянальны лік.

2) Лік  $b = 0,101001000100001000001\dots$ .

Тут пасля коскі запісаны: адзінка — нуль, адзінка — два нулі, адзінка — тры нулі і г. д., такім чынам, дроб  $b$  — перыядычны, і, значыць,  $b$  — ірацыянальны лік.

3) Лік  $\pi = 3,1415926\dots$  — адносіна даўжыні акружнасці да дыяметра.

**А**

Агульнапрынятае абазначэнне ліку  $3,1415926\dots$  літарай  $\pi$  упершыню ўвёў англійскі матэматык Уільям Джонс у 1706 г., пазычыўшы першую літару грэчаскага слова *περίμετρος* — акружнасць. Выкарыстанне гэтага скарачэння ў працах Леанарда Эйлера канчаткова замацавала яго ў навуцы. Ірацыянальнасць ліку  $\pi$  была даказана нямецкім матэматыкам Іаганам Генрыхам Ламбертам у XVIII ст.

**!**

Мноства рэчаісных лікаў складаецца з усіх рацыянальных і ўсіх ірацыянальных лікаў.

**Модуль рэчаіснага ліку** вызначаецца і абазначаецца гэтак жа, як модуль рацыянальнага ліку. І для **ўзаемна процілеглых рэчаісных лікаў** азначэнне тое ж, што і для ўзаемна процілеглых рацыянальных лікаў (гл. с. 281).

**Прыклад 1.** Запісаць для кожнага з лікаў

$$a = 0,12345678\dots; \quad b = -7,1010010001\dots; \quad c = 0:$$

а) яго модуль; б) процілеглы яму лік.

Адказ: а)  $|a| = 0,12345678\dots$ ;  $|b| = 7,1010010001\dots$ ;  $|c| = 0$ ;

б)  $-a = -0,12345678\dots$ ;  $-b = 7,1010010001\dots$ ;  $-c = 0$ .

Кожны пункт на каардынатнай прамой мае каардынату. Калі пункт знаходзіцца на дадатным каардынатным прамені, то яго каардыната — гэта адлегласць ад пункта да пачатку

адліку, а калі на адмоўным, то каардыната пункта роўная адлегласці ад гэтага пункта да пачатку адліку, узятая са знакам «мінус».

Раней на каардынатнай прамой разглядаліся толькі пункты з рацыянальнымі каардынатамі (ніякіх іншых лікаў, акрамя рацыянальных, мы проста не ведалі). Але такія пункты не запаўнялі ўсю каардынатную прамую — яна была «дзіравай», без пунктаў з ірацыянальнымі каардынатамі. Цяпер жа



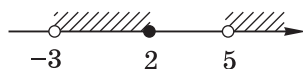
кожнаму пункту на каардынатнай прамой адпавядае пэўны рэчаісны лік — каардыната гэтага пункта; і наадварот, кожнаму рэчаіснаму ліку  $a$  адпавядае пэўны пункт на каардынатнай прамой — пункт  $c$  з каардынатай  $a$ .

Гавораць, што паміж пунктамі каардынатнай прамой і рэчаіснымі лікамі вызначана *ўзаемна адназначная адпаведнасць*.

Заўважым, што для двух рэчаісных лікаў, як і для двух рацыянальных лікаў, калі каардынатная прамая накіравана злева направа, то большы лік паказваецца пунктам, размешчаным на ёй правей.

Напомнім, што замест слоў «пункт, які адпавядае ліку  $a$ », гавораць проста «пункт  $a$ ». Гэта значыць, што мноства ўсіх рэчаісных лікаў мы ўяўляем сабе як мноства ўсіх пунктаў каардынатнай прамой.

**Прыклад 2.** На каардынатнай прамой адзначыць штрыхоўкай мноства пунктаў  $a$ , якія задавальняюць умову  $-3 < a \leq 2$  або  $a > 5$ .

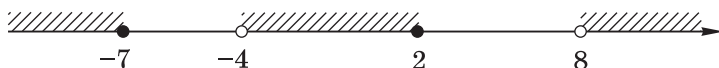


Рыс. 16

Рашэнне паказана на рысунку 16.

**Прыклад 3.** Па рысунку 17 запісаць умову, якую задавальняе мноства пунктаў  $a$  заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой.

Адказ:  $a \leq -7$  або  $-4 < a \leq 2$  або  $a > 8$ .



Рыс. 17

**Параўнанне рэчаісных лікаў, запісаных у выглядзе бясконца дзесятковых дробаў**, выконваюць па тых жа правілах, што і параўнанне канечных дзесятковых дробаў.



Каб параўнаць два дадатныя рэчаісныя лікі, спачатку параўноўваюць іх цэлыя часткі. З двух рэчаісных лікаў меншы той, у якога цэлая частка меншая.

Калі цэлыя часткі рэчаісных лікаў роўныя, то меншы з іх той, у якога лік дзясятых меншы.

Калі цэлыя часткі рэчаісных лікаў роўныя і лікі дзясятых роўныя, то меншы з іх той, у якога лік сотых меншы, і г. д.

Любы адмоўны рэчаісны лік, меншы за нуль, і нуль меншы за любы дадатны рэчаісны лік.

З двух адмоўных рэчаісных лікаў меншы той, у якога модуль большы.

**Прыклад 4.** Параўнаць лікі:

а)  $a = -13,27314995\dots$  і  $b = -13,27315321\dots$ ;

б)  $n = -13,273$  і  $t = -13,2(73)$ .

Рашэнне. а) Паколькі

$$|a| = |-13,27314995\dots| = 13,27314995\dots,$$

$$|b| = |-13,27315321\dots| = 13,27315321\dots \text{ і}$$

$13,27314995\dots < 13,27315321\dots$ , г. зн.  $|a| < |b|$ , то  $a > b$ . Такім чынам:  $-13,27314995\dots > -13,27315321\dots$ .

б) Паколькі  $|n| = |-13,273| = 13,273 = 13,2730000\dots$ ,

$$|t| = |-13,2(73)| = 13,2(73) = 13,2737373\dots \text{ і}$$

$$13,273 < 13,2(73), \text{ г. зн. } |n| < |t|, \text{ то } n > t.$$

Такім чынам:  $-13,273 > -13,2(73)$ .

Адказ: а)  $a > b$ ; б)  $n > t$ .

**Прыклад 5.** Параўнаць лікі  $317,18(5)$  і  $317,1(8)$ .

Рашэнне. Запішам кожны з гэтых лікаў у выглядзе бясконцага дзесятковага дробу:

$$317,18(5) = 317,1855555\dots \text{ і } 317,1(8) = 317,1888888\dots$$

Цэлыя часткі, а таксама лікі дзясятых і сотых у гэтых дзесятковых дробах роўныя, а 5 — лік тысячных першага дробу меншы за 8 — лік тысячных другога дробу. Такім чынам, першы лік меншы за другі, г. зн.  $317,18(5) < 317,1(8)$ .

**Рэчаісныя лікі можна прыбліжаць канечнымі дзесятковымі дробамі.** Пакажам на прыкладзе, што гэта значыць і як гэта робяць.

Няхай  $a = 53,2468101214\dots$  (пасля коскі паслядоўна запісаны ўсе цотныя натуральныя лікі).

Калі «абарваць» гэты дроб на лічбе першага разраду, то атрымаецца лік 53,2; ён меншы за  $a$ . Калі ў ліку 53,2 павялічыць лічбу першага разраду на 1, то атрымаецца лік 53,3; ён большы за  $a$ . Такім чынам,

$$53,2 < a < 53,3.$$

Гавораць, што  $a \approx 53,2$  з'яўляецца *прыбліжэннем ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-1}$  з недахопам*, а  $a \approx 53,3$  з'яўляецца *прыбліжэннем ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-1}$  з лішкам*.

Падобным чынам атрымліваюцца прыбліжэнні ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  і г. д. Напрыклад,

$$53,246 < a < 53,247.$$

Значыць,  $a \approx 53,246$  з'яўляецца прыбліжэннем ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-3}$  з недахопам, а  $a \approx 53,247$  з'яўляецца прыбліжэннем ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-3}$  з лішкам.

(Напомнім, што знак « $\approx$ » чытаецца «*прыбліжана роўна*».)



Знак « $\approx$ » прыбліжанай роўнасці прыдумаў нямецкі матэматык Адам Вільгельм Зігмунд Гюнтэр у 1882 г.

**Прыклад 6.** Няхай  $b = -53,2468101214\dots$  (пасля коскі паслядоўна запісаны ўсе цотныя натуральныя лікі). Запісаць дзесятковыя прыбліжэнні ліку  $b$  з дакладнасцю да  $10^{-4}$  з недахопам і з лішкам.

Рашэнне. Паколькі

$$-53,2469 < b < -53,2468,$$

то  $b \approx -53,2469$  — прыбліжэнне ліку  $b$  з дакладнасцю да  $10^{-4}$  з недахопам, а  $b \approx -53,2468$  — з лішкам.

Над рэчаіснымі лікамі можна выконваць арыфметычныя дзеянні; яны задавальняюць тыя ж уласцівасці, што і дзеянні над рацыянальнымі лікамі.

Заўважым, што на практыцы арыфметычныя дзеянні над рэчаіснымі лікамі выконваюцца прыбліжана.

Для рэчаісных лікаў справядлівыя тыя ж уласцівасці няроўнасцей, што і для рацыянальных лікаў.



1. Прывядзіце прыклад рацыянальнага ліку, які:
  - а) можна запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу;
  - б) нельга запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу.
2. Дакажыце, што калі рацыянальны лік  $t$  дробавы, то лік  $t^2$  таксама дробавы.
3. Як у матэматыцы вызначаюць даўжыню адвольнага адрэзка?
4. Ці правільна, што даўжыню любога адрэзка можна запісаць у выглядзе бясконцага дзесятковага дробу?
5. Што называецца рэчаіснымі лікамі?
6. З якіх лікаў складаецца мноства рэчаісных (сапраўдных) лікаў? Як яно абазначаецца?
7. Які бясконцы дзесятковы дроб з'яўляецца:
  - а) рацыянальным лікам; б) ірацыянальным лікам?
8. Чаму, ведаючы толькі рацыянальныя лікі, нельга запісаць каардынату любога пункта каардынатнай прамой?
9. Як параўнаць два рэчаісныя лікі  $a$  і  $b$ , запісаныя ў выглядзе бясконцых дзесятковых дробаў, калі:
  - а)  $a$  і  $b$  — дадатныя; б)  $a$  і  $b$  — адмоўныя?
10. Назавіце дзесятковыя прыбліжэнні ліку  $\pi$  з дакладнасцю да  $10^{-6}$ .
11. Якія ўласцівасці задавальняе:
  - а) складанне рэчаісных лікаў;
  - б) множанне рэчаісных лікаў?
12. Якія ўласцівасці няроўнасцей справядлівыя для рэчаісных лікаў?

## Практыкаванні

2.1°. Ці можна дроб ператварыць у канечны дзесятковы дроб:

- |                      |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $\frac{7}{8}$ ;   | 2) $\frac{19}{40}$ ; | 3) $\frac{5}{48}$ ;  | 4) $\frac{29}{21}$ ; |
| 5) $1\frac{3}{14}$ ; | 6) $2\frac{3}{20}$ ; | 7) $7\frac{5}{16}$ ; | 8) $3\frac{7}{18}$ ? |

2.2°. Запішыце лік у выглядзе дзесятковага дробу:

- 1)  $\frac{5}{16}$ ;                      2)  $\frac{17}{30}$ ;                      3)  $6\frac{1}{54}$ ;                      4)  $1\frac{31}{44}$ ;  
5)  $3\frac{11}{15}$ ;                      6)  $22\frac{1}{6}$ ;                      7)  $14\frac{5}{22}$ ;                      8)  $5\frac{13}{24}$ .

2.3°. Ці правільная роўнасць:

- 1)  $\frac{68}{33} = 2,(6)$ ;                      2)  $\frac{56}{11} = 5,(09)$ ;                      3)  $\frac{26}{15} = 1,7(3)$ ;  
4)  $\frac{23}{15} = 1,5(3)$ ;                      5)  $\frac{49}{21} = 2,(31)$ ;                      6)  $\frac{13}{45} = 3,2(8)$ ?

2.4. Запішыце лік у выглядзе пераўрадкаванага дробу:

- 1)  $\frac{3}{7}$ ;                      2)  $\frac{4}{7}$ ;                      3)  $\frac{31}{33}$ ;                      4)  $\frac{41}{44}$ ;  
5)  $3\frac{23}{30}$ ;                      6)  $4\frac{37}{60}$ ;                      7)  $11\frac{13}{54}$ ;                      8)  $23\frac{11}{27}$ .

2.5°. Запішыце тры лікі, якія належаць мноству:

- 1) дадатных цэлых лікаў;  
2) адмоўных цэлых лікаў;  
3) простых лікаў;  
4) састаўных лікаў;  
5) цотных лікаў;  
6) няцотных лікаў;  
7) лікаў, кратных 5;  
8) лікаў, не кратных 5;  
9) лікаў, меншых за 5;  
10) лікаў, большых за 5;  
11) лікаў, кратных 2 і кратных 3;  
12) лікаў, кратных 3 і кратных 7.

2.6°. Запішыце ў выглядзе нескарочанага дробу  $\frac{k}{n}$ , дзе  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , лік:

- 1) 7;                      2)  $7\frac{14}{15}$ ;                      3) 7,14;                      4) 0,72;  
5) -5;                      6)  $-5\frac{11}{12}$ ;                      7) -5,35;                      8) -0,84.

2.7. Дакажыце, што не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны:

- 1) 11;                      2) 13;                      3) 10;                      4) 14.

2.8. Ці з'яўляецца: а) сума; б) рознасць; в) здабытак; г) дзель (калі дзельнік не роўны нулю):

- 1) двух натуральных лікаў натуральным лікам;
- 2) двух цэлых лікаў цэлым лікам;
- 3) двух рацыянальных лікаў рацыянальным лікам?

2.9°. Ці правільна, што даўжыня любога адрэзка выражаецца:

- 1) цэлым лікам;
- 2) рацыянальным лікам;
- 3) ірацыянальным лікам;
- 4) рацыянальным або ірацыянальным лікам?

2.10°. Ці правільна, што запісаны рацыянальны лік:

- 1)  $-4,6877777\ldots$  (далей — толькі лічбы 7);
- 2) 2,1549783;
- 3) 5,1753434217;
- 4)  $-1,1891494545$ ;
- 5) 0,687237828213;
- 6) 3,1415926666888... (далей — толькі лічбы 8)?

2.11°. Ці правільна, што лік:

- 1) 3,4(2) — рацыянальны;
- 2) 3,4(2) — не з'яўляецца рацыянальным;
- 3) 3,4(2) — рэчаісны;
- 4) 3,4(2) — не з'яўляецца цэлым;
- 5)  $\pi$  — не з'яўляецца рацыянальным;
- 6)  $\pi$  — рэчаісны?

2.12°. Як можна прадоўжыць запіс бясконцага дзесятковага дробу, каб атрымаўся: а) рацыянальны лік; б) ірацыянальны лік:

- |                |                      |                      |
|----------------|----------------------|----------------------|
| 1) 32,0715...; | 2) 13,1444...;       | 3) 25,0022...;       |
| 4) 43,1789...; | 5) $-5,7039\ldots$ ; | 6) $-7,4006\ldots$ ? |

2.13°. Параўнайце лікі:

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1) 5,7986... і 5,7985...;        | 2) $-3,4825\ldots$ і $-3,4826\ldots$ ; |
| 3) $-16,251\ldots$ і $-16,251$ ; | 4) 15,25 і $\frac{61}{4}$ ;            |



- 5)  $0$  і  $-0,0000033\dots$ ;      6)  $-51,5151\dots$  і  $-51,151515$ ;  
7)  $-0,375\dots$  і  $-\frac{3}{8}$ ;      8)  $\frac{5}{9}$  і  $0,5555\dots$ ;  
9)  $7,34$  і  $7\frac{1}{3}$ ;      10)  $2,571428$  і  $2\frac{4}{7}$ ;  
11)  $3,272727$  і  $3,277277\dots$ ;  
12)  $0,857143$  і  $\frac{6}{7}$ .

**2.14.** Для ліку  $a$  запішыце: а) яго модуль; б) процілеглы яму лік, калі:

- 1)  $a = -7,(31)$ ;      2)  $a = -8,232323\dots$ ;  
3)  $a = 0,545454\dots$ ;      4)  $a = 3,(702)$ .

**2.15.** Ці правільна, што на каардынатнай прамой пункт  $A$  ляжыць правей за пункт  $B$ , калі:

- 1)  $A(3,29292\dots)$  і  $B(3,29272\dots)$ ;  
2)  $A(0)$  і  $B(-1,6392\dots)$ ;  
3)  $A(-15,67432\dots)$  і  $B(-15,67342\dots)$ ;  
4)  $A(36,24\dots)$  і  $B(36,20\dots)$ ?

**2.16.** Які пункт —  $M$  або  $K$  — знаходзіцца далей ад пункта  $O$  (пачатку адліку) на каардынатнай прамой, калі каардынаты пунктаў  $M$  і  $K$  адпаведна роўныя:

- 1)  $8,369\dots$  і  $7,549\dots$ ;  
2)  $-15,3946\dots$  і  $-15,3937\dots$ ;  
3)  $-0,4465\dots$  і  $0,5678\dots$ ;  
4)  $-9,353\dots$  і  $9,352\dots$ ;  
5)  $-2,7\dots$  і  $2,7\dots$ ;  
6)  $-7,356$  і  $7,356$ ?

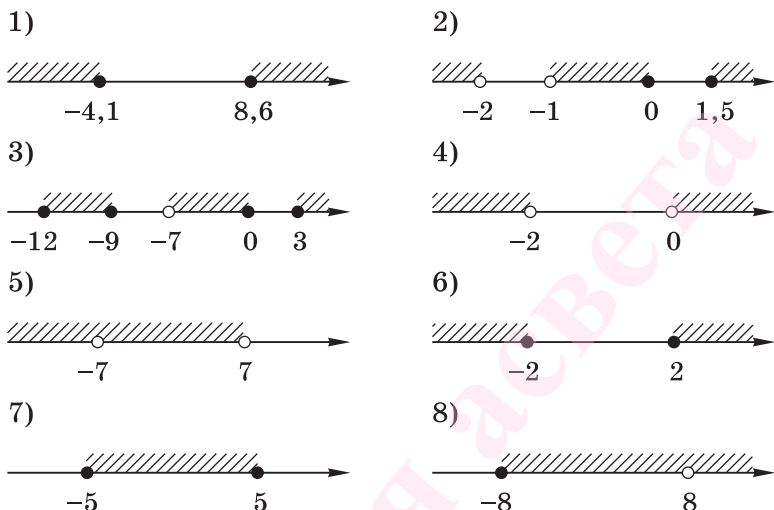
**2.17.** Параўнайце лікі:

- 1)  $72,1(4)$  і  $72,(14)$ ;      2)  $43,(26)$  і  $43,2(6)$ ;  
3)  $-4,02(3)$  і  $-4,0(23)$ ;      4)  $-8,5(41)$  і  $-8,54(1)$ .

**2.18.** На каардынатнай прамой адзначце штрыхоўкай мноства пунктаў  $a$ , якія задавальняюць умову:

- 1)  $a < -3$  або  $a \geq 2$ ;      2)  $a \leq -1$  або  $a > 3$ ;  
3)  $-2 \leq a < 5$ ;      4)  $-4 < a \leq 2$ ;  
5)  $-5 < a < 0$  або  $a \geq 1$ ;      6)  $-6 \leq a \leq -2$  або  $a > 0$ .

**2.19.** Па рысунку 18 запішыце ўмову, якую задавальняе мноства пунктаў  $t$  заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой.



Рыс. 18

**2.20.** Знайдзіце дзесятковыя прыбліжэнні ліку  $a$  з дакладнасцю да  $10^{-5}$  з недахопам і з лішкам, калі:

- 1)  $a = 48,13579111315\dots$ ;
- 2)  $a = 9,97975973\dots$ ;
- 3)  $a = 11,298297296295\dots$ ;
- 4)  $a = 103,6775774773\dots$ .

**2.21.** Знайдзіце дзесятковыя прыбліжэнні ліку  $b$  з дакладнасцю да  $10^{-3}$  з недахопам і з лішкам, калі:

- 1)  $b = -29,56787651\dots$ ;
- 2)  $b = -19,132403546\dots$ ;
- 3)  $b = -0,410424344\dots$ ;
- 4)  $b = -2,389076531\dots$ .

## 2.2. Лікавыя прамежкі

Увядзём абазначэнні для некаторых мностваў на каардынатнай прамой.

Няхай  $a < b$ . Пры паказе лікаў на каардынатнай прамой няроўнасць  $a < x < b$  азначае, што пункт (лік)  $x$  раз-

мешчаны правей за пункт  $a$  (паколькі  $x > a$ ) і левей за пункт  $b$  (паколькі  $x < b$ ), г. зн. пункт  $x$  ляжыць паміж пунктамі  $a$  і  $b$ .

Інакш кажучы, пункт  $x$  ляжыць на адрэзку з канцамі  $a$  і  $b$ , прычым  $x \neq a$  і  $x \neq b$  (рыс. 19). Мноства ўсіх такіх пунктаў (лікаў)  $x$  абазначаецца  $(a; b)$  і чытаецца «*прамежак ад  $a$  да  $b$ , дзе  $a$  і  $b$  не належаць пра-межку*». (Гавораць яшчэ «*інтэрвал  $(a; b)$* ».)



Рыс. 19

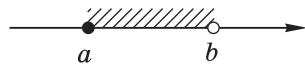
Мноства ўсіх пунктаў (лікаў)  $x$ , што ляжаць на адрэзку з канцамі  $a$  і  $b$ , якое змяшчае пункты  $a$  і  $b$ , абазначаецца  $[a; b]$  (рыс. 20) і чытаецца «*прамежак ад  $a$  да  $b$ , дзе  $a$  і  $b$  належаць прамежку*». (Гавораць яшчэ «*адрэзак  $[a; b]$* ».)



Рыс. 20

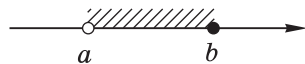
Такім чынам, прамежак  $[a; b]$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $a \leq x \leq b$ .

А прамежак  $[a; b)$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $a \leq x < b$  (рыс. 21).



Рыс. 21

Аналагічна: прамежак  $(a; b]$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $a < x \leq b$  (рыс. 22). Можна чытаць «*прамежак ад  $a$  да  $b$ , дзе  $a$  не належыць прамежку, а  $b$  належыць*».



Рыс. 22

Такім чынам, мноствы  $(a; b)$ ,  $[a; b]$ ,  $[a; b)$ ,  $(a; b]$  называюцца *прамежкамі* (гавораць таксама — *лікавымі прамежкамі*).

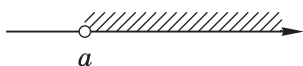
Пры прынятых абазначэннях па запісе заўсёды зразуме-ла, які канец прамежку належыць яму, а які не належыць. У вуснай мове гэта агаворваюць дадаткова.

Падобны запіс выкарыстоўваецца і для лікаў  $x$ , якія задавальняюць няроўнасці  $x > a$ ;  $x \geq a$ ;  $x < a$ ;  $x \leq a$ . Для гэтага ўводзяцца два знакі: « $-\infty$ » (чытаецца «*мінус бясконцасць*») і « $+\infty$ » (чытаецца «*плюс бясконцасць*»).

**А**

Сімвал бясконцасці « $\infty$ », які мае выгляд «ляжачай васьмёркі», упершыню сустракаецца ў галоўнай працы англійскага матэматыка Джона Валіса «Арыфметыка бясконцых велічынь», надрукаванай у 1665 г. Чаму Валіс абраў менавіта гэты сімвал для абазначэння паняцця бясконцасці, невядома.

Знак « $\neq$ » (*няроўна*) упершыню сустракаецца ў працах Леанарда Эйлера (1707—1783).

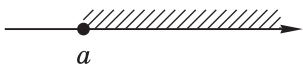


Рыс. 23

Пры паказе лікаў  $x$  на каардынатнай прамой няроўнасць  $x > a$  азначае, што пункт  $x$  размешчаны правей за пункт  $a$  (рыс. 23). Інакш кажучы, пункт (лік)  $x$  ляжыць на прамені з пачаткам у пункце  $a$  і размешчаны справа ад  $a$ , прычым  $x \neq a$ .

Мноства ўсіх такіх пунктаў (лікаў)  $x$  абазначаецца  $(a; +\infty)$  і чытаецца «*прамежак ад  $a$  да плюс бясконцасці, дзе  $a$  не належыць прамежку*» або проста «*інтэрвал ад  $a$  да плюс бясконцасці*».

Аналагічна:



Рыс. 24

прамежак  $[a; +\infty)$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $x \geq a$  (рыс. 24) ( $[a; +\infty)$  чытаецца «*прамежак ад  $a$  да плюс бясконцасці,*

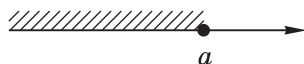
*дзе  $a$  належыць прамежку*»);

прамежак  $(-\infty; a)$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $x < a$  (рыс. 25);

прамежак  $(-\infty; a]$  — гэта мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $x \leq a$  (рыс. 26).



Рыс. 25



Рыс. 26

Мноствы  $(a; +\infty)$ ,  $[a; +\infty)$ ,  $(-\infty; a)$ ,  $(-\infty; a]$  таксама называюцца *лікавымі прамежкамі*.

Пры прынятых абазначэннях заўсёды зразумела, належыць або не належыць лік  $a$  разглядаемаму прамежку. У вуснай мове гэта агаворваецца дадаткова. Напрыклад, гавораць: «*Прамежак ад мінус бясконцасці да трох, дзе 3 не належыць прамежку*» або, карацей, «*інтэрвал ад мінус бясконцасці да трох*» — і пры гэтым запісваюць: « $(-\infty; 3)$ ».

У наступнай табліцы дадзены ўсе абазначэнні лікавых прамежкаў.

| Умова, якую задавальняе лік $x$ | Абазначэнне лікавага прамежку | Відарыс лікавага прамежку на каардынатнай прамой |
|---------------------------------|-------------------------------|--|
| $a < x < b$                     | $(a; b)$                      |  |
| $a \leq x < b$                  | $[a; b)$                      |  |
| $a < x \leq b$                  | $(a; b]$                      |  |
| $a \leq x \leq b$               | $[a; b]$                      |  |
| $x < a$                         | $(-\infty; a)$                |  |
| $x \leq a$                      | $(-\infty; a]$                |  |
| $x > a$                         | $(a; +\infty)$                |  |
| $x \geq a$                      | $[a; +\infty)$                |  |

Заўважым, што для аднастайнасці выкарыстоўваецца і абазначэнне мноства ўсіх рэчаісных лікаў  $R$  у выглядзе прамежку  $(-\infty; +\infty)$ .

Той факт, што лік  $x$  належыць прамежку  $(a; b)$ , г. зн.  $a < x < b$ , запісваецца з дапамогай знака прыналежнасці « $\in$ » так:  $x \in (a; b)$ .

Запіс « $x \notin (a; b)$ » азначае, што лік  $x$  не належыць прамежку  $(a; b)$ . Аналагічна для прамежкаў іншага выгляду.

Разгледзім мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ або } x > 3. \quad (1)$$

Мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $-1 \leq x \leq 2$ , — гэта прамежак  $[-1; 2]$ , а мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову  $x > 3$ , — гэта прамежак  $(3; +\infty)$ . Мноства лікаў  $x$ , якія задавальняюць умову (1), абазначаецца  $[-1; 2] \cup (3; +\infty)$  і чытаецца «аб'яднанне прамежкаў  $[-1; 2]$  і  $(3; +\infty)$ ».

Заўвага. У адрозненне ад лікавых прамежкаў для запісу мноства, якое складаецца з некалькіх лікаў, выкарыстоўваюць фігурныя дужкі. Напрыклад, мноства з трох лікаў  $-7; 13,8; 20$  можна запісаць  $\{-7; 13,8; 20\}$ .

Запіс  $c \in \{1; 2\}$  азначае, што  $c = 1$  або  $c = 2$ .

**А**

Сімвал прыналежнасці ў выглядзе грэчаскай літары  $\varepsilon$  (першай літары слова  $\varepsilon\sigma\tau\iota$  — быць) увёў італьянскі матэматык Джузэпэ Пеана ў 1895 г. У сучасным выглядзе сімвал « $\in$ » пачаў ужываць Бертран Расел з 1903 г. Сімвалы перасячэння і аб'яднання мностваў (« $\cap$ » і « $\cup$ ») таксама прапанаваў Джузэпэ Пеана ў 1888 г.

**Прыклад 1.** а) Запісаць з дапамогай няроўнасцей умову, якую задавальняе мноства пунктаў  $x$  заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой (рыс. 27).

б) Як абазначаецца мноства пунктаў заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой (гл. рыс. 27)?



Адказ: а)  $x < -6$  або  $-3 \leq x < 0$  або  $2 \leq x < 7$  або  $x > 7$ ;

б)  $(-\infty; -6) \cup [-3; 0) \cup [2; 7) \cup (7; +\infty)$ .

**Прыклад 2.** Якому лікаваму прамежку належыць лік  $m$ , для якога выконваецца ўмова:

а)  $m \geq 0$  і  $m \geq 5$ ;

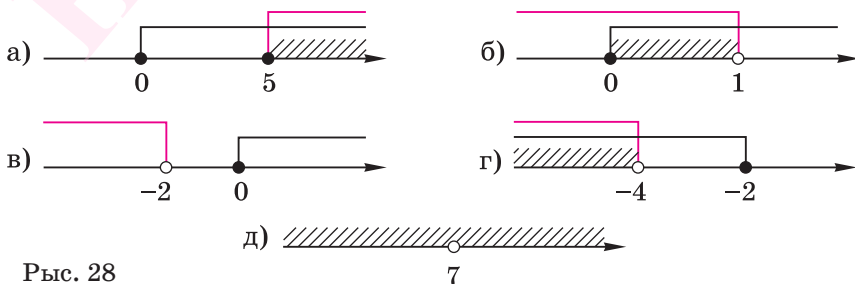
б)  $m \geq 0$  і  $m < 1$ ;

в)  $m < -2$  і  $m \geq 0$ ;

г)  $m \leq -2$  і  $m < -4$ ;

д)  $m \neq 7$ ?

Рашэнне. На рысунку 28 адзначана, на якіх прамежках выконваюцца адразу дзве няроўнасці, зададзеныя ўмовай, — для выпадкаў а), б), г) яны заштрыхаваныя. У выпадку в) такога прамежку няма.



У выпадку д) лік  $m$  можа быць любым пунктам каардынатнай прамой, акрамя 7, г. зн.  $m \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$ .

Адказ: а)  $[5; +\infty)$ ; б)  $[0; 1)$ ; в) такога прамежку няма; г)  $(-\infty; -4)$ ; д)  $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$ .



1. Запішыце абазначэнне лікавага прамежку, якому належаць усе лікі  $x$ , што задавальняюць умову:

- |                     |                  |                        |
|---------------------|------------------|------------------------|
| а) $a < x \leq b$ ; | б) $a < x < b$ ; | в) $a \leq x \leq b$ ; |
| г) $a \leq x < b$ ; | д) $x < a$ ;     | е) $x > a$ ;           |
| ж) $x \leq a$ ;     | з) $x \geq a$ ;  | і) $x \neq a$ .        |

2. Якое мноства пунктаў (лікаў) на каардынатнай прамой называецца: а) інтэрвалам; б) адрэзкам?

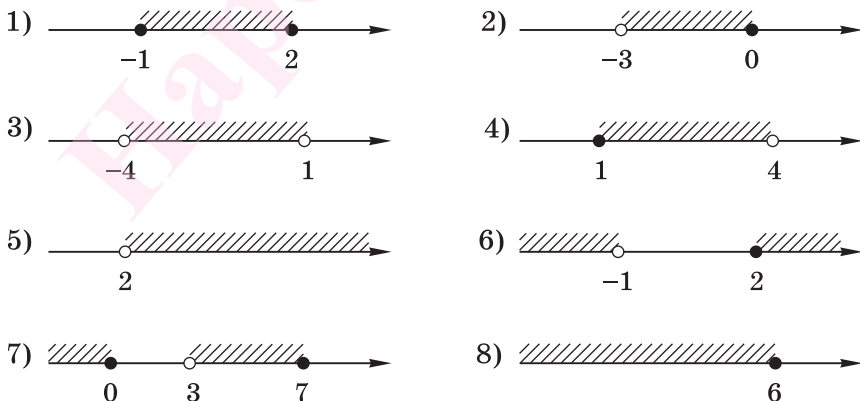
3. Як можна абазначыць мноства ўсіх рэчаісных лікаў  $\mathbf{R}$  у выглядзе лікавага прамежку?

### Практыкаванні

2.22°. Прачытайце запіс:

- |                           |                            |                  |
|---------------------------|----------------------------|------------------|
| 1) $(8; 14)$ ;            | 2) $[-4; 19]$ ;            | 3) $(0; 7]$ ;    |
| 4) $[-1; 3)$ ;            | 5) $(-10; -1)$ ;           | 6) $[-100; 1]$ ; |
| 7) $6 \in (0; 6]$ ;       | 8) $-5 \in [-9; 8)$ ;      |                  |
| 9) $-13 \notin (-7; 7)$ ; | 10) $12 \notin [-4; -1]$ . |                  |

2.23°. Па рысунку 29 запішыце з дапамогай няроўнасцей умову, якую задавальняе мноства пунктаў  $m$  заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой, і запішыце гэта мноства з дапамогай прамежкаў.



Рыс. 29

**2.24°.** Адзначце на каардынатнай прамой прамежак:

- |                       |                      |                       |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) (2; 5);            | 2) [-3; 4);          | 3) (-5; 1];           |
| 4) [0; 6];            | 5) [-1; 4];          | 6) (0; 3];            |
| 7) [-2; 4];           | 8) (-1; 3);          | 9) $(-\infty; 2]$ ;   |
| 10) (-3; $+\infty$ ); | 11) [5; $+\infty$ ); | 12) $(-\infty; -4)$ . |

Адзначце штрыхоўкай на каардынатнай прамой мноства лікаў  $q$ , якія задавальняюць умову, і запішыце яго з дапамогай прамежкаў (**2.25—2.26**).

- 2.25°.**
- |   |                              |
|---|------------------------------|
| 1) $q \leq 0$ або $q > 6$ ;                   | 2) $q > 3$ ;                 |
| 3) $q \geq 4$ ;                               | 4) $q < 7$ або $q \geq 11$ ; |
| 5) $-5 < q \leq 2$ ;                          | 6) $6 \leq q < 9$ ;          |
| 7) $0 \leq q \leq 4$ ;                        | 8) $-3 < q < 5$ ;            |
| 9) $-8 < q \leq 0$ або $1 \leq q < 4$ ;       |                              |
| 10) $-12 \leq q \leq -3$ або $5 < q \leq 7$ . |                              |

- 2.26°.**
- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $q \geq -2$ і $q > -1$ ;       | 2) $q < 8$ і $q \geq 6$ ;         |
| 3) $q > 2$ і $q < 18$ ;           | 4) $q \geq -4$ і $q \leq 4$ ;     |
| 5) $q \geq -4$ і $q < 6$ ;        | 6) $q > 0$ і $q < 6$ ;            |
| 7) $1 < q \leq 4$ і $q \leq -3$ ; | 8) $-10 \leq q < -8$ і $q > -1$ . |

**2.27°.** З дапамогай знака прыналежнасці « $\in$ » запішыце тыя лікі з мноства  $\{-7; -4,1; -3; -2\frac{1}{9}; -2; -1; 0; 2\frac{1}{3}; 5; 6,8; 7\}$ , што належаць прамежку:

- |                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| 1) $(-3; 2\frac{1}{3})$ ; | 2) [-4; 6,5);          |
| 3) $(-\infty; 6,8]$ ;     | 4) (-1,2; $+\infty$ ). |

**2.28.** З мноства  $\{-6; -3,9; -2; -1,01; \frac{1}{24}; 1; 3; 5; 6,9; 8,3\}$  выпішыце лікі, якія не належаць прамежку:

- |                 |               |
|-----------------|---------------|
| 1) (-6; -2);    | 2) [-2; 3];   |
| 3) [-3,9; 6,9]; | 4) (-6; 8,3). |

**2.29°.** Запішыце (калі гэта магчыма) тры дадатныя і тры адмоўныя лікі, якія: а) належаць прамежку; б) не належаць прамежку:

- |             |             |                          |
|-------------|-------------|--------------------------|
| 1) (-2; 5); | 2) [-2; 2]; | 3) $[-1; \frac{1}{5})$ ; |
|-------------|-------------|--------------------------|



- 4)  $(-0,2; +\infty)$ ;      5)  $(-\infty; 0,39)$ ;      6)  $(-\frac{1}{10}; 1]$ ;  
 7)  $[-3; 0,01]$ ;      8)  $(0; 3,5)$ .

Запішыце ўсе цэлыя лікі, якія належаць прамежку (2.30—2.31).

2.30°. 1)  $[-7; -5]$ ;      2)  $(6; 8,5)$ ;      3)  $(-1; 3]$ ;      4)  $(-1; 1)$ .

2.31°. 1)  $(-2,5; 4,8)$ ;      2)  $(-0,9; 0,8)$ ;  
 3)  $[-6; 2,3]$ ;      4)  $[0; 2,6)$ .

2.32°. Запішыце найбольшы цэлы лік, які належыць прамежку:

- 1)  $[-17; -5]$ ;      2)  $(-13; 15]$ ;      3)  $(-\infty; 6)$ ;  
 4)  $(-\infty; 5]$ ;      5)  $[-4; 6)$ ;      6)  $[-1; 2\frac{1}{3}]$ ;  
 7)  $(12; +\infty)$ ;      8)  $(0; \frac{2}{5})$ .

2.33°. Запішыце найменшы цэлы лік, які належыць прамежку:

- 1)  $[-3; 5]$ ;      2)  $(-2; 7]$ ;  
 3)  $[-2,5; +\infty)$ ;      4)  $(-4,5; +\infty)$ ;  
 5)  $[7,2; +\infty)$ ;      6)  $[2; 11]$ ;  
 7)  $(-\infty; -17)$ ;      8)  $(-2\frac{1}{3}; -\frac{3}{2})$ .

2.34°. Дадзены прамежак  $[7,1; 8)$ .

- 1) Ці належыць гэтаму прамежку лік 7,99?
- 2) Назавіце тры лікі, якія большыя за 7,99 і належаць прамежку.
- 3) Ці можна назваць найбольшы лік з гэтага прамежку?
- 4) Ці можна назваць найбольшы цэлы лік з гэтага прамежку?
- 5) Ці можна назваць найменшы лік з гэтага прамежку?
- 6) Ці можна назваць найменшы цэлы лік з гэтага прамежку?

## Раздзел 3

# НЯРОЎНАСЦІ СА ЗМЕННАЙ

### 3.1. Няроўнасці з адной зменнай (з адным невядомым). Лінейныя няроўнасці

**Азначэнне.** Няроўнасць, што змяшчае адну зменную, называецца *няроўнасцю з адной зменнай (з адным невядомым)*.

*Рашэннем няроўнасці з адной зменнай (з адным невядомым)* называецца такое значэнне зменнай (невядомага), пры якім гэта няроўнасць ператвараецца ў правільную лікавую няроўнасць.

*Рашыць няроўнасць* — гэта значыць знайсці ўсе яе рашэнні або даказаць, што іх няма.

**Азначэнне.** Дзве няроўнасці называюцца *раўназначнымі\**, калі кожнае рашэнне першай няроўнасці з'яўляецца рашэннем другой няроўнасці, і наадварот — кожнае рашэнне другой няроўнасці з'яўляецца рашэннем першай, г. зн. калі яны маюць адны і тыя ж рашэнні.

Раўназначнымі называюцца і няроўнасці, што не маюць рашэнняў.

Няцяжка заўважыць, што ўсе гэтыя азначэнні, дадзеныя для няроўнасцей з адной зменнай, аналагічныя ўжо знаёмым нам азначэнням для ўраўненняў з адной зменнай.

Уласцівасці няроўнасцей з адной зменнай атрымліваюцца з уласцівасцей лікавых няроўнасцей.

1. Калі ў няроўнасці перанесці складаемае з адной часткі ў другую з процілеглым знакам, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай.

2. Калі абедзве часткі няроўнасці памножыць або падзяліць на адзін і той жа дадатны лік, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай.

3. Калі абедзве часткі няроўнасці памножыць або падзяліць на адзін і той жа адмоўны лік і замяніць знак няроўнасці на процілеглы, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай.

Выкарыстаем гэтыя ўласцівасці пры рашэнні няроўнасцей.

---

\* Той факт, што няроўнасці (ураўненні) з'яўляюцца раўназначнымі, прынята яшчэ абазначаць знакам « $\Leftrightarrow$ ». Напрыклад:  $-3x < 6 \Leftrightarrow x > -2$ .

**Прыклад 1.** Рашыць няроўнасць

$$\frac{2x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} < \frac{3-x}{2}.$$

Рашэнне. На падставе ўласцівасці 2, памножыўшы абедзве часткі дадзенай няроўнасці на 8, атрымаем:

$$8 \cdot \left( \frac{2x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} \right) < 8 \cdot \frac{3-x}{2};$$

$$2(2x-7) - (9x+11) < 4(3-x).$$

Раскрыўшы дужкі, запішам:  $4x - 14 - 9x - 11 < 12 - 4x$ .

Па ўласцівасці 1 перанясём усе члены няроўнасці, якія змяшчаюць  $x$ , у левую частку, а ўсе лікі — у правую:

$$4x - 9x + 4x < 12 + 14 + 11, \text{ адкуль } -x < 37.$$

На падставе ўласцівасці 3, памножыўшы абедзве часткі апошняй няроўнасці на  $-1$ , атрымаем  $x > -37$ , г. зн.  $x \in (-37; +\infty)$ .

Адказ:  $(-37; +\infty)$ .

Падкрэслім, што ўсе няроўнасці, якія атрымаліся ў ходзе рашэння гэтага прыкладу, раўназначныя (патлумачце чаму).

**Прыклад 2.** Рашыць няроўнасць:

а)  $3x - 2 > 17;$

б)  $7 - 5x \geq 37.$

Рашэнне.

а)  $3x - 2 > 17;$

б)  $7 - 5x \geq 37;$

$3x > 2 + 17;$

$-5x \geq 37 - 7;$

$3x > 19;$

$x \leq 30 : (-5);$

$x > 6\frac{1}{3}, \text{ г. зн. } x \in \left(6\frac{1}{3}; +\infty\right).$

$x \leq -6, \text{ г. зн. } x \in (-\infty; -6].$

Адказ:  $\left(6\frac{1}{3}; +\infty\right).$

Адказ:  $(-\infty; -6].$

Адказы можна было запісаць і так: а)  $x > 6\frac{1}{3}$ ; б)  $x \leq 6$ .

**Прыклад 3.** Рашыць няроўнасць:

а)  $8x + 5 < 2(4x + 1);$

б)  $8x + 5 > 2(4x + 1).$

Рашэнне.

а)  $8x + 5 < 2(4x + 1);$

б)  $8x + 5 > 2(4x + 1);$

$8x + 5 < 8x + 2;$

$8x + 5 > 8x + 2;$

$8x - 8x < 2 - 5;$

$8x - 8x > 2 - 5;$

$0 \cdot x < -3$  — няправільна

$0 \cdot x > -3$  — правільна

пры любых значэннях  $x$ .

пры любых значэннях  $x$ ,

г. зн.  $x \in \mathbf{R}.$

Адказ: рашэнняў няма.

Адказ:  $(-\infty; +\infty).$

Зыходная няроўнасць  $3x - 2 > 17$  з прыкладу 2 раўназначная няроўнасці  $3x > 19$  (гл. рашэнне). Такія няроўнасці называюцца *лінейнымі*. Лінейнымі называюцца і няроўнасці

$$-5x \geq 30; \quad 0 \cdot x < -3; \quad 0 \cdot x > -3,$$

да якіх мы прыходзім, рашаючы іншыя няроўнасці з прыкладаў 2 і 3.

**Азначэнне.** *Лінейнай няроўнасцю з адной зменнай (з адным невядомым)* называецца няроўнасць выгляду

$$ax > b \quad (ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b), \quad (1)$$

дзе  $a$  і  $b$  — лікі,  $x$  — зменная (невядомае).

Разгледзім яшчэ прыклады лінейных няроўнасцей.

**Прыклад 4.** Рашыць няроўнасць:

- а)  $0 \cdot x > 0$ ;      б)  $0 \cdot x \geq 0$ ;  
в)  $0 \cdot x < 0$ ;      г)  $0 \cdot x \leq 0$ .

Рашэнне. а) Падставіўшы замест  $x$  любы лік, атрымаем няправільную лікавую няроўнасць  $0 > 0$ , значыць, няроўнасць  $0 \cdot x > 0$  не мае рашэнняў.

б) Пры любым значэнні  $x$  атрымаем правільную лікавую няроўнасць  $0 \geq 0$ , значыць, рашэннем няроўнасці  $0 \cdot x \geq 0$  з'яўляецца любы лік, г. зн.  $R$  — мноства рэчаісных лікаў.

Разважаючы аналагічна, можна атрымаць адказы да няроўнасцей в) і г) (пераканайцеся ў гэтым).

- Адказ: а) рашэнняў няма; б)  $(-\infty; +\infty)$ ;  
в) рашэнняў няма; г)  $(-\infty; +\infty)$ .

**Прыклад 5.** Рашыць няроўнасць  $\frac{7x^6 + 2}{3x - 8} \geq 0$ .

Рашэнне. Паколькі пры любых значэннях  $x$  лічнік  $7x^6 + 2$  — дадатны лік і дадзены дроб па ўмове неадмоўны, то яго назоўнік павінен быць дадатным, г. зн.  $3x - 8 > 0$ , адкуль атрымаем  $x > 2\frac{2}{3}$ .

Адказ:  $(2\frac{2}{3}; +\infty)$ .

▲ **Прыклад 6.** Рашыць адносна  $x$  няроўнасць

$$(m - 3)x > 5. \quad (2)$$

Рашэнне. Калі  $m - 3 > 0$ , г. зн.  $m > 3$ , то, падзяліўшы абедзве часткі няроўнасці (2) на дадатны лік  $m - 3$ , атрымаем раўназначную ёй няроўнасць

$$x > \frac{5}{m-3}, \text{ г. зн. } x \in \left(\frac{5}{m-3}; +\infty\right).$$

Калі  $m-3 = 0$ , г. зн.  $m = 3$ , то няроўнасць (2) прыме выгляд  $0 \cdot x > 5$ , а гэта няроўнасць не мае рашэнняў (патлумачце чаму).

Калі  $m-3 < 0$ , г. зн.  $m < 3$ , то, падзяліўшы абедзве часткі няроўнасці (2) на адмоўны лік  $m-3$ , атрымаем раўназначную ёй няроўнасць

$$x < \frac{5}{m-3}, \text{ г. зн. } x \in \left(-\infty; \frac{5}{m-3}\right).$$

Адказ:  $\left(-\infty; \frac{5}{m-3}\right)$  пры  $m < 3$ ; рашэнняў няма пры  $m = 3$ ;

$\left(\frac{5}{m-3}; +\infty\right)$  пры  $m > 3$ . ▲

А

Тое, што няроўнасць (ураўненне) не мае рашэнняў, у адказе можна запісаць сімвалам пустога мноства « $\emptyset$ », г. зн. мноства, якое не змяшчае ні аднаго элемента. Гэты сімвал у 1939 г. прыдумаў французскі матэматык Андрэ Вейль.

?

1. Сфармулюйце азначэнне і прывядзіце прыклад няроўнасці з адной зменнай.
2. Што называецца рашэннем няроўнасці з адной зменнай?
3. Што значыць рашыць няроўнасць?
4. Якія дзве няроўнасці называюцца раўназначнымі?
5. Ці раўназначныя няроўнасці  $x^4 + 1 < 0$  і  $5 - x^2 \geq 7$ ?
6. Якія ўласцівасці няроўнасцей выкарыстоўваюцца пры рашэнні няроўнасці з адной зменнай?
7. Якая няроўнасць называецца лінейнай?
- 8\*. Рашыце няроўнасць  $mx > p$ , калі:
 

|                     |                  |                     |
|---------------------|------------------|---------------------|
| а) $m > 0$ ;        | б) $m < 0$ ;     | в) $m = 0, p > 0$ ; |
| г) $m = 0, p < 0$ ; | д) $m = p = 0$ . |                     |

### Практыкаванні

3.1°. Ці раўназначныя няроўнасці:

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $15x > -30$ і $x > -2$ ;         | 2) $-6x \leq 36$ і $x \geq -6$ ;   |
| 3) $-7x \leq 49$ і $x \geq -7$ ;    | 4) $5x > 25$ і $x < 5$ ;           |
| 5) $3 \leq x + 9$ і $x \geq -6$ ;   | 6) $-9 \geq 6 - x$ і $x \geq 15$ ; |
| 7) $-4 < \frac{x}{3}$ і $x > -12$ ; | 8) $\frac{x}{2} > 8$ і $x < 16$ ?  |

**3.2°.** Якія з лікаў  $-5$ ;  $-3$ ;  $-1$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $2$  з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці:

1)  $5 - 4x \geq 6$ ;

2)  $2 \leq 3x + 4$ ;

3)  $6 - 5x > 5x - 2$ ;

4)  $4x - 2 < 5 - 4x$ ?

Рашыце няроўнасць (3.3—3.5).

**3.3°.** 1)  $x + 5 \geq 3$ ;

2)  $6 + x < 14$ ;

3)  $12x \geq -36$ ;

4)  $-7x < 56$ ;

5)  $x - 6 < 8$ ;

6)  $3 \leq x + 7$ ;

7)  $-3 > 5 - x$ ;

8)  $x - 5 > -6$ ;

9)  $\frac{x}{4} \leq 8$ ;

10)  $-5 < \frac{x}{2}$ .

**3.4°.** 1)  $3y + 15 \geq 6$ ;

2)  $3 + 12y < 27$ ;

3)  $1 - 4y < 5$ ;

4)  $8 \leq 13 - 5y$ ;

5)  $2y - 4 \leq 0$ ;

6)  $3y - 5 > 13$ ;

7)  $-6y + 2 < 14$ ;

8)  $-4y + 8 \geq 0$ ;

9)  $2(2y + 3) < 6$ ;

10)  $(4 - 2y)3 \geq 12$ .

**3.5°.** 1)  $3(4x + 1) \geq 4x + 19$ ;

2)  $4(x + 2) < 5x - 2$ ;

3)  $4 - 8(x - 2) > 5 + 2x$ ;

4)  $24 - 5(2x - 1) \leq 10x + 9$ ;

5)  $13 - 2(1 - 3x) \leq 2x + 11$ ;

6)  $7 - 3(4 + 3x) > 5(x - 1)$ .

**3.6°.** Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці:

1)  $y \leq -3$ ;

2)  $y \leq 5$ ;

3)  $y < 6$ ;

4)  $y < -7$ ;

5)  $\frac{y}{3} \leq 2$ ;

6)  $\frac{y}{4} \leq -5$ ;

7)  $\frac{2}{5} \geq \frac{y}{25}$ ;

8)  $\frac{4}{9} \geq \frac{y}{18}$ .

Пры якіх значэннях  $a$  будучы дадатнымі значэнні выразу (3.7—3.8)?

**3.7.** 1)°  $4a - 24$ ;

2)°  $5 - 3a$ ;

3)°  $5a - 15$ ;

4)°  $18 - 3a$ ;

5)°  $2 - 5(a - 3)$ ;

6)°  $3(a - 5) - 2(a - 1)$ ;

7)  $\frac{3}{8}a - 4 - \frac{5a}{2}$ ;

8)  $\frac{5}{2} - 4a + \frac{3a - 1}{4}$ ;

9)  $\frac{a + 1}{2} - 2a + 2\frac{1}{2}$ ;

10)  $\frac{3a + 1}{2} + \frac{21 - 2a}{3}$ ;

11)  $\frac{5 - a}{8} + \frac{3 + 2a}{4}$ ;

12)  $\frac{12 + a}{4} - \frac{a}{3} - 1$ .

- 3.8.** 1)°  $7a + 49$ ; 2)°  $25 - 5a$ ;  
 3)°  $21a - 3$ ; 4)°  $7 - 14a$ ;  
 5)°  $5(a - 3) - 2(3a - 1)$ ; 6)°  $4(2a - 1) - 3(5 - 2a)$ ;  
 7)°  $5 - \frac{2}{3}a$ ; 8)°  $\frac{3}{4} - 2a$ ;  
 9)  $\frac{a-2}{3} + \frac{a}{2}$ ; 10)  $\frac{8a-3}{5} - \frac{2a}{3}$ .

Рашыце няроўнасць (3.9—3.11).

- 3.9.** 1)°  $2(3x + 4) - 1 < 7 + 8x$ ;  
 2)°  $3(2x - 7) - 1 \leq 4(2x - 1) + 3$ ;  
 3)  $\frac{x-1}{5} - x \geq \frac{x+1}{2}$ ;  
 4)  $x - \frac{x-1}{3} > \frac{x+1}{2}$ .
- 3.10.** 1)°  $x + 4 > 2 - 3x$ ; 2)°  $3 + 5x \leq 7x + 4$ ;  
 3)°  $4(x - 1) \geq 2 + 7x$ ; 4)°  $3(x - 2) < 4x - 9$ ;  
 5)  $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$ ; 6)  $\frac{x}{5} + 12,55 \geq 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$ ;  
 7)  $\frac{37-2x}{3} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x$ ; 8)  $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$ .
- 3.11.** 1)  $\frac{c}{5} - 3\frac{1}{3} \geq 1\frac{3}{4} - 3\frac{13}{15}c$ ; 2)  $\frac{37-2y}{3} - 9 < \frac{3y-3\frac{1}{3}}{4} - y$ ;  
 3)  $\frac{3p}{2} - \frac{3}{5} < 4p - 3$ ; 4)  $3 - \frac{3k}{2} \geq \frac{5}{8} - \frac{4k-3}{6}$ .
- 3.12.** Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці:  
 1)°  $x + 2 \geq 2,5x - 1$ ; 2)°  $3x + 2 - 2(x - 3) \leq 12$ ;  
 3)  $x - \frac{x+4}{4} + \frac{3x-1}{2} < 3$ ; 4)  $\frac{9x+2}{10} - \frac{10x-2}{9} > 2$ .
- 3.13.** Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці:  
 1)  $5(x - 3) - 1 > 2(x - 3) - 2(x + 1)$ ;  
 2)  $\frac{5x}{11} - \frac{x-2}{4} \geq 3$ ;  
 3)  $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} > 1 - \frac{x}{7}$ ;

4)  $\frac{2x-5}{3} - 1 \geq 3 - x$ ;

5)  $\frac{7-6x}{2} + 12 \geq \frac{8x+1}{3} + 10x$ ;

6)  $8 - \frac{3x-4}{5} \leq \frac{x-3,5}{6} - \frac{5x-3}{8}$ .

Рашыце няроўнасць (3.14—3.17).

3.14°. 1)  $0 \cdot y > -3$ ; 2)  $0 \cdot y < -5$ ;

3)  $0 \cdot x \leq 0$ ; 4)  $0 \cdot x \geq 0$ ;

5)  $0 \cdot z \geq 3$ ; 6)  $0 \cdot z \leq 6$ ;

7)  $0 \cdot x \leq -2$ ; 8)  $0 \cdot x \leq -8$ ;

9)  $0 \cdot t \leq 7$ ; 10)  $0 \cdot t \geq 9$ .

3.15°. 1)  $25x - 5 \cdot 5x \geq 0$ ;

2)  $3 \cdot (-4x) + 12x \leq 0$ ;

3)  $4^3x - (-2)^6x < 0$ ;

4)  $-5 \cdot 5^2 \cdot x - 25(-5) \cdot x \geq 0$ ;

5)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 x - \frac{4}{9}x > 0$ ;

6)  $\left(\frac{5}{7}\right)^2 x - \frac{25}{49}x < 0$ ;

7)  $2 \cdot 3x - 6x \leq 0$ ;

8)  $8x - 2 \cdot 4x > 0$ .

3.16°. 1)  $3x + (6 - 3x) \geq 4$ ;

2)  $(5 - 2x) + 2x \geq 3$ ;

3)  $2(x - 2) - 4\left(1 - \frac{1}{2}x\right) < 4$ ;

4)  $3(5x + 3) + 2(1 - 6x) < 6 + 3x$ .

3.17. 1)°  $-6y < 0$ ;

2)°  $-2y > 0$ ;

3)°  $-7y \leq 0$ ;

4)°  $-9y \geq 0$ ;

5)  $|y + 4| \leq 0$ ;

6)  $|y + 5| \geq 0$ ;

7)  $(y + 2)^2 \leq 0$ ;

8)  $(y - 3)^2 > 0$ ;

9)  $y^2 + 1 \geq 0$ ;

10)  $4y^2 + 5 \leq 0$ ;

11)  $-6y^2 - 3 > 0$ ;

12)  $-9 - 4y^2 \leq 0$ .

3.18. Пры якіх значэннях зменнай  $x$ :

1) значэнні сумы дробаў  $\frac{x-2}{4}$  і  $\frac{2+x}{5}$  большыя за 4;

2) значэнні рознасці дробаў  $\frac{3x-1}{6}$  і  $\frac{x+2}{9}$  меншыя за 21?

3.19. Пры якіх значэннях зменнай  $x$ :

1) значэнні рознасці выказаў  $8 - 4(2 - 5x)$  і  $5x + 6$  адмоўныя;

2) значэнні сумы выказаў  $2(x - 1)$  і  $3x - 2$  дадатныя?



Рашыце няроўнасць (3.20—3.23).

3.20. 1)  $(x-1)^2 + 7 \geq (x+4)^2$ ; 2)  $(1+x)^2 + 3x^2 \leq (2x-1)^2 + 12$ ;  
3)  $x(x+3) \leq (x+1)(x+3)$ ; 4)  $x^2 + x < x(x+6) + 6$ .

3.21. 1)  $a(a+2) < (a-2)(a+3)$ ; 2)  $a(a+6) \geq (a+1)(a+4)$ ;  
3)  $(a-3)^2 \leq a(a-5)$ ; 4)  $a(a+3) < (a+3)^2$ .

3.22. 1)  $(x^2+6)(2x-8) \geq 0$ ; 2)  $(2x^2+10)(3x-12) < 0$ ;  
3)  $(6x-1)(-x^2-2) \leq 0$ ; 4)  $(-x^2-9)(25x-5) > 0$ ;  
5)  $(-1)^3(x^2+1)(4x+8) > 0$ ; 6)  $(x^2+3)(7x+49)(-1)^5 \leq 0$ .

3.23. 1)  $\frac{-13}{2x-7} \geq 0$ ; 2)  $\frac{23}{9x-72} \leq 0$ ;  
3)  $\frac{2}{3-4x} \geq 0$ ; 4)  $\frac{-4}{5-2x} \geq 0$ ;  
5)  $\frac{2x^4+5}{2x-6} \leq 0$ ; 6)  $\frac{7-14x}{5x^2+3} \leq 0$ ;  
7)  $\frac{3-5x}{9x^2+1} \leq 0$ ; 8)  $\frac{3x^6+8}{8-24x} \geq 0$ .

3.24. Пры якіх значэннях  $m$  значэнні выразу:

1)  $\frac{m+1}{2} - 2m + 2\frac{1}{2}$  — адмоўныя;  
2)  $\frac{5}{7}m - 4m + 2$  — дадатныя;  
3)  $\frac{5-m}{8} + \frac{3+2m}{4}$  — недадатныя;  
4)  $\frac{3m-5}{2} - \frac{2m-1}{3} + 2$  — неадмоўныя?

3.25\*. Пры якіх значэннях  $c$  ураўненне:

1)  $5(x-3) = 3(3x-2c)$  мае дадатны карань;  
2)  $7-c = 2(x-1)$  мае карань, які задавальняе ўмову  $x < 2$ ;  
3)  $\frac{x-5}{2} = \frac{4x-c}{3}$  мае карань, які задавальняе ўмову  $-3 \leq x \leq 1$ ;  
4)  $\frac{3x-15}{2} = \frac{12x-3c}{3}$  мае недадатны карань?

**3.26.** Рашыце няроўнасць:

- |                  |                  |                |
|------------------|------------------|----------------|
| 1) $k + 3 > k$ ; | 2) $k - 5 < k$ ; | 3) $k > -k$ ;  |
| 4) $-k > k$ ;    | 5) $k^3 > 0$ ;   | 6) $k^2 > 0$ ; |
| 7) $k^3 < 0$ ;   | 8) $k^2 < 0$ .   |                |

**3.27\*.** Рашыце няроўнасць са зменнай  $x$ :

- |                                      |                                     |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $kx \geq 2$ пры $k < 0$ ;         | 2) $kx \leq 7$ пры $k > 0$ ;        |
| 3) $5x < p - 8$ ;                    | 4) $6x > p + 5$ ;                   |
| 5) $(3 + p)x \leq -1$ пры $p < -5$ ; | 6) $(p - 4)x \geq -9$ пры $p < 1$ ; |
| 7) $(k - 1)x > c$ пры $k > 2$ ;      | 8) $(k + 2)x < 2c$ пры $k > 10$ .   |

**3.28.** На каардынатнай прамой адзначце штрыхоўкай мноства пунктаў  $x$ , якія задавальняюць умову:

- 1)  $6x < -18$  або  $5x - 4 \geq 21$ ;
- 2)  $6x \leq -18$  або  $5x - 4 > 21$ ;
- 3)  $7x + 2 > 23$  або  $4 + 6x \leq 22$ ;
- 4)  $7x + 2 > 23$  або  $4 - 6x > 28$ ;
- 5)  $6x \leq -18$  і  $5x - 4 > 21$ ;
- 6)  $6x < -18$  і  $5x - 4 \geq 21$ ;
- 7)  $7x + 2 > 23$  і  $4 - 6x > 28$ ;
- 8)  $7x + 2 > 23$  і  $4 + 6x \leq 22$ .

### 3.2. Сістэма няроўнасцей з адной зменнай

Няхай нам трэба знайсці ўсе такія значэнні зменнай  $x$ , пры кожным з якіх няроўнасці

$$3x \geq 6 \quad \text{і} \quad 2x - 3 < 3$$

ператвараюцца ў правільныя лікавыя няроўнасці. У гэтым выпадку гавораць, што трэба рашыць *сістэму няроўнасцей*

$$\begin{cases} 3x \geq 6, \\ 2x - 3 < 3. \end{cases}$$

**Азначэнне.** Няхай трэба рашыць сістэму з двух няроўнасцей з адной зменнай.

*Рашэннямі сістэмы няроўнасцей* называюцца значэнні зменнай (невядомага)  $x$ , пры якіх абедзве няроўнасці ператвараюцца ў правільныя лікавыя няроўнасці.

*Рашыць сістэму няроўнасцей* азначае знайсці ўсе яе рашэнні або даказаць, што іх няма.

Аналагічнае азначэнне даецца для сістэмы трох і больш няроўнасцей з адной зменнай.

**Азначэнне.** Дзве сістэмы няроўнасцей называюцца *раўназначнымі*, калі кожнае рашэнне першай сістэмы з'яўляецца рашэннем другой сістэмы, і наадварот — кожнае рашэнне другой сістэмы з'яўляецца рашэннем першай, г. зн. калі яны маюць адны і тыя ж рашэнні.

Раўназначнымі называюцца і сістэмы няроўнасцей, якія не маюць рашэнняў.

**Прыклад 1.** Рашыць сістэму няроўнасцей:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x \geq 6, \\ 2x - 3 < 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x > 6, \\ 2x - 3 > 3. \end{cases}$$

Рашэнне. а) Рашыўшы кожную з няроўнасцей дадзенай сістэмы, атрымаем раўназначную ёй сістэму

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3. \end{cases} \quad (1)$$

Для значэнняў зменнай  $x$ , якія з'яўляюцца рашэннямі сістэмы (1), правільныя абедзве няроўнасці:  $x \geq 2$  і  $x < 3$ . А гэта, як мы ведаем, запісваецца двайной няроўнасцю  $2 \leq x < 3$ .

Праілюструем рашэнне гэтай сістэмы рысункамі.

Рашэнні няроўнасці  $x \geq 2$  — гэта мноства каардынат пунктаў, якія ляжаць на каардынатнай прамой справа ад пункта 2, і лік 2 (рыс. 30). Няроўнасць нястрогая, таму лік 2 таксама з'яўляецца яе рашэннем; на каардынатнай прамой ён адзначаны чорным (зафарбаваным) кружком.

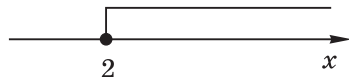


Рис. 30

Рашэнні няроўнасці  $x < 3$  — гэта мноства каардынат пунктаў, якія ляжаць на каардынатнай прамой злева ад пункта 3. Няроўнасць строгая, таму лік 3 не з'яўляецца яе рашэннем; на каардынатнай прамой ён адзначаны светлым (незафарбаваным) кружком (рыс. 31).



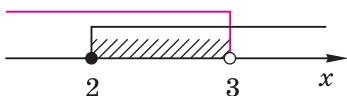
Рис. 31

На рысунку 32 штрыхоўкай адзначана мноства тых пунктаў, каардынаты якіх з'яўляюцца рашэннямі абедзвюх няроўнасцей:  $x \geq 2$  і  $x < 3$ , г. зн.  $x \in [2; 3)$ .

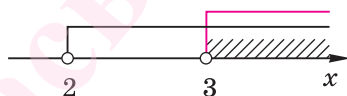
б) Рашыўшы кожную з няроўнасцей дадзенай сістэмы, атрымаем раўназначную ёй сістэму

$$\begin{cases} x > 2, \\ x > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Калі для некаторага значэння зменнай  $x$  правільная няроўнасць  $x > 3$ , то пры гэтым значэнні правільная і няроўнасць  $x > 2$ . Таму кожнае рашэнне няроўнасці  $x > 3$  з'яўляецца рашэннем сістэмы (2); іншых рашэнняў у сістэмы (2) няма.



Рыс. 32



Рыс. 33

На рысунку 33 на каардынатнай прамой штрыхоўкай адзначаны рашэнні сістэмы, г. зн. тыя значэнні  $x$ , пры якіх ператвараюцца ў правільныя лікавыя няроўнасці абедзве няроўнасці гэтай сістэмы, г. зн.  $x \in (3; +\infty)$ .

Адказ: а)  $[2; 3)$ ; б)  $(3; +\infty)$ .

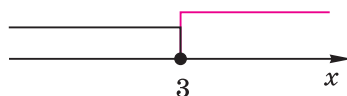
**Прыклад 2.** Рашыць сістэму няроўнасцей

$$\begin{cases} 3x \leq 9, \\ 2x - 3 \geq 3. \end{cases}$$

Рашэнне.  $\begin{cases} 3x \leq 9, \\ 2x - 3 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 3. \end{cases}$

Рашэннем сістэмы няроўнасцей з'яўляецца адзіны лік 3 (рыс. 34).

Адказ: 3.



Рыс. 34

**Прыклад 3.** Рашыць сістэму няроўнасцей:

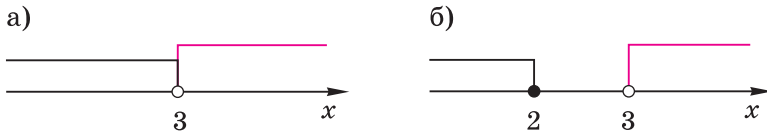
а)  $\begin{cases} 3x < 9, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 3x \leq 6, \\ 2x - 3 > 3. \end{cases}$

Рашэнне.

а)  $\begin{cases} 3x < 9, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases} \begin{cases} x < 3, \\ x > 3. \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 3x \leq 6, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 3. \end{cases}$



Рыс. 35

(Рысунак 35, а, б дапамагае ўбачыць, чаму сістэмы няроўнасцей  $\begin{cases} x < 3, \\ x > 3 \end{cases}$  і  $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > 3 \end{cases}$  не маюць рашэнняў.)

Адказ: а) няма рашэнняў; б) няма рашэнняў.

Заўвага. Рысунак пры пошуку рашэнняў сістэмы няроўнасцей рабіць не абавязкова. Але ў некаторых выпадках без рысунка «ўбачыць» рашэнне сістэмы няроўнасцей бывае цяжка, напрыклад, калі ў сістэме больш за дзве няроўнасці.

**Прыклад 4.** Рашыць няроўнасць  $-3 < 5 - 4x \leq 17$ .

Рашэнне. *Спосаб 1.*

$$-3 < 5 - 4x \leq 17$$

↓ дадаўшы да ўсіх частак няроўнасці лік  $-5$ , атрымаем  
раўназначную ёй няроўнасць ↓

$$-8 < -4x \leq 12$$

↓ падзяліўшы ўсе часткі няроўнасці на  $-4$  і змяніўшы яе знакі, атрымаем раўназначную ёй няроўнасць ↓

$$2 > x \geq -3,$$

$$\text{г. зн. } -3 \leq x < 2, \text{ значыць, } x \in [-3; 2).$$

Адказ:  $[-3; 2)$ .



*Спосаб 2.* Можна замяніць дадзеную двайную няроўнасць раўназначнай ёй сістэмай няроўнасцей

$$\begin{cases} 5 - 4x > -3, \\ 5 - 4x \leq 17 \end{cases} \text{ і рашыць яе (зробіце гэта самастойна).}$$

**Прыклад 5.** Рашыць сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases} 2(1 - x) < 8, \\ -3x \geq -12, \\ 0 \leq 3x. \end{cases}$$

Рашэнне. Дадзеная сістэма раўназначная сістэме няроўнасцей:

$$\begin{cases} x > -3, \\ x \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

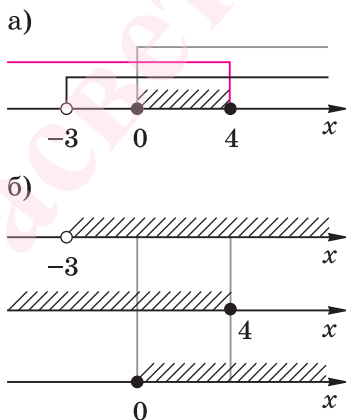
Калі для некаторага значэння зменнай  $x$  правільная няроўнасць  $x \geq 0$ , то пры гэтым жа значэнні  $x$  правільная і няроўнасць  $x > -3$ . Таму сістэма няроўнасцей (3) раўназначная сістэме

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

А гэту сістэму можна запісаць двайной няроўнасцю  $0 \leq x \leq 4$ , г. зн.  $x \in [0; 4]$ .

Адказ:  $[0; 4]$ .

Рашэнне сістэмы няроўнасцей (3) праілюстравана на рысунку 36, а.



Рыс. 36



Рашэнне сістэмы (3) можна праілюстравіць і так, як на рысунку 36, б.



1. Якія значэнні зменнай  $x$  называюцца рашэннямі сістэмы няроўнасцей  $x > a$  і  $x < b$ ?
2. Што значыць рашыць сістэму няроўнасцей з адной зменнай?
3. Якія сістэмы няроўнасцей называюць раўназначнымі?
4. Як можна рашыць двайную няроўнасць  $m < ax < n$ ?

### Практыкаванні

3.29°. Рашыце сістэму няроўнасцей:

1)  $\begin{cases} x > 3, \\ x > 7; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x > 6, \\ x \geq -1; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x \leq 2, \\ x < -4; \end{cases}$

5)  $\begin{cases} x \leq -1, \\ x < 0; \end{cases}$

6)  $\begin{cases} x < -4, \\ x < -9; \end{cases}$

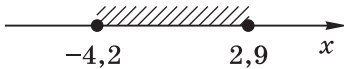
$$7) \begin{cases} x > 1, \\ x < 4; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -8; \end{cases}$$

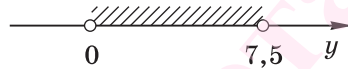
$$9) \begin{cases} x > 3, \\ x < -3. \end{cases}$$

**3.30°.** Запішыце якую-небудзь сістэму няроўнасцей, рашэнні якой адзначаны штрыхоўкай на каардынатнай прамой (рыс. 37).

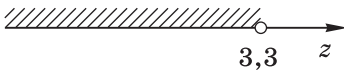
1)



2)



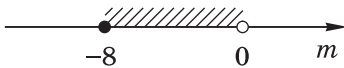
3)



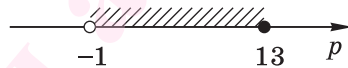
4)



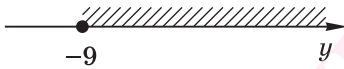
5)



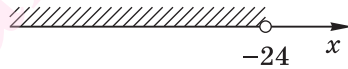
6)



7)



8)



Рыс. 37

Рашыце сістэму няроўнасцей (3.31—3.34).

**3.31°.** 1)  $\begin{cases} 6x \geq -18, \\ 5x + 14 < -11; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} -6x > 30, \\ -5x - 4 \geq 26; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 7x < -21, \\ -4x + 41 \geq 21; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} 8x \leq 24, \\ 4x + 1 > 21; \end{cases}$

5)  $\begin{cases} 7x + 2 \leq 23, \\ 2 + 3x \geq 11; \end{cases}$

6)  $\begin{cases} 7x - 5 > 30, \\ 9 - 4x \geq 49; \end{cases}$

7)  $\begin{cases} 2x - 3 > 15, \\ 2 - 3x < 14; \end{cases}$

8)  $\begin{cases} 4x + 2 > 26, \\ 4 - 5x < 24; \end{cases}$

9)  $\begin{cases} 7 - 2x \leq 10, \\ -4x + 5 \geq -15; \end{cases}$

10)  $\begin{cases} 5 - 9x \leq -4, \\ 3x - 4 \leq -7. \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
 3.32. \quad 1) \begin{cases} 3 - 6x > 33, \\ -7x \geq -7, \\ 0 \leq 4x; \end{cases} & 2) \begin{cases} -2x + 4 < -8, \\ 3x - 1 \geq 2, \\ 5x \leq 40; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 8x - 2 \leq 6, \\ -12 \leq 3x, \\ \frac{x}{2} \leq 1; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{1}{5}x + 2 > 1, \\ \frac{x}{3} < 4, \\ 0,1x \geq -1. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3.33. \quad 1) \begin{cases} 3x - 2 \geq 4x + 2, \\ 3x + 3 \geq 2x + 1; \end{cases} & 2) \begin{cases} 4x + 2 \leq 5x + 3, \\ 2 - 3x > 7 - 2x; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leq 6(1 - x) + 7x; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 2x + 2 < 5(x + 1) - x, \\ 2(2x + 1) - x \geq 4(x + 1) - 2. \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3.34. \quad 1) \begin{cases} \frac{3x - 8}{4} > \frac{4x - 5}{7}, \\ \frac{14x - 3}{2} > \frac{6 - x}{5}; \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{3 - x}{3} \geq \frac{2x - 5}{4} - 2, \\ \frac{4 - x}{4} > \frac{5x + 1}{5}; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \frac{10x - 1}{3} < \frac{2 - 5x}{4} + \frac{5 - 3x}{6}, \\ \frac{5 + 4x}{5} \geq \frac{3 + 7x}{4} - \frac{2x + 1}{2}; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} \frac{3x + 2}{6} + \frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 1}{3} - 2\frac{1}{2}, \\ \frac{2x - 1}{4} - \frac{3x - 1}{2} < \frac{3 - x}{5} - \frac{2x - 5}{3}. \end{cases}
 \end{array}$$

3.35. 1) Знайдзіце ўсе цэлыя рашэнні сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} 2(3x - 1) \leq 3(4x + 1) + 16, \\ 4(2 + x) < 3x + 10. \end{cases}$$

2) Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} 21 - 4(x + 4) < 4x - 7(2x - 1), \\ 6 \geq -2(x + 1) + 3. \end{cases}$$



На каардынатнай прамой адзначце штрыхоўкай мноства пунктаў  $x$ , якія задавальняюць умову, і запішыце гэта мноства з дапамогай лікавых прамежкаў (3.36—3.37).

3.36\*. 1)  $\frac{5-x}{3+x} < 0$ ;      2)  $\frac{7-x}{5+x} > 0$ ;  
 3)  $\frac{2x+7}{3x-6} \geq 0$ ;      4)  $\frac{3x-9}{2x-8} \leq 0$ .

3.37\*. 1)  $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq -3 \end{cases}$  або  $\begin{cases} x \geq -3, \\ x > 7; \end{cases}$   
 2)  $\begin{cases} x \geq 4, \\ x < 1 \end{cases}$  або  $\begin{cases} x < -5, \\ x \leq -7. \end{cases}$

3.38. На каардынатнай прамой адзначце штрыхоўкай мноства пунктаў  $x$ , якія задавальняюць умову:

1)  $x < -6$  і  $x \geq 2$ ;      2)  $x \leq -4$  і  $x > 0$ ;  
 3)  $x < 16$  і  $x > 10$ ;      4)  $x < -2$  і  $x > -9$ ;  
 5)  $4x \geq 16$  або  $6x + 9 < 44$ ;      6)  $4x \leq 16$  або  $6x + 9 > 44$ ;  
 7)  $4x < 16$  або  $6x + 9 \geq 44$ ;      8)  $4x > 16$  або  $6x + 9 \leq 44$ ;  
 9)  $3 < x < 7$  і  $4 < x \leq 9$ ;      10)  $1 < x < 5$  і  $2 \leq x < 6$ ;  
 11)  $2 \leq x < 6$  або  $3 < x \leq 8$ ;      12)  $3 \leq x < 7$  або  $0 \leq x < 6$ .

Рашыце няроўнасць (3.39—3.42).

3.39°. 1)  $-3 \leq 3x \leq 6$ ;      2)  $-4 < 2x \leq 12$ ;  
 3)  $-1 < -2x \leq 7$ ;      4)  $-5 \leq -5x \leq 25$ ;  
 5)  $-6 \leq -\frac{1}{3}x < -3$ ;      6)  $-4 \leq \frac{1}{2}x < -2$ ;  
 7)  $4 \leq \frac{2}{3}x < 8$ ;      8)  $3 \leq -\frac{3}{4}x < 6$ ;  
 9)  $-1 \leq 0,1x < 0$ ;      10)  $0 < -0,2x < 2$ ;  
 11)  $-2 \leq -0,3x \leq 1$ ;      12)  $-1 < 0,4x \leq 2$ .

3.40°. 1)  $-5 \leq x - 3 < -2$ ;      2)  $-3 < x - 4 \leq 2$ ;  
 3)  $8 < \frac{y+2}{3} \leq 9$ ;      4)  $2 < \frac{x+1}{2} < 5$ ;

5)  $6 \leq \frac{5-x}{2} \leq 7;$

6)  $1 \leq \frac{2-x}{3} \leq 4;$

7)  $0,8 \leq 0,3 + x < 1,9;$

8)  $-0,7 < 2,1 + x < 0,3;$

9)  $0 < 4 - y < 5;$

10)  $-3 < 9 - y \leq 0.$

3.41. 1)  $0 \leq 4y - 3 < 9;$

2)  $-4 < 6y - 2 \leq 0;$

3)  $-3 < \frac{7+2x}{5} < 5;$

4)  $-1 < \frac{3y+4}{7} \leq 6;$

5)  $1 < 6 - 5y < 11;$

6)  $1 \leq 4 - 3y < 10;$

7)  $2 < \frac{3x-1}{0,5} \leq 8;$

8)  $-1 < \frac{2x+5}{2} < 5.$

3.42\*. 1)  $7 < \frac{1}{x} < 14;$

2)  $3 \leq \frac{1}{x} \leq 9;$

3)  $5 < \frac{1}{x} \leq 25;$

4)  $8 \leq \frac{1}{x} < 16.$

3.43. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці:

1)  $6 \leq -3x < 9;$

2)  $-10 < -5x < 25;$

3)  $1 \leq \frac{x-2}{5} - \frac{2x+3}{3} < 2;$

4)  $4 \leq \frac{2x-8}{3} - \frac{3x-5}{2} < 6.$

3.44. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці:

1)  $-\frac{1}{3} \leq 3x < 6;$

2)  $2 < -2x \leq 8;$

3)  $0 \leq \frac{x}{6} - \frac{x}{7} < 1;$

4)  $0 \leq \frac{2x+2}{5} - \frac{x-1}{2} < 2.$

3.45\*. Знайдзіце значэнні  $p$ , пры якіх ураўненне мае:

а) дадатны корань;

б) корань, які задавальняе ўмову  $2 < x \leq 3$ :

1)  $6x = 36p;$

2)  $x + 5 = p;$

3)  $x - 4 = 5p + 1;$

4)  $2x - 6 = p - 2.$

3.46\*. Знайдзіце значэнні  $p$ , пры якіх ураўненне мае:

а) адмоўны корань;

б) корань, які задавальняе ўмову  $-1 \leq x < 1$ :

- 1)  $4x = 8p$ ;                      2)  $x - 3 = p$ ;  
3)  $2x - 5 = p + 1$ ;              4)  $4x - 4 = 8p + 2$ .

**3.47.** Складзіце няроўнасць па ўмове задачы і рашыце яе.

1) Знайдзіце двухзначны лік, у якім лічба адзінак на 2 большая за лічбу дзясяткаў, калі вядома, што гэты лік меншы за 60 і большы за 50.

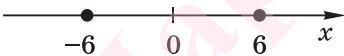
2) Знайдзіце двухзначны лік, кратны 5, калі вядома, што пры дабаўленні да яго 10 атрымаецца лік, меншы за 100, але большы за 90.

### 3.3. Няроўнасці, якія змяшчаюць зменную пад знакам модуля

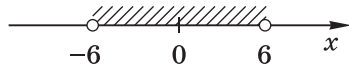


Модуль ліку  $x$  — гэта адлегласць ад пачатку адліку да пункта  $x$  на каардынатнай прамой, таму  $|x| \geq 0$ . Умову  $|x| = 0$  задавальняе толькі пункт  $x = 0$ . Ніводзін пункт  $x$  каардынатнай прамой не задавальняе ўмову  $|x| = -3$ .

Разгледзім роўнасць  $|x| = 6$ . Яна азначае, што адлегласць ад пачатку адліку да пункта  $x$  роўна 6. Гэту ўмову на каардынатнай прамой задавальняюць пункты  $-6$  і  $6$  (рыс. 38).



Рыс. 38



Рыс. 39

Няроўнасць  $|x| < 6$  азначае, што адлегласць ад пачатку адліку да пункта  $x$  меншая за 6. Інакш кажучы, пункт  $x$  ляжыць на каардынатнай прамой паміж пунктамі  $-6$  і  $6$  (рыс. 39), г. зн.  $-6 < x < 6$ .

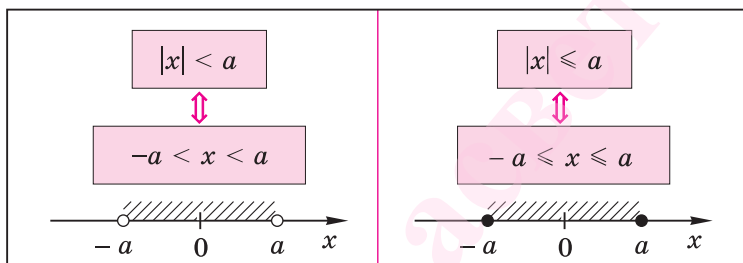
Такім чынам, няроўнасці  $|x| < 6$  і  $-6 < x < 6$  маюць адны і тыя ж рашэнні, г. зн. яны *раўназначныя*.



Аналагічныя разважанні паказваюць, што пры дадзеным  $a$ :

1) рашэннямі строгай няроўнасці  $|x| < a$  будуць тыя і толькі тыя значэнні  $x$ , якія з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці  $-a < x < a$ ;

2) рашэннямі нястрогай няроўнасці  $|x| \leq a$  будуць тыя і толькі тыя значэнні  $x$ , якія з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці  $-a \leq x \leq a$  (рыс. 40).



Рыс. 40

Напомнім, што двойную няроўнасць можна замяняць раўназначнай ёй сістэмай няроўнасцей.



Заўважым, што калі пад знакам модуля стаіць які-небудзь выраз  $B$  са зменнай, то:

$$\text{а) } |B| < a \Leftrightarrow -a < B < a \Leftrightarrow \begin{cases} B > -a, \\ B < a; \end{cases}$$

$$\text{б) } |B| \leq a \Leftrightarrow -a \leq B \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq -a, \\ B \leq a. \end{cases}$$

**Прыклад 1.** Рашыць няроўнасць  $|4x + 3| < 2$ .

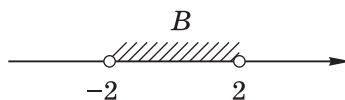
Рашэнне. *Спосаб 1.* Няхай  $B = 4x + 3$ , тады  $|B| < 2$ , г. зн.  $-2 < B < 2$  (рыс. 41).

Такім чынам:

$$-2 < 4x + 3 < 2;$$

↓ дададзім да ўсіх частак няроўнасці  $-3$  ↓

$$-5 < 4x < -1;$$



Рыс. 41

↓ падзелім усе часткі няроўнасці на 4 ↓

$$-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{4}, \text{ г. зн. } x \in \left(-1\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right).$$

Адказ:  $\left(-1\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ .



**Способ 2.** Паколькі няроўнасць  $|4x + 3| < 2$  раўназначная двойной няроўнасці  $-2 < 4x + 3 < 2$ , то можна рашыць раўназначную ёй сістэму няроўнасцей

$$\begin{cases} 4x + 3 > -2, \\ 4x + 3 < 2 \end{cases} \text{ (зробіце гэта).}$$

**Прыклад 2.** Рашыць няроўнасць  $|7 - 3x| \leq 5$ .

Рашэнне. Заўважым, што  $|7 - 3x| = |3x - 7|$ . Няхай  $3x - 7 = B$ , тады  $|B| \leq 5$ , г. зн.  $-5 \leq B \leq 5$ .

Такім чынам:

$$\begin{aligned} -5 &\leq 3x - 7 \leq 5; \\ -5 + 7 &\leq 3x \leq 5 + 7; \\ 2 &\leq 3x \leq 12; \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} \leq x \leq 4, \text{ г. зн. } x \in \left[\frac{2}{3}; 4\right].$$

Адказ:  $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$ .

Разгледзім няроўнасць  $|x| > 6$ . Яна азначае, што адлегласць ад пачатку адліку да пункта  $x$  большая за 6. Інакш кажучы, пункт  $x$  ляжыць на кардынатнай прамой або левей за пункт  $-6$ , або правей за пункт  $6$  (рыс. 42), г. зн.  $x < -6$  або  $x > 6$ .

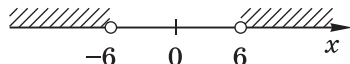


Рис. 42

Такім чынам, рашэннямі няроўнасці  $|x| > 6$  з'яўляюцца тыя і толькі тыя значэнні зменнай  $x$ , якія з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці  $x < -6$  або няроўнасці  $x > 6$ .

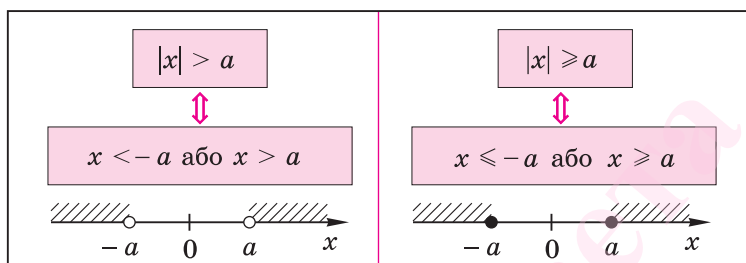


Аналагічныя разважанні паказваюць, што пры дадатным  $a$ :

1) рашэннямі строгай няроўнасці  $|x| > a$  будуць тыя і толькі тыя значэнні  $x$ , якія з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці  $x < -a$  або няроўнасці  $x > a$ ;



2) рашеннями нястрогай няроўнасці  $|x| \geq a$  будуць тыя і толькі тыя значэнні  $x$ , якія з'яўляюцца рашеннямі няроўнасці  $x \leq -a$  або няроўнасці  $x \geq a$  (рыс. 43).



Рыс. 43

**Прыклад 3.** Рашыць няроўнасць:

- а)  $|x| < 0$ ;      б)  $|x| > 0$ ;      в)  $|x| \geq 0$ ;      г)  $|x| \leq 0$ .

Рашэнне. Для рашэння кожнай з няроўнасцей дастаткова ведаць азначэнне модуля ліку і памятаць, што няроўнасць  $|x| \geq 0$  правільная пры любым значэнні  $x$ . Патлумачце адказ:

- а) няма рашэнняў;      б)  $|x| \neq 0$ , г. зн.  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ;  
в)  $x$  — любы лік, г. зн.  $\mathbb{R}$ ;      г) 0.



Заўважым, што калі пад знакам модуля стаіць які-небудзь выраз  $B$  са зменнай, то:

- а)  $|B| > a \Leftrightarrow (B < -a \text{ або } B > a)$ ;  
б)  $|B| \geq a \Leftrightarrow (B \leq -a \text{ або } B \geq a)$ .

**Прыклад 4.** Рашыць няроўнасць  $|4x - 2| > 5$ .

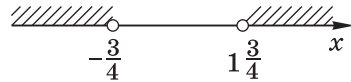
Рашэнне. Няхай  $4x - 2 = B$ , тады  $|B| > 5$ , г. зн.

$$B < -5 \text{ або } B > 5.$$

Такім чынам:

$$\begin{aligned} 4x - 2 < -5 & \text{ або } 4x - 2 > 5; \\ 4x < -5 + 2 & \text{ або } 4x > 5 + 2; \\ 4x < -3 & \text{ або } 4x > 7; \\ x < -\frac{3}{4} & \text{ або } x > \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Адказ:  $(-\infty; -\frac{3}{4}) \cup (1\frac{3}{4}; +\infty)$ .



Рys. 44

Рашэнне няроўнасці з прыкладу 4 прайлюстравана на рысунку 44.

**Прыклад 5.** Рашыць няроўнасць  $|7 - 2x| \geq 3$ .

Рашэнне. Паколькі  $|7 - 2x| = |2x - 7|$ , то  $|2x - 7| \geq 3$ .

Няхай  $2x - 7 = B$ , тады  $|B| \geq 3$ , г. зн.  $B \leq -3$  або  $B \geq 3$ .

Такім чынам:

$$2x - 7 \leq -3 \quad \text{або} \quad 2x - 7 \geq 3;$$

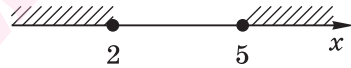
$$2x \leq -3 + 7 \quad \text{або} \quad 2x \geq 3 + 7;$$

$$2x \leq 4 \quad \text{або} \quad 2x \geq 10;$$

$$x \leq 2 \quad \text{або} \quad x \geq 5.$$

Адказ:  $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$ .

Рашэнне няроўнасці з прыкладу 5 прайлюстравана на рысунку 45.



Рys. 45

**А**

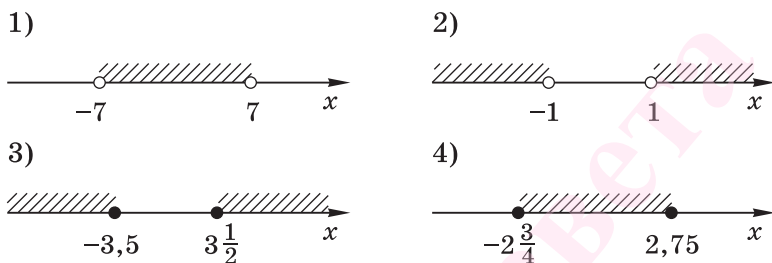
Тэрмін «модуль» прапанаваў выкарыстоўваць англійскі вучоны Роджэр Котс (1682—1716). Сімвал « $|a|$ » для запісу модуля ліку  $a$  прыдумаў Карл Веерштрас (Германія) у 1841 г. Гэта абазначэнне распаўсюджвалася павольна, у друку яно з'явілася ў 1894 г. А ў 1903 г. нідэрландскі фізік Антон Лорэнц гэты ж сімвал скарыстаў для абазначэння даўжыні вектара.

**?**

- Якой няроўнасці пры  $a > 0$  раўназначная няроўнасць:
  - $|x| < a$ ;
  - $|x| \leq a$ ?
- Якія значэнні зменнай  $x$  пры  $a > 0$  з'яўляюцца рашэннем няроўнасці:
  - $|x| > a$ ;
  - $|x| \geq a$ ?
- Як сфармуляваць уласцівасці 1—3 (гл. п. 3.1) аб раўназначнасці для двайных няроўнасцей з адной зменнай?
- Чаму роўнае  $p$ , калі вядома, што:
  - няроўнасць  $|x| \leq p$  мае адзінае рашэнне;
  - рашэннем няроўнасці  $|x| \geq p$  з'яўляецца любы лік?

## Практыкаванні

**3.48°.** Па рысунку 46 запішыце (выкарыстаўшы знак модуля) з дапамогай няроўнасцей, што змяшчаюць зменную  $x$ , умову, якую задавальняе мноства пунктаў заштрыхаванай часткі каардынатнай прамой.



Рыс. 46

**3.49°.** Рашыце няроўнасць і праілюструйце яе рашэнне на каардынатнай прамой:

- |                       |                     |
|-----------------------|---------------------|
| 1) $ x  > 4$ ;        | 2) $ x  < 2$ ;      |
| 3) $ x  \leq 0,5$ ;   | 4) $ x  \geq 0,4$ ; |
| 5) $ -x  < 5$ ;       | 6) $ -x  \geq 5$ ;  |
| 7) $ 2x  \geq 7$ ;    | 8) $ -3x  < 12$ ;   |
| 9) $ 3 - x  \leq 4$ ; | 10) $ 5 - x  > 2$ . |

**3.50°.** На каардынатнай прамой вылучыце штрыхоўкай участкі, на якіх можа знаходзіцца пункт  $x$ , калі:

- 1)  $x < 2$  або  $3 \leq x \leq 4$  або  $x \geq 6$ ;
- 2)  $-7 \leq x < 0$  або  $1 \leq x \leq 5$  або  $x > 7$ ;
- 3)  $-4,5 < x < -3$  або  $5 < x < 7,5$ ;
- 4)  $-8 \leq x < -2$  або  $x \geq 6$ ;
- 5)  $x < -4$  або  $-4 < x < 2$ ;
- 6)  $3 < x < 4$  або  $x > 4$ .

**3.51°.** Ці правільна, што няроўнасць  $|k| \geq 9$  раўназначная сцверджанню:

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $k \geq 9$ ;                 | 2) $-9 \leq k \leq 9$ ;         |
| 3) $k \geq -9$ або $k \leq 9$ ; | 4) $k \leq -9$ ;                |
| 5) $k \leq -9$ і $k \geq 9$ ;   | 6) $k \leq -9$ або $k \geq 9$ ? |



3.52°. Ці правільна, што няроўнасць  $|m| < 5$  раўназначная сцверджанню:

- 1)  $m < -5$  або  $m > 5$ ;      2)  $0 < m < 5$ ;  
3)  $-5 < m < 5$ ;      4)  $m < 5$ ?

3.53°. Ці правільна, што:

- 1) калі  $p < -5$ , то  $|p| < 5$ ;      2) калі  $p < -5$ , то  $|p| > 5$ ;  
3) калі  $p > -5$ , то  $|p| > 5$ ;      4) калі  $p > -5$ , то  $|p| < 5$ ;  
5) калі  $p < 5$ , то  $|p| < 5$ ;      6) калі  $p < 5$ , то  $|p| > 5$ ;  
7) калі  $p > 5$ , то  $|p| > 5$ ;      8) калі  $p > 5$ , то  $|p| < 5$ ?

3.54°. Пры якіх значэннях  $x$  правільнае сцверджанне:

- 1)  $|x| = 3$ ;      2)  $|x| = 4,2$ ;      3)  $|x| \leq 6$ ;  
4)  $|x| > 3$ ;      5)  $|x| > 13$ ;      6)  $|x| \leq 8$ ?

Рашыце няроўнасць (3.55—3.59).

- 3.55°. 1)  $|y| \leq -7$ ;      2)  $|y| \geq 0$ ;      3)  $|y| \leq 0$ ;  
4)  $|y| > 6,3$ ;      5)  $|y| > 2$ ;      6)  $|y| < -12$ ;  
7)  $|y| \leq 0,1$ ;      8)  $|y| < 0$ ;      9)  $|y| > 0$ ;  
10)  $|y| \geq -7$ ;      11)  $|y| > -3$ ;      12)  $|y| \leq 0,9$ .

- 3.56°. 1)  $|x + 3| \leq 4$ ;      2)  $|x + 4| < 5$ ;  
3)  $|x - 1| > 2$ ;      4)  $|x - 5| \geq 6$ ;  
5)  $|x + 2,3| < 6$ ;      6)  $|x + 1,9| \leq 1$ ;  
7)  $|x - 3,4| \geq 3,8$ ;      8)  $|x - 0,5| < 1,5$ .

- 3.57°. 1)  $|3x| > 12$ ;      2)  $|4x| \leq 8$ ;  
3)  $\left|\frac{1}{3}x\right| < 9$ ;      4)  $\left|\frac{1}{5}x\right| \geq 2$ ;  
5)  $\left|\frac{5}{6}x\right| \geq \frac{1}{24}$ ;      6)  $\left|\frac{8}{7}x\right| < \frac{32}{49}$ ;  
7)  $|3^{-2}x| \leq 9,17^0$ ;      8)  $|2^{-3}x| > (-4,35)^0$ .

3.58. 1)  $|2x - 4| < 16$ ; 2)  $|3x - 7| \geq 23$ ;  
3)  $|5x - 1| \geq 36$ ; 4)  $|8x - 5| \leq 67$ ;  
5)  $|6 + 2x| > 10$ ; 6)  $|8 + 3x| < 26$ ;  
7)  $|7 - 6x| \leq 17$ ; 8)  $|9 - 2x| \geq 43$ ;  
9)  $|\frac{1}{2}x - 1| > 21$ ; 10)  $|\frac{1}{3}x + 2| < 13$ .

3.59. 1)°  $|x - 5| > -1$ ; 2)°  $|x + 3| \geq 0$ ;  
3)  $|4x + 12| > 0$ ; 4)  $|3x - 6| \geq -2$ ;  
5)  $|5x - 4| < 0$ ; 6)  $|10x - 3| < 0$ ;  
7)  $|13 - 2x| \geq 0$ ; 8)  $|7 - 4x| \leq 0$ ;  
9)  $|7^0 + 4^{-1}x| \leq 0$ ; 10)  $|4^0 + 5^{-1}x| > 0$ .

3.60. Рашыце сістэму няроўнасцей:

1)  $\begin{cases} |x| < 3, \\ 2x \geq 5; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} |x| \geq 4, \\ 2x < 11; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} |x| \geq 2, \\ |x| < 5; \end{cases}$   
4)  $\begin{cases} |x| < 7, \\ |x| \geq 3; \end{cases}$  5)\*  $\begin{cases} |x - 2| \leq 6, \\ |2x + 5| > 0; \end{cases}$  6)\*  $\begin{cases} |5 - 2x| > 0, \\ |x + 6| \geq 7. \end{cases}$

3.61\*. Рашыце няроўнасць:

1)  $\frac{3x^2 + 7}{|x| - 5} \geq 0$ ; 2)  $\frac{6 - |x|}{2x^2 + 3} < 0$ ;  
3)  $\frac{|x| - 10}{|x| + 7} \leq 0$ ; 4)  $\frac{|x| + 9}{|x| - 8} \geq 0$ .

## Раздзел 4

# КВАДРАТНЫЯ КАРАНІ

### 4.1. Корань $n$ -й ступені

Пятая ступень якога ліку роўна 32? Няцяжка адшукаць такі лік — гэта 2. Лік, пятая ступень якога роўна 32, называецца *коранем 5-й ступені* з ліку 32.

**Азначэнне.** Няхай  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . *Коранем  $n$ -й ступені з ліку  $a$  называецца такі лік  $t$ ,  $n$ -я ступень якога роўна  $a$ .*

Такім чынам, сцверджанне « $t$  — *корань  $n$ -й ступені з  $a$* » азначае, што

$$t^n = a.$$

Напрыклад, корань 5-й ступені з ліку 32 — гэта лік 2, паколькі  $2^5 = 32$ . Корань 5-й ступені з ліку  $-32$  — гэта лік  $-2$ , паколькі  $(-2)^5 = -32$ . Корань 5-й ступені з ліку 0 — гэта 0, паколькі  $0^5 = 0$ .

Корань 2-й ступені называецца яшчэ *квадратным*. Корань 3-й ступені называецца яшчэ *кубічным*.

**Азначэнне.** *Квадратным коранем з ліку  $a$  называецца такі лік  $t$ , квадрат якога роўны  $a$ .*

*Кубічным коранем з ліку  $a$  называецца такі лік  $t$ , куб якога роўны  $a$ .*



Калі  $n > 2$  — няцотны лік, то існуе і прытым адзіны рэчаісны корань  $n$ -й ступені з любога ліку  $a$ ; ён абазначаецца  $\sqrt[n]{a}$ .

Калі  $n \geq 2$  — цотны лік і  $a > 0$ , то з двух рэчаісных каранёў, што існуюць, сімвалам  $\sqrt[n]{a}$  абазначаецца дадатны корань  $n$ -й ступені.

У выразе  $\sqrt[n]{a}$  лік  $n$  называецца *паказчыкам караня*, а лік  $a$  — *падкарэнным выразам*.

Напрыклад,  $\sqrt[3]{27} = 3$ ;  $\sqrt[5]{-32} = -2$ ;  $\sqrt[7]{0} = 0$ ;  $\sqrt[4]{81} = 3$ ;  
 $\sqrt[6]{64} = 2$ .



Рэчаіснага караня цотнай ступені з адмоўнага ліку не існуе.

Корань любой ступені з нуля роўны нулю, г. зн.

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$



Згодна з азначэннем кораня  $n$ -й ступені пры любым значэнні  $a$ , пры якім корань  $n$ -й ступені з  $a$  існуе, будзе правільная роўнасць

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \quad (1)$$



Чэх Крыстоф Рудольф, настаўнік матэматыкі з Вены, аўтар падручніка алгебры, па якім потым вучыўся знакаміты Леанард Эйлер, прапанаваў у 1525 г. абазначаць дадатны квадратны корань знакам «V». У пачатку XVII ст. англійскі матэматык Джон Валіс для каранёў розных ступеней выкарыстоўваў запісы:  $V^3 27$ ;  $V^4 81$ . У 1637 г. французскі вучоны Рэнэ Дэкарт дапоўніў знак «V» гарызантальнай рысай, а ў 1707 г. англійскі матэматык Ісак Ньютан увёў звыклых для нас абазначэнні:  $\sqrt[3]{27}$ ;  $\sqrt[4]{81}$ .

**Прыклад 1.** Ці правільнае сцверджанне:

- а)  $-2$  — корань чацвёртай ступені з  $-16$ ;
- б)  $-2$  — корань пятай ступені з  $-32$ ;
- в)  $-2$  — корань шостаі ступені з  $64$ ?

Рашэнне. а) Не, няправільнае, паколькі  $(-2)^2 = 16$ , г. зн. рэчаісны корань чацвёртай ступені з адмоўнага ліку  $-16$  не існуе.

б) Правільнае, паколькі  $(-2)^5 = -32$ .

в) Правільнае, паколькі  $(-2)^6 = 64$ .

Адказ: а) Няправільнае; б) правільнае; в) правільнае.

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне  $x^2 = 1,44$ .

Рашэнне. Паколькі  $x^2 = 1,44$ , то згодна з азначэннем квадратнага кораня  $x$  — квадратны корань з ліку 1,44. Значыць,  $x = 1,2$  або  $x = -1,2$ , паколькі  $1,2^2 = (-1,2)^2 = 1,44$ . (Звычайна для падобных ураўненняў адразу запісваюць адказ.)

Адказ:  $-1,2$ ;  $1,2$ .



1. Што называецца коранем  $n$ -й ступені з ліку  $a$  ( $n \geq 2$ ,  $n \in N$ )?
2. Што называецца квадратным (кубічным) коранем з ліку  $a$ ?
3. Што абазначаецца сімвалам  $\sqrt[n]{a}$  ( $n \geq 2$ ,  $n \in N$ ), калі:
  - а)  $n$  — няцотны лік; б)  $n$  — цотны лік?
4. Пры якіх значэннях  $a$  будзе правільная роўнасць (1), калі:
  - а)  $n$  — няцотны лік; б)  $n$  — цотны лік?

## Практыкаванні

Ці правільнае сцверджанне (4.1—4.2)?

- 4.1°. 1)  $-12$  — квадратны корань з ліку  $-144$ ;  
2)  $-1,3$  — квадратны корань з ліку  $1,69$ ;  
3)  $-3$  — квадратны корань з ліку  $9$ ;  
4)  $-0,7$  — квадратны корань з ліку  $4,9$ ;  
5)  $-3$  — корань чацвёртай ступені з ліку  $81$ ;  
6)  $-2$  — корань чацвёртай ступені з ліку  $-16$ ;  
7)  $-2$  — корань трэцяй ступені з ліку  $8$ ;  
8)  $-3$  — корань трэцяй ступені з ліку  $-27$ .

- 4.2°. 1)  $19$  і  $-19$  — квадратныя карані з ліку  $361$ ;  
2)  $2$  і  $-2$  — квадратныя карані з ліку  $-4$ ;  
3)  $3,5$  і  $-3,5$  — квадратныя карані з ліку  $9,25$ ;  
4)  $\frac{2}{9}$  і  $-\frac{2}{9}$  — квадратныя карані з ліку  $\frac{4}{81}$ ;  
5)  $1\frac{2}{3}$  і  $-1\frac{2}{3}$  — квадратныя карані з ліку  $2\frac{7}{9}$ ;  
6)  $0,6$  і  $-0,6$  — квадратныя карані з ліку  $3,6$ .

4.3. Знайдзіце лік  $a$ , калі:

- 1)  $\sqrt[3]{a} = -5$ ;      2)  $\sqrt[5]{a} = -3$ ;      3)  $\sqrt[6]{a} = 2$ ;  
4)  $\sqrt[8]{a} = 2$ ;      5)  $\sqrt[10]{a} = 1$ ;      6)  $\sqrt[13]{a} = -1$ .

Знайдзіце квадратныя карані з ліку (4.4—4.5).

- 4.4°. 1)  $6\frac{1}{4}$ ;      2)  $3\frac{6}{25}$ ;      3)  $0,36$ ;  
4)  $1,69$ ;      5)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ ;      6)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ .

- 4.5°. 1)  $17^2$ ;      2)  $29^2$ ;      3)  $(-7)^2$ ;  
4)  $(-5)^2$ ;      5)  $(-251)^2$ ;      6)  $(-3003)^2$ .

4.6. Ці існуе корань  $n$ -й ступені з  $a$ , калі:

- 1)  $a = -378$ ;  $n = 13$ ;      2)  $a = -754$ ;  $n = 26$ ;  
3)  $a = -2175$ ;  $n = 32$ ;      4)  $a = -3124$ ;  $n = 15$ ?

4.7°. Ці існуе квадратны корань з ліку:

- 1)  $-36$ ;      2)  $25$ ;      3)  $0,01$ ;  
4)  $-0,0009$ ;      5)  $0$ ;      6)  $-(-4)$ ?

4.8°. Запішыце лік у выглядзе квадрата некаторага ліку:

- 1) 49;      2)  $\frac{16}{25}$ ;      3)  $\frac{121}{169}$ ;      4) 100.

4.9°. Знайдзіце даўжыню канта куба, калі яго аб'ём роўны:

- 1)  $27 \text{ см}^3$ ;      2)  $64 \text{ мм}^3$ ;      3)  $\frac{8}{125} \text{ дм}^3$ ;  
4)  $\frac{27}{1000} \text{ м}^3$ ;      5)  $0,064 \text{ м}^3$ ;      6)  $0,125 \text{ дм}^3$ .

4.10°. Рашыце ўраўненне:

- 1)  $x^2 = 64$ ;      2)  $x^2 = 0$ ;      3)  $x^2 = -9$ ;  
4)  $x^2 = 0,36$ ;      5)  $x^2 - 1 = 0$ ;      6)  $x^2 - \frac{25}{49} = 0$ ;  
7)  $x^2 - 6 = 3$ ;      8)  $100 - x^2 = 0$ ;      9)  $144 - x^2 = 0$ ;  
10)  $1 + x^2 = 0$ ;      11)  $49 + x^2 = 0$ ;      12)  $8 - x^2 = -8$ .

## 4.2. Арыфметычны квадратны карань

У 8-м класе мы вывучым у поўным аб'ёме толькі квадратныя карані, а карані любой ступені  $n$  падрабязна разгледзім у 11-м класе. Напомнім, што па азначэнні, калі  $t$  — квадратны карань з ліку  $a$ , то  $t^2 = a$ .

Такім чынам, з любога дадатнага ліку існуюць два рэчаісныя квадратныя карані.

**Азначэнне.** Неадмоўны квадратны карань з ліку  $a$  называецца *арыфметычным квадратным каранем з ліку  $a$* .



Арыфметычны квадратны карань з ліку  $a$  абазначаецца  $\sqrt{a}$  і чытаецца «*квадратны карань з  $a$* » (пры чытанні тэксту з такім абазначэннем слова «*арыфметычны*» звычайна прапускаюць). Такім чынам, значэнне выразу  $\sqrt{a}$  заўсёды неадмоўнае пры любым  $a \geq 0$ .

Напрыклад,  $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt{0} = 0$ .

Знак « $\sqrt{\phantom{x}}$ » называецца *знакам арыфметычнага квадратнага караня*.

Пры любым  $a \geq 0$  правільная роўнасць

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Яна вынікае з азначэння квадратнага караня. Гэту роўнасць можна атрымаць з формулы (1) п. 4.1 пры  $n = 2$ .

**Здабыць арыфметычны квадратны карань з ліку  $a$**  — гэта значыць знайсці значэнне выразу  $\sqrt{a}$ .



Паколькі рэчаіснага квадратнага караня з адмоўнага ліку не існуе, то выраз  $\sqrt{a}$  пры  $a < 0$  не мае сэнсу.

Таму, напрыклад, не маюць сэнсу выразы

$$\sqrt{-9}, \quad \sqrt{-\frac{2}{3}}.$$



Старажытнагрэчаскія матэматыкі замест «здабыць квадратны карань» гаварылі «знайсці старану квадрата па дадзенай яго плошчы», г. зн. квадратны карань называлі стараной. У лацінскай мове словы «старана», «бок», «корань» абазначаюцца словам «*radix*», адкуль пайшоў тэрмін «радыкал», — ён увайшоў у практыку ў 1140—1150 гг. дзякуючы італьянскім матэматыкам; пазней гэтак жа сталі называць і сімвалы « $\sqrt{\quad}$ » « $\sqrt[n]{\quad}$ ».

**Прыклад 1.** Для ліку  $(-113)^2$  запісаць:

- а) квадратныя карані з яго;
- б) арыфметычны квадратны карань з яго;
- в) значэнне выразу  $\sqrt{(-113)^2}$ .

Рашэнне. а) Паколькі  $(-113)^2 = 113^2$ , то на падставе азначэння квадратнымі каранямі з ліку  $(-113)^2$  з'яўляюцца лікі 113 і -113.

б) Паколькі па азначэнні арыфметычным квадратным каранем з ліку  $(-113)^2$  называецца неадмоўны квадратны карань з яго, то ён роўны 113.

в) Паколькі сімвалам  $\sqrt{(-113)^2}$  абазначаецца толькі арыфметычны квадратны карань, то  $\sqrt{(-113)^2} = 113$ .

Адказ: а) -113 і 113; б) 113; в) 113.

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне:

- а)  $\sqrt{x} = 11$ ;
- б)  $\sqrt{x - 9} = -5$ .

Рашэнне. а) Паколькі  $11 \geq 0$ , то згодна з азначэннем арыфметычнага квадратнага кораня  $x = 11^2$ , г. зн.  $x = 121$ .

б) Гэта ўраўненне каранёў не мае, паколькі згодна з азначэннем значэнні арыфметычнага квадратнага кораня  $\sqrt{x-9}$  толькі неадмоўныя, значыць, роўнасць  $\sqrt{x-9} = -5$  не можа ператварыцца ў правільную лікавую роўнасць ні пры якім значэнні  $x$ .

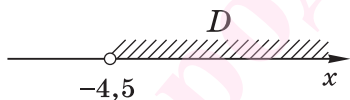
Адказ: а) 121; б) няма каранёў.

**Прыклад 3.** Даказаць, што  $\sqrt{2}$  — ірацыянальны лік.

Рашэнне. Згодна з азначэннем  $(\sqrt{2})^2 = 2$ . Але мы ведаем, што не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2 (гл. п. 2.1 (2)). Значыць,  $\sqrt{2}$  — ірацыянальны лік.  $\square$

**Прыклад 4.** Знайсці натуральны абсяг вызначэння  $D$  выразу  $\frac{3}{\sqrt{9+2x}}$ .

Рашэнне. Арыфметычны квадратны корань мае сэнс толькі пры неадмоўных значэннях падкарэнянага выразу. Акрамя таго, значэнне назоўніка дробу не можа быць роўным нулю. Такім чынам, значэнні зменнай  $x$  павінны задавальняць умовы:  $9+2x \geq 0$  і  $\sqrt{9+2x} \neq 0$ , а гэта раўназначна няроўнасці  $9+2x > 0$ .



Рыс. 47

Рашыўшы яе, атрымаем:  $2x > -9$ , г. зн.  $x > -4,5$ . Такім чынам, мноства  $D$  належаць усе значэнні  $x$ , якія задавальняюць няроўнасць  $x > -4,5$ . Мноства  $D$  адзначана на рысунку 47 штрыхоўкай.

Адказ:  $D = (-4,5; +\infty)$ .

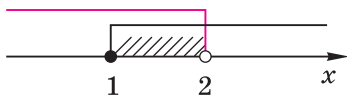
**Прыклад 5.** Знайсці натуральны абсяг вызначэння  $D$  выразу:

а)  $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ ;      б)  $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$ .

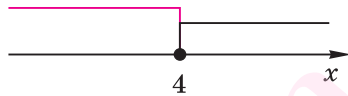
Рашэнне. а) Выраз  $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$  мае сэнс, калі маюць сэнс абодва выразы  $\sqrt{x-1}$  і  $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ , г. зн. калі



$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2 - x > 0 \end{cases}$  (патлумачце чаму). Рашаючы гэту сістэму, атрымліваем  $1 \leq x < 2$  (рыс. 48).



Рыс. 48



Рыс. 49

б) Выраз  $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$  мае сэнс, калі маюць сэнс абодва выразы  $\sqrt{x-4}$  і  $\sqrt{4-x}$ . Таму значэнні зменнай  $x$  павінны задавальняць няроўнасці:  $x-4 \geq 0$  і  $4-x \geq 0$ . Такім чынам, знаходзім  $D$  — абсяг вызначэння дадзенага выразу з сістэмы

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 4, \end{cases} \text{ раўназначнай роўнасці } x = 4 \text{ (рыс. 49). Значыць,}$$

у мностве  $D$  толькі адзін лік 4. Гэта запісваюць так:  $D = \{4\}$ .

Адказ: а)  $D = [1; 2)$ ; б)  $D = \{4\}$ .



1. Што называецца арыфметычным квадратным каранем з ліку  $a$ ?
2. Як абазначаецца арыфметычны квадратны карань?
3. Пры якіх значэннях  $a$  мае сэнс выраз  $\sqrt{a}$ ?
4. Якія значэнні можа прымаць выраз  $\sqrt{a}$ , калі:
  - а)  $a = 0$ ;
  - б)  $a > 0$ ;
  - в)  $a \geq 0$ ?
5. Чаму пры любым  $a \geq 0$  правільная роўнасць  $(\sqrt{a})^2 = a$ ?
- 6\*. Два розныя лікі  $a$  і  $b$  з'яўляюцца квадратнымі каранямі з ліку  $c$ . Што можна сказаць аб ліках  $a$ ,  $b$  і  $c$ ?

### Практыкаванні

4.11°. Ці правільна, што  $a$  з'яўляецца арыфметычным квадратным каранем з ліку  $b$ , калі:

- 1)  $a = 1,1$ ;  $b = 1,21$ ;
- 2)  $a = 0,4$ ;  $b = 1,6$ ;
- 3)  $a = -0,9$ ;  $b = 0,81$ ;
- 4)  $a = 0,5$ ;  $b = -0,25$ ?

Ці правильная роўнасць (4.12—4.13)?

- 4.12°. 1)  $\sqrt{0,9} = 0,3$ ; 2)  $\sqrt{0,09} = -0,3$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{225}{9}} = 5$ ; 4)  $\sqrt{3\frac{13}{81}} = -1\frac{7}{9}$ ;  
 5)  $\sqrt{2,5} = 0,5$ ; 6)  $\sqrt{(-7)^2} = -7$ ;  
 7)  $\sqrt{9\frac{1}{16}} = 3\frac{1}{4}$ ; 8)  $\sqrt{49\frac{4}{25}} = 7\frac{2}{5}$ ;  
 9)  $\sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$ ; 10)  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

- 4.13°. 1)  $\sqrt{64} = 8$ ; 2)  $\sqrt{1000} = 100$ ;  
 3)  $\sqrt{81} = -9$ ; 4)  $\sqrt{36} = -6$ ;  
 5)  $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}$ ; 6)  $\sqrt{0} = 0$ ;  
 7)  $\sqrt{\frac{9}{4}} = 1,5$ ; 8)  $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \frac{4}{3}$ ;  
 9)  $\sqrt{1,44} = 1,2$ ; 10)  $\sqrt{0,09} = 0,3$ ;  
 11)  $\sqrt{64} = -8$ ; 12)  $\sqrt{-49} = -7$ ;  
 13)  $\sqrt{2,25} = -1,5$ ; 14)  $\sqrt{6,25} = 2,5$ .

Вылічыце (4.14—4.17).

- 4.14°. 1)  $\sqrt{0,09}$ ; 2)  $\sqrt{0,01}$ ; 3)  $\sqrt{0,0004}$ ;  
 4)  $\sqrt{0,0025}$ ; 5)  $\sqrt{0,49}$ ; 6)  $\sqrt{0,0064}$ .

- 4.15°. 1)  $\sqrt{49} - \sqrt{16}$ ; 2)  $\sqrt{25} + \sqrt{64}$ ;  
 3)  $\frac{\sqrt{256}}{8} + \frac{30}{\sqrt{225}}$ ; 4)  $\frac{95}{\sqrt{361}} + \frac{34}{\sqrt{289}}$ ;  
 5)  $\sqrt{12 - 3} + \sqrt{12 \cdot 3}$ ; 6)  $\sqrt{25 - 16} - \sqrt{40 \cdot 10}$ ;  
 7)  $\sqrt{81} \cdot \sqrt{100} - \sqrt{6,25}$ ; 8)  $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,04} - \sqrt{1,96}$ ;  
 9)  $\sqrt{\sqrt{4} + 23} : \sqrt{6,25}$ ; 10)  $\sqrt{\sqrt{16} + 21} : \sqrt{0,01}$ .

- 4.16°. 1)  $\sqrt{(7^2 - 2^2) : 5}$ ; 2)  $\sqrt{(3^2 + 5^2) \cdot 8,5}$ ;  
 3)  $\sqrt{(12^2 + 4^2) : 10}$ ; 4)  $\sqrt{(25^2 - 5^2) : 6}$ ;  
 5)  $\sqrt{3^3 - 2^5 + 3^2}$ ; 6)  $\sqrt{5^3 - 7^2 + 2^2 + 1^2}$ ;

7)  $\sqrt{\sqrt{25} - 4}$ ;

8)  $\sqrt{7 - \sqrt{9}}$ ;

9)  $\sqrt{\sqrt{36} + 3}$ ;

10)  $\sqrt{\sqrt{4} + 7}$ .

4.17°. 1)  $\sqrt{\sqrt{1296}}$ ;

2)  $\sqrt{\sqrt{6561}}$ ;

3)  $\sqrt{\sqrt{256}}$ ;

4)  $\sqrt{2\sqrt{64}}$ ;

5)  $\sqrt{3\sqrt{144}}$ ;

6)  $\sqrt{5\sqrt{400}}$ ;

7)  $\sqrt{2\sqrt{324}}$ ;

8)  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{1024}}}$ ;

9)  $\sqrt{9\sqrt{3\sqrt{729}}}$ .

Ці мае сэнс выраз (4.18—4.19)?

4.18°. 1)  $\sqrt{36}$ ;

2)  $\sqrt{-9}$ ;

3)  $-\sqrt{0,01}$ ;

4)  $\sqrt{(-5)^2}$ ;

5)  $\sqrt{(-7)^3}$ ;

6)  $\sqrt{-100}$ ;

7)  $\sqrt{-16^2}$ ;

8)  $\sqrt{(-16)^2}$ ;

9)  $\sqrt{(-1)^4}$ ;

10)  $\sqrt{-1,21}$ ;

11)  $-\sqrt{(-1,3)^2}$ ;

12)  $\sqrt{(-1)^7}$ ;

13)  $-\sqrt{-(-1)^8}$ ;

14)  $-\sqrt{-(-1)^5}$ ;

15)  $\sqrt{(-49)^0}$ ;

16)  $\sqrt{-49^0}$ .

4.19°. 1)  $-\sqrt{16 - \sqrt{121}}$ ;

2)  $-\sqrt{-289 - \sqrt{1}}$ ;

3)  $\sqrt{3 - \sqrt{16}}$ ;

4)  $\sqrt{\sqrt{121} - 10}$ ;

5)  $\sqrt{2 - \sqrt{9}}$ ;

6)  $\sqrt{4 - \sqrt{9}}$ .

Знайдзіце значэнне выразу (4.20—4.21).

4.20. 1)  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , калі  $a = 0,64$ ,  $b = 0,01$ ;

2)  $\sqrt{a + b}$ , калі  $a = -0,04$ ,  $b = 0,13$ ;

3)  $\sqrt{a\sqrt{b}}$ , калі  $a = 144$ ,  $b = 625$ ;

4)  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ , калі  $a = 108$ ,  $b = 169$ .

4.21. 1)  $\frac{6\sqrt{30+3a}}{\sqrt{4a+a^3}} + \frac{1}{5a-3\sqrt{2a}}$  пры  $a = 2$ ;

2)  $\frac{5\sqrt{7a-13}}{\sqrt{2a^2+2}} - \frac{14}{4a+\sqrt{7a}}$  пры  $a = 7$ ;

3)  $\left(\sqrt{25-7a} - \sqrt{19+\sqrt{5a+1}+\sqrt{2a-2}}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)$  пры  $a = 3$ ;

4)  $\left(\sqrt{50-2a} + \sqrt{\sqrt{12a-3}+\sqrt{16+15a-4}}\right):\left(-\frac{14}{a}\right)$  пры  $a = 7$ .

4.22. Параўнайце значэнні выказаў  $\sqrt{a^2 - b^2}$  і  $a - b$  пры:

- 1)  $a = 13, b = 5$ ;                      2)  $a = 17, b = 15$ ;  
3)  $a = -13, b = -5$ ;                    4)  $a = -17, b = -15$ .

4.23. Параўнайце значэнні выказаў  $\sqrt{a^2 - b^2}$  і  $a + b$  пры:

- 1)  $a = -10, b = -6$ ;                    2)  $a = 5, b = -4$ ;  
3)  $a = 10, b = 6$ ;                        4)  $a = -5, b = 4$ .

4.24. Рашыце ўраўненне:

- 1)°  $\sqrt{x} = 2$ ;                              2)°  $\sqrt{x} = 3$ ;  
3)°  $\sqrt{x - 2} = 5$ ;                        4)°  $\sqrt{x + 2} = 4$ ;  
5)  $\sqrt{2x + 1} = 7$ ;                        6)  $\sqrt{3x + 4} = 8$ .

4.25°. Знайдзіце даўжыню стараны квадрата, калі яго плошча роўная:

- 1)  $25 \text{ см}^2$ ;                      2)  $121 \text{ мм}^2$ ;                      3)  $\frac{16}{49} \text{ мм}^2$ ;  
4)  $1\frac{9}{16} \text{ м}^2$ ;                      5)  $0,81 \text{ м}^2$ ;                      6)  $0,0001 \text{ см}^2$ .

4.26\*. Дакажыце, што з'яўляецца ірацыянальным лік:

- 1)  $\sqrt{11}$ ;                      2)  $\sqrt{13}$ ;                      3)  $\sqrt{14}$ ;                      4)  $\sqrt{10}$ .

4.27. Сярод лікаў  $-\frac{2}{9}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $1,3$ ;  $-\sqrt{2,25}$ ;  $\sqrt{1\frac{24}{25}}$ ;  $\sqrt{9}$ ;  $\sqrt{3}$ ;

$\sqrt{7}$ ;  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $\pi$ ;  $\frac{\sqrt{121}}{7}$ ;  $\sqrt{\frac{28}{7}}$  знайдзіце ірацыянальныя.

4.28°. Вызначыце, пры якіх значэннях  $x$  мае сэнс выраз:

- 1)  $\sqrt{4 - 8x}$ ;                      2)  $\sqrt{5 - x}$ ;                      3)  $\sqrt{3x^4 + 11}$ ;  
4)  $\sqrt{x^2 + 2}$ ;                      5)  $\sqrt{(3^0 - 2)x^2}$ ;                      6)  $\sqrt{x^4(5 - 3)}$ .

Запішыце натуральны абсяг вызначэння  $D$  выразу (4.29—4.32).

- 4.29. 1)  $\sqrt{10 - 2x}$ ;                      2)  $\sqrt{9 - 3x}$ ;  
3)  $\sqrt{\frac{1}{2} + 4x}$ ;                      4)  $\sqrt{3x - \frac{3}{5}}$ .

- 4.30. 1)  $\frac{1}{\sqrt{4x-8}}$ ; 2)  $\frac{1}{\sqrt{5x+25}}$ ;  
 3)  $\frac{4+x}{\sqrt{25-10x}}$ ; 4)  $(4+x)\sqrt{25-10x}$ .
- 4.31. 1)  $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-4}$ ; 2)  $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1}$ ;  
 3)  $\sqrt{2x-4} - \sqrt{9-3x}$ ; 4)  $\sqrt{2x+12} - \sqrt{14-7x}$ .
- 4.32. 1)  $\sqrt{4-x} + \frac{3}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{x}$ ;  
 2)  $\frac{6}{\sqrt{x-5}} + \sqrt{12-x} - \frac{4}{x-7}$ ;  
 3)\*  $\frac{1-x}{\sqrt{2x-4}} + \sqrt{35-5x} - \frac{2x+8}{|x-5|}$ ;  
 4)\*  $\sqrt{3x+12} - \frac{6x+36}{\sqrt{18-2x}} + \frac{12-6x}{|7-x|}$ .

### 4.3. Тоеснасьць $\sqrt{a^2} = |a|$



Напомнім, што роўнасьць двух выразаў  $A = B$  называецца **тоеснасцю**, калі яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасьць пры любых значэннях зменных, пры якіх абодва выразы  $A$  і  $B$  маюць сэнс.

Вылічыўшы значэнні выразу  $\sqrt{a^2}$  пры  $a = 7$  і пры  $a = -7$ , атрымаем:

$$\sqrt{7^2} = 7 = |7| \quad \text{і} \quad \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = |-7|.$$

У кожным з разгледжаных прыкладаў карань з квадрата ліку роўны модулю гэтага ліку.

**Тэарэма.** Пры любым значэнні  $a$  мае месца роўнасьць

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказ. Паколькі пры любым значэнні  $a$  правільна, што  $|a| \geq 0$  і  $|a|^2 = a^2$ , то згодна з азначэннем арыфметычнага квадратнага караня лік  $|a|$  з'яўляецца арыфметычным квадратным каранем з  $a^2$ , г. зн.

$$\sqrt{a^2} = |a|. \quad \boxtimes$$

Роўнасць  $\sqrt{a^2} = |a|$  з'яўляецца тоеснасцю, паколькі яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любым значэнні  $a$  (абедзве яе часткі маюць сэнс пры любым значэнні  $a$ ).

На падставе азначэння модуля ліку  $a$  можна запісаць, што

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ калі } a \geq 0,$$

і

$$\sqrt{a^2} = -a, \text{ калі } a < 0.$$

**Прыклад 1.** Знайсці значэнне выразу пры  $y = -11$ :

а)  $\sqrt{y^2}$ ;    б)  $\sqrt{y^4}$ .

Рашэнне. а)  $\sqrt{y^2} = |y|$ ;  $|y|_{y=-11} = |-11| = 11$ ;

б)  $\sqrt{y^4} = y^2$ ;  $y^2_{y=-11} = (-11)^2 = 121$ .

Адказ: а) 11; б) 121.

**Прыклад 2.** Пераўтварыць выраз  $\sqrt{p^2 + 18p + 81}$ , калі  $p \leq -9$ .

Рашэнне.

$$\sqrt{p^2 + 18p + 81} = \sqrt{p^2 + 2 \cdot 9 \cdot p + 9^2} = \sqrt{(p + 9)^2} = |p + 9|.$$

Паколькі па ўмове  $p \leq -9$ , то  $p + 9 \leq 0$ , значыць,

$$|p + 9| = -(p + 9) = -p - 9.$$

Адказ:  $-p - 9$ .

**Прыклад 3.** Рашыць няроўнасць:

а)  $(\sqrt{x})^2 \leq 5$ ;    б)  $\sqrt{x^2} < 5$ ;

в)  $(\sqrt{x})^2 > 7$ ;    г)  $\sqrt{x^2} \geq 7$ .

Рашэнне. а) Няроўнасць  $(\sqrt{x})^2 \leq 5$  раўназначная таму, што  $x \geq 0$  і  $x \leq 5$ . А гэта можна запісаць у выглядзе двайной няроўнасці  $0 \leq x \leq 5$ .

б) Няроўнасць  $\sqrt{x^2} < 5$  раўназначная няроўнасці  $|x| < 5$ , якая, у сваю чаргу, раўназначная няроўнасці  $-5 < x < 5$ .

в) Няроўнасць  $(\sqrt{x})^2 > 7$  раўназначная таму, што  $x \geq 0$  і  $x > 7$ , а гэта раўназначна няроўнасці  $x > 7$ .

г) Няроўнасць  $\sqrt{x^2} \geq 7$  раўназначная няроўнасці  $|x| \geq 7$ , якая, у сваю чаргу, раўназначная таму, што

$$x \leq -7 \text{ або } x \geq 7.$$

Адказ: а)  $[0; 5]$ ; б)  $(-5; 5)$ ; в)  $(7; +\infty)$ ;

г)  $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$ .



Запіс рашэння прыкладу 3 можна аформіць і такім чынам:

$$\text{а) } (\sqrt{x})^2 \leq 5; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 5; \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 5; \quad x \in [0; 5].$$

Адказ:  $[0; 5]$ .

$$\text{б) } \sqrt{x^2} < 5; \quad |x| < 5; \quad -5 < x < 5; \quad x \in (-5; 5).$$

Адказ:  $(-5; 5)$ .

$$\text{в) } (\sqrt{x})^2 > 7; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 7; \end{cases} \quad x > 7; \quad x \in (7; +\infty).$$

Адказ:  $(7; +\infty)$ .

$$\text{г) } \sqrt{x^2} \geq 7; \quad |x| \geq 7; \quad (x \leq -7 \text{ або } x \geq 7); \quad x \in (-\infty; -7] \cup [7; +\infty).$$

Адказ:  $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$ .

▲ **Прыклад 4.** Пераўтварыць выраз

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Рашэнне. Запішам выраз  $7 - 4\sqrt{3}$  у выглядзе квадрата рознасці лікаў  $\sqrt{3}$  і 2:

$$7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = (\sqrt{3} - 2)^2.$$

$$\text{Такім чынам, } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3},$$

паколькі  $\sqrt{3} \approx 1,7$  (гл. с. 282), і, значыць,  $\sqrt{3} - 2 < 0$ .



Гэты прыклад можна рашыць хутчэй, калі заўважыць, што  $2 > \sqrt{3}$ , і адразу запісаць

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}.$$

**Прыклад 5.** Знайсці значэнне выразу:

$$\text{а) } A = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}}; \quad \text{б) } A = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}.$$

Рашэнне. а)  $A = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}} =$

↓ заўважым, што  $4\sqrt{7} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}$  і  $11 = 2^2 + (\sqrt{7})^2$ ,  
пераўтварым падкарэнны выраз у назойніку ↓

$$= \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}} =$$

↓ па формуле квадрата сумы маем ↓

$$= \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7} + 2)^2}} = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } A &= \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}} = \\ &= \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{|2 - \sqrt{7}|} = \frac{2 - \sqrt{7}}{-(2 - \sqrt{7})} = -1. \end{aligned}$$

Адказ: а)  $A = 1$ ; б)  $A = -1$ .



У выпадку б) другі радок рашэння можна аформіць і так (патлумачце чаму):

$$A = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{|\sqrt{7} - 2|} = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2} = -1. \blacktriangle$$



1. Дакажыце тоеснасць  $\sqrt{a^2} = |a|$ .
2. Чаму роўнасць  $\sqrt{a^2} = |a|$  з'яўляецца тоеснасцю, а роўнасць  $\sqrt{a^2} = a$  — не?
3. Назавіце некалькі значэнняў  $m$ , пры якіх роўнасць  $\sqrt{m^2} = m$  ператвараецца ў няправільную лікавую роўнасць.

### Практыкаванні

Вылічыце (4.33—4.35).

- 4.33°. 1)  $\sqrt{(0,3)^2}$ ; 2)  $\sqrt{6^2}$ ; 3)  $\sqrt{(-0,5)^2}$ ;  
 4)  $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$ ; 5)  $-\sqrt{0,2^2}$ ; 6)  $\sqrt{(-0,2)^2}$ ;  
 7)  $\sqrt{5^2}$ ; 8)  $\sqrt{(-3)^2}$ ; 9)  $\sqrt{\left(-5\frac{1}{4}\right)^2}$ .



4.34°. 1)  $\sqrt{0,27^2}$ ;      2)  $\sqrt{0,354^2}$ ;      3)  $\sqrt{\left(1\frac{2}{5}\right)^2}$ ;  
 4)  $\sqrt{\left(5\frac{6}{11}\right)^2}$ ;      5)  $\sqrt{(-0,27)^2}$ ;      6)  $\sqrt{(-1,23)^2}$ .

4.35°. 1)  $\sqrt{3^2} + \sqrt{(-4)^2}$ ;      2)  $\sqrt{17^2} - \sqrt{(-16)^2}$ ;  
 3)  $\sqrt{\left(5\frac{3}{14}\right)^2} - \sqrt{\left(2\frac{11}{21}\right)^2}$ ;      4)  $\sqrt{\left(-5\frac{3}{14}\right)^2} - \sqrt{\left(-2\frac{11}{21}\right)^2}$ .

Вызначыце, ці правільная роўнасць (4.36—4.37).

4.36°. 1)  $\sqrt{(-1)^2} = -1$ ;      2)  $\sqrt{(-5)^2} = -5$ ;  
 3)  $\sqrt{(-7)^2} = 7$ ;      4)  $-\sqrt{0,25^2} = -0,25$ ;  
 5)  $\sqrt{12,25} = 3\frac{1}{2}$ ;      6)  $\sqrt{-11^2} = 11$ ;  
 7)  $\sqrt{(-4)^2} = -4$ ;      8)  $-\sqrt{(-7)^2} = -7$ .

4.37°. 1)  $\sqrt{a^2} = a$ , калі  $a \geq 0$ ;  
 2)  $\sqrt{a^6} = a^3$ , калі  $a \geq 0$ ;  
 3)  $-\sqrt{49a^2} = -7a$ , калі  $a \leq 0$ ;  
 4)  $\sqrt{\frac{a^2}{9}} = -\frac{a}{3}$ , калі  $a \leq 0$ .

4.38°. Вылічыце:

1)  $\sqrt{(1-2)^2}$ ;      2)  $\sqrt{(2-1)^2}$ ;  
 3)  $\sqrt{(9-7)^2}$ ;      4)  $\sqrt{(7-9)^2}$ .

4.39°. Спрасціце выраз:

1)  $\sqrt{(\sqrt{15}-3)^2}$ ;      2)  $\sqrt{(3-\sqrt{15})^2}$ ;  
 3)  $\sqrt{(8-\sqrt{17})^2}$ ;      4)  $\sqrt{(\sqrt{17}-8)^2}$ .

Знайдзіце значэнне выразу (4.40—4.41).

4.40°. 1)  $\sqrt{75^2 - 2 \cdot 75 \cdot 74 + 74^2}$ ;      2)  $\sqrt{29^2 + 2 \cdot 29 \cdot 71 + 71^2}$ ;  
 3)  $\sqrt{19^2 + 162 \cdot 19 + 81^2}$ ;      4)  $\sqrt{78^2 - 56 \cdot 78 + 28^2}$ .

- 4.41°. 1)  $\sqrt{x^2}$  при  $x = 3$ ; 2)  $\sqrt{y^2}$  при  $y = 4$ ;  
 3)  $\sqrt{y^2}$  при  $y = -4$ ; 4)  $\sqrt{x^2}$  при  $x = -3$ ;  
 5)  $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$  при  $x = -7$ ; 6)  $\frac{2}{3}\sqrt{y^2}$  при  $y = -9$ ;  
 7)  $\sqrt{(x - y)^2}$  при  $x = 2, y = 3$ ;  
 8)  $\sqrt{(x - y)^2}$  при  $x = 4, y = 3$ .

Вилічыце (4.42—4.44).

- 4.42. 1)  $\sqrt{3^{10}}$ ; 2)  $\sqrt{2^8}$ ; 3)  $\sqrt{5^4}$ ;  
 4)  $\sqrt{7^6}$ ; 5)  $\sqrt{(-2)^8}$ ; 6)  $\sqrt{(-7)^{10}}$ ;  
 7)  $\sqrt{(-3)^6}$ ; 8)  $\sqrt{(-5)^4}$ ; 9)  $\sqrt{(-11)^{20}}$ .

- 4.43. 1)  $\sqrt{14^6}$ ; 2)  $\sqrt{9^{10}}$ ; 3)  $\sqrt{(-5)^8}$ ;  
 4)  $\sqrt{(-4)^4}$ ; 5)  $\sqrt{(-5)^6}$ ; 6)  $\sqrt{(-2)^8}$ .

- 4.44. 1)  $\sqrt{-(-4)^3}$ ; 2)  $\sqrt{-(-9)^3}$ ; 3)  $\sqrt{(-7)^8}$ ;  
 4)  $\sqrt{(-7)^4}$ ; 5)  $\sqrt{(-10)^6}$ ; 6)  $\sqrt{(-3)^8}$ .

4.45. Спрасціце выраз:

- 1)  $5a^4b^7\sqrt{a^8} + a^8b^4\sqrt{b^6}$  при  $b < 0$ ;  
 2)  $8mn^2\sqrt{m^8} - m^5n\sqrt{n^2}$  при  $n < 0$ .

4.46. Ці правільная роўнасць:

- 1)  $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$ ;  
 2)  $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^4} = (2 - \sqrt{5})^2$ ;  
 3)  $\sqrt{(3 - \sqrt{7})^{10}} = (\sqrt{7} - 3)^5$ ;  
 4)  $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^{22}} = (\sqrt{2} - 1)^{11}$ ?

4.47. Спрасціце выраз пры  $p \geq 0$ :

- 1)  $\sqrt{p^2}$ ; 2)  $(\sqrt{p})^2$ ; 3)  $\sqrt{p^4}$ ; 4)  $\sqrt{p^6}$ ;  
 5)  $(\sqrt{p^2})^2$ ; 6)  $(\sqrt{p^4})^2$ ; 7)  $(\sqrt{p^3})^2$ ; 8)  $(\sqrt{p^5})^2$ .

4.48. Спрасціце выраз пры  $p < 0$ :

- 1)  $\sqrt{p^8}$ ;      2)  $(\sqrt{p^2})^3$ ;      3)  $\sqrt{p^6}$ ;      4)  $(\sqrt{p^{14}})^2$ ;  
5)  $(\sqrt{p^{12}})^2$ ;      6)  $(\sqrt{p^{26}})^2$ ;      7)  $(\sqrt{p^{72}})^4$ ;      8)  $(\sqrt{p^0})^2$ .

4.49. Спрасціце выраз, выкарыстаўшы тоеснасць  $\sqrt{a^2} = |a|$  і азначэнне модуля ліку:

- 1)  $\sqrt{x^2}$ , калі  $x \geq 0$ ;      2)  $5\sqrt{m^2}$ , калі  $m < 0$ ;  
3)  $\frac{1}{4}\sqrt{y^2}$ , калі  $y < 0$ ;      4)  $\frac{2}{9}\sqrt{p^2}$ , калі  $p > 0$ ;  
5)  $-0,2\sqrt{t^4}$ , калі  $t < 0$ ;      6)  $\sqrt{(-k)^2}$ , калі  $k \geq 0$ ;  
7)  $\sqrt{(-b)^2}$ , калі  $b < 0$ ;      8)  $-\sqrt{d^{10}}$ , калі  $d \leq 0$ ;  
9)  $\sqrt{n^6}$ , калі  $n \leq 0$ ;      10)  $\sqrt{c^8}$ , калі  $c < 0$ .

4.50. Спрасціце выраз:

- 1)  $\sqrt{(a+2)^2}$  пры  $a < -2$ ;  
2)  $\sqrt{(a-3)^2}$  пры  $a \geq 3$ ;  
3)  $\sqrt{a^2 + 14a + 49}$  пры  $a \leq -7$ ;  
4)  $\sqrt{1 + 18a + 81a^2}$  пры  $a < -\frac{1}{9}$ .

4.51. Дакажыце, што:

- 1)  $p + 10 - \sqrt{(p-10)^2} = 2p$ , калі  $p \leq 0$ ;  
2)  $p + 17 + \sqrt{(p-17)^2} = 34$ , калі  $p \leq 17$ .

Знайдзіце значэнне выразу (4.52—4.53).

- 4.52. 1)  $\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{(y+9)^2}$  пры  $y = -5$ ;  
2)  $\sqrt{9 + 6x + x^2} + \sqrt{(x-7)^2}$  пры  $x = 6$ .

- 4.53. 1)  $A = \frac{9x^2 - 4}{\sqrt{(3x+2)^2}}$  пры  $x$ , роўным  $-46$ ;  $46$ ;  
2)  $A = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{(x-1)^2}}$  пры  $x$ , роўным  $-129$ ;  $129$ .

4.54. Ацаніце значэнні выразу:

1)  $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ , калі:

а)  $x < 1$ ;      б)  $1 \leq x \leq 2$ ;      в)  $x > 2$ ;

2)  $A = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ , калі:

а)  $x < 4$ ;      б)  $4 \leq x \leq 5$ ;      в)  $x > 5$ .

Спрасціце выраз (4.55—4.61).

4.55. 1)  $(2 + \sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5} - 11)^2}$ ;

2)  $(1 + \sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7} - 10)^2}$ ;

3)  $\sqrt{(4\sqrt{3} - 7)^2} - (\sqrt{3} - 2)^2$ ;

4)  $\sqrt{(17 - 10\sqrt{2})^2} - (\sqrt{2} - 5)^2$ .

4.56. 1)  $\sqrt{(\sqrt{5} - 6)^2} + \sqrt{5}$ ;

2)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} - \sqrt{3}$ ;

3)  $\sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$ ;

4)  $\sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(4 - \sqrt{6})^2}$ .

4.57. 1)  $4\sqrt{a^2} + \sqrt{(a - 1)^2} + 5a$  пры  $a < 0$ ;

2)  $\sqrt{(2 - a)^2} - 2\sqrt{a^2} + a$  пры  $a > 2$ .

4.58. 1)  $\sqrt{a^2 + 6 - 3a} + \sqrt{a^2 - 10a + 25}$  пры  $a > 5$ ;

2)  $\sqrt{a^2 + 5a - 3} + \sqrt{a^2 - 14a + 49}$  пры  $a < -7$ .

4.59. 1)  $\frac{3-x}{6} \sqrt{\frac{4}{x^2+9-6x}}$  пры  $x < 3$ ;

2)  $\frac{m+4}{5} \sqrt{\frac{100}{16+8m+m^2}}$  пры  $m < -4$ ;

3)  $\frac{2n+7}{4} \sqrt{\frac{64}{4n^2+49+28n}}$  пры  $n > -3,5$ ;

4)  $\frac{3t-27}{9} \sqrt{\frac{36}{t^2-18t+81}}$  пры  $t > 9$ .

4.60\*. 1)  $\sqrt{25 + 2\sqrt{24}}$ ;

2)  $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$ ;

3)  $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$ ;

4)  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ .

4.61\*. 1)  $\frac{(3 + \sqrt{5})2}{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}$ ;

2)  $\frac{(4 - \sqrt{3})3}{\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}}$ ;

3)  $\frac{1 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$ ;

4)  $\frac{1 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{46 + 6\sqrt{5}}}$ .

4.62. Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу:

1)  $\sqrt{a}$ ;

2)  $\sqrt{-a}$ ;

3)  $\sqrt{a^2}$ ;

4)  $\sqrt{a^3}$ ;

5)  $\sqrt{-a^2}$ ;

6)  $\sqrt{-a^3}$ .

4.63. Пры якіх значэннях  $t$  будзе правільнай роўнасць:

1)  $\sqrt{(t - 5)^2} = t - 5$ ;

2)  $\sqrt{(t + 5)^2} = t + 5$ ;

3)  $\sqrt{(t - 5)^2} = 5 - t$ ;

4)  $\sqrt{(t + 5)^2} = -t - 5$ ;

5)  $\sqrt{(t - 5)^2} = |t - 5|$ ;

6)  $\sqrt{(t + 5)^2} = |t + 5|$ ?

4.64. Пры якіх значэннях  $a$  будзе правільнай роўнасць:

1)  $\sqrt{a^4} = -a^2$ ;

2)  $\sqrt{(a - 3)^2} = 3 - a$ ?

4.65. Ці правільна, што пры любых значэннях  $k$  значэнне выразу  $\sqrt{(5 - k)^2} + \sqrt{(k - 6)^2}$  роўнае  $-1$ ?

4.66. Рашыце ўраўненне:

1)  $\sqrt{x^2} = -2$ ;

2)  $\sqrt{(x + 3)^2} = -7$ ;

3)  $\sqrt{(x - 5)^2} = 2$ ;

4)  $\sqrt{(x + 6)^2} = 9$ .

Рашыце няроўнасць (4.67—4.69).

4.67. 1)  $\sqrt{x^2} > 3$ ;

2)  $\sqrt{x^2} < 6$ ;

3)  $\sqrt{(x - 1)^2} \leq 4$ ;

4)  $\sqrt{(x + 2)^2} \geq 7$ .

4.68\*. 1)  $(\sqrt{x})^2 < 6$ ;

2)  $(\sqrt{x})^2 > 8$ ;

3)  $(\sqrt{x + 2})^2 \geq 1$ ;

4)  $(\sqrt{x - 3})^2 \leq 12$ .

- 4.69\*. 1)  $(\sqrt{-x})^2 \geq 3$ ;                      2)  $(\sqrt{-x})^2 > 4$ ;  
           3)  $(\sqrt{1-x})^2 > 5$ ;                    4)  $(\sqrt{6-x})^2 \geq 15$ .

4.70. Рашыце ўраўненне:

- 1)  $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(6-x)^2} = 5$  пры  $x < 2$ ;  
 2)  $\sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x-7)^2} = 4$  пры  $1 \leq x \leq 7$ .

#### 4.4. Квадратны корань са здабытку

Простыя вылічэнні паказваюць, што правільная роўнасць

$$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}.$$

Аналагічная роўнасць будзе правільнай, калі замест лікаў 16 і 9 паставіць любыя неадмоўныя лікі.

**Тэарэма 1.** Пры любых значэннях  $a \geq 0$  і  $b \geq 0$  правільная роўнасць

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Доказ. Паколькі ў тэарэме гаворыцца аб значэннях  $a$  і  $b$ , то ўсе разглядаемыя далей роўнасці лікавыя. А паколькі  $a \geq 0$  і  $b \geq 0$ , то кожны з выразаў  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$  і  $\sqrt{b}$  мае сэнс.

Лікі  $\sqrt{a}$  і  $\sqrt{b}$  — неадмоўныя, значыць, неадмоўны і іх здабытак  $\sqrt{a} \sqrt{b}$ . Узвядзём яго ў квадрат, выкарыстаўшы ўласцівасці ступеней і азначэнне квадратнага кораня:

$$(\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Такім чынам,  $\sqrt{a} \sqrt{b}$  — неадмоўны лік, квадрат якога роўны  $ab$ . Але згодна з азначэннем арыфметычнага квадратнага кораня з ліку гэта азначае, што

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Тым самым мы даказалі, што роўнасць  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$  з'яўляецца тоеснасцю. Сапраўды, яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любых значэннях  $a$  і  $b$ , для якіх выразы  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$  і  $\sqrt{b}$  маюць сэнс.  $\square$

Даказаную тэарэму можна сфармуляваць так:



*квадратны корань са здабытку двух неадмоўных лікаў роўны здабытку квадратных каранёў з гэтых лікаў.*

Памяняўшы ў даказанай тоеснасці месцамі левую і правую часткі, атрымаем  $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , г. зн.



*здабытак двух квадратных каранёў з неадмоўных лікаў роўны квадратаму караню з іх здабытку.*

Такая ж тоеснасць правільная ў выпадку, калі колькасць множнікаў пад знакам караня большая за два, і даказваецца яна аналагічна. Такім чынам:



*квадратны корань са здабытку неадмоўных лікаў роўны здабытку квадратных каранёў з гэтых лікаў.*

Звернем увагу на тое, што размова ідзе аб арыфметычных квадратных каранях.

**Прыклад 1.** Вылічыць  $\sqrt{242} \cdot \sqrt{96} \cdot \sqrt{48}$ .

$$\begin{aligned} \text{Рашэнне. } \sqrt{242} \cdot \sqrt{96} \cdot \sqrt{48} &= \sqrt{242 \cdot 96 \cdot 48} = \\ &= \sqrt{121 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 3} = \sqrt{11^2 \cdot 2^2 \cdot 16^2 \cdot 3^2} = 11 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 3 = 1056. \\ \text{Адказ: } 1056. \end{aligned}$$

**Прыклад 2.** Вылічыць:

а)  $\sqrt{75 \cdot 27}$ ;      б)  $\sqrt{1296}$ .

Рашэнне: а)  $\sqrt{75 \cdot 27} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt{5^2 \cdot 9^2} = 5 \cdot 9 = 45$ .

б) *Спосаб 1.*  $\sqrt{1296} = \sqrt{4 \cdot 324} = 2 \cdot 18 = 36$ .



*Спосаб 2.*

$$\sqrt{1296} =$$

↓ расклаўшы лік 1296 на простыя множнікі, атрымаем ↓

$$= \sqrt{2^4 \cdot 3^4} =$$

$$\downarrow \text{ па тэарэме аб карані са здабытку атрымаем } \downarrow$$

$$= 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36.$$

Адказ: а) 45; б) 36.

**Прыклад 3.** Здабыць арыфметычны квадратны карань з выразу  $18x^2y^8$  пры  $x < 0$ ,  $y < 0$ .

Рашэнне.  $\sqrt{18x^2y^8} = \sqrt{9 \cdot 2x^2(y^4)^2} = 3\sqrt{2}|x| \cdot |y^4| =$

$$\downarrow \text{ па азначэнні модуля пры } x < 0 \text{ маем } |x| = -x, \quad \downarrow$$

$$\text{акрамя таго, } |y^4| = y^4 \text{ пры любым значэнні } y$$

$$= 3\sqrt{2}(-x)y^4 = -3\sqrt{2}xy^4.$$

Адказ:  $-3\sqrt{2}xy^4$ .

Калі назоўнік дробу змяшчае карань якой-небудзь ступені, то гавораць, што *ў яго назоўніку змяшчаецца ірацыянальнасць*. Пераўтварэнне дробу ў дроб, які не мае каранёў у назоўніку, называецца *вызваленнем ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу*. Неабходнасць выканання такіх пераўтварэнняў гістарычна звязана з патрэбнасцямі практыкі вылічэнняў: знаходзіць значэнне лікавага выразу прасцей, калі ў ім няма дзялення на ірацыянальны лік. Напрыклад:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1,4}{2} = 0,7.$$

**Прыклад 4.** Вызваліцца ад ірацыянальнасці ў назоўніку:

а)  $\frac{5}{\sqrt{7}}$ ;      б)\*  $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ ;      в)\*  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (a \neq b).$

Рашэнне. а)  $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7};$

▲ б)  $\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2(\sqrt{3}+1);$

в)  $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{ab}-b}{a-b}. \quad \blacktriangle$



Звярніце ўвагу, што пасля пераўтварэнняў у кожным з прыкладаў а)–в) атрымаўся дроб, які ўжо не змяшчае ў назоўніку каранёў.

**Прыклад 5.** Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x}\sqrt{x^3} = 14.$$

Рашэнне. Ураўненне  $\sqrt{x}\sqrt{x^3} = 14$  раўназначнае таму, што  $x \geq 0$  і  $x^2 = 14$ .

Коранем зыходнага ўраўнення з'яўляецца лік  $\sqrt{14}$  (патлумачце чаму).

Адказ:  $\sqrt{14}$ .



▲ Рашэнне прыкладу 5 можна запісаць і так:

$$\sqrt{x}\sqrt{x^3} = 14; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 14; \end{cases} \quad x = \sqrt{14}.$$

Адказ:  $\sqrt{14}$ . ▲

**Азначэнне.** Няхай  $a$  і  $b$  — неадмоўныя лікі. *Сярэднім геаметрычным лікаў  $a$  і  $b$  называецца арыфметычны квадратны карань з іх здабытку. Гэта значыць, сярэдняе геаметрычнае лікаў  $a$  і  $b$  — гэта лік  $\sqrt{ab}$ .*

**Прыклад 6.** Знайдзі сярэдняе геаметрычнае лікаў 12 і 75.

$$\begin{aligned} \text{Рашэнне. } \sqrt{12 \cdot 75} &= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Адказ: 30.



У Старажытнай Грэцыі здабытак лікаў  $ab$  звязвалі перш за ўсё з плошчай прамавугольніка са старанамі  $a$  і  $b$ . Адпаведна старану квадрата, плошча якога роўная  $ab$ , находзілі, вылічваючы  $\sqrt{ab}$ . Сувязь з геаметрычнымі фігурамі і тлумачыць назва — *сярэдняе геаметрычнае*.



- Сфармулюйце і дакажыце тэарэму аб квадратным карані са здабытку двух неадмоўных лікаў.
- Як вызваліцца ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:
 

|                              |                                     |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\frac{m}{\sqrt{p}}$ ;    | б) $\frac{m}{k\sqrt{p}}$ ;          | в)* $\frac{m}{\sqrt{p+k}}$ ;        |
| г)* $\frac{m}{\sqrt{p-k}}$ ; | д)* $\frac{m}{\sqrt{p-\sqrt{t}}}$ ; | е)* $\frac{m}{\sqrt{p+\sqrt{t}}}$ ? |
- Што называецца сярэднім геаметрычным лікаў  $a$  і  $b$ ?

### Практыкаванні

Вылічыце (4.71—4.74).

- 4.71°.**
- |   |  |
|---|--|
| 1) $\sqrt{25 \cdot 16}$ ;                     | 2) $\sqrt{49 \cdot 4}$ ;                       |
| 3) $\sqrt{144 \cdot 4}$ ;                     | 4) $\sqrt{100 \cdot 16}$ ;                     |
| 5) $\sqrt{1600 \cdot 81}$ ;                   | 6) $\sqrt{225 \cdot 9}$ ;                      |
| 7) $\sqrt{400 \cdot 25 \cdot 169}$ ;          | 8) $\sqrt{49 \cdot 10\,000 \cdot 121}$ ;       |
| 9) $\sqrt{36 \cdot 625 \cdot 64 \cdot 900}$ ; | 10) $\sqrt{2500 \cdot 256 \cdot 4 \cdot 16}$ . |
- 4.72°.**
- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 0,25}$ ;       | 2) $\sqrt{100 \cdot 0,36 \cdot 0,64}$ ;     |
| 3) $\sqrt{81 \cdot 0,04 \cdot 121}$ ;      | 4) $\sqrt{0,09 \cdot 0,49 \cdot 10\,000}$ ; |
| 5) $\sqrt{0,16 \cdot 0,25 \cdot 1,44}$ ;   | 6) $\sqrt{64 \cdot 2,25 \cdot 0,04}$ ;      |
| 7) $\sqrt{169 \cdot 0,25 \cdot 0,49}$ ;    | 8) $\sqrt{1225 \cdot 0,0016 \cdot 0,01}$ ;  |
| 9) $\sqrt{1,44 \cdot 0,04 \cdot 0,0001}$ ; | 10) $\sqrt{0,0004 \cdot 6,25 \cdot 1,69}$ . |
- 4.73°.**
- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sqrt{-36 \cdot (-0,01)}$ ;   | 2) $\sqrt{-0,81 \cdot (-0,04)}$ ; |
| 3) $\sqrt{-25 \cdot (-0,0001)}$ ; | 4) $\sqrt{-1,69 \cdot (-49)}$ .   |
- 4.74.**
- |   |  |
|---|--|
| 1) $\sqrt{-9 \cdot 6,76 \cdot (-100)}$ ;                | 2) $\sqrt{-16 \cdot (-49) \cdot 0,64}$ ;       |
| 3) $\sqrt{4 \cdot (-0,25) \cdot (-144)}$ ;              | 4) $\sqrt{0,01 \cdot (-0,25) \cdot (-1,21)}$ ; |
| 5) $\sqrt{-49 \cdot (-9) \cdot (-400) \cdot (-1,69)}$ ; |  |
| 6) $\sqrt{-100 \cdot 6,25 \cdot (-2,25) \cdot 3,61}$ .  |  |
- 4.75.** Знайдзіце сярэдняе геаметрычнае лікаў:
- |              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| 1) 2 і 32;   | 2) 3 і 27;    | 3) 72 і 18;   |
| 4) 50 і 288; | 5) 3,6 і 2,5; | 6) 4,9 і 6,4. |

Вылічыце (4.76—4.81).

- 4.76. 1)  $\sqrt{27 \cdot (-24) \cdot (-8)}$ ; 2)  $\sqrt{75 \cdot (-6) \cdot (-18)}$ ;  
3)  $\sqrt{21 \cdot 6 \cdot (-7) \cdot (-8)}$ ; 4)  $\sqrt{-45 \cdot 10 \cdot (-18)}$ ;  
5)  $\sqrt{3,5 \cdot (-2,1) \cdot (-0,15)}$ ; 6)  $\sqrt{-3,2 \cdot 4,5 \cdot (-62,5)}$ ;  
7)  $\sqrt{77 \cdot (-24) \cdot (-33) \cdot 14}$  8)  $\sqrt{-5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-20) \cdot 27}$ ;  
9)  $\sqrt{10 \cdot (-20) \cdot (-48) \cdot (-36) \cdot (-75) \cdot 98}$ ;  
10)  $\sqrt{21 \cdot 65 \cdot (-39) \cdot (-35) \cdot (-17) \cdot (-68)}$ .
- 4.77. 1)  $\sqrt{1,69 \cdot 17 + 8 \cdot 1,69}$ ; 2)  $\sqrt{0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8}$ ;  
3)  $\sqrt{2,25 \cdot 18 - 2,25 \cdot 2}$ ; 4)  $\sqrt{0,64 \cdot 0,85 - 0,64 \cdot 0,81}$ ;  
5)  $\sqrt{1,09 \cdot 25 + 25 \cdot 0,6}$ ; 6)  $\sqrt{0,8 \cdot 2,4 - 0,8 \cdot 0,6}$ .
- 4.78°. 1)  $\sqrt{3} \sqrt{27}$ ; 2)  $\sqrt{28} \sqrt{7}$ ;  
3)  $\sqrt{2} \sqrt{32}$ ; 4)  $\sqrt{63} \sqrt{7}$ ;  
5)  $\sqrt{13} \sqrt{52}$ ; 6)  $\sqrt{45} \sqrt{5}$ ;  
7)  $\sqrt{0,3} \sqrt{4,8}$ ; 8)  $\sqrt{2,8} \sqrt{6,3}$ ;  
9)  $\sqrt{11} \sqrt{44}$ ; 10)  $\sqrt{20} \sqrt{80}$ ;  
11)  $\sqrt{14} \sqrt{98} \sqrt{63}$ ; 12)  $\sqrt{5} \sqrt{35} \sqrt{28}$ .
- 4.79. 1)  $\sqrt{202\,500}$ ; 2)  $\sqrt{152\,100}$ ;  
3)  $\sqrt{2\,890\,000}$ ; 4)  $\sqrt{3\,610\,000}$ ;  
5)  $\sqrt{0,0529}$ ; 6)  $\sqrt{0,1156}$ ;  
7)  $\sqrt{24,01}$ ; 8)  $\sqrt{2704}$ ;  
9)  $\sqrt{0,3481}$ ; 10)  $\sqrt{0,2116}$ .
- 4.80. 1)  $\sqrt{22\,500}$ ; 2)  $\sqrt{6\,250\,000}$ ;  
3)  $\sqrt{0,001225}$ ; 4)  $\sqrt{0,002025}$ ;  
5)  $\sqrt{30\,250\,000}$ ; 6)  $\sqrt{4\,225\,000\,000}$ ;  
7)  $\sqrt{56,25}$ ; 8)  $\sqrt{72,25}$ .

- 4.81. 1)  $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5^6}$ ; 2)  $\sqrt{(-3)^6 \cdot 0,1^4}$ ;  
 3)  $\sqrt{10^2 \cdot (-6)^{10}}$ ; 4)  $\sqrt{(-12)^4 \cdot 3^6}$ ;  
 5)  $\sqrt{(-10)^4 \cdot (-12)^2 \cdot (-3)^4 \cdot 4^4}$ ;  
 6)  $\sqrt{(-5)^8 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^4 \cdot (-5)^{-6}}$ ;  
 7)  $\sqrt{(-5)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-98)}$ ;  
 8)  $\sqrt{3^4 \cdot (-2)^7 \cdot (-50)}$ .

4.82. Приведіть вираз до вигляду  $a\sqrt{b}$ , де  $b$  — найменший магичний натуральний лік:

- 1)  $5\sqrt{18} - \sqrt{2}$ ; 2)  $\frac{1}{6}\sqrt{72} + 4\sqrt{2}$ ;  
 3)  $6\sqrt{243} + \sqrt{75}$ ; 4)  $2\sqrt{45} + 2\sqrt{20}$ ;  
 5)  $4\sqrt{40} + 5\sqrt{90} - 2\sqrt{10}$ ; 6)  $5\sqrt{28} - 2\sqrt{112} + 5\sqrt{63}$ ;  
 7)  $\frac{1}{7}\sqrt{147} + 3\sqrt{48} - \sqrt{75}$ ; 8)  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{32} - \frac{1}{2}\sqrt{128}$ .

4.83. Виконайте дії:

- 1)  $4\sqrt{72} - 0,25\sqrt{32} + 3\sqrt{200}$ ;  
 2)  $3\sqrt{8} - \sqrt{18} + 0,5\sqrt{32}$ ;  
 3)  $2\sqrt{343} - \frac{1}{6}\sqrt{252} + 3\sqrt{7}$ ;  
 4)  $5\sqrt{3} + 0,1\sqrt{30\,000} - \frac{1}{3}\sqrt{27}$ ;  
 5)  $(\sqrt{12} - 5\sqrt{8}) - (3\sqrt{2} + \sqrt{27})$ ;  
 6)  $(2,5\sqrt{200} - \sqrt{75}) + (\sqrt{32} - \sqrt{147})$ ;  
 7)  $(3\sqrt{20} + \sqrt{28}) + (\sqrt{45} - \sqrt{63})$ ;  
 8)  $(3,5\sqrt{300} - \sqrt{5}) - (3\sqrt{48} + \sqrt{80})$ ;  
 9)  $8\sqrt{6} \cdot (4\sqrt{8} + \frac{1}{4}\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{32})$ ;  
 10)  $\frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot (2\sqrt{125} - 5\sqrt{5} - 10\sqrt{15})$ .

4.84. Ці правильні рівності:

- 1)  $3\sqrt{2} + 2 - \sqrt{18} = 2$ ; 2)  $1 + 3\sqrt{45} = 1 + 15\sqrt{5}$ ;  
 3)  $5 - \sqrt{48} + 4\sqrt{3} = -5$ ; 4)  $\sqrt{500} - 10\sqrt{3} + 3 = 3?$

4.85. Знайдіть значення виразу:

- 1)  $\sqrt{-t}\sqrt{-9t^3}$  при  $t = -7$ ;
- 2)  $\frac{3}{7}\sqrt{(-k)^6} \cdot \frac{4}{21}\sqrt{(-k)^4}$  при  $k = 7$ ;
- 3)  $\sqrt{a^2b^3}\sqrt{bc^4}$  при  $a = -5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -3$ ;
- 4)  $\sqrt{x^3y^5}\sqrt{xy}$  при  $x = 3$ ,  $y = 2$ ;
- 5)  $\sqrt{(a+b)^7}\sqrt{(a+b)^{-3}}$  при  $a = -25$ ,  $b = 29$ ;
- 6)  $\sqrt{(m-n)^{15}}\sqrt{(m-n)^{-5}}$  при  $m = -35$ ,  $n = -37$ .

4.86. Виконайте дієння:

- 1)  $5\sqrt{n} \cdot 2\sqrt{n}$ ;
- 2)  $9\sqrt{-t} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{-t^3}$ ;
- 3)  $\frac{1}{4}\sqrt{64m^3} \cdot 0,2\sqrt{m}$ ;
- 4)  $-0,05\sqrt{k} \cdot 6\frac{2}{3}\sqrt{k^5}$ ;
- 5)  $\sqrt{-m}\sqrt{-n}\sqrt{-k}$ ;
- 6)  $\sqrt{-np^2}\sqrt{-n^3p}$ ;
- 7)  $\sqrt{-mn}\sqrt{-np}\sqrt{mpt}$ , калі  $m \leq 0$ ;
- 8)  $\sqrt{-m^5p}\sqrt{-m^7k}\sqrt{-ktp}$ , калі  $m \geq 0$ .

4.87. Запишіть вираз у вигляді здобутку квадратних коренів:

- 1)  $\sqrt{42}$ ;
- 2)  $\sqrt{105}$ ;
- 3)  $\sqrt{13x}$ ;
- 4)  $\sqrt{7x}$ ;
- 5)  $\sqrt{xy}$ , калі  $x < 0$ ,  $y < 0$ ;
- 6)  $\sqrt{15ab}$ , калі  $a < 0$ ,  $b < 0$ ;
- 7)\*  $\sqrt{mk+mp}$ , калі  $m < 0$ ,  $k < 0$ ,  $p < 0$ ;
- 8)\*  $\sqrt{ab+ac}$ , калі  $a < 0$ ,  $b < 0$ ,  $c < 0$ .

4.88. Вилічіть:

- 1)  $\sqrt{155^2 - 124^2}$ ;
- 2)  $\sqrt{82^2 - 18^2}$ ;
- 3)  $\sqrt{65^2 - 63^2}$ ;
- 4)  $\sqrt{313^2 - 312^2}$ ;
- 5)  $\sqrt{3^2 + 4^2}$ ;
- 6)  $\sqrt{6^2 + 8^2}$ ;
- 7)  $\sqrt{20^2 + 15^2}$ ;
- 8)  $\sqrt{20^2 + 21^2}$ .

**4.89.** Знайдзіце значэнне выразу  $\sqrt{a^2 - b^2}$  пры:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $a = 104, b = 40;$    | 2) $a = 85, b = 13;$     |
| 3) $a = 65, b = 25;$     | 4) $a = 113, b = 112;$   |
| 5) $a = 37, b = 12;$     | 6) $a = 2,6, b = 1;$     |
| 7) $a = 1,17, b = 1,08;$ | 8) $a = 0,74, b = 0,24.$ |

**4.90\*.** Вылічыце:

- 1)  $\sqrt{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} \sqrt{88};$
- 2)  $\sqrt{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} \sqrt{243};$
- 3)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 \cdot 2(2 + \sqrt{3})};$
- 4)  $\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2 \cdot 2(3 - \sqrt{5})};$
- 5)  $\sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{2 + \sqrt{5}})(\sqrt{17} + \sqrt{2 + \sqrt{5}})(15 + \sqrt{5})} \sqrt{55};$
- 6)  $(\sqrt{26} + \sqrt{20 + \sqrt{11}})(\sqrt{26} - \sqrt{20 + \sqrt{11}})(6 + \sqrt{11});$
- 7)  $\sqrt{148} \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \sqrt{7 + 2\sqrt{3}};$
- 8)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$

Вываліцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу (**4.91—4.96**).

- 4.91°.**
- |                                  |                                   |                                     |
|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{3}{\sqrt{6}};$         | 2) $\frac{2}{\sqrt{2}};$          | 3) $\frac{-9}{\sqrt{3}};$           |
| 4) $\frac{-7}{\sqrt{7}};$        | 5) $\frac{5}{2\sqrt{5}};$         | 6) $\frac{3}{4\sqrt{15}};$          |
| 7) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}};$ | 8) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}};$  | 9) $\frac{9}{4\sqrt{27}};$          |
| 10) $\frac{6}{5\sqrt{12}};$      | 11) $\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}};$ | 12) $\frac{12\sqrt{8}}{\sqrt{24}}.$ |

- 4.92.**
- |                            |                              |                              |
|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\frac{m}{\sqrt{m}};$   | 2) $\frac{t^2}{\sqrt{t}};$   | 3) $\frac{k}{\sqrt{k^3}};$   |
| 4) $\frac{p}{\sqrt{p^5}};$ | 5) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}};$ | 6) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}.$ |

- 4.93\*.**
- |                                     |                              |                                      |
|-------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}};$ | 2) $\frac{3}{\sqrt{3} - 2};$ | 3) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 5};$ |
|-------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|

$$\begin{array}{lll} 4) \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+5}; & 5) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}; & 6) \frac{\sqrt{5}+1}{3\sqrt{5}-4}; \\ 7) \frac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}; & 8) \frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}; & 9) \frac{11\sqrt{3}+6\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 4.94*. 1) \frac{m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}; & 2) \frac{3c}{\sqrt{c}-\sqrt{p}}; & 3) \frac{p-k}{\sqrt{p}+\sqrt{k}}; \\ 4) \frac{t-a}{\sqrt{t}+\sqrt{a}}; & 5) \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}}; & 6) \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}-\sqrt{s}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 4.95*. 1) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}; & 2) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; & 3) \frac{a}{1-\sqrt{a}}; \\ 4) \frac{a}{\sqrt{a}+1}; & 5) \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}; & 6) \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}; \\ 7) \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}; & 8) \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}; & 9) \frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}; \\ 10) \frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}; & 11) \frac{4-t}{\sqrt{2+\sqrt{t}}}; & 12) \frac{s-9}{\sqrt{\sqrt{s}-3}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4.96*. 1) \frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}; & 2) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}; \\ 3) \frac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}; & 4) \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}; \\ 5) \frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}; & 6) \frac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}; \\ 7) \frac{3}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}; & 8) \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}. \end{array}$$

Решите уравнение (4.97—4.98).

$$\begin{array}{ll} 4.97*. 1) \sqrt{x}\sqrt{x}=7,2; & 2) \sqrt{x^3}\sqrt{x}=9; \\ 3) \sqrt{-x^3}\sqrt{-x}=5; & 4) \sqrt{-x}\sqrt{-x}=7; \\ 5) \sqrt{x^2}\sqrt{9x^2}=81; & 6) \sqrt{25x^4}\sqrt{625x^2}=27. \\ 4.98*. 1) \sqrt{x^4}\sqrt{x^6}-32=0; & 2) \sqrt{-x^6}\sqrt{-x^2}-625=0; \\ 3) \sqrt{(x-2)^2}\sqrt{(x-2)^2}=16; & 4) \sqrt{x-3}\sqrt{x-3}=5; \\ 5) \frac{1}{5\sqrt{x^3}\sqrt{x}}=2; & 6) \frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{-x^3}}=3. \end{array}$$

**4.99.** Знайдзіце даўжыню стараны квадрата, калі яго плошча роўная плошчы прамавугольніка са старанамі:

- 1) 63 дм і 7 дм;                      2) 3 см і 48 см;  
3) 11 м і 99 м;                      4) 6 см і 216 см.

**4.100.** Параўнайце сярэдняе арыфметычнае і сярэдняе геаметрычнае лікаў:

- 1) 45 і 20;                      2) 40 і 10;  
3) 242 і 50;                      4) 200 і 32;  
5) 75 і 300;                      6) 125 і 500.

### 4.5. Квадратны карань з дзелі

Простыя вылічэнні паказваюць, што правільная роўнасць

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}.$$

Аналагічная роўнасць будзе правільнай, калі замест лікаў 16 і 9 паставіць любыя лікі, пры якіх выразы маюць сэнс.

**Тэарэма.** Пры любых значэннях  $a \geq 0$  і  $b > 0$  правільная роўнасць

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

**Доказ.** Паколькі ў тэарэме гаворыцца аб значэннях  $a$  і  $b$ , то ўсе разглядаемыя далей роўнасці лікавыя. А паколькі  $a \geq 0$  і  $b > 0$ , то кожны з выказаў  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  і  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  мае сэнс.

Лік  $\sqrt{a}$  — неадмоўны, а лік  $\sqrt{b}$  — дадатны, значыць, неадмоўная і іх дзель  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ . Узвядзём дзель у квадрат, выкарыстаўшы ўласцівасці ступеней і азначэнне арыфметычнага квадратнага караня:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$



Такім чынам,  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  — гэта неадмоўны лік, квадрат якога роўны  $\frac{a}{b}$ . Згодна з азначэннем арыфметычнага квадратнага караня гэта азначае:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

Тым самым мы даказалі, што роўнасць  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  з'яўляецца тоеснасцю, паколькі яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любых значэннях  $a$  і  $b$ , пры якіх выразы  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  і  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  маюць сэнс.  $\square$

Даказаную тэарэму для арыфметычных квадратных каранёў можна сфармуляваць так:



*квадратны каранё з дробу з неадмоўным лічнікам і дадатным назоўнікам роўны дзелі ад дзялення квадратнага караня з лічніка на квадратны каранё з назоўніка.*

Памяняўшы ў даказанай тоеснасці месцамі левую і правую часткі, атрымаем  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ , г. зн.



*дзелі квадратнага караня з неадмоўнага ліку і квадратнага караня з дадатнага ліку роўная квадратнаму караню з дзелі адпаведных падкарэнных выразай.*

**Прыклад 1.** Вылічыць: а)  $\sqrt{\frac{625}{36 \cdot 81}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}}$ .

Рашэнне. а)  $\sqrt{\frac{625}{36 \cdot 81}} = \frac{\sqrt{25^2}}{\sqrt{6^2 \cdot 9^2}} = \frac{25}{6 \cdot 9} = \frac{25}{54}$ ,

б)  $\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{320}{80}} = \sqrt{4} = 2$ .

Адказ: а)  $\frac{25}{54}$ ; б) 2.



З даказанай тэарэмы аб квадратным карані з дзелі (з дробу) магчыма атрымаць вынік:

калі  $a \geq 0, b > 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;

калі  $a \leq 0, b < 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ .

**Прыклад 2.** Выкарыстаўшы вынік з тэарэмы, запісаць квадратны карань з дробу ў выглядзе дзелі квадратных арыфметычных каранёў:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{-y}{53}}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{-y^2}{-53}}; \quad \text{в)* } \sqrt{\frac{y+2}{y-3}}; \quad \text{г)* } \sqrt{\frac{3-y}{y}}.$$

Рашэнне. а)  $\frac{-y}{53} \geq 0$  і  $53 > 0$ , значыць,  $-y \geq 0$ , г. зн.  $y \leq 0$ .

Такім чынам, пры  $y \in (-\infty; 0]$  маем  $\sqrt{\frac{-y}{53}} = \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{53}}$ .

б)  $\frac{-y^2}{-53} = \frac{y^2}{53} \geq 0$ , лік  $53 > 0$  і  $y^2 \geq 0$  пры любых значэннях  $y$ , таму пры  $y \in \mathbf{R}$  маем  $\sqrt{\frac{-y^2}{-53}} = \sqrt{\frac{y^2}{53}} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{53}}$ .

▲ в)  $\frac{y+2}{y-3} \geq 0$ , калі  $\begin{cases} y+2 \geq 0, \\ y-3 > 0 \end{cases}$  або  $\begin{cases} y+2 \leq 0, \\ y-3 < 0, \end{cases}$  г. зн.  $y > 3$  або  $y \leq -2$ .

Адпаведна, пры  $y \in (3; +\infty)$  маем  $\sqrt{\frac{y+2}{y-3}} = \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y-3}}$ , а пры  $y \in (-\infty; -2]$  маем  $\sqrt{\frac{y+2}{y-3}} = \sqrt{\frac{-(y+2)}{-(y-3)}} = \frac{\sqrt{-y-2}}{\sqrt{-y+3}}$  (патлумачце чаму).

г)  $\frac{3-y}{y} \geq 0$ , калі  $\begin{cases} 3-y \geq 0, \\ y > 0 \end{cases}$  або  $\begin{cases} 3-y \leq 0, \\ y < 0, \end{cases}$  г. зн.  $0 < y \leq 3$  (у другой сістэмы рашэнняў няма, патлумачце чаму). Такім чынам, пры  $y \in (0; 3]$  маем  $\sqrt{\frac{3-y}{y}} = \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{y}}$ . ▲

▲ **Прыклад 3.** Рашыць ураўненне  $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} = 9$ .

Рашэнне. Дадзенае ўраўненне раўназначнае таму, што

$$x > 0 \text{ і } \sqrt{\frac{x^5}{x}} = 9, \text{ г. зн. } x > 0 \text{ і } x^2 = 9.$$

Коранем зыходнага ўраўнення з'яўляецца лік 3 (патлумачце чаму).

Адказ: 3.



Рашэнне прыкладу 3 можна запісаць і так:

$$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} = 9; \quad \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{\frac{x^5}{x}} = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad x = 3.$$

Адказ: 3. ▲

▲ **Прыклад 4.** Рашыць няроўнасць:

а)  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2$ ;      б)  $\frac{\sqrt{8(1-x)}(x-7)}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0$ .

Рашэнне. а) Няроўнасць  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2$  раўназначная таму, што  $x > 0$  і  $\sqrt{\frac{x^3}{x}} < 2$ , г. зн.  $x > 0$  і  $|x| < 2$ , а гэта раўназначна двайной няроўнасці  $0 < x < 2$  (патлумачце чаму).

б) Няроўнасць  $\frac{\sqrt{8(1-x)}(x-7)}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0$  раўназначная таму, што  $1-x > 0$  і  $\sqrt{\frac{8(1-x)}{2(1-x)}}(x-7) \geq 0$ , г. зн.  $x < 1$  і  $x-7 \geq 0$ . А гэта раўназначна таму, што  $x < 1$  і  $x \geq 7$ . Відавочна, што такіх значэнняў  $x$  няма.

Адказ: а) (0; 2); б) няма рашэнняў.



Рашэнне прыкладу 4 можна аформіць і так:

а)  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2$ ;       $\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{\frac{x^3}{x}} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x^2} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ |x| < 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -2 < x < 2; \end{cases} \quad 0 < x < 2.$$

Адказ: (0; 2).

б)  $\frac{\sqrt{8(1-x)}(x-7)}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0$ ;       $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x-7 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x \geq 7. \end{cases}$

Адказ: няма рашэнняў. ▲



1. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму аб арыфметычным квадратным карані з дзелі (дробу).
2. Ці правільная для любых значэнняў  $m$  і  $p \neq 0$  роўнасць:

а)  $\sqrt{\frac{m}{p}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p}}$ ;      б)  $\sqrt{\left|\frac{m}{p}\right|} = \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{|p|}}$ ?

## Практиканні

Вилічыце (4.101—4.105).

4.101°. 1)  $\sqrt{\frac{0,25}{169}}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{100}{0,49}}$ ; 3)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ; 4)  $\sqrt{1\frac{13}{36}}$ ;  
 5)  $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ; 6)  $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ ; 7)  $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ ; 8)  $\sqrt{2\frac{23}{49}}$ .

4.102°. 1)  $\sqrt{2\frac{1}{7}}\sqrt{2\frac{1}{3}}\sqrt{5}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{1}{7}}\sqrt{\frac{7}{11}}\sqrt{\frac{11}{16}}$ ;  
 3)  $\sqrt{3,4}\sqrt{3\frac{2}{17}}\cdot 2\frac{19}{53}$ ; 4)  $\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{2\cdot\frac{1}{5}}$ .

4.103°. 1)  $\sqrt{\frac{-25\cdot 16}{-9}}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{-121\cdot (-4)}{81}}$ ; 3)  $\sqrt{\frac{-98}{-32}}$ ;  
 4)  $\sqrt{\frac{75}{192}}$ ; 5)  $\sqrt{\frac{162}{14\cdot 175}}$ ; 6)  $\sqrt{\frac{392\cdot 45}{160}}$ .

4.104°. 1)  $\sqrt{27}:\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{160}:\sqrt{40}$ ;  
 3)  $\sqrt{186}:\sqrt{837}\cdot\sqrt{8}$ ; 4)  $\sqrt{24}:\sqrt{36}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  
 5)  $\sqrt{3\frac{5}{11}}:\sqrt{3\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{12\frac{2}{3}}$ ; 6)  $\sqrt{2\frac{5}{8}}:\sqrt{4\frac{1}{5}}:\sqrt{62,5}$ .

4.105°. 1)  $\sqrt{\frac{49\cdot 81}{25\cdot 64}}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{100\cdot 49}{121\cdot 169}}$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{1,69\cdot 16}{1,21\cdot 49}}$ ; 4)  $\sqrt{\frac{3,61\cdot 25}{6,76\cdot 9}}$ .

Выканайце дзеянні (4.106—4.107).

4.106. 1)  $(9\sqrt{80} + 6\sqrt{45} - 3\sqrt{20}) : (3\sqrt{5})$ ;  
 2)  $(12\sqrt{6} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{12}) : (4\sqrt{2})$ ;  
 3)  $(12\sqrt{2} - 6\sqrt{10} + 15\sqrt{8}) : (3\sqrt{2})$ ;  
 4)  $(2\sqrt{18} - 4\sqrt{12} + 6\sqrt{6}) : (2\sqrt{3})$ .

4.107. 1)  $(3\sqrt{6} + 2\sqrt{12} - 0,25\sqrt{24}) : (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}})$ ;  
 2)  $(5\sqrt{2} - 0,5\sqrt{8} + 1,2\sqrt{32}) : (0,25\sqrt{\frac{1}{2}})$ ;

$$3) \left( 8\sqrt{10} - 6\sqrt{2\frac{1}{2}} + 2\sqrt{40} \right) : \left( 2\sqrt{\frac{2}{5}} \right);$$

$$4) \left( 2\sqrt{15} - 6\sqrt{0,6} + 3\sqrt{1\frac{2}{3}} \right) : \left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \right).$$

Вылічыце (4.108—4.109).

$$4.108. \quad 1) \sqrt{\frac{(-6)^{10} \cdot 2^5 \cdot (-5)^4}{(-6)^4 \cdot 2^9}}; \quad 2) \sqrt{\frac{7^4 \cdot 9^6 \cdot (-36)}{-7^8 \cdot (-9)^4}};$$

$$3) \sqrt{\frac{(-8)^4 \cdot (-5)^3}{-5 \cdot 4^7}}; \quad 4) \sqrt{\frac{(-3)^6}{(-9)^4 \cdot 5^4}}.$$

$$4.109. \quad 1) \frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}}; \quad 2) \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}; \quad 3) \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{\sqrt{567}}{\sqrt{7}}; \quad 5) \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{75}}; \quad 6) \frac{\sqrt{845}}{\sqrt{5}}.$$

4.110. У колькі разоў лік  $p$  большы за лік  $c$ , калі:

$$1) p = \sqrt{45}, c = \sqrt{5}; \quad 2) p = \sqrt{75}, c = \sqrt{3};$$

$$3) p = \sqrt{726}, c = \sqrt{6}; \quad 4) p = \sqrt{567}, c = \sqrt{7}?$$

4.111. Вылічыце:

$$1) \frac{\sqrt{65^2 - 25^2}}{\sqrt{121}}; \quad 2) \frac{\sqrt{29^2 - 20^2}}{\sqrt{144}};$$

$$3) \frac{\sqrt{22,5^2 - 13,5^2}}{\sqrt{25}}; \quad 4) \frac{\sqrt{26,5^2 - 22,5^2}}{\sqrt{0,81}};$$

$$5) \frac{\sqrt{29,5^2 - 19,5^2}}{\sqrt{490}}; \quad 6) \frac{\sqrt{0,95^2 - 0,65^2}}{\sqrt{0,03}}.$$

4.112. 1) Плошча першага квадрата  $98 \text{ см}^2$ , а другога —  $2 \text{ см}^2$ . У колькі разоў старана першага квадрата большая за старану другога?

2) Плошча першага квадрата  $50 \text{ см}^2$ , а другога — у 4 разы большая. У колькі разоў старана першага квадрата меншая за старану другога?

3) Адносіна плошчаў двух кругоў роўная  $\frac{1}{9}$ , а радыус большага круга роўны 15 см. Знайдзіце радыус меншага круга.

4) Адносіна плошчаў двух кругоў роўная 0,01, а радыус меншага круга роўны 5 м. Знайдзіце радыус большага круга.

4.113. Няхай  $a < 0$ ,  $b < 0$ . Спрасціце выраз:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{\frac{16a^2}{169b^6}}; & 2) \sqrt{\frac{121a^8}{49b^{18}}}; & 3) \sqrt{\frac{144a^{10}}{100b^{26}}}; \\ 4) \sqrt{\frac{576a^{12}}{225b^{26}}}; & 5) \sqrt{\frac{5476a^{30}}{7744b^{12}}}; & 6) \sqrt{\frac{6724a^{14}}{7056b^{18}}}. \end{array}$$

Спрасціце выраз (4.114—4.115).

4.114. 1)  $\sqrt{\frac{16}{9b^2}}$ , дзе  $b > 0$ ; 2)  $\sqrt{\frac{49}{25b^2}}$ , дзе  $b > 0$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{121b^2}{t^4}}$ , дзе  $b \leq 0$ ; 4)  $\sqrt{\frac{900b^6}{a^4}}$ , дзе  $b \leq 0$ ;  
 5)  $\sqrt{\frac{121}{64m^{10}n^8}}$ , дзе  $m < 0$ ;  
 6)  $\sqrt{\frac{169}{144a^6b^{10}}}$ , дзе  $a < 0$ ,  $b > 0$ .

4.115. 1)  $\sqrt{\frac{49k^6}{81}}$ ; 2)  $\sqrt{10\,000m^2}$ ;  
 3)  $\sqrt{5625m^{10}n^{18}}$ , дзе  $m < 0$ ,  $n > 0$ ; 4)  $\sqrt{\frac{169m^4}{n^4k^{20}}}$ .

4.116. Знайдзіце значэнне выразу:

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{\frac{49a^7b^5}{36a^3b^3}} \text{ пры } a = -6, b = -2; \\ 2) \sqrt{\frac{25x^{11}y^8}{9x^3y^2}} \text{ пры } x = -2, y = -3; \\ 3) \sqrt{\frac{(5m-4n)^4}{(4n-5m)^2}} \text{ пры } n = -4, m = 4; \\ 4) \sqrt{\frac{(2c-4p)^6}{(4p-2c)^4}} \text{ пры } p = -15, c = 2. \end{array}$$

4.117. Няхай  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $m$ ,  $n$  — цэлыя лікі. Спрасціце выраз:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{\frac{a^{2m}}{b^{4n}}}; & 2) \sqrt{\frac{a^{6m}}{b^{10n}}}; \\ 3) \sqrt{\frac{a^{6m+2}}{b^{4n+4}}}; & 4) \sqrt{\frac{a^{4m-2}}{b^{6n-4}}}. \end{array}$$

**4.118.** Запішыце квадратны карань з дробу ў выглядзе дзелі квадратных каранёў:

1)  $\sqrt{\frac{5a}{3b}}$ , калі  $a \geq 0, b > 0$ ;

2)  $\sqrt{\frac{7a}{4b}}$ , калі  $a \geq 0, b > 0$ ;

3)  $\sqrt{-\frac{9m}{4n}}$ , калі  $m \leq 0, n > 0$ ;

4)  $\sqrt{-\frac{5p}{9t}}$ , калі  $p \geq 0, t < 0$ .

**4.119.** Спрасціце выраз:

1)  $\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-p}} \sqrt{-p^3}$ ;

2)  $\frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-m^3}} \sqrt{-n}$ ;

3)  $\frac{\sqrt{-m^7 n}}{\sqrt{-mn^4}}$ ;

4)  $\frac{\sqrt{-m^6 n^3}}{\sqrt{-m^3 n}}$ ;

5)  $\frac{\sqrt{-m^7 n^9}}{\sqrt{-mn^2}} \sqrt{-m^9}$ ;

6)  $\frac{\sqrt{-m^5 n^3}}{\sqrt{-m^4 n}} \sqrt{-mn}$ .

**4.120.** Выкарыстаўшы вынік з тэарэмы, вызначыце, пры якіх значэннях зменнай квадратны карань з дробу можна запісаць у выглядзе дзелі квадратных каранёў, і запішыце гэта пераўтварэнне:

1)  $\sqrt{\frac{6-t}{t}}$ ;

2)  $\sqrt{\frac{t}{2-t}}$ ;

3)  $\sqrt{\frac{t+4}{t-5}}$ ;

4)  $\sqrt{\frac{t-6}{t+7}}$ ;

5)  $\sqrt{\frac{-t}{25^2-49^2}}$ ;

6)  $\sqrt{\frac{9^2-5^2}{-t}}$ .

**4.121\*.** Рашыце ўраўненне:

1)  $\frac{\sqrt{-x^{11}}}{\sqrt{-x^7}} = 0,49$ ;

2)  $\frac{\sqrt{-x^{15}}}{\sqrt{-x^{11}}} = 2,25$ ;

3)  $\frac{\sqrt{(x+1)^{18}}}{\sqrt{(x+1)^{14}}} = 100$ ;

4)  $\frac{\sqrt{(x-2)^{23}}}{\sqrt{(x-2)^{19}}} = 64$ ;

5)  $\frac{\sqrt{(5-x)^{12}}}{\sqrt{(x-5)^8}} = 36$ ;

6)  $\frac{\sqrt{(1-x)^{14}}}{\sqrt{(x-1)^{10}}} = 4$ .

4.122\*. Рашыце няроўнасць:

$$1) \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}} > 3;$$

$$2) \frac{\sqrt{x^8}}{\sqrt{x^6}} \leq 5;$$

$$3) \frac{\sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{x-3}} < 6;$$

$$4) \frac{\sqrt{(x+4)^5}}{\sqrt{(x+4)^3}} > 2;$$

$$5) \frac{\sqrt{(2-x)^4}}{\sqrt{(x-2)^2}} > 7;$$

$$6) \frac{\sqrt{(1-x)^{12}}}{\sqrt{(x-1)^{10}}} < 8.$$

#### 4.6. Вынясенне множніка з-пад знака караня і ўнясенне множніка пад знак караня

Выкарыстаўшы тэарэму аб квадратным карані са здабытку, пераўтварым выраз  $\sqrt{98}$  наступным чынам:

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{7^2} \sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Пераўтварэнне выразу  $\sqrt{98}$  да выгляду  $7\sqrt{2}$  называецца *вынясеннем множніка з-пад знака квадратнага караня*. З другога боку, пераўтварэнне выразу  $7\sqrt{2}$  да выгляду  $\sqrt{98}$  называюць *ўнясеннем множніка пад знак квадратнага караня*.

**Тэарэма.** Пры любым значэнні  $a$  і пры любым значэнні  $b \geq 0$  правільная роўнасць

$$\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}. \quad (1)$$

**Доказ.** Паколькі ў тэарэме гаворыцца аб значэннях  $a$  і  $b$ , то ўсе разглядаемыя далей роўнасці лікавыя. А паколькі  $b \geq 0$ , то кожны з выразаў  $\sqrt{a^2 b}$  і  $|a| \sqrt{b}$  мае сэнс.

Выкарыстаўшы тэарэму аб арыфметычным квадратным карані са здабытку і тоеснасць  $\sqrt{a^2} = |a|$ , атрымаем

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = |a| \sqrt{b}.$$

Тым самым мы даказалі, што роўнасць (1) з'яўляецца тоеснасцю, паколькі яна ператвараецца ў правільную лікавую



роўнасць пры любых значэннях  $a$  і  $b$ , пры якіх выразы  $\sqrt{a^2b}$  і  $|a|\sqrt{b}$  маюць сэнс.  $\square$

Роўнасць (1) паказвае, як **выносіць множнік з-пад знака квадратнага караня**. Памяняўшы ў тоеснасці (1) левую і правую часткі месцамі, атрымаем

$$|a|\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}. \quad (2)$$

З роўнасці (2) вынікаюць уласцівасці:



1) калі  $a \geq 0$ , то  $a\sqrt{b} = |a|\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ ;

2) калі  $a < 0$ , то  $a\sqrt{b} = -|a|\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$ .

Гэтыя ўласцівасці паказваюць, як **уносіць множнік пад знак квадратнага караня**.

**Прыклад 1.** Вынесці множнік з-пад знака квадратнага караня пры  $c < 0$ ,  $p > 0$ :

а)  $\sqrt{162c^6p^2}$ ;      б)  $\sqrt{48c^4p^9}$ .

Рашэнне.

а)  $\sqrt{162c^6p^2} = \sqrt{81 \cdot 2(c^3)^2 p^2} = \sqrt{9^2 (\sqrt{2})^2 (c^3)^2 p^2} =$

↓ выкарыстаем тоеснасць (1) ↓

$$= 9\sqrt{2} |c^3| \cdot |p| =$$

↓ паколькі  $c < 0$ , то  $c^3 < 0$ , і згодна з азначэннем модуля  $|c^3| = -c^3$ ; а паколькі  $p > 0$ , то  $|p| = p$  ↓

$$= 9\sqrt{2}(-c^3)p = -9\sqrt{2}c^3p.$$

б)  $\sqrt{48c^4p^9} = \sqrt{16 \cdot 3(c^2)^2 (p^4)^2 p} =$

↓ выкарыстаем тоеснасць (1) ↓

$$= 4\sqrt{3} |c^2| \cdot |p^4| \sqrt{p} =$$

↓ па азначэнні модуля маем ↓

$$= 4\sqrt{3}c^2p^4\sqrt{p}.$$

Адказ: а)  $-9\sqrt{2}c^3p$ ; б)  $4\sqrt{3}c^2p^4\sqrt{p}$ .

**Прыклад 2.** У выразе  $p^3\sqrt{13}$  унесці множнік пад знак квадратнага кораня пры  $p < 0$ .

Рашэнне. Паколькі  $p^3 < 0$ , то на падставе ўласцівасці 2) маем

$$p^3\sqrt{13} = -\sqrt{(p^3)^2 13} = -\sqrt{13p^6}.$$

Патлумачым яшчэ раз з'яўленне знака «мінус» перад знакам квадратнага кораня. Пры  $p < 0$  значэнні выразу  $p^3\sqrt{13}$  адмоўныя. Таму пасля любога тоеснага пераўтварэння гэтага выразу павінен атрымацца выраз, значэнні якога таксама адмоўныя.

Праверыць, ці правільны атрыманы вынік, можна, калі вынесці множнік з-пад знака квадратнага кораня ў выразе  $-\sqrt{13p^6}$  і пры гэтым улічыць, што  $p < 0$ :

$$-\sqrt{13p^6} = -|p^3|\sqrt{13} = -(-p^3)\sqrt{13} = p^3\sqrt{13}.$$

**Прыклад 3.** Знайсці значэнне выразу

$$T = \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{49-28x+4x^2}$$

пры ўмове:

$$\text{а) } x > 3,5; \quad \text{б) } x < 3,5.$$

Рашэнне. а) Пры  $x > 3,5$  маем  $7-2x < 0$ , значыць, пры ўнясенні адмоўнага множніка  $\frac{1}{7-2x}$  пад знак квадратнага кораня на падставе ўласцівасці 2) атрымаем

$$T = -\sqrt{\frac{1}{(7-2x)^2} \cdot (7-2x)^2} = -1.$$

б) Пры  $x < 3,5$  маем  $7-2x > 0$ , таму пры ўнясенні дадатнага множніка  $\frac{1}{7-2x}$  пад знак квадратнага кораня на падставе ўласцівасці 1) атрымаем

$$T = \sqrt{\frac{1}{(7-2x)^2} \cdot (7-2x)^2} = 1.$$

Адказ: а)  $T = -1$  пры  $x > 3,5$ ; б)  $T = 1$  пры  $x < 3,5$ .



Прыклад 3 можна рашыць інакш.

Вынесем множнік з-пад знака квадратнага караня:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2x + (2x)^2} = \\ &= \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{(7-2x)^2} = \frac{1}{7-2x} \cdot |7-2x|. \end{aligned}$$

Выкарыстаўшы азначэнне модуля, знойдзем значэнні  $T$ :

а)  $T|_{x > 3,5} = \frac{1}{7-2x} \cdot (-(7-2x)) = -1;$

б)  $T|_{x < 3,5} = \frac{1}{7-2x} \cdot (7-2x) = 1.$



1. Прывядзіце прыклад вынясення множніка з-пад знака караня.
2. Прывядзіце прыклад унясення множніка пад знак караня.
3. Дакажыце тое, што  $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ .
4. Сфармулюйце ўласцівасці аб унясенні множніка пад знак арыфметычнага квадратнага караня.

### Практыкаванні

Вынесіце множнік з-пад знака квадратнага караня (4.123—4.124).

4.123°. 1)  $\sqrt{50}$ ; 2)  $\sqrt{75}$ ; 3)  $\sqrt{125}$ ;  
 4)  $\sqrt{32}$ ; 5)  $\sqrt{72}$ ; 6)  $\sqrt{800}$ ;  
 7)  $\sqrt{180}$ ; 8)  $\sqrt{98}$ ; 9)  $\sqrt{56}$ ;  
 10)  $\sqrt{288}$ ; 11)  $\sqrt{0,32}$ ; 12)  $\sqrt{0,72}$ .

4.124°. 1)  $\frac{1}{3}\sqrt{56}$ ; 2)  $-\frac{1}{7}\sqrt{196}$ ; 3)  $-1,6\sqrt{50}$ ;  
 4)  $2,4\sqrt{600}$ ; 5)  $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$ ; 6)  $0,1\sqrt{20\,000}$ ;  
 7)  $-0,2\sqrt{275}$ ; 8)  $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ ; 9)  $0,5\sqrt{60}$ ;  
 10)  $-0,1\sqrt{150}$ ; 11)  $2,4\sqrt{300}$ ; 12)  $1\frac{3}{4}\sqrt{48}$ .

4.125. Дакажыце, што:

1)  $12 \cdot \sqrt{\frac{1}{144}a} = \sqrt{a}$ ; 2)  $\sqrt{k} = \frac{1}{15} \cdot \sqrt{225k}$ .

Вынесіце множнік з-пад знака квадратнага кораня пры ўмове, што ўсе зменныя прымаюць толькі дадатныя значэнні (4.126—4.130).

4.126°. 1)  $\sqrt{32m}$ ; 2)  $\sqrt{18n}$ ; 3)  $\sqrt{25c}$ ; 4)  $\sqrt{49c}$ ;  
5)  $\sqrt{3a^2b}$ ; 6)  $\sqrt{5ab^2}$ ; 7)  $\sqrt{6p^4}$ ; 8)  $\sqrt{13p^6}$ .

4.127°. 1)  $\sqrt{\frac{k}{121}}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{k}{225}}$ ; 3)  $\sqrt{\frac{a^4}{b^3}}$ ;  
4)  $\sqrt{\frac{a^3}{b^8}}$ ; 5)  $\sqrt{\frac{144x}{y^5}}$ ; 6)  $\sqrt{\frac{9x^5}{16y^2}}$ .

4.128°. 1)  $\sqrt{12k}$ ; 2)  $\sqrt{75k^5}$ ; 3)  $\sqrt{15k^7}$ ;  
4)  $\sqrt{49k^9}$ ; 5)  $\sqrt{2k^7t^5}$ ; 6)  $\sqrt{32t^5k^3}$ ;  
7)  $\sqrt{98t^7k^5}$ ; 8)  $\sqrt{72t^{11}k^4}$ ; 9)  $\sqrt{867k^{17}t^{24}}$ .

4.129°. 1)  $\sqrt{\frac{49k}{y^2t^3}}$ ; 2)  $\sqrt{\frac{k^5y^8}{64t}}$ ; 3)  $\frac{1}{k}\sqrt{5k^9}$ ;  
4)  $\frac{6}{y}\sqrt{6y^7}$ ; 5)  $t\sqrt{\frac{t^5}{3k^2}}$ ; 6)  $\frac{t}{k}\sqrt{\frac{2k^9}{t^2}}$ ;  
7)  $2p\sqrt{\frac{8p^5}{c^6}}$ ; 8)  $3c^2\sqrt{\frac{p^4}{18c^3}}$ ; 9)  $\frac{3t}{2k}\sqrt{\frac{16k^{20}}{81t^3}}$ .

4.130. 1)  $\sqrt{a^3b^2c}$ ; 2)  $\sqrt{a^5bc^2}$ ; 3)  $\sqrt{ab^6c^4}$ ;  
4)  $\sqrt{a^7b^3c^5}$ ; 5)  $\sqrt{16a^2b^7c^9}$ ; 6)  $\sqrt{25a^4b^9c^{11}}$ .

Вынесіце множнік з-пад знака квадратнага кораня (4.131—4.136).

4.131. 1)°  $\sqrt{9a^2}$  пры  $a < 0$ ; 2)°  $\sqrt{4b^6}$  пры  $b \geq 0$ ;  
3)°  $\sqrt{450b^6}$  пры  $b < 0$ ; 4)°  $\sqrt{392a^2}$  пры  $a < 0$ ;  
5)  $\sqrt{49a^4b^{10}}$  пры  $b < 0$ ; 6)  $\sqrt{25a^{12}b^{14}}$  пры  $b < 0$ ;  
7)  $\sqrt{2^6b^{10}d^4}$  пры  $b < 0$ ;  
8)  $\sqrt{6,25m^6n^{18}}$  пры  $m < 0, n < 0$ ;  
9)  $\sqrt{5\frac{1}{16}x^{18}y^{23}}$  пры  $x < 0$ ;  
10)  $\sqrt{\frac{64}{25}b^8c^{25}}$ .

- 4.132. 1)  $\sqrt{9m^3n^2}$  при  $n < 0$ ; 2)  $\sqrt{16m^2n^4}$  при  $m < 0$ ;  
 3)  $\sqrt{169m^4n^5}$ ; 4)  $\sqrt{50m^3n^6}$  при  $n < 0$ ;  
 5)  $\sqrt{32m^6n^5}$  при  $m < 0$ ; 6)  $\sqrt{128m^8n^6}$  при  $n < 0$ ;  
 7)  $\sqrt{18a^4b^8}$ ; 8)  $\sqrt{8c^{16}d^{24}}$ ;  
 9)  $\sqrt{243a^{16}b^{12}}$ ; 10)  $\sqrt{125c^8d^{20}}$ .

- 4.133. 1)  $\sqrt{a^{2n}b^{4m}c^5}$  при  $a > 0$ ;  
 2)  $\sqrt{a^{4n+2}b^{4m}c^7}$  при  $a < 0$ ;  
 3)  $\sqrt{a^{4n+4}b^{2m+2}c^9}$  при  $b > 0$ ;  
 4)  $\sqrt{a^{4n+6}b^{4m}c^3}$  при  $a < 0$ .

- 4.134. 1)  $\sqrt{128x^5(a+b)^5}$  при  $a > 0, b > 0$ ;  
 2)  $\sqrt{245a^3y^5(a-b)^5}$  при  $a < 0, b > 0$ ;  
 3)  $\sqrt{160a^5b^6(x+y)^{11}}$  при  $b < 0, x+y < 0$ ;  
 4)  $\sqrt{24,5x^4y^5(x-y)^7}$  при  $x-y > 0$ ;  
 5)  $\frac{1}{6}\sqrt{27(x^2+6xy+9y^2)}$ ;  
 6)  $7\sqrt{\frac{25x^2-10xy+y^2}{343}}$ ;  
 7)  $(p-c)\sqrt{\frac{18}{p^2-2pc+c^2}}$  при  $p > c$ ;  
 8)  $(p^2-c^2)\sqrt{\frac{8}{p^4-2p^2c^2+c^4}}$  при  $p^2 < c^2$ .

- 4.135°. 1)  $\sqrt{-3b^3}$ ; 2)  $\sqrt{-7m^5}$ ; 3)  $\sqrt{-32m^7}$ ;  
 4)  $\sqrt{-64n^{11}}$ ; 5)  $\sqrt{-27a^{15}}$ ; 6)  $\sqrt{-675t^{13}}$ .

- 4.136°. 1)  $-k\sqrt{-5k^7}$ ; 2)  $-4t\sqrt{-72t^{21}}$ ;  
 3)  $-\frac{1}{5}p\sqrt{-125p^9}$ ; 4)  $-\frac{1}{7}b\sqrt{-147b^3}$ ;  
 5)  $-0,1m\sqrt{-0,0001m^{41}}$ ; 6)  $-3d^2\sqrt{-\frac{1}{243}d^{19}}$ .

Унясіце множнік пад знак квадратнага кораня (4.137—4.138).

- 4.137°. 1)  $3\sqrt{3}$ ; 2)  $5\sqrt{5}$ ; 3)  $-9\sqrt{0,2}$ ;  
 4)  $-7\sqrt{0,8}$ ; 5)  $\frac{4}{5}\sqrt{0,5}$ ; 6)  $\frac{2}{3}\sqrt{0,81}$ ;  
 7)  $-2\sqrt{\frac{1}{12}}$ ; 8)  $-3\sqrt{\frac{1}{18}}$ ; 9)  $5\sqrt{\frac{1}{125}}$ ;  
 10)  $-7\sqrt{\frac{1}{343}}$ ; 11)  $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{243}{64}}$ ; 12)  $-\frac{7}{5}\sqrt{\frac{625}{343}}$ .

- 4.138°. 1)  $5a^2\sqrt{b}$ ; 2)  $3b^4\sqrt{c}$ ; 3)  $2|x|\sqrt{y^2}$ ;  
 4)  $7|c|\sqrt{d^2}$ ; 5)  $-3\sqrt{a}$ ; 6)  $-4\sqrt{t^3}$ .

4.139°. Унясіце множнік пад знак квадратнага кораня пры ўмове, што ўсе зменныя прымаюць толькі дадатныя значэнні:

- 1)  $p\sqrt{3}$ ; 2)  $k\sqrt{2}$ ; 3)  $p\sqrt{p}$ ;  
 4)  $\frac{1}{k}\sqrt{k^4}$ ; 5)  $p\sqrt{\frac{1}{p}}$ ; 6)  $k\sqrt{k^2}$ ;  
 7)  $3p^2\sqrt{2k}$ ; 8)  $k^4\sqrt{3p^2}$ ; 9)  $\frac{1}{p}\sqrt{2kp^3}$ ;  
 10)  $\frac{1}{k}\sqrt{3k^3p}$ ; 11)  $(p+1)\sqrt{p}$ ; 12)  $(k+3)\sqrt{k}$ .

4.140. Унясіце множнік пад знак квадратнага кораня пры  $p > 0$  і  $k > 0$ :

- 1)°  $p\sqrt{5}$ ; 2)°  $p\sqrt{7}$ ;  
 3)°  $-p\sqrt{5}$ ; 4)°  $-p\sqrt{7}$ ;  
 5)°  $-p\sqrt{k}$ ; 6)°  $p\sqrt{k}$ ;  
 7)°  $7p^3\sqrt{k}$ ; 8)°  $9p^5\sqrt{k}$ ;  
 9)  $-2pk\sqrt{\frac{k}{8p^2}}$ ; 10)  $-3p^3k\sqrt{\frac{k}{3p^4}}$ ;  
 11)  $-\frac{1}{3p^3k}\sqrt{\frac{9p^2k}{5}}$ ; 12)  $\frac{-k}{2p^2}\sqrt{\frac{8p^2}{3k}}$ .

4.141. У практыкаванні 4.140 унясіце множнік пад знак квадратнага кораня пры  $p < 0$  і  $k > 0$ .

Унясіце множнік пад знак квадратнага кораня (4.142—4.148).

4.142. 1)  $\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{b^5}{2a}}$ ; 2)  $\frac{5a^2}{7}\sqrt{\frac{8}{5a}}$ ; 3)  $\frac{5x}{2y}\sqrt{\frac{6y^3}{5x}}$ ;  
4)  $\frac{3a}{4b}\sqrt{\frac{16b^5}{3a}}$ ; 5)  $\frac{2}{a}\sqrt{-\frac{a^3}{8}}$ ; 6)  $\frac{1}{4a}\sqrt{-64a^5}$ .

4.143. 1)  $-a\sqrt{3a}$ ; 2)  $-t^3\sqrt{2t}$ ;  
3)  $-m^5\sqrt{5m}$ ; 4)  $-d^7\sqrt{7d}$ .

4.144. 1)  $b\sqrt{3b^2c}$  пры  $b > 0$ ; 2)  $p\sqrt{5p^4n}$  пры  $p > 0$ ;  
3)  $-b\sqrt{6b^2c}$  пры  $b > 0$ ; 4)  $-p^3n^2\sqrt{7p^2n^4}$  пры  $p > 0$ ;  
5)  $b\sqrt{7b^4c}$  пры  $b < 0$ ; 6)  $p\sqrt{2np^6}$  пры  $p < 0$ ;  
7)  $-b\sqrt{5b^6c}$  пры  $b < 0$ ; 8)  $-p\sqrt{11np^2}$  пры  $p < 0$ .

4.145. 1)  $(3 - \sqrt{10})\sqrt{2}$ ; 2)  $(2 - \sqrt{5})\sqrt{3}$ ;  
3)  $(5 - \sqrt{3})\sqrt{5}$ ; 4)  $(7 - \sqrt{6})\sqrt{7}$ ;  
5)  $(4 - \sqrt{17})\sqrt{3}$ ; 6)  $(10 - \sqrt{93})\sqrt{2}$ ;  
7)  $(\sqrt{3} - 2)\sqrt{ab}$ ; 8)  $(2 - \sqrt{7})\sqrt{a^3b}$ .

4.146. 1)  $(a - b)\sqrt{\frac{2}{b - a}}$ ; 2)  $(m - n)\sqrt{\frac{1}{n - m}}$ ;  
3)  $y(a - b)\sqrt{\frac{b}{a - b}}$  пры  $a < b$ ,  $y > 0$ ;  
4)  $x(a + b)\sqrt{\frac{2a}{a + b}}$  пры  $x < 0$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;  
5)  $(x + y)^2\sqrt{\frac{m}{x + y}}$  пры  $m < 0$ ;  
6)  $3(c - d)\sqrt{\frac{2m}{c^2 - d^2}}$  пры  $d > 0$ ,  $c > d$ .

4.147. 1)  $a\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}}$  ( $a > 0$ ); 2)  $b\sqrt{\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b}}$ ;  
3)  $3b\sqrt{\frac{2}{b^2} + \frac{3}{b}}$  ( $b > 0$ ); 4)  $2a\sqrt{\frac{3}{a} + \frac{4}{a^3}}$ ;  
5)  $(a - 5)\sqrt{\frac{1}{a - 5}}$ ; 6)  $(b - 6)\sqrt{\frac{1}{6 - b}}$ ;  
7)  $(b - 7)\sqrt{\frac{1}{3b - 21}}$ ; 8)  $(a - 8)\sqrt{\frac{1}{24 - 3a}}$ .

4.148. 1)  $2x\sqrt{\frac{3}{x}} + 6\sqrt{\frac{x}{3}}$ ;      2)  $\frac{3}{5}\sqrt{75x} + \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{27}{x}} + \frac{4}{7x^2}\sqrt{98x^5}$ .

4.149. Знайдіть значення виразу:

1)  $(2x - 3)\sqrt{\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}}$  при

а)  $x > \frac{3}{2}$ ,      б)  $x < \frac{3}{2}$ ;

2)  $(5 - 4x)\sqrt{\frac{1}{16x^2 - 40x + 25}}$  при

а)  $x > \frac{5}{4}$ ,      б)  $x < \frac{5}{4}$ .

4.150. При яких значеннях  $a$  правильна рівність:

1)  $a\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$ ;      2)  $a\sqrt{-a} = -\sqrt{-a^3}$ ;

3)  $-a\sqrt{a} = -\sqrt{a^3}$ ;      4)  $a\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}$ ?

4.151. При яких значеннях  $p$  правильна рівність:

1)  $p\sqrt{3} = -\sqrt{3p^2}$ ;      2)  $p^2\sqrt{7} = \sqrt{7p^4}$ ;

3)  $p\sqrt{5p} = \sqrt{5p^3}$ ;      4)  $3p^3\sqrt{2} = \sqrt{18p^6}$ ;

5)  $p^4\sqrt{2} = \sqrt{2p^8}$ ;      6)  $p\sqrt{8} = \sqrt{8p^2}$ ?

Запишіть натуральні аргументи визначення виразу (4.152—4.153).

4.152. 1)  $-p\sqrt{15p}$ ;      2)  $-p\sqrt{-17p}$ ;      3)  $-p\sqrt{19p^2}$ ;

4)  $-p\sqrt{17p^2}$ ;      5)  $-p\sqrt{19p^3}$ ;      6)  $-p\sqrt{11p^5}$ .

4.153. 1)  $p\sqrt{113}$ ;      2)  $p\sqrt{113p}$ ;      3)  $p\sqrt{-113p}$ ;

4)  $p\sqrt{-113p^2}$ ;      5)  $p\sqrt{113p^2}$ ;      6)  $p^5\sqrt{-113p^7}$ .

4.154\*. Внесіть множник з-під знака квадратного кореня:

1)  $\sqrt{-7m^5k^8}$ ;      2)  $\sqrt{32a^3b^{12}}$ ;      3)  $\sqrt{-8c^7b^3}$ ;

4)  $\sqrt{-54a^5b^4}$ ;      5)  $\sqrt{700a^5b^{24}}$ ;      6)  $\sqrt{4x^{16}y^5}$ .

4.155\*. Унесіть множник під знак квадратного кореня:

1)  $xy^2\sqrt{x^5y}$ , калі  $y < 0$ ;

2)  $-2x^3y\sqrt{\frac{1}{16}x^3y^5}$ , калі  $y < 0$ ;



3)  $-2x^2y^5\sqrt{\frac{1}{8}x^5y^3}$ , калі  $x < 0$ ;

4)  $-a^2b\sqrt{ab}$ , калі  $a < 0$ ;

5)  $7x\sqrt{\frac{1}{49}x^3y^7}$ , калі  $y < 0$ ;

6)  $t^3p\sqrt{-3t^2p}$ , калі  $t < 0$ .

**4.156.** Знайдзіце значэнне выразу:

1)  $\sqrt{25a^6b^2}$  пры  $a = -1$ ,  $b = 2$ ;

2)  $\sqrt{36m^{10}n^8}$  пры  $m = -2$ ,  $n = 1$ ;

3)  $\sqrt{49a^2b^4}$  пры  $a = -5$ ,  $b = -2$ ;

4)  $\sqrt{64p^{12}k^{14}}$  пры  $p = 0,5$ ,  $k = -1$ .

**4.157.** Няхай  $m \geq 0$  і  $n \geq 0$ . Спрасціце выраз:

1)  $\sqrt{2m \cdot 3n \cdot 8n \cdot 12m}$ ;

2)  $\sqrt{12m \cdot 15n \cdot 35m \cdot 28n}$ ;

3)  $\sqrt{30m^7 \cdot 45n^3 \cdot 75n^5 \cdot 98m^3}$ ;

4)  $\sqrt{12m^{17} \cdot 21n^3 \cdot 24n^5 \cdot 42m^3}$ .

Спрасціце выраз (4.158—4.161).

**4.158.** 1)  $\sqrt{25a^2b^4}$ , калі  $a \geq 0$ ,  $b < 0$ ;

2)  $\sqrt{49b^6y^{24}}$ , калі  $b > 0$ ,  $y \geq 0$ ;

3)  $\sqrt{400t^2}$ , калі  $t \geq 0$ ;

4)  $\sqrt{10\,000m^4}$ , калі  $m < 0$ .

**4.159.** 1)  $\sqrt{9x^2y^{10}}$ , калі  $x < 0$ ,  $y \geq 0$ ;

2)  $\sqrt{81x^4y^{20}}$ , калі  $x < 0$ ,  $y \leq 0$ ;

3)  $\sqrt{16(m-n)^4}$ , калі  $m < n$ ;

4)  $\sqrt{0,09(m-n)^2}$ , калі  $m \geq n$ .

**4.160.** 1)  $0,2\sqrt{25a^5} + 0,5\sqrt{4a^7} + 2\sqrt{a}$ ;

2)  $6\sqrt{0,25x^7y^9} + 5\sqrt{0,09x^3y^3} - 4\sqrt{0,25x^3y^5}$ ,  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ .

- 4.161. 1)  $\sqrt{m^3 - n^3 + m^2n - mn^2}$  пры  $m > n > 0$ ;  
 2)  $\sqrt{m^3 + m^2 - m - 1}$  пры  $m > 1$ ;  
 3)  $m^3 \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{2m-1}{m^4}}$  пры  $m < 1, m \neq 0$ ;  
 4)  $\frac{m^2}{3-m} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{3(3-2m)}{m^3}}$  пры  $m > 3$ .

#### 4.7. Некаторыя прыклады на дзеянні з квадратнымі каранямі

**Прыклад 1.** Раскласці на множнікі выраз

$$a^2 - 3.$$

Рашэнне.

$$a^2 - 3 = a^2 - (\sqrt{3})^2 =$$

↓ па формуле рознасці квадратаў атрымаем ↓

$$= (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}).$$

**Прыклад 2.** Скараціць дроб  $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m}$ .

Рашэнне. 
$$\frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{m})^2} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{(\sqrt{17} - \sqrt{m})(\sqrt{17} + \sqrt{m})} =$$
  

$$= \frac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{m}}.$$



Можна паступіць інакш. Памножыўшы лічнік і назоўнік дробу на  $\sqrt{m} - \sqrt{17}$ , атрымаем

$$\frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m} = \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{17})(\sqrt{m} - \sqrt{17})}{(17 - m)(\sqrt{m} - \sqrt{17})} =$$
  

$$= \frac{m - 17}{(17 - m)(\sqrt{m} - \sqrt{17})} = \frac{1}{-(\sqrt{m} - \sqrt{17})} = \frac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{m}}.$$

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне

$$\frac{7\sqrt{x} - 2}{3} - 2 = \frac{5\sqrt{x} - 6}{2}.$$

Рашэнне. *Спосаб 1.* Памножым абедзве часткі дадзенага ўраўнення на 6:

$$(7\sqrt{x} - 2) \cdot 2 - 2 \cdot 6 = (5\sqrt{x} - 6) \cdot 3.$$

Рэшым атрыманае ўраўненне:

$$\begin{aligned}14\sqrt{x} - 4 - 12 &= 15\sqrt{x} - 18; \\15\sqrt{x} - 14\sqrt{x} &= -4 - 12 + 18; \\ \sqrt{x} &= 2; \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Адказ: 4.



**Способ 2.** Абазначым  $\sqrt{x} = t$ . Падставіўшы  $t$  замест  $\sqrt{x}$  у дадзенае ўраўненне, атрымаем

$$\frac{7t-2}{3} - 2 = \frac{5t-6}{2}.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, маем  $t = 2$ , значыць,  $\sqrt{x} = 2$ , адкуль  $x = 4$ .

**Прыклад 4.** Рашыць ураўненне:

а)  $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3$ ;      б)  $(\sqrt{x})^4 = 9$ .

Рашэнне. **Способ 1.** а) Паколькі пры любым неадмоўным значэнні  $x$  правільная роўнасць  $(\sqrt{x})^2 = x$ , то дадзенае ўраўненне пры  $x \geq 0$  раўназначнае ўраўненню  $2x + 4 = x + 3$ . Рашыўшы гэта ўраўненне, знойдзем  $x = -1$ , што не адпавядае няроўнасці  $x \geq 0$ . Такім чынам, дадзенае ўраўненне не мае каранёў.

б) Ураўненне  $(\sqrt{x})^4 = 9$  пры  $x \geq 0$  раўназначнае ўраўненню  $x^2 = 9$ . Рашыўшы ўраўненне  $x^2 = 9$ , атрымаем  $x = -3$  або  $x = 3$ . Але паколькі каранем зыходнага ўраўнення можа быць толькі неадмоўнае значэнне  $x$ , то каранем з'яўляецца лік 3.

Адказ: а) няма каранёў; б) 3.



Рашэнне прыкладу 4 можна аформіць і так:

а)  $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3$ ;       $\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + 4 = x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x = -1. \end{cases}$

Апошняя сістэма не мае рашэнняў.

Адказ: няма каранёў.

б)  $(\sqrt{x})^4 = 9$ ;       $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ (x = -3 \text{ або } x = 3); \end{cases} \quad x = 3.$

Адказ: 3.



**Способ 2.** а)  $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3$ ;  
 $2x + 4 = x + 3$ ;  
 $x = -1.$

Праверка. Падставіўшы  $x = -1$  у зыходнае ўраўненне, атрымаем  $2(\sqrt{-1})^2 + 4 = -1 + 3$  — няправільную лікавую роўнасць, паколькі выраз  $\sqrt{-1}$  не мае сэнсу, значыць, каранёў няма.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (\sqrt{x})^4 = 9; \\ & x^2 = 9; \\ & x = -3 \text{ або } x = 3. \end{aligned}$$

Праверка. Пры  $x = -3$  у левай частцы зыходнага ўраўнення атрымаем выраз  $(\sqrt{-3})^4$ , які не мае сэнсу. Значыць, лік  $-3$  не з'яўляецца коранем ураўнення. Пры  $x = 3$  зыходнае ўраўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць  $(\sqrt{3})^4 = 9$ , г. зн.  $9 = 9$ , значыць, лік  $3$  — корань ураўнення.

Заўвага. Пры рашэнні ўраўнення а) з прыкладу 4 спосабам 2 ад ураўнення  $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3$  перайшлі да нераўназначнага яму ўраўнення  $2x + 4 = x + 3$ . Таму пры выкарыстанні спосаба 2 неабходна праверка атрыманых значэнняў  $x$  па ўмове зыходнага ўраўнення. А пры рашэнні спосабам 1 выконваліся толькі раўназначныя пераходы, таму праверка не патрэбная.

**Прыклад 5.** Спрасціць выраз

$$T = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) - (a - \sqrt{2a})(a + \sqrt{2a}).$$

Рашэнне. *Спосаб 1.*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1 - a\sqrt{a} + \sqrt{a}(1 - \sqrt{a})}{1 - \sqrt{a}} \cdot \frac{1 + a\sqrt{a} - \sqrt{a}(1 + \sqrt{a})}{1 + \sqrt{a}} - (a^2 - (\sqrt{2a})^2) = \\ &= \frac{(1 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a)(1 + a\sqrt{a} - \sqrt{a} - a)}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= \frac{((1 - a) + \sqrt{a}(1 - a))((1 - a) - \sqrt{a}(1 - a))}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= \frac{(1 - a)(1 + \sqrt{a})(1 - a)(1 - \sqrt{a})}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= (1 - a)(1 - a) - a^2 + 2a = \\ &= 1 + a^2 - 2a - a^2 + 2a = 1. \end{aligned}$$

Адказ:  $T = 1$ .



**Способ 2.** Прыклад 5 можна рашаць не «ланцужком», а «па дзеяннях». Вызначыце парадак дзеянняў у выразе  $T$  і выканайце іх.



**▲ Способ 3.** У выразе  $T$  квадратны карань з  $a$  можна абазначыць якой-небудзь літарай, напрыклад літарай  $y$ , і, атрымаўшы выраз без каранёў, пераўтварыць яго.

Такім чынам, няхай  $\sqrt{a} = y$ , тады маем:

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{1-y^3}{1-y} + y \right) \left( \frac{1+y^3}{1+y} - y \right) - (y^2 - \sqrt{2y})(y^2 + \sqrt{2y}) = \\ &= \left( \frac{(1-y)(1+y+y^2)}{1-y} + y \right) \left( \frac{(1+y)(1-y+y^2)}{1+y} - y \right) - (y^4 - 2y^2) = \\ &= (1+2y+y^2)(1-2y+y^2) - (y^4 - 2y^2) = \\ &= (1+y)^2(1-y)^2 - y^4 + 2y^2 = (1-y^2)^2 - y^4 + 2y^2 = \\ &= 1 - 2y^2 + y^4 - y^4 + 2y^2 = 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Прыклад 6.** Даказаць тоеснасць:

- а)  $a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}$ ;
- б)  $a + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}$ ;
- в)  $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ .

**Доказ.** а) Правая частка дадзенай роўнасці мае сэнс пры  $a \geq 0$  і  $b \geq 0$ . Пераўтворым яе, выкарыстаўшы формулу квадрата сумы і ўласцівасці квадратных каранёў:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} - 2\sqrt{ab} = \\ &= a + b + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} = a + b; \end{aligned}$$

атрымалі левую частку дадзенай роўнасці.  $\boxtimes$

б) **Доказ** аналагічны доказу тоеснасці а) — выканайце яго самастойна.

в) Правая частка дадзенай роўнасці мае сэнс пры  $a \geq 0$  і  $b \geq 0$ . Пераўтворым яе, выкарыстаўшы формулу рознасці квадратаў і ўласцівасці квадратных каранёў:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b;$$

атрымалі левую частку дадзенай роўнасці.  $\boxtimes$

▲ **Прыклад 7.** Даказаць, што лік  $7\sqrt{5} - 4$  з'яўляецца ірацыянальным.

Доказ. Дакажам метадам ад процілеглага; няхай  $7\sqrt{5} - 4 = r$  — рацыянальны лік. Тады атрымаем:

$$7\sqrt{5} = r + 4;$$

$$\sqrt{5} = \frac{r+4}{7}.$$

Але  $\frac{r+4}{7}$  з'яўляецца рацыянальным лікам, а лік  $\sqrt{5}$  — ірацыянальны (дакажыце гэта, гл. прыклад 3 на с. 104). Іх роўнасць немагчымая. Мяркуючы, што  $7\sqrt{5} - 4$  — рацыянальны лік, мы прыйшлі да супярэчнасці. Значыць,  $7\sqrt{5} - 4$  — ірацыянальны лік. ☒

**Прыклад 8.** Даказаць, што лік  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  з'яўляецца ірацыянальным.

Доказ. Дапусцім процілеглае:  $\sqrt{7} - \sqrt{3} = r$  — рацыянальны лік, тады

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = r^2;$$

$$10 - 2\sqrt{21} = r^2;$$

$$\sqrt{21} = \frac{10-r^2}{2}.$$

Але  $\frac{10-r^2}{2}$  з'яўляецца рацыянальным лікам, а  $\sqrt{21}$  — ірацыянальны лік (дакажыце гэта). Такая роўнасць не можа быць правільнай. Мяркуючы, што  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  — рацыянальны лік, мы прыйшлі да супярэчнасці. Значыць,  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$  — ірацыянальны лік. ☒▲



1. Запішыце лік  $p \geq 0$  у выглядзе ступені з асновай  $\sqrt{p}$ .
2. Няхай  $p$  і  $t$  — неадмоўныя лікі. Раскладзіце на множнікі выраз  $p - t$  па формуле рознасці квадратаў.
- 3\*. Няхай  $p$  і  $t$  — неадмоўныя лікі. Раскладзіце на множнікі выраз:
  - а)  $p\sqrt{p} + t\sqrt{t}$  па формуле сумы кубоў;
  - б)  $p\sqrt{p} - t\sqrt{t}$  па формуле рознасці кубоў.

**Практыкаванні**

**4.162°.** Раскладзіце двухчлены на множнікі па ўзоры

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2});$$

- 1)  $x^2 - 5$ ;      2)  $y^2 - 13$ ;      3)  $k^2 - 10$ ;      4)  $p^2 - 22$ ;  
5)  $c^2 - 17$ ;      6)  $7 - d^2$ ;      7)  $11 - a^2$ ;      8)  $b^2 - 8$ .

Скараціце дроб (**4.163—4.164**).

- 4.163°.** 1)  $\frac{y^2 - 5}{y + \sqrt{5}}$ ;      2)  $\frac{p^2 - 7}{p - \sqrt{7}}$ ;      3)  $\frac{k - \sqrt{2}}{k^2 - 2}$ ;  
4)  $\frac{t + \sqrt{6}}{t^2 - 6}$ ;      5)  $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ;      6)  $\frac{\sqrt{m} - m}{\sqrt{m} - 1}$ ;  
7)  $\frac{5 + \sqrt{n}}{5\sqrt{n} + n}$ ;      8)  $\frac{2\sqrt{m} - 3\sqrt{n}}{4m - 9n}$ .
- 4.164.** 1)  $\frac{6 - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$ ;      2)  $\frac{3\sqrt{7}}{7 + \sqrt{7}}$ ;      3)  $\frac{5 - \sqrt{3}}{3 - 5\sqrt{3}}$ ;  
4)  $\frac{9a - 3}{3\sqrt{a} - \sqrt{3}}$ ;      5)  $\frac{4a^2 + b - 4a\sqrt{b}}{4a^2 - b}$ ;      6)  $\frac{9a^2 + b + 6a\sqrt{b}}{9a^2 - b}$ ;  
7)  $\frac{11 - a}{(\sqrt{a} - \sqrt{11})^2}$  пры  $a \geq 14$ ;      8)  $\frac{n - 8}{(\sqrt{n} - \sqrt{8})^2}$  пры  $n \geq 9$ ;  
9)  $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})^2}{x - 3}$  пры  $x \geq 4$ ;      10)  $\frac{(\sqrt{13} + \sqrt{y})^2}{y - 13}$  пры  $y \geq 15$ .

Рашыце ўраўненне (**4.165—4.169**).

- 4.165.** 1)  $(5 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}) = -x + 65$ ;  
2)  $(\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} + 9) = 3 + x$ ;  
3)  $2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3) = 2x + 13$ ;  
4)  $2(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} + 4)^2 = -37$ ;  
5)  $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) - 2(\sqrt{x} - 3)^2 + (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4) = 3$ ;  
6)  $(2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) - (2\sqrt{x} - 3)^2 - 10\sqrt{x} = 6$ .
- 4.166.** 1)  $\frac{5\sqrt{x} - 4}{2} = \frac{16\sqrt{x} + 1}{7}$ ;      2)  $\frac{5 - \sqrt{x}}{8} = \frac{18 - 5\sqrt{x}}{12}$ ;  
3)  $\frac{1 - 9\sqrt{x}}{5} = \frac{19 + 3\sqrt{x}}{8}$ ;      4)  $\frac{4\sqrt{x} + 33}{21} = \frac{17 + \sqrt{x}}{14}$ .

4.167. 1)  $\frac{6\sqrt{x}+7}{7} - 3 = \frac{5\sqrt{x}-3}{8};$

2)  $\frac{\sqrt{x}-4}{5} + 2,4 = \frac{41-2\sqrt{x}}{9};$

3)  $\frac{6\sqrt{x}+3}{11} + \frac{3\sqrt{x}-1}{2} = 10;$

4)  $2 + \frac{\sqrt{x}+17}{5} = \frac{3\sqrt{x}-7}{4}.$

4.168. 1)  $\frac{\sqrt{x}-3}{4} - \frac{\sqrt{x}-1}{8} = \frac{\sqrt{x}-5}{2} - \frac{\sqrt{x}-4}{3};$

2)  $\frac{8-\sqrt{x}}{6} = \frac{\sqrt{x}+6}{2} + \frac{5-4\sqrt{x}}{3};$

3)  $\frac{9\sqrt{x}+7}{2} + \frac{\sqrt{x}-2}{7} = 36 + \sqrt{x};$

4)  $\frac{7+9\sqrt{x}}{4} + \frac{2-\sqrt{x}}{9} = 7\sqrt{x} + 1.$

4.169. 1)  $\frac{3(\sqrt{x}+1)}{5} - \frac{2(2\sqrt{x}-5)}{11} = \frac{3(\sqrt{x}-11)}{4};$

2)  $\frac{3\sqrt{x}+13}{8} - \frac{3(2\sqrt{x}-3)}{5} = \frac{2(4-\sqrt{x})}{3} - 7;$

3)  $\frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{2(\sqrt{x}-7)}{3} = 14\frac{1}{2} - \frac{2(\sqrt{x}+3)}{5};$

4)  $\frac{2(5\sqrt{x}-2)}{9} - 17 = \frac{4(23-2\sqrt{x})}{5} - \frac{5(11\sqrt{x}+1)}{9}.$

4.170°. Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу:

1)  $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1};$

2)  $\frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}-3};$

3)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-6};$

4)  $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}.$

Дакажыце тоеснасць (4.171—4.172).

4.171. 1)  $7x - 16\sqrt{x} - 7 = 5(1 - \sqrt{x})^2 - 3(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) - (3 + \sqrt{x})^2;$

2)  $(\sqrt{x} + 4)^2 - (\sqrt{x} + 8)(\sqrt{x} - 8) = 17 + 50\sqrt{x} - 7x + 7(\sqrt{x} - 3)^2.$



$$4.172*. 1) \sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}}$$

пры  $m \geq 0, n \geq 0, m^2 - n \geq 0$ ;

$$2) \sqrt{m - \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - n}}{2}} - \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - n}}{2}}$$

пры  $m \geq 0, n \geq 0, m^2 - n \geq 0$ .

Выканайце дзеянні (4.173—4.175).

$$4.173. 1) \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$2) \frac{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}};$$

$$3) \frac{20}{7 - \sqrt{29}} - \frac{15}{6 + \sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{29} - \sqrt{21}};$$

$$4) \frac{5}{4 + \sqrt{11}} + \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{11}} - \frac{10}{\sqrt{19} + 3}.$$

$$4.174*. 1) \frac{1}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}};$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{39 - 12\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{39 + 12\sqrt{3}}};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{7 + \sqrt{24}} - 1};$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{7 + \sqrt{48}} - 2} + \frac{1}{\sqrt{7 - \sqrt{48}} + 2}.$$

$$4.175. 1) \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \sqrt{7};$$

$$2) \frac{5}{\sqrt{8} - \sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{8} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

Спрасціце выраз (4.176—4.179).

$$4.176. 1) \frac{\sqrt{4 - 4a + a^2}}{a - 2} - \frac{a - 2}{a^2 - 4}, \text{ калі } a < 2, a \neq -2;$$

$$2) \frac{\sqrt{a^2 - 6a + 9}}{3 - a} + \frac{a - 2}{\sqrt{a^2 - 4a + 4}}, \text{ калі } a > 3;$$

$$3) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

$$4)^* \left( \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right).$$

$$4.177^*. 1) \left( \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1};$$

$$2) \frac{a^2-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}+a} - \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} + a+1;$$

$$3) \left( 1 + \sqrt{1-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} \right) : \left( \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right);$$

$$4) \left( \sqrt{a-a^2} + \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}} \right) : \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}}.$$

$$4.178^*. 1) \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} + \frac{a^2-\frac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b};$$

$$2) \frac{a^2-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}+a} - \frac{a^2+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}+a}.$$

$$4.179. 1) \sqrt{(\sqrt{24}+\sqrt{40})(10-\sqrt{60})};$$

$$2) \sqrt{\sqrt{6}+4\sqrt{\frac{3}{2}}+12+\sqrt{24}}.$$

4.180. Выканайце дзеянні і знайдзіце значэнне выразу:

$$1) \frac{1+x}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} \text{ пры } x=0,75;$$

$$2) \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-5}} + \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-5}} \text{ пры } x=3;$$

$$3) \left( 1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) \text{ пры } x=4, a=5;$$

$$4) \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \text{ пры } x=3, a=5.$$

Знайдзіце значэнне выразу (4.181–4.182).

$$4.181. 1)^\circ (-4\sqrt{3})^2;$$

$$2)^\circ (-5\sqrt{2})^2;$$

$$3)^\circ (2\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{2})^2;$$

$$4)^\circ (5\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{5})^2;$$

$$5) 18\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2 + \frac{1}{6}(4\sqrt{3})^2;$$

$$6) \frac{1}{3}(-7\sqrt{15})^2 - 32\left(-\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)^2.$$

$$4.182^\circ. \quad 1) \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3}; \quad 2) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5};$$

$$3) \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 - 2(\sqrt{3})^2; \quad 4) (2\sqrt{7})^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2;$$

$$5) 27\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2; \quad 6) \frac{1}{3}(\sqrt{12})^2 - 0,1(\sqrt{40})^2.$$

Выканайце дзеянні (4.183—4.185).

$$4.183^\circ. \quad 1) (1 - \sqrt{441})(1 + \sqrt{441});$$

$$2) (\sqrt{144} - 2)(\sqrt{144} + 2);$$

$$3) (\sqrt{13\,025} + 5)(\sqrt{13\,025} - 5);$$

$$4) (\sqrt{2025} - 1)(\sqrt{2025} + 1);$$

$$5) (\sqrt{4225} - \sqrt{196})(\sqrt{4225} + \sqrt{196});$$

$$6) (\sqrt{5625} - \sqrt{256})(\sqrt{5625} + \sqrt{256}).$$

$$4.184^\circ. \quad 1) (\sqrt{5} + 2)^2; \quad 2) (\sqrt{3} - 4)^2; \quad 3) (3\sqrt{2} - 1)^2;$$

$$4) (5 + 2\sqrt{3})^2; \quad 5) (6 - \sqrt{2})^2; \quad 6) (\sqrt{7} + \sqrt{14})^2.$$

$$4.185. \quad 1)^\circ (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1);$$

$$2)^\circ (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2);$$

$$3) (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3};$$

$$4) (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5};$$

$$5) (\sqrt{3} + 6)^2 - (4 - \sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3};$$

$$6) (\sqrt{5} - 1)^2 - (6 - \sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5};$$

$$7) (2 - \sqrt{10})^2 + (\sqrt{10} - 3)^2 - 3\sqrt{10};$$

$$8) (4 + \sqrt{6})^2 - (3 - \sqrt{6})^2 - 7\sqrt{6}.$$

4.186. Знайдзіце значэнне выразу  $4y^2 - 5ay - 4a^2$  пры:

$$1) y = \sqrt{6} + \sqrt{5}, \quad a = \sqrt{6} - \sqrt{5};$$

$$2) y = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad a = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

4.187. Выканайце дзеянні:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{20\sqrt{7} - 10\sqrt{3}}{8\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}; & 2) \frac{3\sqrt{5} - 18\sqrt{2}}{6\sqrt{5} - 36\sqrt{2}}; \\ 3) \frac{2\sqrt{3} + 6\sqrt{5}}{15\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}; & 4) \frac{12\sqrt{10} + 9\sqrt{2}}{36\sqrt{10} + 27\sqrt{2}}; \\ 5) \frac{4\sqrt{17} - 12\sqrt{7}}{18\sqrt{7} - 6\sqrt{17}}; & 6) \frac{12\sqrt{15} - 10\sqrt{5}}{20\sqrt{5} - 24\sqrt{15}}. \end{array}$$

4.188. Знайдзіце значэнне выразу  $\sqrt{m^2 + n^2}$  пры:

$$\begin{array}{ll} 1) m = \sqrt{13}, n = 6; & 2) m = 3, n = 7; \\ 3) m = 5\sqrt{2}, n = -5\sqrt{2}; & 4) m = -9\sqrt{2}, n = 9\sqrt{2}. \end{array}$$

4.189°. Ці мае сэнс выраз:

$$\begin{array}{lll} 1) \left(\frac{0}{9}\right)^{-1}; & 2) \frac{7}{3-6:2}; & 3) \sqrt{3^{-1}}; \\ 4) \sqrt{(-4)^{-8}}; & 5) (2 - 0,5 \cdot 4)^0; & 6) -\sqrt{9}; \\ 7) \sqrt{(-2)^{-3}}; & 8) 1^{-1} : 3^0? & \end{array}$$

4.190. Рашыце ўраўненне:

$$\begin{array}{l} 1) 3x - 5 = 10 - (\sqrt{x})^2; \\ 2) 4x + 4 = (\sqrt{x})^2 + 5; \\ 3) (\sqrt{5x})^2 + 3(3(\sqrt{x})^2 + 7) = 9; \\ 4) 8(\sqrt{x})^2 - ((\sqrt{7x})^2 + 8) = 2; \\ 5) 3(\sqrt{x-2})^2 - 2(\sqrt{x-1})^2 = 17; \\ 6) 4(\sqrt{2x-1})^2 + 3(\sqrt{1-2x})^2 = 7; \\ 7) \frac{(\sqrt{x})^2 + 3}{2} = (\sqrt{x})^2 - 4; \\ 8) 2 - 3(\sqrt{x})^2 = \frac{(\sqrt{x})^2 - 12}{2}. \end{array}$$

4.191\*. Дакажыце, што лік з'яўляецца ірацыянальным:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{7} + 3; & 2) \sqrt{10} - 4; & 3) 3\sqrt{5} - 2; \\ 4) 2\sqrt{11} + 5; & 5) \sqrt{6} - \sqrt{13}; & 6) \sqrt{5} - \sqrt{2}. \end{array}$$

4.192. Ці правільна, што:

- 1) любы рацыянальны лік з'яўляецца рэчаісным;
- 2) любы рэчаісны лік з'яўляецца рацыянальным;
- 3) любы ірацыянальны лік з'яўляецца рэчаісным;
- 4) любы рэчаісны лік з'яўляецца ірацыянальным;
- 5) існуе рэчаісны лік, які не з'яўляецца рацыянальным;
- 6) існуе рэчаісны лік, які не з'яўляецца ірацыянальным;
- 7) існуе рацыянальны лік, які не з'яўляецца рэчаісным;
- 8) існуе цэлы лік, які не з'яўляецца рацыянальным?

4.193. Ці правільна, што лік з'яўляецца рацыянальным:

- 1)  $7\sqrt{3} + 5$ ;
- 2)  $4\sqrt{5} - 13$ ;
- 3)  $2\sqrt{5} + 3 - (\sqrt{2^2} + 2\sqrt{5})$ ;
- 4)  $24 : (3\sqrt{16} + 12)$ ;
- 5)  $48 : (6 - 2\sqrt{9})$ ;
- 6)  $1 + 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} + 2)\sqrt{2}$ ?

4.194. Ці правільна, што значэнне арыфметычнага квадратнага караня з дадатнага рацыянальнага ліку:

- 1) заўсёды ірацыянальны лік;
- 2) можа быць рацыянальным лікам;
- 3) заўсёды дадатны лік;
- 4) заўсёды рэчаісны лік?

4.195. Запішыце (калі магчыма) два значэнні  $a$ , пры якіх меншы карань ураўнення  $x^2 = a$  з'яўляецца:

- 1) цэлым лікам;
- 2) рацыянальным лікам;
- 3) ірацыянальным лікам;
- 4) натуральным лікам;
- 5) нулём;
- 6) дадатным лікам.

**4.196\*.** Ці правільна, што калі  $x$  і  $y$  — ірацыянальныя лікі, то ірацыянальным будзе і лік:

- 1)  $x + y$ ;      2)  $x - y$ ;      3)  $x \cdot y$ ;      4)  $x : y$ ?

Прывядзіце два прыклады, што ілюструюць ваш адказ.

**4.197\*.** Ці можа дроб  $\frac{a}{b}$  быць рацыянальным лікам, калі:

- 1)  $a$  — рацыянальны лік,  $b$  — ірацыянальны;  
 2)  $a$  — ірацыянальны лік,  $b$  — рацыянальны;  
 3)  $a$  і  $b$  — рацыянальныя лікі;  
 4)  $a$  і  $b$  — ірацыянальныя лікі?

Калі можна, то прывядзіце два прыклады, што пацвердзяць ваш адказ.

### 4.8. Лікавыя няроўнасці, што змяшчаюць квадратныя карані

З выніку з тэарэмы 2 п. 1.4 можна атрымаць сцверджанне: калі  $a$  і  $b$  — неадмоўныя лікі і  $a < b$ , то  $a^n < b^n$  пры любым натуральным  $n$  (дакажыце самастойна).

Абгрунтуем цяпер некалькі ўласцівасцей для лікавых няроўнасцей, што змяшчаюць квадратныя карані.

**Тэарэма.** Пры любых неадмоўных значэннях  $a$  і  $b$ :

- 1) калі  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ , то  $a < b$ ;  
 2) калі  $a < b$ , то  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

**Доказ.** 1) Няхай  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . Тады па выніку з тэарэмы 2 п. 1.4 маем  $(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$ , г. зн.

$$a < b.$$

2) Няхай  $a < b$ . Трэба даказаць, што  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . Дакажам гэта метадам ад процілеглага. Дапусцім, што няроўнасць  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  — няправільная. Тады або  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ , або  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .

Калі  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ , то  $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$ , г. зн.  $a = b$ , што супярэчыць умове  $a < b$ .

Калі  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , г. зн.  $\sqrt{b} < \sqrt{a}$ , то з ужо даказанай намі часткі 1) гэтай тэарэмы вынікае, што  $b < a$ , а гэта зноў супярэчыць умове  $a < b$ . Значыць, дапушчанае немагчыма.

Такім чынам, калі  $a < b$ , то  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . ☒

Заўважым, што гэту тэарэму можна сфармуляваць так:



пры неадмоўных  $a$  і  $b$  няроўнасці  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  і  $a < b$  адначасова правільныя (або адначасова няправільныя); гавораць таксама, што гэтыя няроўнасці раўназначныя.

**Прыклад 1.** Параўнаць лікі 9,5 і  $\sqrt{89}$ .

Рашэнне. Параўнаем квадраты лікаў 9,5 і  $\sqrt{89}$ :

$$(9,5)^2 = 90,25; (\sqrt{89})^2 = 89.$$

Няроўнасць  $90,25 > 89$  правільная.

Значыць, згодна з тэарэмай гэтага пункта няроўнасць  $\sqrt{90,25} > \sqrt{89}$ , г. зн.  $9,5 > \sqrt{89}$  таксама правільная.

Адказ:  $9,5 > \sqrt{89}$ .

**Прыклад 2.** Даказаць, што правільная няроўнасць

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3.$$

Доказ. Паколькі  $a = \sqrt{a^2}$  пры  $a \geq 0$ , то няроўнасць  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$  раўназначная няроўнасці  $\sqrt{2,2^2} < \sqrt{5} < \sqrt{2,3^2}$ , г. зн.  $\sqrt{4,84} < \sqrt{5} < \sqrt{5,29}$ . На падставе тэарэмы гэтага пункта апошняя няроўнасць раўназначная правільнай лікавай няроўнасці  $4,84 < 5 < 5,29$ . Значыць, няроўнасць  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$  правільная. ☒

**Прыклад 3.** Даказаць, што пры  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  правільная няроўнасць  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

Доказ. Разгледзім рознасць левай і правай частак дадзенай няроўнасці і вызначым яе знак:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} =$$

↑ выразы  $\sqrt{a}$  і  $\sqrt{b}$  маюць сэнс, паколькі па ўмове ↑  
 $a \geq 0$  і  $b \geq 0$

↓ па формуле квадрата рознасці атрымаем ↓

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Такім чынам,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .  $\square$

Няроўнасць, даказаную ў прыкладзе 3, можна прачытаць так:



*сярэдняе арыфметычнае неадмоўных лікаў  $a$  і  $b$  не меншае за іх сярэдняе геаметрычнае.*

Заўвага. Калі  $a = b$ , то  $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = 0$ , тады  $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0$ , адкуль  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ .

Такім чынам, калі  $a = b$ , то сярэдняе арыфметычнае неадмоўных лікаў  $a$  і  $b$  роўнае іх сярэдняму геаметрычнаму.

Наадварот, калі  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ , то

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = 0.$$

Адсюль вынікае, што  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ , і, значыць,  $a = b$ .

Такім чынам, калі сярэдняе арыфметычнае двух неадмоўных лікаў роўнае іх сярэдняму геаметрычнаму, то гэтыя лікі роўныя.

▲ **Прыклад 4.** Рашыць няроўнасць:

а)  $\sqrt{x} < 2,5$ ;      б)  $\sqrt{x} > 13$ .

Рашэнне. а) Выраз  $\sqrt{x}$  мае сэнс толькі пры неадмоўных значэннях  $x$ ; значыць,  $x \geq 0$ . Пры гэтых значэннях  $x$  абедзве часткі няроўнасці  $\sqrt{x} < 2,5$  неадмоўныя, і дадзеная няроўнасць раўназначная няроўнасці  $(\sqrt{x})^2 < (2,5)^2$ , г. зн.  $x < 6,25$ .

Такім чынам,  $x \geq 0$  і  $x < 6,25$ , г. зн.  $0 \leq x < 6,25$ .

б) Выраз  $\sqrt{x}$  мае сэнс толькі пры неадмоўных значэннях  $x$ ; значыць,  $x \geq 0$ . Пры гэтых значэннях  $x$  абедзве часткі няроўнасці  $\sqrt{x} > 13$  неадмоўныя, і дадзеная няроўнасць раўназначная няроўнасці  $(\sqrt{x})^2 > 13^2$ . Такім чынам, дадзеная няроўнасць раўназначная сістэме

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 169, \end{cases}$$

адкуль маем  $x > 169$ .

Адказ: а)  $[0; 6,25)$ ; б)  $(169; +\infty)$ .





Рашэнне няроўнасці а) можна аформіць і так:

$$\sqrt{x} < 2,5;$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{x})^2 < (2,5)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 6,25; \end{cases}$$

$$0 \leq x < 6,25.$$

Адказ:  $[0; 6,25)$ . ▲



1. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму аб раўназначнасці няроўнасцей  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  і  $a < b$ .
2. Як параўнаць лікі  $7,5$  і  $\sqrt{50}$ ?
3. Дадзены два неадмоўныя лікі  $m$  і  $k$ . Назавіце лік, які з'яўляецца для лікаў  $m$  і  $k$ :  
а) сярэднім арыфметычным; б) сярэднім геаметрычным.
4. Дакажыце, што сярэдняе арыфметычнае неадмоўных лікаў  $m$  і  $k$  не меншае за іх сярэдняе геаметрычнае.

### Практыкаванні

Параўнайце лікі (4.198—4.201).

4.198°. 1)  $8$  і  $\sqrt{63}$ ;

2)  $4$  і  $\sqrt{17}$ ;

3)  $4\sqrt{5}$  і  $9\sqrt{2}$ ;

4)  $\sqrt{18}$  і  $4\sqrt{2}$ ;

5)  $3\sqrt{2}$  і  $2\sqrt{3}$ ;

6)  $5\sqrt{3}$  і  $3\sqrt{5}$ .

4.199°. 1)  $-4\sqrt{20}$  і  $-3\sqrt{20}$ ;

2)  $-5\sqrt{2}$  і  $-4\sqrt{2}$ ;

3)  $5\sqrt{3}$  і  $6\sqrt{2}$ ;

4)  $3\sqrt{7}$  і  $4\sqrt{5}$ ;

5)  $-8\sqrt{6}$  і  $-6\sqrt{8}$ ;

6)  $-3\sqrt{21}$  і  $-4\sqrt{15}$ .

4.200. 1)  $\frac{1}{6}\sqrt{153}$  і  $\frac{1}{4}\sqrt{272}$ ;

2)  $\frac{3}{4}\sqrt{240}$  і  $\frac{3}{5}\sqrt{375}$ ;

3)  $-\sqrt{627}$  і  $-3\sqrt{325}$ ;

4)  $-\frac{1}{3}\sqrt{189}$  і  $-\frac{1}{2}\sqrt{208}$ .

4.201. 1)  $\frac{15}{\sqrt{5}}$  і  $\frac{12}{\sqrt{6}}$ ;

2)  $\frac{21}{2\sqrt{3}}$  і  $\frac{14}{\sqrt{7}}$ ;

3)  $\frac{11}{2\sqrt{3}+1}$  і  $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$ ;

4)  $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(\sqrt{7}+2\sqrt{3})$  і  $(3+2\sqrt{7})^2$ .

4.202°. Параўнайце з нулём лік:

1)  $\sqrt{20}-4$ ; 2)  $9-\sqrt{39}$ ;

3)  $\sqrt{104}-11$ ; 4)  $6-\sqrt{87}$ .

4.203°. Вызначыце, паміж якімі паслядоўнымі натуральнымі лікамі змяшчаецца лік:

1)  $\sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt{7}$ ; 3)  $\sqrt{19}$ ; 4)  $\sqrt{23}$ ;

5)  $\sqrt{79}$ ; 6)  $\sqrt{83}$ ; 7)  $\sqrt{257}$ ; 8)  $\sqrt{54}$ .

4.204°. Запішыце цэлыя лікі, змешчаныя паміж:

1)  $\sqrt{8}$  і  $\sqrt{67}$ ; 2)  $-\sqrt{42}$  і  $-\sqrt{14}$ ;

3)  $-\sqrt{2,83}$  і  $\sqrt{3,69}$ ; 4)  $\sqrt{0,27}$  і  $\sqrt{29,18}$ .

4.205°. Знайдзіце найбольшы цэлы лік, меншы за лік:

1)  $\sqrt{5}$ ; 2)  $\sqrt{67}$ ; 3)  $\sqrt{149}$ ;

4)  $\sqrt{11}$ ; 5)  $\sqrt{234}$ ; 6)  $\sqrt{1149}$ .

4.206°. Знайдзіце найменшы цэлы лік, большы за лік:

1)  $\sqrt{8}$ ; 2)  $\sqrt{15}$ ; 3)  $\sqrt{63}$ ;

4)  $\sqrt{263}$ ; 5)  $\sqrt{741}$ ; 6)  $\sqrt{999}$ .

Вызначыце, ці правільная суадносіна (4.207—4.208).

4.207°. 1)  $\sqrt{8,41} \geq 2,8$ ; 2)  $\sqrt{14,44} = 3,8$ ;

3)  $\sqrt{29,16} = 5,4$ ; 4)  $\sqrt{7,29} \leq 2,7$ ;

5)  $\sqrt{39,69} \geq 6$ ; 6)  $\sqrt{50,41} \leq 7,2$ ;

7)  $\sqrt{88,36} < 9,8$ ; 8)  $\sqrt{86,49} > 9$ .

4.208. 1)  $5,8 < \sqrt{35} < 5,9$ ; 2)  $6,7 < \sqrt{46} < 6,8$ ;

3)  $14,6 < \sqrt{215} < 14,7$ ; 4)  $20,6 < \sqrt{429} < 20,7$ .

Размясціце лікі ў парадку нарастання (4.209—4.210).

4.209. 1)  $\sqrt{12}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{9,9}$ ;      2)  $\sqrt{1,24}$ ;  $\sqrt{1,02}$ ;  $\sqrt{1,204}$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{7}{8}}$ ;  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ;  $\sqrt{\frac{11}{12}}$ ;      4)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  $\sqrt{\frac{6}{7}}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{6}}$ .

4.210. 1)  $-\sqrt{32}$ ;  $\sqrt{52}$ ;  $-\sqrt{128}$ ;  $\frac{2}{3}\sqrt{162}$ ;  $\frac{4}{11}\sqrt{242}$ ;  
 2)  $\frac{3}{8}\sqrt{432}$ ;  $-\sqrt{75}$ ;  $100\sqrt{48}$ ;  $\frac{1}{7}\sqrt{147}$ ;  $-\sqrt{27}$ .

4.211°. Дакажыце няроўнасць:

1)  $3 < \sqrt{10} < 4$ ;      2)  $3 < \sqrt{15} < 4$ ;  
 3)  $6 < \sqrt{42} < 7$ ;      4)  $8 < \sqrt{75} < 9$ .

4.212. Ці правільная няроўнасць:

1)  $\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} \leq \sqrt{17}$ ;  
 2)  $\sqrt{26 - \sqrt{9 - \sqrt{64}}} < \sqrt{23}$ ;  
 3)  $\sqrt{120 + \sqrt{6 - \sqrt{25}}} > \sqrt{124}$ ;  
 4)  $\sqrt{39 - \sqrt{5 + \sqrt{16}}} \geq \sqrt{37}$ ?

4.213. Дакажыце, што для любых лікаў, калі  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , то  $\sqrt{a^3} > \sqrt{b^3}$ .

4.214. Дакажыце, што калі  $p \geq 0$ , то правільная няроўнасць:

1)  $\frac{3+p}{2} \geq \sqrt{3p}$ ;      2)  $\frac{5+p}{2} \geq \sqrt{5p}$ ;  
 3)  $7 + 2p \geq 2\sqrt{14p}$ ;      4)  $3 + 7p \geq 2\sqrt{21p}$ ;  
 5)  $11p + 3 - \sqrt{132p} \geq 0$ ;      6)  $2 + 13p - \sqrt{104p} \geq 0$ .

4.215. Дакажыце няроўнасць:

1)  $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$  пры  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;  
 2)  $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$  пры  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;

$$3)^* \frac{a^2 + 9}{\sqrt{a^2 + 8}} > \sqrt{2a} \text{ пры } a > 0;$$

$$4) \frac{a}{6} + \frac{1}{a} \geq 0,4 \text{ пры } a > 0.$$

**4.216\*.** Дакажыце, што пры  $k > 1$  правільная няроўнасць:

$$1) \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}); \quad 2) \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Дакажыце няроўнасць (**4.217—4.218**).

$$\mathbf{4.217.} \quad 1) 1 + \sqrt{6} + \sqrt{27} > \sqrt{48}; \quad 2) \sqrt{50} - \sqrt{32} < 1 + \sqrt{6}.$$

$$\mathbf{4.218*} \quad 1) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{20^2} < \frac{19}{20};$$

$$2) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{20^2} > \frac{19}{42};$$

$$3) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} > 1;$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{16}} + \frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{19} + \sqrt{18}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{30} + \sqrt{29}} < 2.$$

Рашыце няроўнасць (**4.219—4.230**).

$$\mathbf{4.219*} \quad 1) \sqrt{x} > 2; \quad 2) \sqrt{x} < 2; \quad 3) \sqrt{x} > 0;$$

$$4) \sqrt{x} \leq 0; \quad 5) \sqrt{x} \leq 0,9; \quad 6) \sqrt{x} \geq 1,2;$$

$$7) \sqrt{x} > -0,3; \quad 8) \sqrt{x} < -0,7.$$

$$\mathbf{4.220*} \quad 1) \sqrt{x+4} < 7; \quad 2) \sqrt{x-5} > 3;$$

$$3) \sqrt{x-1} \geq 1; \quad 4) \sqrt{x+8} \leq 2.$$

$$\mathbf{4.221*} \quad 1) \sqrt{2x-4} \leq 0; \quad 2) \sqrt{6x+12} \geq 0;$$

$$3) \sqrt{5x+10} \geq 0; \quad 4) \sqrt{3x-9} \leq 0;$$

$$5) \sqrt{4x-2} > -1; \quad 6) \sqrt{6-2x} < -1;$$

$$7) \sqrt{9x+3} \leq -3; \quad 8) \sqrt{25x+10} \geq -5.$$

$$\mathbf{4.222*} \quad 1) \frac{1}{\sqrt{5x+4}} \geq 3; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{6x-7}} < 2;$$

$$3) \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{25-50x}} \leq 6; \quad 4) \frac{\sqrt{113^2-112^2}}{\sqrt{27-36x}} \geq 4.$$

- 4.223\*. 1)  $\sqrt{-x} \geq 0$ ; 2)  $\sqrt{-x} \leq 0$ ;  
3)  $\sqrt{-x} > -1$ ; 4)  $\sqrt{-x} < -2$ ;  
5)  $\sqrt{-x} \geq 2$ ; 6)  $\sqrt{-x} < 4$ .
- 4.224\*. 1)  $\sqrt{|x|} \geq 3$ ; 2)  $\sqrt{|x|} \leq 2$ ;  
3)  $\sqrt{3-x} \leq 8$ ; 4)  $\sqrt{4-x} > 4$ ;  
5)  $\sqrt{(6-x)^2} < 1$ ; 6)  $\sqrt{(3-x)^2} > 5$ .
- 4.225. 1)  $\sqrt{(x+3)^2} \leq 0$ ; 2)  $\sqrt{(x-4)^2} \geq 0$ ;  
3)  $\sqrt{(1-x)^2} > 0$ ; 4)  $\sqrt{(x+2)^2} < 0$ .
- 4.226. 1)  $-\sqrt{(x-6)^2} \geq 0$ ; 2)  $-\sqrt{(5-x)^2} \leq 0$ ;  
3)  $\sqrt{-(16+2x)^2} \leq 0$ ; 4)  $\sqrt{-(6-2x)^2} \geq 0$ ;  
5)  $-\sqrt{-(x-2)^2} \geq 0$ ; 6)  $-\sqrt{-(x+1)^2} \leq 0$ .
- 4.227. 1)  $\sqrt{x^2+6x+9} \leq 0$ ; 2)  $\sqrt{x^2-10x+25} \geq 0$ ;  
3)  $\sqrt{-49-x^2+14x} \leq 0$ ; 4)  $\sqrt{8x-16-x^2} \geq 0$ .
- 4.228\*. 1)  $-\sqrt{16x^2+8x\sqrt{2}+2} \geq 0$ ;  
2)  $-\sqrt{7-2\sqrt{7}x+x^2} \leq 0$ ;  
3)  $-\sqrt{-1+2\sqrt{6}x-6x^2} \leq 0$ ;  
4)  $-\sqrt{-5x^2+2\sqrt{15}x-3} \geq 0$ .
- 4.229\*. 1)  $\sqrt{x^2+4-4x} > 6$ ; 2)  $\sqrt{x^2+9+6x} \geq 3$ ;  
3)  $\sqrt{9x^2+1+6x} \leq 2$ ; 4)  $\sqrt{4+25x^2-20x} < 6$ .
- 4.230\*. 1)  $1 < \sqrt{x} < 2$ ; 2)  $3 < \sqrt{x} < 4$ ;  
3)  $2 \leq \sqrt{x} < 4$ ; 4)  $1 < \sqrt{x} \leq 5$ ;  
5)  $3 < \sqrt{x-3} \leq 5$ ; 6)  $2 \leq \sqrt{x+1} < 3$ .

## Раздзел 5

# КВАДРАТНЫЯ ЎРАЎНЕННІ

### 5.1. Квадратныя ўраўненні. Няпоўныя квадратныя ўраўненні

**Азначэнне.** *Квадратным ураўненнем называецца ўраўненне выгляду*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

дзе  $a, b$  і  $c$  — лікі,  $a \neq 0$ ,  $x$  — зменная (невядомае).

Лікі  $a, b$  і  $c$  называюцца *каэфіцыентамі* квадратнага ўраўнення. Лік  $a$  — *старшым каэфіцыентам*,  $b$  — *сярэднім каэфіцыентам*,  $c$  — *свабодным членам*.

Квадратнае ўраўненне называецца яшчэ *ўраўненнем другой ступені з адной зменнай (з адным невядомым)*.



Падкрэслім, што калі ўраўненне  $ax^2 + bx + c = 0$  квадратнае, то  $a \neq 0$ .

Квадратнае ўраўненне  $ax^2 + bx + c = 0$ , у якім хаця б адзін з каэфіцыентаў  $b$  або  $c$  роўны нулю, называецца *няпоўным*. Няпоўныя ўраўненні  $ax^2 + c = 0$ ,  $ax^2 + bx = 0$  і  $ax^2 = 0$  — гэта прыватныя выпадкі квадратнага ўраўнення.



Тэрмін «квадрат» атрымаўся як літаральны пераклад грэчаскага слова «*чатырохвугольны*» — «*quadratus*». У Расіі ён з'явіўся яшчэ ў дапятроўскую эпоху: слова «квадратум» сустракаецца ў кнігах 1499 г. Ад гэтага слова ўтвораны прыметнікі: «*квадратны*» (ёсць у працах рускага матэматыка-педагога Лявонція Фёдаравіча Магніцкага) і «*квадратычны*» (у працах канца XVIII ст.). Назву «*квадратныя ўраўненні*» ўпершыню выкарыстаў у 1710 г. нямецкі вучоны Хрысціян Вольф, потым яна хутка распаўсюдзілася па ўсёй Еўропе.

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне  $5x^2 = 0$ .

Рашэнне. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на 5, атрымаем раўназначнае яму ўраўненне  $x^2 = 0$  з адзіным коранем  $x = 0$ .

Адказ: 0.

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне  $4x^2 - 3 = 0$ .

Рашэнне. Пасля пераўтварэнняў атрымаем ураўненне  $x^2 = \frac{3}{4}$ , раўназначнае дадзенаму. Адкуль

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ або } x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Адказ:  $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Адказ можна запісаць і ў такой форме:  $x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , і ў такой:  $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (чытаецца «плюс-мінус карань з трох, падзелены на два»).

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне  $4x^2 + 36 = 0$ .

Рашэнне. Значэнне выразу  $4x^2 + 36$  дадатнае пры любым значэнні  $x$  (патлумачце чаму). Значыць, ураўненне  $4x^2 + 36 = 0$  не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

**Прыклад 4.** Рашыць ураўненне  $4x^2 - 7x = 0$ .

Рашэнне. Раскладзём левую частку ўраўнення на множнікі:  $x(4x - 7) = 0$ . Паколькі здабытак роўны нулю, калі хаця б адзін з множнікаў роўны нулю, то атрымаем:

$$x = 0 \text{ або } 4x - 7 = 0.$$

Рашыўшы ўраўненне  $4x - 7 = 0$ , знойдзем  $x = \frac{7}{4}$ .

Адказ:  $0; \frac{7}{4}$ .

▲ **Прыклад 5.** Рашыць ураўненне

$$3x^2 - 5|x| = 0. \quad (1)$$

Рашэнне. *Спосаб 1.*

Заўважым, што

$$x^2 = |x|^2$$

пры ўсіх значэннях  $x$ .

Абазначым  $|x| = t$  і падставім  $t$  ва ўраўненне (1):

$$3t^2 - 5t = 0,$$

$$t(3t - 5) = 0,$$

$$t = 0 \text{ або } t = \frac{5}{3}.$$

Такім чынам,  $|x| = 0$  або  $|x| = \frac{5}{3}$ .

Па азначэнні модуля маем:

$$x = 0 \text{ або } x = -\frac{5}{3} \text{ або } x = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Адказ: } -\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}.$$



**Способ 2.** Па азначэнні модуля ўраўненне (1) пры  $x \geq 0$  раўназначнае ўраўненню

$$3x^2 - 5x = 0, \quad (2)$$

а пры  $x < 0$  ураўненне (1) раўназначнае ўраўненню

$$3x^2 + 5x = 0. \quad (3)$$

Рашыўшы ўраўненне (2), атрымаем

$$x = 0 \text{ або } x = \frac{5}{3},$$

прычым абодва значэнні задавальняюць умову  $x \geq 0$ .

Рашыўшы ўраўненне (3), атрымаем

$$x = 0 \text{ або } x = -\frac{5}{3},$$

прычым умову  $x < 0$  задавальняе толькі значэнне  $x = -\frac{5}{3}$ .

Аб'яднаўшы рашэнні ўраўненняў (2) і (3), атрымаем усе карані ўраўнення (1).



Гэта рашэнне можна запісаць і так:

$$3x^2 - 5|x| = 0;$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 3x^2 - 5x = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ 3x^2 + 5x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \left( x = 0 \text{ або } x = \frac{5}{3} \right) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ \left( x = 0 \text{ або } x = -\frac{5}{3} \right); \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ або } x = \frac{5}{3} \text{ або } x = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Адказ: } -\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}. \blacktriangle$$



1. Якое ўраўненне называецца квадратным?
2. Як называюць каэфіцыенты квадратнага ўраўнення?
3. Якое квадратнае ўраўненне называецца няпоўным?
4. Прывядзіце прыклад няпоўнага квадратнага ўраўнення, у якім нулю роўны:
  - а) толькі свабодны член;
  - б) толькі сярэдні каэфіцыент;
  - в) і свабодны член, і сярэдні каэфіцыент.



## Практыкаванні

5.1°. Запішыце старшы і сярэдні каэфіцыенты, а таксама свабодны член у квадратным ўраўненні:

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ; | 2) $5x^2 - 16x - 12 = 0$ ; |
| 3) $-21 + 3x^2 = 0$ ;    | 4) $24 - 7x^2 = 0$ ;       |
| 5) $-x - x^2 = 0$ ;      | 6) $x^2 + x = 0$ ;         |
| 7) $3 - x^2 - 4x = 0$ ;  | 8) $-9 + x + x^2 = 0$ ;    |
| 9) $31x^2 = 0$ ;         | 10) $-16x^2 = 0$ ;         |
| 11) $4x^2 + 18x = 0$ ;   | 12) $12x^2 - 1,3x = 0$ .   |

5.2°. Запішыце ўраўненне ў выглядзе  $ax^2 + bx + c = 0$  пры  $a > 0$  і пазначце старшы і сярэдні каэфіцыенты, а таксама свабодны член:

- 1)  $8x^2 + 3x(5x - 1) = 6$ ;
- 2)  $13x^2 = 8 - 4x(2x - 1)$ ;
- 3)  $x - 3 = 4(2 - 3x)^2 + (5x + 7)(7 - 5x)$ ;
- 4)  $5 - 3x - (4x - 1)^2 = 8(x - 4)^2$ ;
- 5)  $x^3 - 1 + (x - 1)(x + 2) = x^2(x - 2)$ ;
- 6)  $(2x - 3)^2 x - 4x^2(x + 3) = 9$ .

5.3°. Якія з лікаў  $-4$ ;  $-3$ ;  $-2$ ;  $-1$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $3$ ;  $4$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $x^2 - 1 = 0$ ;                          | 2) $x^2 + x - 6 = 0$ ;                              |
| 3) $x^2 - 5x + 4 = 0$ ;                     | 4) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ;                             |
| 5) $\frac{(x^2 - 9)(x + 1)}{x^2 - 1} = 0$ ; | 6) $\frac{(x^3 - 1)(x^4 - 16)}{x^2 - 4x + 4} = 0$ ? |

Рашыце ўраўненне (5.4—5.17).

- 5.4°. 1)  $0,01x^2 = 4$ ; 2)  $4x^2 = 0,16$ ;  
 3)  $16x^2 + 9 = 0$ ; 4)  $2x^2 + 21 = 3$ ;  
 5)  $-3x^2 + 5^0 = 1$ ; 6)  $26^0 - x^2 = 1$ .
- 5.5°. 1)  $x^2 - 100 = 0$ ; 2)  $x^2 - 225 = 0$ ; 3)  $x^2 - 5 = 20$ ;  
 4)  $x^2 + 10 = 59$ ; 5)  $x^2 + 13 = 4$ ; 6)  $x^2 + 36 = 11$ .

5.6°. 1)  $x^2 = 2\frac{7}{9}$ ; 2)  $x^2 = 1\frac{9}{16}$ ; 3)  $2x^2 = 32$ ;  
4)  $5x^2 = 20$ ; 5)  $7x^2 = 1575$ ; 6)  $11x^2 = 704$ .

5.7°. 1)  $x^2 = 3$ ; 2)  $6x^2 = 5$ ; 3)  $19x^2 = 12\frac{2}{3}$ ;  
4)  $7x^2 = 14$ ; 5)  $4x^2 = 8 - x^2$ ; 6)  $32 + 3x^2 = 8x^2$ .

5.8. 1)°  $(x + 2)^2 = 0$ ; 2)°  $(x - 3)^2 = 0$ ;  
3)  $25x^2 - 30x + 9 = 0$ ; 4)  $49 + 140x + 100x^2 = 0$ ;  
5)  $36 + 4x^2 - 24x = 0$ ; 6)  $16x^2 - 8x + 1 = 0$ .

5.9°. 1)  $x^2 - x = 0$ ; 2)  $x^2 + x = 0$ ;  
3)  $x^2 + 2x = 0$ ; 4)  $x^2 - 5x = 0$ ;  
5)  $6x^2 - 8x = 0$ ; 6)  $9x^2 - 14x = 0$ ;  
7)  $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$ ; 8)  $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$ ;  
9)  $\frac{1}{7}x + 49x^2 = 0$ ; 10)  $\frac{1}{5}x + 25x^2 = 0$ .

5.10°. 1)  $4x^2 = -9x$ ; 2)  $-12x^2 = 5x$ ; 3)  $\frac{x^2}{5} + x = 0$ ;  
4)  $-\frac{3x}{2} - x^2 = 0$ ; 5)  $x^2 + \frac{x}{2} = 0$ ; 6)  $\frac{x^2}{2} - 3x = 0$ .

5.11°. 1)  $8x^2 - 25x = 3x^2 + 6x$ ; 2)  $29x^2 - 12x = 25x^2 + 9x$ ;  
3)  $8x + 6x^2 = 4x^2 + 5x$ ; 4)  $21x - 3x^2 = 4x^2 + 2x$ ;  
5)  $11x^2 - 4x = 5x^2 + 8x$ ; 6)  $3x^2 + 18x = 14x - 7x^2$ ;  
7)  $5,5x - x^2 = 2,5x + 6x^2$ ; 8)  $9,2x - 7x^2 = 2,7x + 3x^2$ .

5.12. 1)  $(y - 4)(y + 3) = -12$ ; 2)  $(y + 7)(y - 5) = -35$ ;  
3)  $(2 - x)(5 - x) = 10$ ; 4)  $(x + 6)(8 - x) = 48$ ;  
5)  $(4x - 1)^2 - 1 = 0$ ; 6)  $(9x + 8)^2 - 64 = 0$ ;  
7)  $(7 - 2y)^2 + 28y = 0$ ; 8)  $(5 + 3y)^2 - 30y = 0$ .

5.13. 1)  $3(29 - 5x) = x(x - 5) - 10x$ ;  
2)  $24 - x(3x + 4) = 2(15 - 2x) - 63$ ;  
3)  $(2x + 5)^2 = 16 + (x - 3)^2$ ;  
4)  $(x - 1)^2 = 17 - (3x + 4)^2$ ;

$$5) (4x - 1)^2 - (5x + 2)^2 + (8x - 7)(8x + 7) = 28(6 - x);$$

$$6) (2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - 2(64 - 29x) = (4x - 9)(9 + 4x).$$

5.14. 1)  $\frac{9y^2 - 2y}{3} = \frac{y^2 + 5y}{4};$  2)  $\frac{4y^2 + 7y}{5} = \frac{3y^2 - 2y}{2};$   
3)  $\frac{4y^2 - 9}{5} + 3\frac{13}{30} = \frac{5y^2 + 9}{6};$  4)  $\frac{8y^2 - 3}{5} - 32,8 = \frac{5 - 9y^2}{4};$   
5)  $\frac{74 - 2y^2}{12} - 10 = \frac{11 - 3y^2}{8};$  6)  $\frac{20 - 3y^2}{18} + 3\frac{5}{9} = \frac{13y^2 - 4}{12}.$

5.15. 1)  $\frac{x^2 - 5}{2} + \frac{x^2 - 1}{8} = \frac{x^2 - 3}{4} + \frac{x^2 - 4}{3};$   
2)  $\frac{x^2 + 6}{2} + \frac{5 - 4x^2}{3} - \frac{8 - x^2}{6} = 0;$   
3)  $x^2 - \frac{x^2 - 1}{3} - \frac{2x^2 - 5}{5} + \frac{x^2 + 8}{6} = 7;$   
4)  $2x^2 + \frac{3x^2 - 1}{2} - \frac{5x^2 - 2}{3} = 2.$

5.16\*. 1)  $x^2 - 6|x| = 0;$  2)  $4x^2 + 5|x| = 0;$   
3)  $3x^2 - 4|x| = 0;$  4)  $8x^2 - 3|x| = 0.$

5.17\*. 1)  $(x^2 - 9) \cdot \frac{x}{|x| - 3} = 0;$  2)  $\frac{x^2 - 16}{|x| + 4} = 0;$   
3)  $\frac{x^2 - 25}{|x| + 5} = 0;$  4)  $(x^2 - 4) \cdot \frac{x}{|x| - 2} = 0.$

- 5.18. 1) Пры якіх значэннях  $p$  ураўненне  $x^2 + p = 0$ :  
а) мае два карані;  
б) мае адзіны карань;  
в) не мае каранёў?  
2) Пры якіх значэннях  $t$  ураўненне  $t - x^2 = 0$ :  
а) мае два карані;  
б) мае адзіны карань;  
в) не мае каранёў?

Рашыце ўраўненне адносна  $x$  (5.19—5.21).

5.19\*. 1)  $x^2 - p^2 = 0;$  2)  $3x^2 - p = 0;$   
3)  $2x^2 + k = 0;$  4)  $x^2 + k^2 = 0;$   
5)  $cx^2 - \frac{1}{k} = 0;$  6)  $cx^2 - \frac{k^2}{c} = 0.$

5.20\*. 1)  $x^2 - 9p^2 - 30p - 25 = 0$ ;

2)  $k^2 - 6k + 9 - x^2 = 0$ ;

3)  $x^2 - 25 + 10m - m^2 = 0$ ;

4)  $x^2 - 4t^2 - 12t - 9 = 0$ ;

5)  $100 + 60c^2 + 9c^4 - x^2 = 0$ ;

6)  $x^2 - 25a^4 + 10a^2 - 1 = 0$ .

5.21\*. 1)  $\frac{2x^2}{t} = \frac{t}{2}$ ;

2)  $\frac{mx^2}{6} = \frac{6}{m}$ ;

3)  $\frac{k^2}{4} = \frac{8x^2}{k^2}$ ;

4)  $\frac{5x^2}{k^3} = \frac{k}{15}$ ;

5)  $\frac{1+c}{c-1} \cdot x^2 + 1 = c^2$ ;

6)  $\frac{2-k}{2+k} \cdot x^2 - 4 = -k^2$ .

## 5.2. Метад вылучэння поўнага квадрата

У папярэднім пункце мы рашалі няпоўныя квадратныя ўраўненні. Разгледзім цяпер некалькі ўраўненняў, усе каэфіцыенты якіх адрозніваюцца ад нуля.

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне  $x^2 + 14x + 24 = 0$ .

Рашэнне. Разгледзім выраз  $x^2 + 14x$ . Калі мы дададзім да яго лік 49, то дапоўнім гэты выраз да квадрата двухчлена:

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2.$$

Выкарыстаўшы гэтыя разважанні, пераўтворым левую частку зыходнага квадратнага ўраўнення:

$$x^2 + 14x + 24 = (x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 = (x + 7)^2 - 25.$$

Цяпер зыходнае ўраўненне можна запісаць у выглядзе

$$(x + 7)^2 - 25 = 0.$$

Яно раўназначнае ўраўненню

$$(x + 7)^2 = 25.$$

Адсюль маем:

$$x + 7 = -5 \text{ або } x + 7 = 5.$$

Рашыўшы кожнае з гэтых ураўненняў, атрымаем:

$$x_1 = -12; \quad x_2 = -2.$$

Адказ:  $-12; -2$ .

Метад, які мы выкарысталі для рашэння гэтага квадратнага ўраўнення, называецца **метадам вылучэння поўнага квадрата**. Патлумачым яго яшчэ на некалькіх прыкладах.

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне  $x^2 - 10x + 7 = 0$ .

Рашэнне. Вылучым у левай частцы ўраўнення поўны квадрат:

$$x^2 - 10x + 7 = (x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2) - 5^2 + 7 = (x - 5)^2 - 18.$$

Такім чынам, зыходнае ўраўненне можна запісаць у выглядзе

$$(x - 5)^2 - 18 = 0.$$

Яно раўназначнае ўраўненню

$$(x - 5)^2 = 18.$$

Адкуль

$$x - 5 = -\sqrt{18} \text{ або } x - 5 = \sqrt{18}.$$

Рашыўшы кожнае з гэтых ураўненняў, атрымаем:

$$x_1 = 5 - 3\sqrt{2}; \quad x_2 = 5 + 3\sqrt{2}.$$

Адказ:  $5 - 3\sqrt{2}$ ;  $5 + 3\sqrt{2}$ .

У квадратных ураўненнях, якія разглядаліся ў прыкладах 1 і 2, старшы каэфіцыент быў роўны 1.

Квадратнае ўраўненне са старшым каэфіцыентам, роўным 1, называецца **прыведзеным**.

Такім чынам, прыведзенае квадратнае ўраўненне — гэта ўраўненне выгляду

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для кожнага квадратнага ўраўнення можна запісаць раўназначнае яму прыведзенае ўраўненне, падзяліўшы абедзве часткі квадратнага ўраўнення на старшы каэфіцыент.

Напрыклад, падзяліўшы на 5 абедзве часткі ўраўнення

$$5x^2 + 3x - 2 = 0,$$

атрымаем раўназначнае яму прыведзенае квадратнае ўраўненне

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне  $5x^2 + 3x - 2 = 0$ .

Рашэнне. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на 5, атрымаем прыведзенае квадратнае ўраўненне

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

Вылучым у яго левай частцы поўны квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} &= \left( x^2 + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot x + \left( \frac{3}{10} \right)^2 \right) - \left( \frac{3}{10} \right)^2 - \frac{2}{5} = \\ &= \left( x + \frac{3}{10} \right)^2 - \frac{49}{100}. \end{aligned}$$

Рэшым раўназначнае дадзенаму ўраўненне:

$$\begin{aligned} \left( x + \frac{3}{10} \right)^2 - \frac{49}{100} &= 0; \\ \left( x + \frac{3}{10} \right)^2 &= \frac{49}{100}; \\ x + \frac{3}{10} = \frac{-7}{10} \text{ або } x + \frac{3}{10} &= \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Рашыўшы кожнае з гэтых ураўненняў, атрымаем:

$$x = -1 \text{ або } x = \frac{2}{5}.$$

Адказ:  $-1$ ;  $\frac{2}{5}$ .

**Прыклад 4.** Рашыць ураўненне  $4x^2 + 28x + 49 = 0$ .

Рашэнне. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на 4, атрымаем прыведзенае квадратнае ўраўненне

$$x^2 + 7x + 12,25 = 0.$$

Вылучым у яго левай частцы поўны квадрат:

$$x^2 + 7x + 12,25 = x^2 + 2 \cdot 3,5 \cdot x + 3,5^2 = (x + 3,5)^2.$$

Такім чынам, маем  $(x + 3,5)^2 = 0$ , адкуль

$$x + 3,5 = 0, \text{ г. зн. } x = -3,5.$$

Адказ:  $-3,5$ .

**Прыклад 5.** Рашыць ураўненне  $3x^2 - 7x + 6 = 0$ .

Рашэнне. Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на 3, атрымаем прыведзенае квадратнае ўраўненне

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = 0.$$

Вылучым поўны квадрат у левай частцы атрыманага ўраўнення:

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = \left( x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} \cdot x + \left( \frac{7}{6} \right)^2 \right) - \left( \frac{7}{6} \right)^2 + 2 = \left( x - \frac{7}{6} \right)^2 + \frac{23}{36}.$$

Такім чынам, зыходнае ўраўненне раўназначнае ўраўненню

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = 0.$$

Пры любым значэнні  $x$  значэнне выразу, што стаіць у левай частцы гэтага ўраўнення, дадатнае (патлумачце чаму), значыць, ураўненне не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.



1. Якое квадратнае ўраўненне называецца прыведзеным?
2. Як з квадратнага ўраўнення выгляду  $ax^2 + bx + c = 0$  атрымаць раўназначнае яму прыведзенае квадратнае ўраўненне?
3. Як вылучыць поўны квадрат у левай частцы прыведзенага квадратнага ўраўнення:
  - а)  $x^2 - 10x + 7 = 0$ ;
  - б)\*  $x^2 + 2tx + m = 0$ ;
  - в)\*  $x^2 + px + m = 0$ ?

### Практыкаванні

5.22°. Замяніце шматкроп'е лікам так, каб атрымаўся квадрат двухчлена:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $x^2 + 2x \cdot 5 + \dots$ ;                  | 2) $x^2 - 2x \cdot 7 + \dots$ ;                  |
| 3) $x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \dots$ ; | 4) $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \dots$ ; |
| 5) $x^2 + 7x + \dots$ ;                          | 6) $x^2 - 9x + \dots$ .                          |

5.23°. Знайдзіце такое значэнне  $p$ , пры якім дадзены выраз будзе квадратам духчлена:

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 + 6x + p$ ;                | 2) $x^2 - 4x + p$ ;                |
| 3) $x^2 - 5x - 6\frac{1}{2} + p$ ; | 4) $x^2 + 7x + 9\frac{1}{4} + p$ ; |
| 5) $x^2 + px + \frac{1}{16}$ ;     | 6) $x^2 - px + \frac{1}{121}$ .    |

5.24. Вылучыце поўны квадрат у трохчлене:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $2x^2 + 18x - 10$ ;                  | 2) $3x^2 - 18x + 15$ ;                   |
| 3) $5x^2 + 35x + 30$ ;                  | 4) $4x^2 - 32x + 60$ ;                   |
| 5) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - 3$ ; | 6) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 5$ . |

Рашыце ўраўненне (5.25—5.27).

5.25°. 1)  $x^2 - 8x - 9 = 0$ ;

2)  $x^2 - 5x - 6 = 0$ ;

3)  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ;

4)  $x^2 + 3x - 10 = 0$ ;

5)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;

6)  $x^2 + 9x + 14 = 0$ ;

7)  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ;

8)  $x^2 + 4x - 21 = 0$ .

5.26. 1)  $2x^2 - 9x + 10 = 0$ ;

2)  $5x^2 + 3x - 8 = 0$ ;

3)  $5x^2 + 14x - 3 = 0$ ;

4)  $8x^2 - 14x + 5 = 0$ ;

5)  $5x^2 + 3x - 2 = 0$ ;

6)  $5x^2 - 4x - 12 = 0$ ;

7)  $3x^2 + 5x - 2 = 0$ ;

8)  $4x^2 - 3x - 22 = 0$ .

5.27. 1)  $(x - 4)^2 - 49 = 0$ ;

2)  $(x - 6)^2 - 25 = 0$ ;

3)  $(5x + 1)^2 - 121 = 0$ ;

4)  $(6x - 1)^2 - 225 = 0$ ;

5)  $(x - 0,25)^2 - 1,44 = 0$ ;

6)  $(x + 0,26)^2 - 0,0625 = 0$ .

5.28. 1) Пры якіх значэннях  $x$  трохчлен  $x^2 + 14x + 24$  прымае значэнне, роўнае:

а) 0;            б) 24;            в) -100?

2) Пры якіх значэннях  $x$  трохчлен  $x^2 - x - 20$  прымае значэнне, роўнае:

а) 0;            б) 36;            в) -100 500?

5.29. 1) Пры якіх значэннях  $x$  трохчлен  $x^2 + x - 30$  і двухчлен  $12x - 60$  прымаюць роўныя значэнні?

2) Пры якіх значэннях  $x$  трохчлен  $x^2 - 11x + 30$  і двухчлен  $-4x - 18$  прымаюць роўныя значэнні?

5.30. 1) Пры якіх значэннях  $p$  значэнні двухчленаў  $p^2 + 6p$  і  $3p^2 - p$  роўныя?

2) Пры якіх значэннях  $k$  значэнні двухчленаў  $k^2 - k + 5$  і  $2k^2 - 5k + 9$  роўныя?

5.31. Дакажыце няроўнасць, выкарыстаўшы метады вылучэння поўнага квадрата:

1)  $a^2 + 26a + 170 > 0$ ;

2)  $4a^2 - 40a + 101 > 0$ ;

3)  $-a^2 + a - 11 < 0$ ;

4)  $-a^2 - 10a - 26 < 0$ .



5.32. Дакажыце, што пры любым значэнні  $x$  трохчлен прымае дадатныя значэнні:

$$1) 2x^2 + 12x + 24; \quad 2) 6x^2 - 13x + 16.$$

5.33. Дакажыце, што пры любым значэнні  $x$  трохчлен прымае адмоўныя значэнні:

$$1) -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}; \quad 2) -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - 3.$$

5.34\*. Пры якім значэнні  $x$  трохчлен прымае найбольшае значэнне:

$$1) -x^2 + 10x - 27; \quad 2) -x^2 + 5x - 3?$$

5.35\*. Пры якім значэнні  $x$  трохчлен прымае найменшае значэнне:

$$1) 10x^2 + 5x - 5; \quad 2) 9x^2 - 9x + 2?$$

### 5.3. Формула каранёў квадратнага ўраўнення

У папярэднім пункце для рашэння квадратных ураўненняў прымяняўся метадад вылучэння поўнага квадрата. Зараз мы выкарыстаем гэты метадад для рашэння квадратнага ўраўнення ў агульным выглядзе. А менавіта рэшым квадратнае ўраўненне

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Падзяліўшы абедзве часткі гэтага ўраўнення на старшы каэфіцыент  $a \neq 0$ , атрымаем ураўненне, раўназначнае ўраўненню (1):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Вылучым у левай частцы гэтага ўраўнення поўны квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Такім чынам, ураўненне (1) раўназначнае ўраўненню

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

якое ў сваю чаргу раўназначнае ўраўненню

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

Выраз  $b^2 - 4ac$  называецца **дыскрымінантам квадратнага ўраўнення** (1). Дыскрымінант абазначаецца літарай  $D$ :

$$D = b^2 - 4ac.$$

Магчымы тры выпадкі:  $D > 0$ ,  $D = 0$ ,  $D < 0$ .

**Выпадак 1.**  $D = b^2 - 4ac > 0$ . У гэтым выпадку выраз  $\sqrt{D}$  мае сэнс, і ўраўненне (2) можна запісаць у выглядзе

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Адкуль атрымліваем:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{або} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Значыць, ураўненне (1) пры  $D > 0$  мае два рэчаісныя карані, якія знаходзяць па формулах:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Звычайна гэтыя формулы аб'ядноўваюць у адну і запісваюць яе наступным чынам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (3)$$

Формулу (3) называюць **формулай каранёў квадратнага ўраўнення**.

**Выпадак 2.**  $D = b^2 - 4ac = 0$ . У гэтым выпадку ўраўненне (2) мае выгляд

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Адкуль  $x + \frac{b}{2a} = 0$ , і, значыць,  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Такім чынам, ураўненне (1) пры  $D = 0$  мае адзіны карань, які знаходзяць па формуле  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Заўважым, што і ў гэтым выпадку для рашэння квадратнага ўраўнення можа быць выкарыстана формула (3). Сапраўды, падставіўшы ў яе  $D = 0$ , атрымаем  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

**Выпадак 3.**  $D = b^2 - 4ac < 0$ . У гэтым выпадку ва ўраўненні (2) правая частка адмоўная. Лёвая частка з'яўляецца квад-

ратам двухчлена і ні пры якім значэнні зменнай  $x$  не можа прымаць адмоўныя значэнні. Значыць, ураўненне (2) пры  $D < 0$  не мае каранёў. Такім чынам, ураўненне (1) пры  $D < 0$  не мае рэчаісных каранёў.



▲ Тыя ж вынікі можна атрымаць, калі дзейнічаць інакш. Памножыўшы абедзве часткі ўраўнення (1) на  $4a$  ( $a \neq 0$ ), атрымаем раўназначнае яму ўраўненне

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Вылучым у левай частцы атрыманага ўраўнення поўны квадрат двухчлена:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Рэшым ураўненне

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

раўназначнае ўраўненню (1).

Калі  $b^2 - 4ac = D > 0$ , то маем

$$|2ax + b| = \sqrt{D},$$

адкуль атрымаем:

$$2ax + b = -\sqrt{D} \quad \text{або} \quad 2ax + b = \sqrt{D};$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{або} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Такім чынам, атрымаем  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ , г. зн. формулу (3).

Відавочна, што пры  $b^2 - 4ac = 0$  атрымаем карань  $x = -\frac{b}{2a}$ , а пры  $b^2 - 4ac < 0$  ураўненне  $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ , раўназначнае ўраўненню (1), каранёў не мае.

Разгледзім цяпер ураўненне (1), калі сярэдні каэфіцыент цотны, г. зн. калі  $b = 2k$ :

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

У гэтым выпадку формула (3) прыме выгляд

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a};$$

пасля скарачэння дробу на 2 атрымаем

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Заўважым, што  $k = \frac{b}{2}$ . Таму формулу (3) можна запісаць у выглядзе

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Паколькі

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{D}{4},$$

то гэту формулу запісваюць яшчэ і так:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}. \quad (4)$$

Калі сяродні каэфіцыент  $b$  квадратнага ўраўнення (1) з'яўляецца цотным лікам, вылічэнні па формуле (4) выконваць зручней, чым па формуле (3). ▲

**А**

Квадратныя ўраўненні ўмелі рашаць яшчэ ў Старажытным Вавілоне ў II тысячагоддзі да н. э. Матэматыкі Старажытнай Грэцыі рашалі квадратныя ўраўненні геаметрычна.

Формула каранёў квадратнага ўраўнення адкрывалася неаднаразова. У працах еўрапейскіх матэматыкаў ствараліся асобныя метады для рашэння розных відаў квадратных ураўненняў. Злучыў гэтыя метады ў агульнае правіла Міхаэль Штыфель (1544 г., Германія). Ён даў «рэцэпт» рашэння (без доказаў і без тлумачэнняў) для ўсіх відаў квадратных ураўненняў з рэчаіснымі каранямі. Прывычнае для нас абазначэнне каранёў  $x_1$  і  $x_2$  увёў Жазэф Луі Лагранж (1798 г., Францыя).

Слова «*дыскрымінант*» паходзіць ад лацінскага слова *discriminans* — які адрознівае, раздзяляе.

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне

$$3x^2 - 14x - 5 = 0. \quad (5)$$

Рашэнне. *Спосаб 1.* Рэшым ураўненне (5), выкарыстаўшы формулу (3):

$$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = \\ = 7^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(49 + 15) = 4 \cdot 64 = 16^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 \pm 16}{6};$$

$$x_1 = \frac{14 - 16}{6} = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{14 + 16}{6} = 5.$$

Адказ:  $-\frac{1}{3}; 5$ .



▲ *Спосаб 2.* Паколькі  $b = -14$  — цотны лік, то рэшым ураўненне (5), выкарыстаўшы формулу (4):

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot (-5) = 49 + 15 = 64 = 8^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{7 \pm 8}{3};$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = 5.$$

Заўважым, што для рашэння ўраўнення (5) вылічэнні па формуле (4) былі больш простымі. ▲

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне:

а)  $2x^2 - x + 3 = 0$ ;      б)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$ .

Рашэнне. а)  $2x^2 - x + 3 = 0$ ;

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0, \text{ значыць, каранёў няма.}$$

б) *Спосаб 1.*  $9x^2 - 12x + 4 = 0$ ;

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 12^2 - (4 \cdot 3)^2 = 0;$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Адказ: а) каранёў няма; б)  $\frac{2}{3}$ .



▲ *Спосаб 2.* б)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$ ;

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 36 - 9 \cdot 4 = 0;$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне  $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$ .  
 Рашэнне.  $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$ .

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{12}) = \\ = 25 + 4 \cdot \sqrt{36} = 25 + 24 = 49 = 7^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 7}{2\sqrt{3}};$$

$$x_1 = \frac{5-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3};$$

$$x_2 = \frac{5+7}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Адказ:  $\frac{-\sqrt{3}}{3}; 2\sqrt{3}$ .



1°. Чаму квадратныя ўраўненні

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ і } x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \text{ раўназначныя?}$$

2. Чаму ўраўненні

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \text{ і } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \text{ раўназначныя?}$$

3. Які выраз называецца дыскрымінантам квадратнага ўраўнення?

4. У якім выпадку ўраўненне  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ):

- а) мае два карані;      б) мае адзіны карань;  
 в) не мае каранёў?

5. Для квадратнага ўраўнення  $ax^2 + bx + c = 0$  запішыце формулу каранёў. Патлумачце, як яе атрымаць.

6\*. Для квадратнага ўраўнення  $ax^2 + bx + c = 0$  запішыце формулу каранёў у выпадку, калі сярэдні каэфіцыент  $b$  — цотны лік. Патлумачце, як яе атрымаць.

### Практыкаванні

5.36°. Якія з ураўненняў не маюць каранёў:

- 1)  $x^2 - 10x + 21 = 0$ ;      2)  $x^2 + 2x + 2 = 0$ ;  
 3)  $9x^2 - 6x + 1 = 0$ ;      4)  $3x^2 - 7x - 8 = 0$ ;  
 5)  $4x^2 + 4x + 8 = 0$ ;      6)  $2x^2 + 5x - 7 = 0$ ;  
 7)  $4x^2 + 7x + 5 = 0$ ;      8)  $3x^2 - 7x + 6 = 0$ ?

5.37°. Якія з ураўненняў маюць два карані:

- 1)  $9x^2 - 6x - 5 = 0$ ;      2)  $3x^2 - 5x + 4 = 0$ ;

- 3)  $6x^2 + 13x + 6 = 0$ ;      4)  $4x^2 - 20x + 25 = 0$ ;  
5)  $9x^2 + 12x + 4 = 0$ ;      6)  $7x^2 + 8x + 15 = 0$ ;  
7)  $7x^2 - 6x + 2 = 0$ ;      8)  $5x^2 + 7x - 8 = 0$ ?

5.38°. Якія з ураўненняў маюць адзіны карань:

- 1)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$ ;      2)  $x^2 - 3x + 4 = 0$ ;  
3)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;      4)  $16x^2 - 24x + 9 = 0$ ;  
5)  $25x^2 + 1 - 10x = 0$ ;      6)  $9x^2 + 25 + 30x = 0$ ;  
7)  $49x^2 + 25 + 70x = 0$ ;      8)  $4x^2 + 9 - 12x = 0$ ?

Рашыце ўраўненне (5.39—5.46).

- 5.39°. 1)  $2x^2 + x - 10 = 0$ ;      2)  $3x^2 + x - 4 = 0$ ;  
3)  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ ;      4)  $5x^2 - 9x - 2 = 0$ ;  
5)  $-2x^2 + 15x - 7 = 0$ ;      6)  $-3x^2 + 16x - 5 = 0$ ;  
7)  $-16x^2 + 16x - 4 = 0$ ;      8)  $-4x^2 - 20x - 25 = 0$ .

- 5.40°. 1)  $y^2 - 3y - 5 = 0$ ;      2)  $y^2 - 3y - 15 = 0$ ;  
3)  $2y^2 + y - 2 = 0$ ;      4)  $3y^2 - y - 3 = 0$ ;  
5)  $-y^2 + 2,4y + 13 = 0$ ;      6)  $-y^2 + 5,6y - 6,4 = 0$ ;  
7)  $-2y^2 - 0,1y + 0,06 = 0$ ;      8)  $-3y^2 + 0,2y + 0,01 = 0$ .

- 5.41°. 1)  $\frac{1}{4}y^2 - 3y + 5 = 0$ ;      2)  $\frac{1}{9}y^2 + 2y - 7 = 0$ ;  
3)  $2y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{6} = 0$ ;      4)  $3y^2 - 1\frac{1}{2}y + \frac{1}{6} = 0$ ;  
5)  $y^2 + 2\frac{1}{2}y + 1 = 0$ ;      6)  $y^2 + 3\frac{5}{12}y + 2 = 0$ ;  
7)  $-y^2 + 4\frac{1}{2}y - 4\frac{1}{2} = 0$ ;      8)  $-y^2 + 1\frac{2}{3}y + 26 = 0$ .

- 5.42°. 1)  $5x = 1 - 6x^2$ ;      2)  $1 = 6x - 5x^2$ ;  
3)  $9x + 2 = 5x^2$ ;      4)  $y^2 + 576 = 52y$ ;  
5)  $5x - 14 = -x^2$ ;      6)  $15y^2 - 7 = 22y + 30$ ;  
7)  $6x - 9 = x^2$ ;      8)  $25y^2 + 1 = 10y$ .

5.43°. 1)  $x^2 - 25 = x - 5$ ;

2)  $500 - 101y^2 = 100y + 299y^2$ ;

3)  $26x^2 + 13x = 27x^2 + 25 - 13x$ ;

4)  $5y^2 - 20y = 20y + 84 + 4y^2$ ;

5)  $4y^2 + 8y + 40 = 5y^2 - 3y + 68$ ;

6)  $25y^2 - 6y - 2 = 10y^2 + 7y + 94$ .

5.44. 1)  $x(x + 2) = 3$ ;

2)  $x(x - 2) = 15$ ;

3)  $2x(x - 8) = -x - 18$ ;

4)  $3x(x - 5) = 4 - 4x$ ;

5)  $x^2 - 16x - 1 = 5x(x - 4)$ ;

6)  $x^2 + 5x + 42 = x(2x + 6)$ .

5.45. 1)  $(x - 1)(x + 3) = x - 5$ ;

2)  $(x + 1)(x - 2) = x - 4$ ;

3)  $(x + 2)(3x - 1) = 20$ ;

4)  $(4x - 3)(4 - x) = 3$ ;

5)  $(2y - 3)(5y + 1) = 2y + \frac{2}{5}$ ;

6)  $(y - 1)(1 + y) = 2\left(5y - 2\frac{1}{9}\right)$ ;

7)  $-y(7 + y) = (y - 2)(2 + y)$ ;

8)  $4(3 + y)(3y - 1) = (4 - 5y)y$ .

5.46. 1)  $(x + 4)^2 = 3x + 10$ ;

2)  $(2x - 3)^2 = 11x - 19$ ;

3)  $(10x - 4)^2 = (3x + 4)^2$ ;

4)  $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$ ;

5)  $(2x - 3)^2 - 77 = (x + 5)^2$ ;

6)  $(3x - 2)^2 = 48 + (2 - x)^2$ .

5.47°. 1) Пры якіх значэннях  $p$  трохчлен  $p^2 + 14p + 10$  прымае значэнне, роўнае  $-14$ ?

2) Пры якіх значэннях  $k$  трохчлен  $2k^2 + 5k + 5$  прымае значэнне, роўнае  $3$ ?

3) Пры якіх значэннях  $t$  трохчлен  $5t^2 + 2t + 16$  прымае значэнне, роўнае  $10$ ?

4) Пры якіх значэннях  $m$  трохчлен  $42m^2 + 5m + 24$  прымае значэнне, роўнае  $26$ ?



- 5.48. 1) Пры якіх значэннях  $a$  мнагачлены  $a^2 - 22a + 25$  і  $2a^2 - 20a + 1$  прымаюць роўныя значэнні?  
2) Пры якіх значэннях  $b$  мнагачлены  $2 - 8b + 3b^2$  і  $-4 + 2b^2 - 3b$  прымаюць роўныя значэнні?  
3) Пры якіх значэннях  $c$  выразы  $(3 - c)(4 - c)$  і  $2c^2 - 20c + 48$  прымаюць роўныя значэнні?  
4) Пры якіх значэннях  $d$  выразы  $(2d + 1)(d + 2)$  і  $3d^2 - 4$  прымаюць роўныя значэнні?

5.49°. Пры якіх значэннях  $k$  правільная роўнасць:

- 1)  $0,2k^2 + 125 = 10k$ ;                      2)  $4k^2 = 7k + 7,5$ ;  
3)  $k^2 + 1,2 = 2,6k$ ;                      4)  $-7 = 0,4k - 0,2k^2$ ;  
5)  $\frac{1}{7}k^2 = 2k - 7$ ;                      6)  $9 - 2k = \frac{1}{3}k^2$ ?

Рашыце ўраўненне (5.50—5.54).

- 5.50. 1)  $y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$ ;                      2)  $y^2 - y - \sqrt{6} = 0$ ;  
3)  $-y^2 + (2 + \sqrt{3})y - 2\sqrt{3} = 0$ ;  
4)  $-y^2 - (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$ ;  
5)  $(2 + \sqrt{3})y^2 - (2\sqrt{3} + 1)y + \sqrt{3} - 1 = 0$ ;  
6)  $(\sqrt{3} - 2)y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})y + 2 = 0$ .

- 5.51\*. 1)  $3x^2 + 12x + 13 = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 12(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 13$ ;  
2)  $4x^2 - 4x - 15 = 4(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - 4(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 15$ ;  
3)  $2x^2 + 18x - 65 = 2(5\sqrt{2} + 4)^2 + 18(5\sqrt{2} + 4) - 65$ ;  
4)  $6x^2 + 5x - 6 = 6(3\sqrt{7} - 2)^2 + 5(3\sqrt{7} - 2) - 6$ .

- 5.52\*. 1)  $x^2 + 6x = x^3$ ;                      2)  $6x^3 + x = 7x^2$ ;  
3)  $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ ;                      4)  $x^4 - 29x^3 + 100x^2 = 0$ .

- 5.53\*. 1)  $(x + 1)(2x + 3) = (x + 1)(x^2 - 5)$ ;  
2)  $(3 - x)(6x^2 + 12) = (3 - x)(x^2 - 4x)$ ;  
3)  $3x^2(5 - 10x) - 13x(5 - 10x) + 4(5 - 10x) = 0$ ;  
4)  $5x^2(x - 0,2) - 13x(x - 0,2) + 6(x - 0,2) = 0$ .

5.54. 1)  $4x(x-1) + x(x+2) = 3(2x-1)$ ;

2)  $2(x^2-1) = 3-x(2x+1)$ ;

3)  $x(x-10) - x(1,2x-1) + 2,718 = 0$ ;

4)  $(0,5x-1,5)(x-7) - 18,2x = (0,4x-3,48) - \left(1\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)^2$ .

5.55. Знайдзіце карані ўраўнення:

1)  $x^2 + x + \sqrt{7} - 7 = 0$ , якія задавальняюць умову  $x < \sqrt{7}$ ;

2)  $x^2 - (6 - \sqrt{2})x + 8 - 2\sqrt{2} = 0$ , якія задавальняюць умову  $x > \sqrt{5}$ .

5.56. 1) Параўнайце найменшы карань ураўнення  $x^2 - 5x - 60 = 0$  з найбольшым каранем ураўнення  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .

2) Параўнайце найбольшы карань ураўнення  $x^2 + 6x + 7 = 0$  з найменшым каранем ураўнення  $x^2 + 8x - 9 = 0$ .

Запішыце значэнні  $p$ , пры якіх ураўненне мае два карані (5.57—5.58).

5.57. 1)  $x^2 - 2x + p = 0$ ;

2)  $x^2 + 16x + p = 0$ ;

3)  $x^2 + x + p = 0$ ;

4)  $x^2 + 7x + p = 0$ ;

5)  $x^2 + 10x - p = 0$ ;

6)  $x^2 + 17x - p = 0$ .

5.58. 1)  $2x^2 - 6x + p + 7 = 0$ ;

2)  $2x^2 + 5x + p + 3 = 0$ ;

3)  $3x^2 + 8x + 2p - 1 = 0$ ;

4)  $4x^2 - 10x + 2p + 1 = 0$ ;

5)  $6x^2 - 31x + 3p - 4 = 0$ ;

6)  $5x^2 + 44x + 4p - 1 = 0$ .

5.59. Пры якіх значэннях  $t$  ураўненне мае адзіны карань:

1)  $x^2 + 12x + t = 0$ ;

2)  $9x^2 + 6x + t = 0$ ;

3)  $4x^2 + tx + 49 = 0$ ;

4)  $16x^2 - tx + 25 = 0$ ;

5)\*  $(2+t)x^2 + 4tx + 4t + 1 = 0$ ;

6)\*  $(t-1)x^2 + 2(t+1)x + t - 2 = 0$ ?

Рашыце ўраўненне адносна  $x$  (5.60—5.61).

5.60\*. 1)  $x^2 + 5ax - 6a^2 = 0$ ;

2)  $2x^2 + 3ax + a^2 = 0$ ;

3)  $6x^2 - 5cx + c^2 = 0$ ;

4)  $x^2 + 3cx + 2,25c^2 = 0$ .

- 5.61\*. 1)  $x^2 - (5k - 3)x - 15k = 0$ ;  
 2)  $x^2 + (2k - 3)x - 6k = 0$ ;  
 3)  $x^2 - (3k - 2)x + 2k^2 - k - 3 = 0$ ;  
 4)  $x^2 - 4kx + 3k^2 - 4k - 4 = 0$ .

#### 5.4. Выкарыстанне квадратных ураўненняў пры рашэнні задач

**Задача 1.** Сума двух лікаў роўная 26, а іх здабытак роўны 168. Знайсці гэтыя лікі.

Рашэнне. Няхай адзін з лікаў  $x$ , тады  $(26 - x)$  — другі лік. Паколькі здабытак лікаў  $x$  і  $(26 - x)$  па ўмове роўны 168, то маем ураўненне  $x(26 - x) = 168$ .

Рэшым гэта ўраўненне:

$$\begin{aligned} 26x - x^2 &= 168; \\ x^2 - 26x + 168 &= 0; \\ D &= 26^2 - 4 \cdot 168 = 4(13^2 - 168) = 4 = 2^2; \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{26 \pm 2}{2} = 13 \pm 1; \\ x &= 12 \text{ або } x = 14. \end{aligned}$$

Калі адзін з лікаў  $x = 12$ , то другі лік  $26 - 12 = 14$ .

Калі адзін з лікаў  $x = 14$ , то другі лік  $26 - 14 = 12$ .

Адказ: 12 і 14.



▲ Калі выкарыстаць формулу (4) п. 5.3, то ўраўненне  $x^2 - 26x + 168 = 0$  рашаецца больш проста:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 13^2 - 168 = 169 - 168 = 1; \\ x_{1,2} &= \frac{13 \pm 1}{1}; \\ x_1 &= 12; x_2 = 14. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Задача 2.** Адну старану квадрата паменшылі на 6 см, а сумежную старану павялічылі на 2 см і пабудавалі прамавугольнік. Плошча атрыманага прамавугольніка роўная 33 см<sup>2</sup>. Знайсці стараны прамавугольніка.

Рашэнне. Няхай  $x$  см — даўжыня стараны квадрата, тады  $(x - 6)$  см і  $(x + 2)$  см — даўжыні старон прамавугольні-

ка. Паколькі плошча прамавугольнака  $(x-6)(x+2)$  см<sup>2</sup> і па ўмове яна роўная 33 см<sup>2</sup>, то маем ураўненне

$$(x-6)(x+2) = 33.$$

Рэшым яго:

$$x^2 - 6x + 2x - 12 = 33;$$

$$x^2 - 4x - 45 = 0;$$

$$D = 16 + 4 \cdot 45 = 4(4 + 45) = 4 \cdot 49 = 14^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 14}{2} = 2 \pm 7.$$

Такім чынам,  $x = 9$  або  $x = -5$ .

Паколькі  $x$  — даўжыня стараны квадрата, то  $x > 0$ , і, значыць,  $x = 9$ . Тады  $x - 6 = 9 - 6 = 3$  (см);  $x + 2 = 9 + 2 = 11$  (см) — даўжыні старон прамавугольнака.

Адказ: 3 см і 11 см.

Заўважым, што пры рашэнні тэкставых задач, атрымаўшы значэнні невядомага, трэба праверыць, як яны адпавядаюць даным умовы задачы, і толькі потым запісваць адказ. Праверка неабходна, каб пазбегнуць сэнсавых неадпаведнасцей. Яна дапамагае таксама пазбегнуць магчымых лагічных і вылічальных памылак.

Так, у задачы 2 можна пераканацца, што плошча прамавугольнака пры знойдзеных даўжынях старон роўная 33 см<sup>2</sup> (сапраўды,  $3 \cdot 11 = 33$  (см<sup>2</sup>)).

Запісваць такую праверку ў рашэнне задачы неабавязкова.

**Задача 3.** У глядзельнай зале радоў у два разы больш, чым месцаў у кожным радзе. Калі пры перапланіроўцы залы колькасць радоў павялічыць на 1, а колькасць месцаў у кожным радзе павялічыць на 8, то ў зале будзе 500 месцаў. Колькі месцаў у зале?

Рашэнне. Няхай  $x$  — колькасць месцаў у радзе, тады  $2x$  — колькасць радоў. Колькасць месцаў у радзе пасля перапланіроўкі будзе  $(x+8)$ , а колькасць радоў —  $(2x+1)$ . Паколькі па ўмове пасля перапланіроўкі колькасць месцаў у зале  $(x+8)(2x+1)$  будзе роўна 500, то саставім і рэшым ураўненне:

$$(x+8)(2x+1) = 500;$$

$$2x^2 + 16x + x + 8 = 500;$$

$$2x^2 + 17x - 492 = 0;$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 2 \cdot 492 = 289 + 3936 = 4225 = 65^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-17 \pm 65}{4}.$$

Такім чынам,  $x = -20,5$  або  $x = 12$ .

Паколькі колькасць месцаў у радзе не можа быць дробавым адмоўным лікам, то значэнне  $-20,5$  не задавальняе ўмову задачы. Такім чынам, колькасць месцаў у радзе 12, а колькасць радоў 24, значыць, колькасць месцаў у зале:  $12 \cdot 24 = 288$ .

Адказ: у зале 288 месцаў.

Праверым правільнасць вылічэнняў: ці атрымаецца 500 пры множанні значэнняў лікавых выразаў  $12 + 8$  і  $24 + 1$ ? Сапраўды,  $20 \cdot 25 = 500$ .



1. Назавіце этапы рашэння тэкставай задачы.
2. Як можна пераканацца ў адсутнасці лагічных і вылічальных памылак пры рашэнні тэкставай задачы?

### Практыкаванні

- 5.62°. 1) Сума двух лікаў роўная 5, а сума іх квадратаў роўная 13. Знайдзіце гэтыя лікі.  
2) Рознасць двух лікаў роўная 2, а сума іх квадратаў роўная 52. Знайдзіце гэтыя лікі.
- 5.63. 1) Сума квадратаў трох паслядоўных натуральных цотных лікаў роўная 116. Знайдзіце гэтыя лікі.  
2) Сума квадратаў трох паслядоўных натуральных лікаў роўная 302. Знайдзіце гэтыя лікі.
- 5.64°. 1) Знайдзіце двухзначны лік, ведаючы, што лічба адзінак шуканага ліку на 5 большая за лічбу яго дзясяткаў і што здабытак ліку і сумы яго лічбаў роўны 637.  
2) Знайдзіце двухзначны лік, ведаючы, што лічба дзясяткаў шуканага ліку на 4 большая за лічбу яго адзінак і што здабытак ліку і сумы яго лічбаў роўны 496.
- 5.65. 1) Здабытак двух паслядоўных натуральных лікаў у 4 разы большы за найменшы з іх. Знайдзіце гэтыя лікі.  
2) Здабытак трох паслядоўных натуральных лікаў у 3 разы большы за сярэдні з іх. Знайдзіце гэтыя лікі.

- 5.66. 1) У першынстве па шахматах у школе было згуляна 406 партый. Колькі шахматыстаў удзельнічала ў турніры, калі кожны гуляў з кожным толькі адзін раз?  
2) На школьным пашачным турніры было згуляна 72 партыі, прычым кожны ўдзельнік гуляў з кожным па дзве партыі. Колькі школьнікаў удзельнічала ў турніры?
- 5.67. 1) У чэмпіянаце па баскетболе было згуляна 66 матчаў. Колькі каманд удзельнічала ў чэмпіянаце, калі кожная каманда гуляла з кожнай па адным разе?  
2) Некалькі школьнікаў, ад'язджаючы са спартыўнага лагера дадому, абмяняліся сувенірамі (кожны з кожным). Колькі было школьнікаў, калі спатрэбілася 56 сувеніраў?
- 5.68. 1) Некалькі васьмікласнікаў пры сустрэчы віталі адзін аднаго поціскам рукі. Колькі навучэнцаў сустрэліся, калі поціскаў рукі было 45?  
2) Навучэнцы 8 Д класа пасля заканчэння васьмі класаў вырашылі абмяняцца фатаграфіямі кожны з кожным. Колькі навучэнцаў абмяняліся фатаграфіямі, калі ўсяго іх было раздзена 1260?
- 5.69. 1) Знайдзіце лік, адрозны ад нуля, квадрат якога роўны падвоенаму гэтаму ліку. Колькі рашэнняў мае задача?  
2) Знайдзіце лік, адрозны ад нуля, які меншы за свой квадрат у 3 разы.  
3) Знайдзіце лік, адрозны ад нуля, калі вядома, што сума гэтага ліку і яго квадрата ў 8 разоў большая за сам лік.  
4) Знайдзіце лік, адрозны ад нуля, ведаючы, што рознасць паміж яго квадратам і самім лікам у 5 разоў большая за шуканы лік.
- 5.70\*. 1) У прамавугольніка са старанамі 4 см і 8 см большую старану паменшылі на  $p$  см, а меншую павялічылі на  $p$  см. Пры якім значэнні  $p$  плошча новага прамавугольніка будзе найбольшай?  
2) Дакажыце, што з усіх прамавугольных трохвугольнікаў з сумай катэтаў, роўнай 10 см, найбольшую плошчу мае раўнабедраны трохвугольнік.

3) Дакажыце, што з усіх прамавугольнікаў з перыметрам 60 см найбольшую плошчу мае квадрат.

- 5.71. 1) На плоскасці дадзена некалькі пунктаў, ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Калі праз кожныя два дадзеныя пункты правесці прамую, то атрымаецца 171 прамая. Колькі дадзена пунктаў?
- 2) На плоскасці дадзена некалькі пунктаў, ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Калі праз кожныя два дадзеныя пункты правесці прамую, то атрымаецца 45 прамых. Колькі дадзена пунктаў?

### 5.5. Раскладанне квадратнага трохчлена на лінейныя множнікі

**Азначэнне.** *Квадратным трохчленам* называецца мнагачлен выгляду

$$ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

дзе  $a, b$  і  $c$  — лікі,  $a \neq 0$ ,  $x$  — зменная.

Такім чынам, квадратны трохчлен (1) — гэта левая частка квадратнага ўраўнення

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2)$$

*Дыскрымінантам квадратнага трохчлена* (1) называецца дыскрымінант квадратнага ўраўнення (2):

$$D = b^2 - 4ac.$$

*Каранем квадратнага трохчлена* называецца такое значэнне зменнай, пры якім ён ператвараецца ў нуль, значыць, карані квадратнага трохчлена (1) вылічваюцца па формулах:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

**Тэарэма.** Квадратны трохчлен  $ax^2 + bx + c$  з дыскрымінантам  $D \geq 0$  раскладаецца на лінейныя множнікі:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

дзе  $x_1, x_2$  — карані гэтага трохчлена, прычым, калі  $D > 0$ , то  $x_1 \neq x_2$ , а калі  $D = 0$ , то  $x_1 = x_2$ .

Доказ. У квадратным трохчлене вынесем за дужкі каэфіцыент  $a$ :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

З квадратнага трохчлена  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$  вылучым поўны квадрат (так, як гэта рабілі ў п. 5.3):

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = \\ &\downarrow \text{выкарыстаем формулу рознасці квадратаў} \downarrow \\ &= \left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right) = \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Такім чынам, маем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Калі  $D > 0$ , то  $-\frac{b + \sqrt{D}}{2a} \neq -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}$ , г. зн.  $x_1 \neq x_2$ .

Калі  $D = 0$ , то  $-\frac{b + \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b - \sqrt{0}}{2a}$ , г. зн.  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

У гэтым выпадку маем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2. \quad \square$$

Калі

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

тады  $x_1$  называецца **кратным каранем квадратнага трохчлена**  $ax^2 + bx + c$ . (Гавораць таксама, што  $x_1$  — **кратны карань квадратнага ўраўнення**  $ax^2 + bx + c = 0$ ; тут кратнасць караня роўная 2.)

**Прыклад 1.** Раскласці трохчлен  $7x^2 + 34x - 5$  на лінейныя множнікі.

Рашэнне. Знайдзем карані трохчлена  $7x^2 + 34x - 5$ .

Для гэтага зручна выкарыстаць формулу (4) п. 5.3:

$$\frac{D}{4} = 17^2 + 7 \cdot 5 = 289 + 35 = 324 = 18^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{-17 \pm 18}{7};$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = \frac{1}{7}.$$



Такім чынам,

$$7x^2 + 34x - 5 = 7(x + 5)\left(x - \frac{1}{7}\right) = (x + 5)(7x - 1).$$

**Прыклад 2.** Знайсці значэнне дробу  $\frac{7k^2 + 34k - 5}{k^2 + 3k - 10}$  пры  $k = 2\frac{1}{7}$ .

Рашэнне. Раскладзём на множнікі лічнік і назоўнік дробу:

$$7k^2 + 34k - 5 = 7(k + 5)\left(k - \frac{1}{7}\right) = (k + 5)(7k - 1);$$

$$k^2 + 3k - 10 = (k + 5)(k - 2).$$

$$\text{Тады } \frac{7k^2 + 34k - 5}{k^2 + 3k - 10} = \frac{(k + 5)(7k - 1)}{(k + 5)(k - 2)} = \frac{7k - 1}{k - 2};$$

$$\frac{7k - 1}{k - 2} \bigg|_{k = 2\frac{1}{7}} = \frac{7 \cdot 2\frac{1}{7} - 1}{2\frac{1}{7} - 2} = \frac{15 - 1}{\frac{1}{7}} = 14 \cdot 7 = 98.$$

Адказ: 98.



1. Які мнагачлен называецца квадратным трохчленам?
2. Што называецца каранем квадратнага трохчлена?
3. У якім выпадку карань квадратнага трохчлена (ураўнення) называецца кратным? Якая яго кратнасць?
4. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму аб раскладанні на множнікі квадратнага трохчлена  $ax^2 + bx + c$ .
5. Ці заўсёды квадратны трохчлен можна раскласці на лінейныя множнікі?

## Практыкаванні

Раскладзіце квадратны трохчлен на множнікі (5.72—5.75).

5.72°. 1)  $x^2 - 10x + 9$ ;

2)  $x^2 - 2x - 35$ ;

3)  $x^2 - 4x + 3$ ;

4)  $x^2 - 4x - 60$ ;

5)  $x^2 + 7x + 10$ ;

6)  $x^2 + 25x + 114$ ;

7)  $x^2 - 29x + 198$ ;

8)  $x^2 - 17x + 72$ .

5.73. 1)  $3x^2 - 2x - 1$ ;

2)  $5x^2 + x - 4$ ;

3)  $2x^2 - 5x + 2$ ;

4)  $2x^2 - x - 3$ ;

5)  $15x^2 + 34x + 15$ ;

6)  $30x^2 + 37x + 10$ .

- 5.74. 1)  $x^2 - ax - 6a^2$ ; 2)  $x^2 + ax - 2a^2$ ;  
3)  $4x^2 - 20ax + 9a^2$ ; 4)  $x^2 - 2ax - 24a^2$ .
- 5.75. 1)  $3x^2 - 6x - 5$ ; 2)  $x^2 - 18x + 9$ ;  
3)  $0,8x^2 - 19,8x - 5$ ; 4)  $3,5 + \frac{2}{3}x^2 - 3\frac{1}{3}x$ ;  
5)  $x^2 + \sqrt{2}x - 2$ ; 6)  $x^2 - \sqrt{6}x + 1$ .
- 5.76. Дакажыце тоеснась:
- 1)  $3x^2 + 7x - 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3)$ ;  
2)  $0,5(a + 5)(a - 6) = 0,5a^2 - 0,5a - 15$ ;  
3)  $4(x - 2\sqrt{3})(x + 5\sqrt{2}) = 4x^2 - 4(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})x - 40\sqrt{6}$ ;  
4)  $2x^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2} - 1)x - \frac{2\sqrt{2}}{5} = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ .

Скараціце дроб (5.77—5.78).

- 5.77. 1)  $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$ ; 2)  $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 2x - 35}$ ;  
3)  $\frac{x^2 - 36}{2x^2 - 9x - 18}$ ; 4)  $\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 2x}$ .
- 5.78. 1)  $\frac{x^2 + 24 - 11x}{64 - x^2}$ ; 2)  $\frac{5 - 2y^2 - 9y}{1 - 4y^2}$ ;  
3)  $\frac{20 + 8k - k^2}{k^2 - 11k + 10}$ ; 4)  $\frac{3p^2 + 13p - 10}{12 - 16p - 3p^2}$ ;  
5)  $\frac{9p^2 + 6p + 1}{3p^2 + 7p + 2}$ ; 6)  $\frac{4k^2 + 7k - 15}{16k^2 - 40k + 25}$ .

5.79. Знайдзіце значэнне дробу:

- 1)  $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 9x + 20}$  пры  $x$ , роўным 5; -5; 4; -4;  
2)  $\frac{2x^2 + 9x - 5}{4x^2 + 20x}$  пры  $x$ , роўным 0,5; -0,5; 10; -10.

Выканайце дзеянні (5.80—5.81).

- 5.80. 1)  $\frac{9 - 4a}{3 - a} + \frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 7a + 3} : \frac{3 + 2a}{1 - 2a}$ ;  
2)  $\frac{9a^2 - 16}{2a^2 + 7a + 3} : \frac{3a - 4}{1 + 2a} - \frac{2a + 1}{a + 3}$ .

$$5.81. \quad 1) \left( \frac{1}{a+2} + \frac{2}{a+3} + \frac{2a-3}{a^2+5a+6} \right) : \frac{5a+4}{2a^2+4a};$$

$$2) \left( \frac{1}{2a+10} + \frac{5}{2a-2} - \frac{4a+17}{2a^2+8a-10} \right) : \frac{2a+7}{3a^2+15a}.$$

### 5.6. Тэарэма Віета

Прыведзенае квадратнае ўраўненне

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

з'яўляецца прыватным выпадкам ураўнення

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

дзе  $a = 1$ ,  $b = p$ ,  $c = q$ .

Падставіўшы гэтыя значэнні  $a$ ,  $b$ ,  $c$  у формулу для вылічэння каранёў квадратнага ўраўнення, атрымаем адпаведны выгляд формулы.

Калі ў прыведзенага квадратнага ўраўнення (1) дыскрымінант дадатны, г. зн.  $D = p^2 - 4q > 0$ , то карані ўраўнення (1) вылічваюцца па формуле

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad (3)$$

або, карацей,  $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$ .

Калі ў прыведзенага квадратнага ўраўнення (1) дыскрымінант роўны нулю, г. зн.  $D = p^2 - 4q = 0$ , то карань ураўнення (1) вылічваецца па формуле  $x = \frac{-p}{2}$ .

Пры  $D < 0$  ураўненне (1) каранёў не мае.

▲ Формулу (3) можна запісаць і ў выглядзе

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

У такім выглядзе формулу для вылічэння каранёў прыведзенага квадратнага ўраўнення зручна выкарыстоўваць, калі сярэдні каэфіцыент  $p$  — цотны лік. ▲

У наступнай тэарэме, гаворачы аб каранях  $x_1$ ,  $x_2$  квадратнага ўраўнення, мы будзем улічваць і выпадак кратнага караня, г. зн. калі квадратнае ўраўненне мае адзіны (значыць, кратны) карань, будзем браць яго двойчы.

**Тэарэма.** Калі  $x_1, x_2$  — карані прыведзенага квадратнага ўраўнення

$$x^2 + px + q = 0,$$

то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

**Доказ.** Няхай  $D > 0$ . Па формуле каранёў квадратнага ўраўнення

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (4)$$

Склаўшы левыя часткі і склаўшы правыя часткі гэтых роўнасцей, атрымаем  $x_1 + x_2 = -p$ .

Памножыўшы левыя часткі і памножыўшы правыя часткі роўнасцей (4) і выкарыстаўшы пры гэтым формулу рознасці квадратаў, атрымаем

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2}{4} = \\ &= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Няхай  $D = 0$ . Тады ўраўненне мае адзіны (кратны) карань  $x = \frac{-p}{2}$ . У гэтым выпадку возьмем яго двойчы:  $x_1 = \frac{-p}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-p}{2}$ .

Значыць,

$$x_1 + x_2 = \frac{-p}{2} + \frac{-p}{2} = -p; \quad x_1 x_2 = \left(\frac{-p}{2}\right)\left(\frac{-p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

Паколькі  $D = 0$ , то  $p^2 = 4q$ , значыць,  $x_1 x_2 = q$ .  $\square$

Даказаная тэарэма называецца *тэарэмай Віета*. Яна фармулюецца так:



сума каранёў прыведзенага квадратнага ўраўнення роўная сярэдняму каэфіцыенту, узятаму з процілеглым знакам, а здабытак каранёў роўны свабоднаму члену.

Суму і здабытак каранёў адвольнага квадратнага ўраўнення можна выразіць праз яго каэфіцыенты.

**Вынік** з тэарэмы Віета.

Калі  $x_1, x_2$  — карані квадратнага ўраўнення

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (5)$$

то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Доказ.** Карані ўраўнення (5) з'яўляюцца каранямі раўназначнага яму прыведзенага квадратнага ўраўнення

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Значыць, па тэарэме Віета маем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \quad \square$$

**А**

Франсуа Віет (1540—1603) — буйнейшы французскі матэматык свайго часу. Яго яшчэ называюць «бацькам алгебры». Па прафесіі Ф. Віет быў юрыстам. Зацікавіўшыся астраноміяй, ён стаў займацца матэматыкай. У працах Віета алгебра становіцца агульнай навукай аб ураўненнях, заснаванай на сімвалічных абазначэннях. Ён упершыню абазначыў літарамі не толькі невядомыя, але і каэфіцыенты ўраўненняў, дзякуючы чаму стала магчымым запісваць карані ўраўнення агульнымі формуламі. Але Віет не прызнаваў адмоўных лікаў і разглядаў толькі тыя выпадкі, калі карані ўраўнення былі дадатнымі.

**Прыклад 1.** Ці мае ўраўненне карані? Калі мае, то знайсці суму квадратаў яго каранёў:

$$а) 3x^2 - 7x + 11 = 0; \quad (5)$$

$$б) 3x^2 - 7x - 11 = 0. \quad (6)$$

**Рашэнне.** а) Ураўненне (5) не мае каранёў, паколькі

$$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 11 < 0.$$

б) *Спосаб 1.* Ураўненне (6) мае два карані, паколькі

$$D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 11 > 0.$$

Па тэарэме Віета знаходзім:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3} \text{ і } x_1 x_2 = -\frac{11}{3}.$$

З формулы квадрата сумы вынікае, што

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Такім чынам,

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{49}{9} + \frac{22}{3} = \frac{49+66}{9} = \frac{115}{9} = 12\frac{7}{9}.$$

Адказ: а) каранёў няма; б)  $12\frac{7}{9}$ .



**Способ 2.** Прыклад 1 б) можна рашыць інакш, вылічыўшы непасрэдна карані ўраўнення (6):

$$\begin{aligned} D &= 49 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 181, \\ x_1 &= \frac{7 - \sqrt{181}}{6}; \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{181}}{6}; \\ x_1^2 + x_2^2 &= \left(\frac{7 - \sqrt{181}}{6}\right)^2 + \left(\frac{7 + \sqrt{181}}{6}\right)^2 = \\ &= \frac{49 - 2 \cdot 7\sqrt{181} + 181 + 49 + 2 \cdot 7\sqrt{181} + 181}{36} = \\ &= \frac{2(49 + 181)}{36} = \frac{2 \cdot 230}{36} = \frac{115}{9} = 12\frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Заўважым, што гэтыя вылічэнні больш грувасткія, чым вылічэнні з выкарыстаннем тэарэмы Віета (гл. спосаб 1).

**Прыклад 2.** Калі ўраўненне  $x^2 + 47x + 23 = 0$  мае карані, то вызначыць знакі гэтых каранёў, не рашаючы ўраўненне.

Рашэнне. Ураўненне  $x^2 + 47x + 23 = 0$  мае два розныя карані  $x_1$  і  $x_2$ , паколькі  $D = 47^2 - 4 \cdot 23 > 0$ . Згодна з тэарэмай Віета маем:

$$x_1 + x_2 = -47 \text{ і } x_1 \cdot x_2 = 23.$$

Паколькі здабытак каранёў — дадатны лік, то карані  $x_1$  і  $x_2$  — лікі аднаго знака. А паколькі сума  $x_1 + x_2$  роўная адмоўнаму ліку, то  $x_1$  і  $x_2$  — адмоўныя лікі, г. зн.  $x_1 < 0$  і  $x_2 < 0$ , значыць, яны маюць знакі «мінус».

Адказ:  $x_1 < 0$ ;  $x_2 < 0$ .

**Прыклад 3.** Саставіць прыведзенае квадратнае ўраўненне з каранямі  $-\frac{1}{2}$  і  $\frac{3}{7}$ .

Рашэнне. Няхай шуканае прыведзенае ўраўненне мае выгляд  $x^2 + px + q = 0$ . Паколькі лікі  $x_1 = -\frac{1}{2}$  і  $x_2 = \frac{3}{7}$  — яго карані, то згодна з тэарэмай Віета

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ і } q = x_1 x_2,$$

г. зн.

$$p = -\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{7}\right) = -\left(-\frac{7}{14} + \frac{6}{14}\right) = -\left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{1}{14};$$

$$q = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{14}.$$

$$\text{Адказ: } x^2 + \frac{1}{14}x - \frac{3}{14} = 0.$$



1. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму Віета для прыведзенага квадратнага ўраўнення.
2. Запішыце адпаведнымі формуламі тэарэму Віета:
  - а) для прыведзенага квадратнага ўраўнення  $x^2 + px + q = 0$ ;
  - б) для квадратнага ўраўнення  $ax^2 + bx + c = 0$ .

### Практыкаванні

Калі ўраўненне мае карані, то знайдзіце іх суму і здабытак (5.82—5.83).

5.82°. 1)  $x^2 - 5x - 24 = 0$ ; 2)  $x^2 - 13x + 42 = 0$ ;

3)  $x^2 + 14x + 48 = 0$ ; 4)  $x^2 + 17x + 66 = 0$ ;

5)  $x^2 - 20 = 0$ ; 6)  $x^2 - 15 = 0$ ;

7)  $x^2 + 33x = 0$ ; 8)  $x^2 - 42x = 0$ .

5.83°. 1)  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ ; 2)  $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ;

3)  $5x^2 - 8x + 3 = 0$ ; 4)  $10x^2 - 3x + 1 = 0$ ;

5)  $3x^2 + 2x + 8 = 0$ ; 6)  $4x^2 - 17x - 15 = 0$ ;

7)  $0,09x^2 - 0,6084x = 0$ ; 8)  $\frac{5}{9}x^2 - 3380x = 0$ .

Калі ўраўненне мае карані, то вызначыце іх знакі, не рашаючы ўраўненне (5.84—5.86).

5.84°. 1)  $x^2 + 5x + 3 = 0$ ; 2)  $x^2 + 4x - 5 = 0$ ;

3)  $x^2 - 8x - 7 = 0$ ; 4)  $x^2 - 5x + 3 = 0$ ;

5)  $x^2 + 7x + 10 = 0$ ; 6)  $x^2 - 4x - 60 = 0$ ;

7)  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ; 8)  $x^2 + 25x + 14 = 0$ .

- 5.85°. 1)  $x^2 + 12x + 31 = 0$ ; 2)  $x^2 - 14x + 46 = 0$ ;  
3)  $x^2 - 9x + 10 = 0$ ; 4)  $x^2 + 11x + 20 = 0$ ;  
5)  $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{5}{49} = 0$ ; 6)  $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{25} = 0$ ;  
7)  $x^2 + 0,4x - 0,96 = 0$ ; 8)  $x^2 - 0,6x + 0,08 = 0$ .

- 5.86°. 1)  $4x - 3 = x^2 - 2x + 6$ ;  
2)  $6x - 1 = 5x + 7 + x^2$ ;  
3)  $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - (x - 3)(x - 4) = 0$ ;  
4)  $(x + 1)(x + 3) - (x + 3)(x + 2) + (x + 2)(x + 4) = 0$ .

- 5.87°. 1) Адзін з каранёў ураўнення  $x^2 - 19x + 18 = 0$  роўны 1. Знайдзіце другі яго карань.  
2) Адзін з каранёў ураўнення  $x^2 + 6x + 8 = 0$  роўны -2. Знайдзіце другі яго карань.

- 5.88. Пры якім значэнні  $t$  ураўненне:

- 1)  $2x^2 + tx + 68 = 0$  мае карань, роўны 2;  
2)  $3x^2 + tx - 54 = 0$  мае карань, роўны -2;  
3)  $4x^2 - 24x + t = 0$  мае карань, роўны 6;  
4)  $6x^2 + 30x + t = 0$  мае карань, роўны 0?

- 5.89. Знайдзіце суму квадратаў каранёў ураўнення:

- 1)  $x^2 - 10x + 17 = 0$ ; 2)  $x^2 + 6x - 4 = 0$ ;  
3)  $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{25} = 0$ ; 4)  $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{1}{49} = 0$ ;  
5)  $x^2 - 0,6x + 0,01 = 0$ ; 6)  $x^2 + 0,4x - 0,06 = 0$ .

- 5.90. Не рашаючы квадратнае ўраўненне  $5x^2 - x - 40 = 0$ , знайдзіце значэнне выразу, састаўленага з яго каранёў  $x_1$  і  $x_2$ :

- 1)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ; 2)  $x_1^2 + x_2^2$ ; 3)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ; 4)  $x_1^3 + x_2^3$ .

- 5.91\*. Не рашаючы квадратнае ўраўненне  $2x^2 + x - 20 = 0$ , знайдзіце значэнне выразу, састаўленага з яго каранёў  $x_1$  і  $x_2$ :

- 1)  $(x_1^2 + x_2^2)^2$ ; 2)  $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^2$ ;  
3)  $x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2$ ; 4)  $\frac{5x_1}{x_2} + \frac{5x_2}{x_1}$ .



Састаўце прыведзенае квадратнае ўраўненне з каранямі (5.92—5.93).

- 5.92°. 1)  $x_1 = 4, x_2 = 6$ ; 2)  $x_1 = 5, x_2 = 3, 2$ ;  
 3)  $x_1 = 2, 4, x_2 = -2, 4$ ; 4)  $x_1 = -3, 5, x_2 = 3, 5$ ;  
 5)  $x_1 = x_2 = 7$ ; 6)  $x_1 = x_2 = 9$ .

- 5.93. 1)  $x_1 = -3 + \sqrt{15}, x_2 = -3 - \sqrt{15}$ ;  
 2)  $x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = -3 - \sqrt{5}$ ;  
 3)  $x_1 = 4 + 2\sqrt{7}, x_2 = 4 - 2\sqrt{7}$ ;  
 4)  $x_1 = 5 + 3\sqrt{2}, x_2 = 5 - 3\sqrt{2}$ ;  
 5)  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ;  
 6)  $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{3}}{5}, x_2 = \frac{-4 - \sqrt{3}}{5}$ .

5.94. Састаўце квадратнае ўраўненне, калі:

- 1) яго карані процілеглыя лікам 7 і 9;
- 2) яго карані адваротныя лікам 4 і -9;
- 3) здабытак яго каранёў роўны нулю, а іх сума роўная 11;
- 4) яго адзіны каранёў роўны 7.

### 5.7. Тэарэма, адваротная тэарэме Віета

**Тэарэма.** Калі для лікаў  $x_1, x_2$  правільныя роўнасці

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q,$$

то  $x_1, x_2$  — карані прыведзенага квадратнага ўраўнення

$$x^2 + px + q = 0.$$

**Доказ.** Відавочна, што лікі  $x_1, x_2$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad (1)$$

і іншых каранёў у гэтага ўраўнення няма (патлумачце чаму). Пасля простых пераўтварэнняў левай часткі ўраўнення (1) прыме выгляд

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

адкуль, улічыўшы ўмову тэарэмы, атрымаем

$$x^2 + px + q = 0.$$

Паколькі гэта ўраўненне раўназначнае ўраўненню (1), то яго каранямі з'яўляюцца лікі  $x_1$  і  $x_2$ .  $\square$

Даказанае сцверджанне — і ёсць *тэарэма, адваротная тэарэме Віета*.

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне

$$x^2 - 10x + 21 = 0. \quad (2)$$

Рашэнне. Рэшым ураўненне (2) падборам, выкарыстаўшы наступнае сцверджанне: калі лікі  $x_1$  і  $x_2$  — карані ўраўнення (2), то згодна з тэарэмай Віета павінны быць правільнымі роўнасці

$$x_1 + x_2 = 10 \quad \text{і} \quad x_1 x_2 = 21,$$

і наадварот (па тэарэме, адваротнай тэарэме Віета), калі правільныя гэтыя роўнасці, то  $x_1$  і  $x_2$  — карані ўраўнення (2).

Лёгка заўважыць, што гэтыя роўнасці задавальняюць лікі 3 і 7. Такім чынам, на падставе тэарэмы, адваротнай тэарэме Віета, яны і з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення.

Адказ: 3; 7.



Паколькі падбор лікаў  $x_1$  і  $x_2$  выконваецца звычайна вусна, то ў спытку рашэнне можна аформіць наступным чынам:

$$x^2 - 10x + 21 = 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = 7 \text{ (па тэарэме, адваротнай тэарэме Віета).}$$

Адказ: 3; 7.

**Прыклад 2.** Запісаць натуральны абсяг вызначэння выразу

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10}.$$

Рашэнне. Гэты дроб мае сэнс, калі значэнне назоўніка не роўнае нулю. Таму ў натуральны абсяг вызначэння дадзенага дробу ўваходзяць усе тыя значэнні  $x$ , якія не з'яўляюцца каранямі ўраўнення  $x^2 - 7x + 10 = 0$  (як іх знайсці?), г. зн.  $x \neq 2$  і  $x \neq 5$ .

Адказ:  $(-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$ .

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне

$$x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 14 = 0. \quad (3)$$

Рашэнне. Карані ўраўнення (3) павінны задавальняць умову  $5x \geq 0$ , г. зн.  $x \geq 0$ . Пры выкананні гэтай умовы ўраўненне (3) раўназначнае ўраўненню

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем:

$$x = -7 \text{ або } x = 2.$$

Умову  $x \geq 0$  задавальняе толькі адно з гэтых значэнняў — лік 2.

Адказ: 2.



У шытку рашэнне можна аформіць так:

$$x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 14 = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ 5x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x = -7 \text{ або } x = 2), \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x = 2.$$

Адказ: 2.



1. Сфармулюйце і дакажыце тэарэму, адваротную тэарэме Віета, для прыведзенага квадратнага ўраўнення.
2. Прывядзіце прыклад квадратнага ўраўнення, якое лёгка рашаецца з выкарыстаннем тэарэмы, адваротнай тэарэме Віета.
- 3\*. Дакажыце, што з'яўляюцца раўназначнымі ўраўненні

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ і } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

### Практыкаванні

Запішыце карані квадратнага ўраўнення, выкарыстаўшы тэарэму, адваротную тэарэме Віета (5.95—5.97).

5.95°. 1)  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ; 2)  $x^2 - 15x - 16 = 0$ ;

3)  $x^2 - 7x - 18 = 0$ ; 4)  $x^2 - 9x + 20 = 0$ ;

5)  $x^2 - 19x + 88 = 0$ ; 6)  $x^2 + 16x + 63 = 0$ ;

7)  $x^2 + 2x - 48 = 0$ ; 8)  $x^2 - x - 12 = 0$ .

5.96°. 1)  $x^2 + 10x - 39 = 0$ ; 2)  $x^2 - 10x - 56 = 0$ ;

3)  $x^2 + 17x - 270 = 0$ ; 4)  $x^2 - 13x + 40 = 0$ ;

5)  $x^2 + 2008x - 2009 = 0$ ; 6)  $x^2 - 5614x + 5613 = 0$ .

- 5.97. 1)  $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$ ; 2)  $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 20 = 0$ ;  
3)  $x^2 - 7(\sqrt{x})^2 - 8 = 0$ ; 4)  $x^2 - 3(\sqrt{x})^2 - 10 = 0$ ;  
5)  $x^2 - (\sqrt{13x})^2 + 40 = 0$ ; 6)  $x^2 - (\sqrt{8x})^2 + 7 = 0$ .

- 5.98°. 1) 3 пар лікаў 5 і 7; -7 і 5; -7 і -5; -5 і 7 выберыце тую, якая састаўлена з каранёў ураўнення  $x^2 + 2x - 35 = 0$ .  
2) 3 пар лікаў 3 і -5; 5 і -3; -5 і -3; 3 і 5 выберыце тую, якая састаўлена з каранёў ураўнення  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .  
3) 3 пар лікаў 21 і 2; -2 і 21; 7 і -6; 6 і -7 выберыце тую, якая састаўлена з каранёў ураўнення  $x^2 - x - 42 = 0$ .  
4) 3 пар лікаў -5 і -3; 15 і 1; 5 і 3; -15 і -1 выберыце тую, якая састаўлена з каранёў ураўнення  $x^2 - 8x + 15 = 0$ .

- 5.99. Праверце, ці з'яўляюцца лікі  $x_1$  і  $x_2$  каранямі ўраўнення:

- 1)  $2x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ ,  $x_1 = 2a$ ,  $x_2 = -\frac{a}{2}$ ;  
2)  $6x^2 + 5ax + a^2 = 0$ ,  $x_1 = -\frac{a}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{a}{2}$ ;  
3)  $4x^2 - 20ax - 9a^2 = 0$ ,  $x_1 = 4,5a$ ,  $x_2 = 0,5a$ ;  
4)  $8x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}a$ ,  $x_2 = -\frac{3}{4}a$ .

- 5.100. Ці правільна, што лікі:

- 1)  $5 + \sqrt{7}$  і  $5 - \sqrt{7}$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення  
 $x^2 - 10x + 18 = 0$ ;  
2)  $-3 + 2\sqrt{3}$  і  $-3 - 2\sqrt{3}$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення  
 $x^2 + 6x - 3 = 0$ ;  
3)  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$  і  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення  
 $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$ ;  
4)  $-\sqrt{7} - \sqrt{3}$  і  $-\sqrt{7} + \sqrt{3}$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення  
 $x^2 + 2\sqrt{7}x - 4 = 0$ ?

- 5.101. 1) Не рашаючы ўраўненне  $5x^2 - 22x + 8 = 0$ , састаўце квадратнае ўраўненне, адзін з каранёў якога роўны 2, а другі — суме каранёў дадзенага ўраўнення.

2) Не рашаючы ўраўненне  $3x^2 + 2x - 15 = 0$ , састаўце квадратнае ўраўненне, адзін з каранёў якога роўны 3, а другі — здабытку каранёў дадзенага ўраўнення.

Запішыце натуральны абсяг вызначэння выразу (5.102—5.103).

5.102. 1)  $\frac{4}{x^2 - 11x + 18}$ ; 2)  $\frac{13}{x^2 - x - 2}$ ; 3)  $\frac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$ ;  
4)  $\frac{2x + 3}{x^2 + 7x - 11}$ ; 5)  $\frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 6}$ ; 6)  $\frac{x^3 - 7}{x^2 - 4x + 3}$ .

5.103\*. 1)  $\sqrt{x - 8} + \frac{1}{2x^2 - 18x - 24}$ ; 2)  $\sqrt{x + 3} - \frac{5x}{3x^2 + 5x - 12}$ ;  
3)  $\frac{1}{x^2 - x - 6} - \sqrt{1 - x}$ ; 4)  $\frac{1}{x^2 + x - 12} + \sqrt{6 - 3x}$ ;  
5)  $\frac{1}{\sqrt{x - 2}} + \frac{10}{x^2 + 2x - 8}$ ; 6)  $\frac{42}{3x^2 - 13x + 12} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$ .

### 5.8. Рашэнне ўраўненняў метадам замены зменнай

У шэрагу выпадкаў рашэнне ўраўнення можна звесці да рашэння квадратнага ўраўнення ўвядзеннем новай зменнай (новага невядомага).

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне  $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$ .

Рашэнне. Увядзём новую зменную  $u = x^2$ . Падставіўшы  $u$  замест  $x^2$  у дадзенае ўраўненне, атрымаем  $9u^2 - 37u + 4 = 0$  — квадратнае ўраўненне адносна  $u$ . Рашыўшы яго, знойдзем:

$$u = \frac{1}{9} \text{ або } u = 4.$$

Такім чынам, улічыўшы, што  $u = x^2$ , атрымаем:

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ або } x^2 = 4.$$

Адкуль

$$x = -\frac{1}{3} \text{ або } x = \frac{1}{3} \text{ або } x = -2 \text{ або } x = 2.$$

Адказ:  $-2$ ;  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $2$ .

**Азначэнне.** Ураўненне выгляду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

дзе  $a, b, c$  — лікі,  $a \neq 0$ , называецца **бікватратным**.

Разгледзім яшчэ два прыклады, у якіх трэба рашыць бікватратныя ўраўненні.

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне  $4x^4 + 11x^2 - 45 = 0$ .

Рашэнне. Увядзём новае невядомое  $u = x^2$ . Падставіўшы  $u$  замест  $x^2$  у дадзенае ўраўненне, атрымаем

$$4u^2 + 11u - 45 = 0.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, знойдзем:

$$u = -5 \text{ або } u = \frac{9}{4}.$$

Такім чынам, атрымаем:

$$x^2 = -5 \text{ або } x^2 = \frac{9}{4}.$$

Першае з гэтых ураўненняў каранёў не мае. Для другога атрымаем:

$$x = -\frac{3}{2} \text{ або } x = \frac{3}{2}.$$

Адказ:  $-1,5; 1,5$ .

Метад, якім мы рашалі бікватратныя ўраўненні, называецца **метадам замены зменнай**.

**Прыклад 3.** Раскласці на лінейныя множнікі трохчлен

$$x^4 - 9x^2 + 20.$$

Рашэнне. Абазначыўшы  $u = x^2$ , атрымаем трохчлен  $u^2 - 9u + 20$ , каранямі якога з'яўляюцца лікі  $u_1 = 4$ ,  $u_2 = 5$ . Такім чынам,

$$u^2 - 9u + 20 = (u - 4)(u - 5).$$

Адкуль, улічыўшы абазначэнне, атрымаем

$$x^4 - 9x^2 + 20 = (x^2 - 4)(x^2 - 5) = (x + 2)(x - 2)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}).$$

Акрамя бікватратных, многія іншыя ўраўненні рашаюцца з дапамогай замены зменнай. Вось прыклады такіх ураўненняў.

**Прыклад 4.** Рашыць ураўненне

$$x^2 - |x| - 6 = 0. \quad (1)$$

Рашэнне. Заўважыўшы, што  $x^2 = |x|^2$ , увядзём новую зменную  $t = |x|$ . Падставіўшы замест  $|x|$  зменную  $t$  ва ўраўненне (1), атрымаем:

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, знойдзем  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 3$ . Такім чынам, атрымаем два ўраўненні:

$$|x| = -2; \quad |x| = 3.$$

Першае ўраўненне каранёў не мае (патлумачце чаму).

З другога ўраўнення знойдзем  $x = -3$  або  $x = 3$ .

Адказ:  $-3; 3$ .

**Прыклад 5.** Рашыць ураўненне

$$(2x^2 + 5x - 2)^2 - 6x^2 - 15x + 6 = -2.$$

Рашэнне.  $(2x^2 + 5x - 2)^2 - 3(2x^2 + 5x - 2) + 2 = 0$ .

Увядзём новую зменную  $u = 2x^2 + 5x - 2$ . Тады

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

адкуль

$$u = 1 \text{ або } u = 2.$$

Такім чынам, улічыўшы абазначэнне, атрымаем:

$$2x^2 + 5x - 2 = 1 \tag{2}$$

або

$$2x^2 + 5x - 2 = 2. \tag{3}$$

Рашыўшы ўраўненні (2) і (3) (зробіце гэта самастойна), атрымаем чатыры значэнні  $x$ .

Адказ:  $\frac{-5 - \sqrt{57}}{4}; -3; \frac{1}{2}; \frac{-5 + \sqrt{57}}{4}$ .

**Прыклад 6.** Рашыць ураўненне  $x - 5\sqrt{x-7} - 13 = 0$ .

Рашэнне. Запішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе

$$x - 7 - 5\sqrt{x-7} - 6 = 0. \tag{6}$$

Абазначым  $u = \sqrt{x-7}$ , тады  $x - 7 = u^2$ . Пасля падстаноўкі ва ўраўненне (6) атрымаем

$$u^2 - 5u - 6 = 0.$$

Адкуль знойдзем:

$$u = -1 \text{ або } u = 6.$$

Таким чином, улічуйшы абазначэнне, атрымаем:

$$\sqrt{x-7} = -1 \quad (7)$$

або

$$\sqrt{x-7} = 6. \quad (8)$$

Ураўненне (7) каранёў не мае (патлумачце чаму).

Рашыўшы ўраўненне (8), атрымаем  $x = 43$ .

Адказ: 43.



1. Якое ўраўненне называецца бікватратным?
2. Як рашаецца бікватратнае ўраўненне?
3. Як рашаецца ўраўненне метадам замены зменнай?
- 4\*. Колькі каранёў можа мець бікватратнае ўраўненне?
- 5\*. У якіх выпадках бікватратнае ўраўненне  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ :
  - а) мае адзіны карань;
  - б) мае два карані;
  - в) мае тры карані;
  - г) мае чатыры карані;
  - д) не мае каранёў?

### Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (5.104—5.108).

- 5.104°. 1)  $2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$ ; 2)  $5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ ;  
 3)  $3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$ ; 4)  $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$ ;  
 5)  $-x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ ; 6)  $-3x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ .
- 5.105°. 1)  $x^4 - 16 = 0$ ; 2)  $x^4 - 25 = 0$ ;  
 3)  $x^4 + 81 = 0$ ; 4)  $x^4 + 9 = 0$ ;  
 5)  $16x^4 - 25 = 0$ ; 6)  $49x^4 - 64 = 0$ .
- 5.106°. 1)  $81x^2 - 64x^4 = 0$ ; 2)  $529x^4 - x^2 = 0$ ;  
 3)  $9x^4 = 16x^2$ ; 4)  $441x^2 = 64x^4$ ;  
 5)  $121x^4 + 100x^2 = 0$ ; 6)  $225x^2 + 9x^4 = 0$ .
- 5.107. 1)  $x^4 + 4 = 5x^2$ ; 2)  $x^4 + 12x^2 = 64$ ;  
 3)  $x^4 + 4(3x^2 + 8) = 0$ ; 4)  $x^4 + 2(4,5x^2 + 10) = 0$ ;  
 5)  $2x^4 - 2x^2 = \frac{3}{2}$ ; 6)  $3x^4 + x^2 = \frac{2}{3}$ .



- 5.108. 1)  $x^4 + 1 - 2x^2 = 0$ ; 2)  $x^4 + 16 + 4x^2 = 0$ ;  
3)  $x^4 + 72x^2 + 1296 = 0$ ; 4)  $x^4 - 18x^2 + 9 = 0$ .

- 5.109. 1) Ці з'яўляецца лік  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  коранем біквадратнага ўраўнення  $x^4 - 2x^2 - 10 = 0$ ?  
2) Ці з'яўляецца лік  $\sqrt{6} + \sqrt{6}$  коранем біквадратнага ўраўнення  $x^4 - 12x^2 + 30 = 0$ ?

Раскладзіце мнагачлен на множнікі (5.110—5.111).

- 5.110°. 1)  $x^4 - 5x^2 + 4$ ; 2)  $x^4 - 14x^2 + 24$ ;  
3)  $x^4 - 10x^2 + 9$ ; 4)  $x^4 - 13x^2 + 36$ ;  
5)  $x^4 - 17x^2 + 16$ ; 6)  $x^4 - 37x^2 + 36$ .

- 5.111. 1)  $3x^4 - 7x^2 + 2$ ; 2)  $2x^4 - 19x^2 + 9$ ;  
3)  $-12x^4 - x^2 + 6$ ; 4)  $-6x^4 + x^2 + 15$ ;  
5)  $-5x^4 - x^2 + 4$ ; 6)  $-3x^4 + x^2 + 2$ .

5.112. Скараціце дроб:

- 1)  $\frac{k^4 + 9 - 10k^2}{36 - 13k^2 + k^4}$ ; 2)  $\frac{20 + p^4 - 9p^2}{p^4 + 24 - 10p^2}$ ;  
3)  $\frac{c^4 - 4c^2 + 3}{c^4 + 27 - 12c^2}$ ; 4)  $\frac{y^4 - 17y^2 + 16}{49 - 50y^2 + y^4}$ .

5.113\*. Прывядзіце прыклад біквадратнага ўраўнення, якое:

- 1) не мае каранёў; 2) мае адзін корань;  
3) мае два карані; 4) мае тры карані;  
5) мае чатыры карані.

5.114. Састаўце ўраўненне па яго каранях:

- 1)  $-3$ ;  $3$ ;  $-2$ ;  $2$ ; 2)  $-6$ ;  $6$ ;  $-3$ ;  $3$ ;  
3)  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ; 4)  $-\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{6}$ ;  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  
5)  $-\frac{4}{5}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $-2$ ;  $2$ ; 6)  $-\frac{2}{7}$ ;  $\frac{2}{7}$ ;  $5$ ;  $-5$ .

5.115. Знайдзіце суму каранёў ураўнення, калі яны ёсць:

- 1)  $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ ; 2)  $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ ;  
3)  $4x^4 = 12x^2 - 1$ ; 4)  $12y^4 = y^2 - 100$ .

**5.116\*.** Дакажыце, што:

- 1) калі  $x_0$  — корань біквадратнага ўраўнення, то і  $-x_0$  таксама яго корань;
- 2) калі біквадратнае ўраўненне мае карані, то сума ўсіх яго каранёў роўная нулю.

**5.117\*.** Пры якіх значэннях  $a$  ўраўненне не мае каранёў:

- 1)  $x^4 - 12x^2 + a = 0$ ;
- 2)  $x^4 + 9x^2 + a = 0$ ;
- 3)  $x^4 + ax^2 + 100 = 0$ ;
- 4)  $x^4 + 10ax^2 + 160 = 0$ ?

**5.118\*.** 1) Пры якіх значэннях  $p$  ураўненне  $x^4 - 6x^2 + p = 0$ :

- а) мае чатыры карані;
- б) мае два карані;
- в) не мае каранёў?

2) Пры якіх значэннях  $k$  ураўненне  $x^4 + kx^2 + 21 = 0$ :

- а) мае чатыры карані;
- б) мае два карані;
- в) не мае каранёў?

**5.119\*.** 1) Адзін з каранёў біквадратнага ўраўнення роўны 6, а другі — 5. Састаўце ўраўненне.

2) Адзін з каранёў біквадратнага ўраўнення роўны  $\frac{1}{3}$ , а другі — 4. Састаўце ўраўненне.

Рашыце ўраўненне (5.120—5.126).

**5.120.** 1)  $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 25x^2 - 16$ ;

2)  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$ ;

3)  $(3x - 4)(4 + 3x)(9x^2 - 16) = (5 - x^2)^2$ ;

4)  $(2 - 5x)(5x + 2)(4 - 25x^2) = (3 + 20x^2)^2$ .

**5.121.** 1)  $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) + 2 = 0$ ;

2)  $(x^2 + 1)^2 - 13(x^2 + 1) + 36 = 0$ ;

3)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{2}\right) - 4 = 0$ ;

4)  $\left(\frac{x^2 + 1}{0,2}\right)^2 - 4,5\left(\frac{x^2 + 1}{0,2}\right) + 5 = 0$ .

**5.122.** 1)  $(x + 5)^4 - 13(x + 5)^2 + 36 = 0$ ;

2)  $(4x - 3)^4 - (4x - 3)^2 - 12 = 0$ ;

$$3) (2x^2 + 3)^4 = 12(2x^2 + 3)^2 - 11;$$

$$4) (x^2 - 2x)^4 - 3 = 2(x^2 - 2x)^2.$$

$$5.123. \quad 1) (x^2 + x)(x^2 + x - 5) = 84;$$

$$2) (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3;$$

$$3) (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2) = 40;$$

$$4) (x^2 - x - 16)(x^2 - x + 2) = 88.$$

$$5.124. \quad 1) 2\sqrt{x} + x - 3 = 0;$$

$$2) x - 5 = 4\sqrt{x};$$

$$3) x - 3 - 5\sqrt{x - 3} + 6 = 0;$$

$$4) 3x - 2 = 3\sqrt{3x - 2} + 10;$$

$$5) x - 5\sqrt{x + 4} - 10 = 0;$$

$$6) x - 8\sqrt{x - 3} + 9 = 0.$$

$$5.125. \quad 1) x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7;$$

$$2) x^2 - 7x + \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24;$$

$$3) x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21;$$

$$4) x^2 - 8\sqrt{x^2 - 1} + 16 = 0.$$

$$5.126*. \quad 1) x^5 + x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0;$$

$$2) x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0;$$

$$3) 2x^5 - 8x^4 - 14x^3 + 56x^2 - 36x + 144 = 0;$$

$$4) 3x^5 - x^4 + 39x^3 - 13x^2 + 126x - 42 = 0.$$

### ▲ 5.9. Ураўненні, якія змяшчаюць зменную пад знакам модуля

Разгледзім некалькі ўраўненняў, якія змяшчаюць зменную (невядомае) пад знакам модуля.

**Прыклад 1.** Рашыць ураўненне

$$|x^2 - 2x - 39| = 24. \quad (1)$$

Рашэнне. Па азначэнні модуля значэнне зменнай  $x$  з'яўляецца каранем ураўнення (1) тады і толькі тады, калі яно з'яўляецца каранем ураўнення

$$x^2 - 2x - 39 = 24 \quad (2)$$

або каранем ураўнення

$$x^2 - 2x - 39 = -24. \quad (3)$$

Рашыўшы ўраўненне (2), атрымаем:  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = -7$ .

Рашыўшы ўраўненне (3), атрымаем:  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 5$ .

Адказ:  $-7$ ;  $-3$ ;  $5$ ;  $9$ .

**Прыклад 2.** Рашыць ураўненне

$$|5x^2 - 13x + 6| = -x^2 - 6. \quad (4)$$

Рашэнне. Паколькі пры любых значэннях  $x$  правільныя няроўнасці

$$|5x^2 - 13x + 6| \geq 0 \text{ і } -x^2 - 6 < 0,$$

то ўраўненне (4) не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

**Прыклад 3.** Рашыць ураўненне

$$9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0. \quad (5)$$

Рашэнне. Карані ўраўнення (5) павінны задавальняць умову  $x \neq 0$ . Па азначэнні модуля пры  $x > 0$  ураўненне (5) раўназначнае ўраўненню

$$9x^2 - \frac{x}{x} = 0, \quad (6)$$

а пры  $x < 0$  ураўненне (5) раўназначнае ўраўненню

$$9x^2 - \frac{x}{-x} = 0. \quad (7)$$

Пераўтварыўшы ўраўненне (6), атрымаем

$$9x^2 - 1 = 0,$$

адкуль

$$x = -\frac{1}{3} \text{ або } x = \frac{1}{3}.$$

Але ўмову  $x > 0$  задавальняе толькі значэнне  $x = \frac{1}{3}$ .

Пераўтварыўшы ўраўненне (7), атрымаем

$$9x^2 + 1 = 0.$$

Гэта ўраўненне не мае каранёў (патлумачце чаму).

Адказ:  $\frac{1}{3}$ .



Рашэнне ўраўнення (5) можна аформіць наступным чынам.

Ураўненне  $9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0$  раўназначнае сцверджанню:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{x} = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{-x} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Рашыўшы першую сістэму з (8), атрымаем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x^2 - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = \frac{1}{9}; \end{cases} \quad x = \frac{1}{3}.$$

Рашыўшы другую сістэму з (8), атрымаем сістэму  $\begin{cases} x < 0, \\ 9x^2 + 1 = 0, \end{cases}$  якая не мае рашэнняў (патлумачце чаму).

Адказ:  $\frac{1}{3}$ .

**Прыклад 4.** Рашыць ураўненне

$$x^2 - 3x + \frac{10|3x-7|}{3x-7} = 0.$$

Рашэнне. Ураўненне  $x^2 - 3x + \frac{10|3x-7|}{3x-7} = 0$  раўназначнае сцверджанню

$$\begin{cases} 3x - 7 > 0, \\ x^2 - 3x + \frac{10(3x-7)}{3x-7} = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 3x - 7 < 0, \\ x^2 - 3x + \frac{10(-3x+7)}{3x-7} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Рашыўшы першую сістэму з (9), атрымаем сістэму

$$\begin{cases} x > \frac{7}{3}, \\ x^2 - 3x + 10 = 0, \end{cases} \text{ якая не мае рашэнняў, паколькі ўраўненне}$$

$x^2 - 3x + 10 = 0$  не мае каранёў (патлумачце чаму).

Рашыўшы другую сістэму з (9), атрымаем:

$$\begin{cases} x < \frac{7}{3}, \\ x^2 - 3x - 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{7}{3}, \\ (x = -2 \text{ или } x = 5); \end{cases} \quad x = -2.$$

Адказ:  $-2$ .

**Прыклад 5.** Рашыць ураўненне

$$|8x^2 - 4x + 1| = |3x^2 + 9x - 7|. \quad (10)$$

Рашэнне. Модулі двух лікаў роўныя тады і толькі тады, калі гэтыя лікі або роўныя, або процілеглыя. Такім чынам, значэнне  $x$  з'яўляецца каранем ураўнення (10) тады і толькі тады, калі яно з'яўляецца каранем ураўнення

$$8x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 9x - 7 \quad (11)$$

або каранем ураўнення

$$8x^2 - 4x + 1 = -(3x^2 + 9x - 7). \quad (12)$$

Рашыўшы ўраўненне (11), атрымаем:  $x_1 = 1,6$ ,  $x_2 = 1$ .

Рашыўшы ўраўненне (12), атрымаем:  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = \frac{6}{11}$ .

Адказ:  $-1$ ;  $\frac{6}{11}$ ;  $1$ ;  $1,6$ .



1. Дайце азначэнне модуля ліку  $a$ .
2. Модулі якіх двух лікаў роўныя? Прывядзіце прыклады.
3. Запішыце роўнасць, раўназначную роўнасці  $|a| = |b|$ , калі:
  - а)  $a \leq 0$ ,  $b \geq 0$ ;    б)  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$ ;    в)  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ;    г)  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$ .
- 4\*. Ці правільна, што роўнасці  $|a| = |b|$  і  $a^2 = b^2$  раўназначныя?

### Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (5.127—5.136).

- 5.127. 1)  $|x^2 - 4x| = 5$ ;                      2)  $|x^2 + x| = 12$ ;  
 3)  $|x^2 + 5x| = 14$ ;                      4)  $|x^2 - 3x| = 10$ ;  
 5)  $|x^2 + 7x| + 3 = 0$ ;                      6)  $|2x - x^2| + 9 = 0$ .
- 5.128. 1)  $|x^2 + 8x + 2| = 11$ ;                      2)  $|x^2 - 7x + 13| = 1$ ;  
 3)  $|3x^2 - 5x + 6| = 4$ ;                      4)  $|5x^2 - 17x + 15| = 3$ ;  
 5)  $|-6x^2 + 7x - 1| = 1$ ;                      6)  $|-2x^2 + 7x + 5| = 5$ .
- 5.129. 1)  $|7x^2 - 3x - 2| = -11$ ;  
 2)  $|9x^2 + 7x - 4| = -13$ ;  
 3)  $|4x^2 + x - 14| = -x^2 - 10$ ;  
 4)  $|5x^2 - 15x - 9| = -7x^2 - 9$ ;  
 5)  $|3x^2 - 10x + 3| = \frac{1}{-2,8 - 7x^2}$ ;

$$6) |2x^2 - 7x - 1| = \frac{1}{-9,6x^2 - 8};$$

$$7) |x^2 - 4x - 5| = -x^2;$$

$$8) |x^2 - 2x - 15| = -x^2.$$

$$5.130. \quad 1) x^2 = |5x - 6|;$$

$$2) 6x^2 = |5x - 1|;$$

$$3) 25x^2 + 15x + 4 = 2|10x + 3|;$$

$$4) 3x^2 - 4x - 3 = |3x - 7|;$$

$$5) 32x^2 - 72x + 11 = |43 - 24x|;$$

$$6) 7x^2 - 3x - 1 = 3|1 - 2x|.$$

$$5.131. \quad 1) |x^2 - 1| = |x + 5|;$$

$$2) |x - 6| = |x^2 - 5x + 9|;$$

$$3) |x + 3| = |2x^2 + 6x - 3|;$$

$$4) |3x^2 - 6x - 1| = |6 - x|;$$

$$5) 3|2x^2 + 4x + 3| = |x^2 + 11 + 5x|;$$

$$6) |2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3|.$$

$$5.132. \quad 1) |x - 5| + |x^2 - 25| = 0;$$

$$2) |x + 2| + |x^2 - 4| = 0;$$

$$3) |x - 1| + |x^2 - 1| = 0;$$

$$4) |x - 6| + |x^2 - 36| = 0;$$

$$5) |x + 6| - |x^2 - 36| = 0;$$

$$6) |x + 5| - |x^2 - 25| = 0;$$

$$7) |x + 2| - |x^2 - 4| = 0;$$

$$8) |x - 1| - |x^2 - 1| = 0.$$

$$5.133. \quad 1) x^2 + 2|x| - 63 = 0;$$

$$2) x^2 + 18|x| + 65 = 0;$$

$$3) \frac{1}{5}x^2 + |x| - 10 = 0;$$

$$4) \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3 = 0;$$

$$5) 3x^2 - 4|x| + 1 = 0;$$

$$6) 7x^2 - 12|x| + 5 = 0.$$

$$5.134*. \quad 1) 8x^2 + \frac{x}{|x|} = 0;$$

$$2) x^2 - \frac{9x}{|x|} = 0;$$

$$3) x^2 - \frac{8x}{|x|} = 0;$$

$$4) 7x^2 + \frac{x}{7|x|} = 0;$$

5)  $x^2 - 5x + \frac{6|x|}{x} = 0;$

6)  $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} - 6 = 0;$

7)  $2x^2 + x - \frac{|x|}{x} = 0;$

8)  $2x^2 - 5x - \frac{3|x|}{x} = 0;$

9)  $2x^2 + 8x - \frac{11x}{|x|} = 0;$

10)  $9x^2 + 8x + \frac{6x}{|x|} = 0.$

5.135\*. 1)  $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 5 = 0;$

2)  $x^2 - (\sqrt{x+3})^2 - 8 = 0;$

3)  $x^2 - 3x + \frac{4-x}{|x-4|} = 0;$

4)  $x^2 - 4x \cdot \frac{|x-10|}{x-10} + 2 = 0.$

5.136\*. 1)  $x^2 - 5x \cdot \sqrt{\frac{x-4}{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}} + 6 = 0;$

2)  $x^2 + x \cdot \sqrt{\frac{2+x}{3+x}} \cdot \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{2+x}} - 12 = 0;$

3)  $x^2 + 5x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + 4 = 0;$

4)  $x^2 - 7x \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}} + 10 = 0.$



## Раздзел 6

# КВАДРАТЫЧНАЯ ФУНКЦЫЯ

### 6.1. Функцыя $y = x^2$

Разгледзім функцыю, зададзеную формулай

$$y = x^2$$

на мностве  $\mathbf{R}$  усіх рэчаісных лікаў.

На падставе азначэння функцыі кожнаму значэнню аргумента  $x$  з абсягу вызначэння  $\mathbf{R}$ , г. зн. кожнаму рэчаіснаму ліку, ставіцца ў адпаведнасць значэнне функцыі  $y$ , роўнае квадрату ліку  $x$ .

Напрыклад, пры  $x = 7$  значэнне функцыі  $y = 7^2 = 49$ ; пры  $x = -11$  значэнне функцыі  $y = (-11)^2 = 121$ .

Пакажам відарыс графіка функцыі  $y = x^2$ . Для гэтага нададзім некалькі значэнняў аргументу, вылічым адпаведныя значэнні функцыі і запішам іх у табліцу.

|     |   |           |         |           |         |           |         |
|-----|---|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|
| $x$ | 0 | $\pm 0,5$ | $\pm 1$ | $\pm 1,5$ | $\pm 2$ | $\pm 2,5$ | $\pm 3$ |
| $y$ | 0 | 0,25      | 1       | 2,25      | 4       | 6,25      | 9       |

Пакажам пункты  $(x; y)$  з дадзенымі каардынатамі на плоскасці (рыс. 50). Злучым гэтыя пункты плаўнай непарыўнай крывой (рыс. 51). Гэту крывую можна разглядаць як відарыс графіка функцыі  $y = x^2$ .

Графік функцыі  $y = x^2$  называецца *парабай*. Гавораць «*парабала*  $y = x^2$ ».

Відарыс парабалы дазваляе ўбачыць яе ўласцівасці.

На рысунку 51 бачна, што парабала  $y = x^2$  мае адзіны агульны пункт з восямі каардынат — гэта пункт  $(0; 0)$  — пачатак каардынат.

Астатнія пункты парабалы ляжаць над восяю абсцыс у I і II каардынатных вуглах (чвэрцях). Значыць, функцыя  $y = x^2$  прымае дадатныя значэнні ва ўсіх пунктах  $x \neq 0$ .

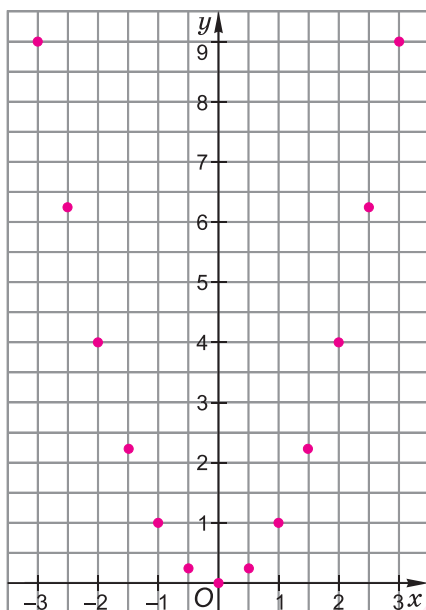


Рис. 50

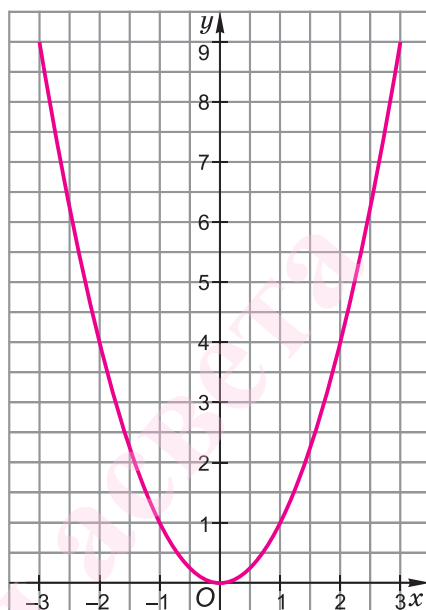


Рис. 51

Няцяжка заўважыць, што *парабала  $y = x^2$  сіметрычная адносна восі ардынат*.

Пункт, у якім парабала  $y = x^2$  перасякаецца са сваёй воссю сіметрыі, называецца *вяршыняй парабалы*.

Вяршыняй парабалы  $y = x^2$  з'яўляецца пункт  $(0; 0)$ .

Парабала  $y = x^2$  падзяляецца воссю сіметрыі на дзве часткі; яны называюцца *галінамі парабалы*. Прынята гаварыць: «галіны парабалы  $y = x^2$  накіраваныя ўверх».



1. Як называецца графік функцыі  $y = x^2$ ?
2. Назавіце агульны пункт парабалы і восей каардынат.
3. У якіх каардынатных вуглах ляжыць парабала  $y = x^2$ ?
4. У якіх пунктах функцыя  $y = x^2$  прымае значэнні:
  - а)  $y = 0$ ;
  - б)  $y > 0$ ;
  - в)  $y < 0$ ?
5. Якая прамая з'яўляецца воссю сіметрыі парабалы  $y = x^2$ ?
6. Што называецца:
  - а) вяршыняй парабалы  $y = x^2$ ;
  - б) галінамі парабалы  $y = x^2$ ?

## Практикванні

6.1°. Функцыя зададзена формулай  $y = x^2$ . Параўнайце значэнні функцыі пры значэннях аргумента, роўных:

- |                    |                                      |                                      |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $-3$ і $-2$ ;   | 2) $-4$ і $-5$ ;                     | 3) $-2$ і $2$ ;                      |
| 4) $6$ і $-6$ ;    | 5) $2\frac{3}{4}$ і $2\frac{4}{9}$ ; | 6) $3\frac{2}{3}$ і $3\frac{1}{5}$ ; |
| 7) $-37,4$ і $0$ ; | 8) $2$ і $-49,7$ ;                   | 9) $28,7$ і $0$ ;                    |
| 10) $-1$ і $5$ ;   | 11) $-3$ і $7$ ;                     | 12) $12$ і $-8$ .                    |

6.2°. Пры якіх значэннях аргумента значэнне функцыі, зададзенай формулай  $y = x^2$ , роўнае:

- |             |                     |             |
|-------------|---------------------|-------------|
| 1) $9$ ;    | 2) $\frac{1}{25}$ ; | 3) $0,49$ ; |
| 4) $1,21$ ; | 5) $625$ ;          | 6) $256$ ?  |

6.3°. Ці належыць графіку функцыі  $y = x^2$  пункт:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1) $A(7; 49)$ ;                       | 2) $B(10; 100)$ ;                        |
| 3) $C(-8; -64)$ ;                     | 4) $D(3; -9)$ ;                          |
| 5) $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ ;   | 6) $N(-\frac{2}{7}; \frac{4}{49})$ ;     |
| 7) $K(6; \sqrt{6})$ ;                 | 8) $L(\sqrt{11}; 11)$ ;                  |
| 9) $P(-1\frac{1}{3}; 1\frac{7}{9})$ ; | 10) $Q(-1\frac{2}{7}; 1\frac{32}{49})$ ? |

6.4°. Запішыце каардынаты пункта, сіметрычнага адносна восі  $Oy$  пункту:

- |                        |                          |                  |
|------------------------|--------------------------|------------------|
| 1) $A(1; -1)$ ;        | 2) $B(-2; 4)$ ;          | 3) $C(-9; 81)$ ; |
| 4) $D(\sqrt{7}; -7)$ ; | 5) $M(-\sqrt{11}; 11)$ ; | 6) $N(2,4; 0)$ . |

Якія з гэтых пунктаў належаць парабале  $y = x^2$ ?

6.5°. Ці належаць графіку функцыі  $y = x^2$  пункты:

- |   |
|---|
| 1) $A(-6; 36)$ і $B(6; 36)$ ;   |
| 2) $C(10; 100)$ і $D(-10; 100)$ ;   |
| 3) $M(-9; 3)$ і $N(9; 3)$ ;   |
| 4) $E(\sqrt{5}; -5)$ і $F(-\sqrt{5}; -5)$ ;   |
| 5) $K(\sqrt{3} - 1; 4 - 2\sqrt{3})$ і $T(1 - \sqrt{3}; 4 - 2\sqrt{3})$ ;                |
| 6) $L(\sqrt{2} + \sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{6})$ і $Q(-\sqrt{2} - \sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{6})$ ? |

6.6. Запішыце абсцысы пунктаў перасячэння парабалы  $y = x^2$  з прамой:

- 1)  $y = 4$ ;                      2)  $y = 9$ ;                      3)  $y = 121$ ;  
 4)  $y = \sqrt{13}$ ;                      5)  $y = \sqrt{21}$ ;                      6)  $y = \sqrt{48}$ .

6.7. Ці мае графік функцыі  $y = x^2$  агульныя пункты з прамой:

- 1)  $y = 124,5$ ;                      2)  $y = 302,7$ ;                      3)  $y = -12,9$ ;  
 4)  $y = -37,6$ ;                      5)  $y = 0$ ;                      6)  $y = 0,0001$ ?

6.8. Пакажыце відарыс графіка функцыі, зададзенай наступнай формулай, і вызначыце для гэтай функцыі:

а) каардынаты агульных пунктаў яе графіка і каардынатных восей;

б) у якіх каардынатных вуглах ляжыць яе графік;

в) пры якіх значэннях  $x$  яна прымае значэнне  $y = 0$ ;

г) пры якіх значэннях  $x$  яна прымае значэнні  $y > 0$ ;

д) пры якіх значэннях  $x$  яна прымае значэнні  $y < 0$ ;

е) ураўненне восі сіметрыі (калі яна ёсць) яе графіка:

- 1)  $y = x(x + 8) - 8x$ ;                      2)  $y = 9x - x(9 - x)$ ;  
 3)  $y = (x - 1)(x + 1) + 1$ ;                      4)  $y = 100 - (10 - x)(x + 10)$ ;  
 5)  $y = (x + 3)^2 - 3(2x + 3)$ ;                      6)  $y = (x - 5)^2 - 5(5 - 2x)$ .

6.9. Выкарыстаўшы графік функцыі  $y = x^2$ , вызначыце, пры якіх значэннях  $x$  значэнні функцыі:

- 1) меншыя за 4;                      2) большыя за 9;  
 3) большыя за 0;                      4) меншыя за 1.

## 6.2. Функцыя $y = ax^2$

**Азначэнне.** Квадратичнай (квадратнай) функцыяй называецца функцыя выгляду

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ — лікі, } a \neq 0)$$

з абсягам вызначэння — мноствам  $R$  усіх рэчаісных лікаў.

Функцыя  $y = x^2$  з'яўляецца прыватным выпадкам квадратичнай функцыі  $y = ax^2 + bx + c$  пры  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ .

Графік квадратичнай функцыі (як і графік функцыі  $y = x^2$ ) называецца *парабай*, а ўраўненне  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) — *ураўненнем гэтай парабалы*.

Графік квадратычнай функцыі і яго ўласцівасці мы будзем вывучаць, выкарыстоўваючы ўласцівасці графіка функцыі  $y = x^2$ .

Пры  $a \neq 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  маем яшчэ адзін прыватны выпадак квадратычнай функцыі  $y = ax^2 + bx + c$ , г. зн. функцыю

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0, a \neq 1).$$

Няхай  $a > 0$ . Прывядзём два прыклады функцыі  $y = ax^2$ :

1) пры  $a > 1$ ; 2) пры  $0 < a < 1$ .

**Прыклад 1.** Разгледзім функцыю  $y = 2x^2$  (тут  $a = 2$ ). Саставім табліцу значэнняў гэтай функцыі і параўнаем яе з табліцай значэнняў функцыі  $y = x^2$ .

| $x$        | 0 | $\pm 0,5$ | $\pm 1$ | $\pm 1,5$ | $\pm 2$ |
|------------|---|-----------|---------|-----------|---------|
| $y = x^2$  | 0 | 0,25      | 1       | 2,25      | 4       |
| $y = 2x^2$ | 0 | 0,5       | 2       | 4,5       | 8       |

Выкарыстаўшы даныя табліцы, пакажам відарысы парабал  $y = x^2$  і  $y = 2x^2$  у адной сістэме каардынат (рыс. 52).

Відавочна, што пры кожным значэнні  $x$  значэнне функцыі  $y = 2x^2$  у 2 разы большае за значэнне функцыі  $y = x^2$ . Значыць, пры адной і той жа абсцысе  $x_0$  ардыната пункта  $M$  на парабале  $y = 2x^2$  у 2 разы большая за ардынату пункта  $N$  на парабале  $y = x^2$  (рыс. 53). Таму любы пункт  $M$  на парабале  $y = 2x^2$  можна атрымаць з адпаведнага пункта  $N$  на парабале  $y = x^2$ , павялічыўшы ардынату пункта  $N$  у 2 разы.

Гавораць, што парабала  $y = 2x^2$  атрымліваецца з парабалы  $y = x^2$  *расцяжэннем у 2 разы ўздоўж восі  $Oy$* .

Заўважым, што пры расцяжэнні парабалы  $y = x^2$  уздоўж восі  $Oy$  яе вяршыня з'яўляецца нерухомым пунктам (патлумачце чаму).

**Прыклад 2.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{2}x^2$  (тут  $a = \frac{1}{2}$ ). Саставім табліцу

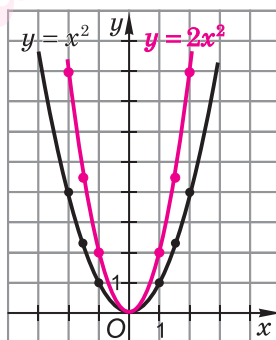


Рис. 52

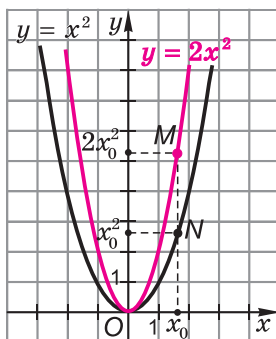
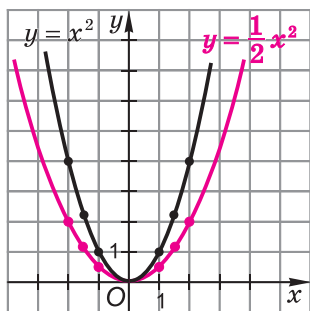


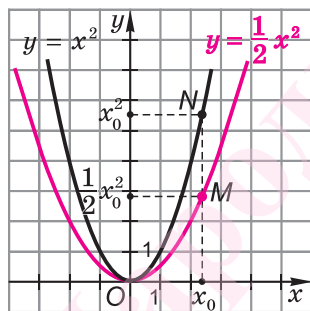
Рис. 53

значэнняў гэтай функцыі і параўнаем яе з табліцай значэнняў функцыі  $y = x^2$ .

|                      |   |           |         |           |         |
|----------------------|---|-----------|---------|-----------|---------|
| $x$                  | 0 | $\pm 0,5$ | $\pm 1$ | $\pm 1,5$ | $\pm 2$ |
| $y = x^2$            | 0 | 0,25      | 1       | 2,25      | 4       |
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | 0 | 0,125     | 0,5     | 1,125     | 2       |



Рыс. 54



Рыс. 55

Выкарыстаўшы даныя табліцы, пакажам відарысы парабал  $y = x^2$  і  $y = \frac{1}{2}x^2$  у адной сістэме каардынат (рыс. 54).

Відавочна, што пры кожным значэнні  $x$  значэнне функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2$  у 2 разы меншае за значэнне функцыі  $y = x^2$ . Значыць, пры адной і той жа абсцысе  $x_0$  ардыната пункта  $M$  на парабале  $y = \frac{1}{2}x^2$  у 2 разы меншая за ардынату пункта  $N$  на парабале  $y = x^2$  (рыс. 55). Таму любы пункт  $M$  на парабале  $y = \frac{1}{2}x^2$  можна атрымаць з адпаведнага пункта  $N$  на парабале  $y = x^2$ , паменшыўшы ардынату пункта  $N$  у 2 разы.

Гавораць, што парабала  $y = \frac{1}{2}x^2$  атрымліваецца з парабалы  $y = x^2$  **сцісканнем у 2 разы ўздоўж восі  $Oy$** . Заў-

важым, што пры сцісканні парабалы  $y = x^2$  уздоўж восі  $Oy$  яе вяршыня з'яўляецца нерухомым пунктам (патлумачце чаму).

Наогул,



калі  $a > 1$ , то парабала  $y = ax^2$  атрымліваецца з парабалы  $y = x^2$  расцяжэннем у  $a$  разоў уздоўж восі  $Oy$ ;  
калі  $0 < a < 1$ , то парабала  $y = ax^2$  атрымліваецца з парабалы  $y = x^2$  сцісканнем у  $\frac{1}{a}$  раза ўздоўж восі  $Oy$ .

Функция  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) мае тая ж уласцівасці, што і функцыя  $y = x^2$  (гл. п. 6.1), і вызначаюцца яны гэтаксама, як для функцыі  $y = x^2$ .

Разгледзім функцыю  $y = ax^2$  пры  $a < 0$ .

У якасці прыкладу прывядзём функцыю  $y = -2x^2$ . Параўнаем яе з функцыяй  $y = 2x^2$ , якую мы ўжо вывучылі.

Заўважым, што графікі функцый  $y = -2x^2$  і  $y = 2x^2$  сіметрычныя адносна восі  $Ox$  (rys. 56).

Наогул, парабола  $y = ax^2$  ( $a < 0$ ) сіметрычна парабале  $y = |a|x^2$  адносна восі  $Ox$  (rys. 57). З гэтай сіметрыі вынікаюць уласцівасці графіка функцыі  $y = ax^2$  ( $a < 0$ ). Напрыклад, гэта парабола сіметрычна адносна восі ардынат.

Такім чынам, для парабалы  $y = ax^2$  пры любым  $a \neq 0$  вось  $Oy$  з'яўляецца восьсю сіметрыі.

Пункт, у якім графік квадратычнай функцыі  $y = ax^2$  — парабола — перасякаецца са сваёй восьсю сіметрыі, называецца **вяршыняй парабалы**.

Вяршыняй парабалы  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) з'яўляецца пачатак каардынат.

Калі  $a > 0$ , то галіны парабалы  $y = ax^2$  накіраваныя ўверх, а калі  $a < 0$ , то галіны парабалы накіраваныя ўніз.

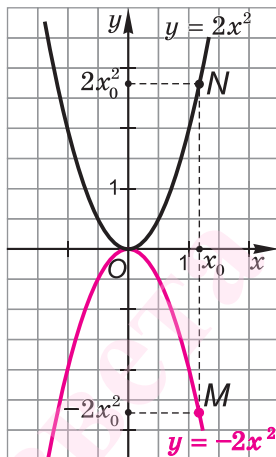


Рис. 56

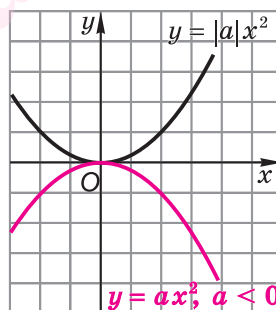


Рис. 57



1. Якая функцыя называецца квадратычнай?
2. Як называецца графік квадратычнай функцыі?
3. Як атрымліваецца парабола  $y = ax^2$  з парабалы  $y = x^2$ , калі:
  - а)  $a > 1$ ; б)  $0 < a < 1$ ?
4. Якая прамая з'яўляецца восьсю сіметрыі парабалы  $y = ax^2$ ?
5. Які пункт з'яўляецца вяршыняй парабалы  $y = ax^2$ ?
6. Сфармулюйце і праілюструйце на рысунку ўласцівасці графіка функцыі  $y = ax^2$  пры:
  - а)  $a > 0$ ; б)  $a < 0$ .

## Практыкаванні

- 6.10°. Дадзены функцыі:  $y = \frac{1}{4}x^2$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 4x^2$ . Пакажыце ў адной сістэме каардынат відарысы графікаў функцый і назавіце іх уласцівасці.
- 6.11°. Ці правільна, што графіку функцыі  $y = 4x^2$  належыць пункт:
- 1)  $A(-1; -4)$ ;                      2)  $B(0,5; 2)$ ;  
3)  $C(0,1; 0,4)$ ;                      4)  $D(-2; 16)$ ?
- 6.12°. Знайдзіце каардынаты агульных пунктаў (калі яны ёсць) парабалы  $y = 4x^2$  і прамой:
- 1)  $y = 4$ ;                      2)  $y = 64$ ;                      3)  $y = \frac{1}{9}$ ;  
4)  $y = \frac{1}{49}$ ;                      5)  $y = -25$ ;                      6)  $y = -16$ .
- 6.13°. Знайдзіце каардынаты агульных пунктаў (калі яны ёсць) парабалы  $y = -\frac{1}{6}x^2$  і прамой:
- 1)  $y = -6$ ;                      2)  $y = -24$ ;                      3)  $y = -\frac{1}{54}$ ;  
4)  $y = -\frac{1}{150}$ ;                      5)  $y = \frac{1}{6}$ ;                      6)  $y = 6$ .
- 6.14. Пакажыце відарыс графіка функцыі і назавіце яго ўласцівасці:
- 1)  $y = 2(x + 4)^2 - 16(x + 2)$ ;  
2)  $y = 3(1 - 2x) - 3(x - 1)^2$ ;  
3)  $y = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(3 + \frac{1}{2}x\right) + 9$ ;  
4)  $y = 0,1(5 - 2x)(5 + 2x) - 2,5$ .
- 6.15. Знайдзіце значэнне  $a$ , калі вядома, што парабала  $y = ax^2$  праходіць праз пункт:
- 1)  $(1; 5)$ ;                      2)  $(2; 16)$ ;                      3)  $(0; 0)$ ;  
4)  $(3; 1)$ ;                      5)  $(-2; 1)$ ;                      6)  $(-5; 125)$ .
- 6.16. Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = 2x^2$ :
- 1) расцяжэннем у 2 разы ўздоўж восі  $Oy$ ;  
2) расцяжэннем у 4 разы ўздоўж восі  $Oy$ ;  
3) сцісканнем у 4 разы ўздоўж восі  $Oy$ ;  
4) сцісканнем у 2 разы ўздоўж восі  $Oy$ .



6.17°. На рисунку 58 показаны відарыс графіка функції  $y = ax^2$ . Визначьте значення  $a$ .

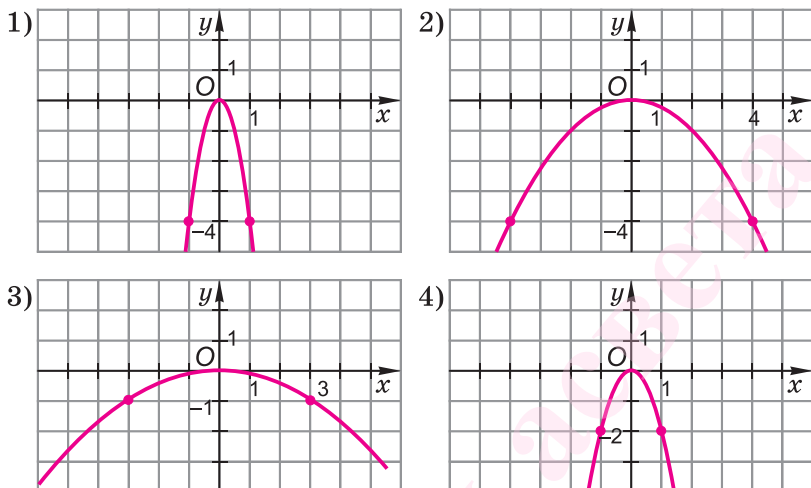


Рис. 58

6.18. Для функції  $y = 3x^2$  визначьте, при яких значеннях  $x$  значенні функції:

- 1) меншія за 3;      2) більшія за 3;  
3) більшія за 0;    4) меншія за 0.

6.19. Для функції  $y = -\frac{1}{2}x^2$  визначьте, при яких значеннях  $x$  значення функції:

- 1) менше за -8;      2) більше за  $-\frac{1}{8}$ ;  
3) більше за  $-\frac{1}{2}$ ;    4) менше за 0.

6.20. При яких значеннях  $p$  графікам функції  $y = (p - 2)x^2$  з'являється:

- 1) парабала;      2) прамая?

6.21\*. Площа паверхні куба (у квадратних сантиметрах) залежыць ад даўжыні канта  $x$  (у сантиметрах). Задайте формулай гэту функцыю. Пакажыце відарыс яе графіка.

6.22\*. Пакажыце відарыс графіка функцыі:

1)  $y = 3x|x|$ ,  $x \geq 0$ ;

2)  $y = \frac{1}{3}x|x|$ ,  $x \leq 0$ ;

3)  $y = -0,5x|x|$ ,  $x \leq 0$ ;

4)  $y = -0,25x|x|$ ,  $x \leq 0$ .

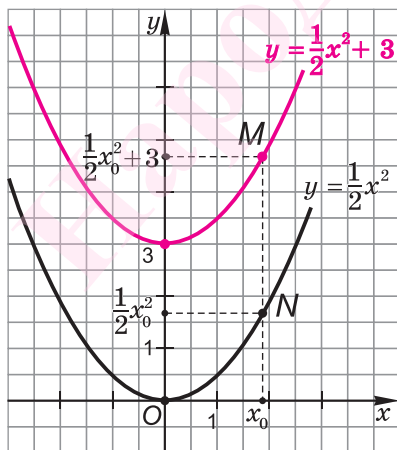
### 6.3. Функцыя $y = ax^2 + c$

Разгледзім прыватны выпадак квадратычнай функцыі  $y = ax^2 + bx + c$  пры  $b = 0$ , г. зн.

$$y = ax^2 + c \quad (a \neq 0, c \neq 0).$$

Прывядзём чатыры выпадкі з рознымі камбінацыямі знакаў лікаў  $a$  і  $c$ : 1)  $a > 0$ ,  $c > 0$ ; 2)  $a > 0$ ,  $c < 0$ ; 3)  $a < 0$ ,  $c > 0$ ; 4)  $a < 0$ ,  $c < 0$ .

**Прыклад 1.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  (тут  $a = \frac{1}{2}$ ,  $c = 3$ ). Параўнаем яе з функцыяй  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Пры кожным значэнні  $x$  значэнне функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  большае за значэнне функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2$  на 3 адзінкі. Такім чынам, кожны пункт  $M$  парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  атрымліваецца з адпаведнага пункта  $N$  парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  зрухам на 3 адзінкі ўверх уздоўж



Рыс. 59

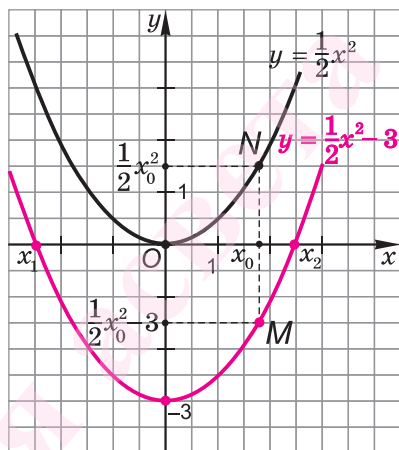
восі  $Oy$  (рыс. 59), г. зн. парабола  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  атрымліваецца з парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  зрухам на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі  $Oy$ . Таму воссю сіметрыі парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  гэтак жа, як і парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$ , з'яўляецца вось  $Oy$  (яе ўраўненне  $x = 0$ ).

З воссю  $Ox$  парабола  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  не перасякаецца, а з воссю  $Oy$  мае адзіны агульны пункт  $(0; 3)$ .

Вяршыня разглядаемай парабалы — пункт  $(0; 3)$ ; ён атрымліваецца з пункта  $(0; 0)$  — вяршыні парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  — зрухам на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі  $Oy$ .

Галіны парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$  накіраваныя ўверх.

**Прыклад 2.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  (тут  $a = \frac{1}{2}$ ,  $c = -3$ ). Параўнаем яе з функцыяй  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Пры кожным значэнні  $x$  значэнне функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  меншае за значэнне функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2$  на 3 адзінкі. Такім чынам, кожны пункт  $M$  парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  атрымліваецца з адпаведнага пункта  $N$  парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  зрухам на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$  (рыс. 60), г. зн. парабола  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  атрымліваецца з парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  зрухам на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$ . Таму восьсю сіметры парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  гэтак жа, як і парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$ , з'яўляецца вось  $Oy$ .



Рыс. 60

У пунктах перасячэння парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  з восьсю  $Ox$  значэнне функцыі  $y = 0$ ; значыць, абсцысы гэтых пунктаў  $x_1$  і  $x_2$  з'яўляюцца каранямі ўраўнення  $0 = \frac{1}{2}x^2 - 3$ , г. зн.  $x_1 = -\sqrt{6}$ ,  $x_2 = \sqrt{6}$ . Такім чынам, парабола перасякаецца з восьсю абсцыс у пунктах  $(-\sqrt{6}; 0)$  і  $(\sqrt{6}; 0)$ . З восьсю ардынаты парабола перасякаецца ў пункце  $(0; -3)$ .

Вяршыня разглядаемай парабалы — пункт  $(0; -3)$ ; ён атрымліваецца з пункта  $(0; 0)$  — вяршыні парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  — зрухам на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$ .

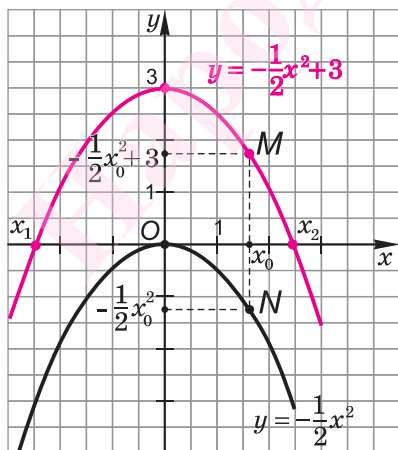
Галіны парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$  накіраваныя ўверх.

Такім чынам, для кожнай з квадратычных функцый у прыкладах 1 і 2 названы ўласцівасці яе графіка-парабалы:

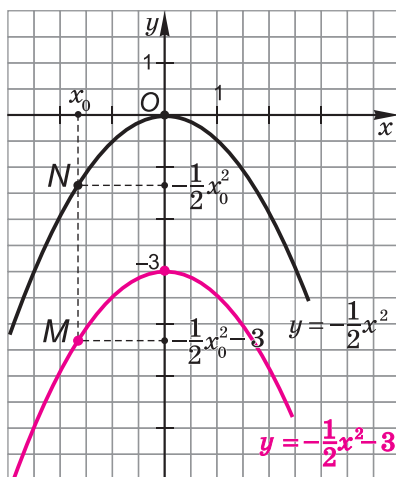
- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) ураўненне восі сіметрыі парабалы;
- в) напрамак галін парабалы;
- г) каардынаты пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;
- д) каардынаты пункта перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

**Прыклад 3.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$  (тут  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 3$ ). Параўнаем па аналогіі з прыкладам 1 графік гэтай функцыі з парабалай  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Мы бачым, што парабала  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$  атрымліваецца зрухам парабалы  $y = -\frac{1}{2}x^2$  на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі  $Oy$  (рыс. 61).

**Прыклад 4.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$  (тут  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $c = -3$ ). Параўнаем па аналогіі з прыкладам 2 графік гэтай функцыі з парабалай  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Мы бачым, што парабала  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$  атрымліваецца зрухам парабалы  $y = -\frac{1}{2}x^2$  на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$  (рыс. 62).



Рыс. 61



Рыс. 62

Приклады 1—4 показуюць, што:



парабала  $y = ax^2 + c$  атрымліваецца зрухам парабалы  $y = ax^2$  уздоўж восі  $Oy$ :

на  $c$  адзінак уверх пры  $c > 0$  і на  $|c|$  адзінак уніз пры  $c < 0$ .

**Прыклад 5.** Знайсці каардынаты пунктаў перасячэння парабалы  $y = 5x^2 - 4$  і прамой  $y = 2 - 13x$ .

Рашэнне. Няхай  $(x_0; y_0)$  — пункт перасячэння дадзеных парабалы і прамой. Падставіўшы каардынаты гэтага пункта ва ўраўненні парабалы і прамой, атрымаем правільныя лікавыя роўнасці:

$$y_0 = 5x_0^2 - 4 \quad \text{і} \quad y_0 = 2 - 13x_0.$$

Прыраўнаваўшы іх правыя часткі, маем:  $5x_0^2 - 4 = 2 - 13x_0$ , г. зн.  $5x_0^2 + 13x_0 - 6 = 0$ . Рашыўшы гэта ўраўненне, знойдзем:  $x_0 = -3$  або  $x_0 = 0,4$ . Адпаведна:

$$y_0 = 2 - 13 \cdot (-3) = -37 \quad \text{або} \quad y_0 = 2 - 13 \cdot 0,4 = -3,2.$$

Адказ:  $(-3; -37); (0,4; -3,2)$ .



1. Якім пераўтварэннем можна атрымаць парабалу  $y = ax^2 + c$  з парабалы  $y = ax^2$ ?
2. Для кожнай з функцый у прыкладах 3 і 4 назавіце ўласцівасці а)—д) (гл. с. 228) яе графіка-парабалы.
3. Назавіце для парабалы  $y = ax^2 + c$  уласцівасці а)—д) (гл. с. 228): а) калі  $a > 0$ ; б) калі  $a < 0$ .

### Практыкаванні

6.23°. Пакажыце відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай, і назавіце яго ўласцівасці:

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ ;  | 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ;  |
| 3) $y = 3x^2 + 1$ ;            | 4) $y = 3x^2 - 1$ ;            |
| 5) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ ; | 6) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ ; |
| 7) $y = -4x^2 - 2$ ;           | 8) $y = -4x^2 + 2$ .           |

6.24°. Як з графіка функцыі  $y = 2x^2$  можна атрымаць графік функцыі:

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| 1) $y = 2x^2 + 1$ ;  | 2) $y = 2x^2 - 1$ ; |
| 3) $y = -6 + 2x^2$ ; | 4) $y = 2x^2 + 9$ ? |

**6.25°.** Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = 7x^2$  зрухам уздоўж восі  $Oy$  на:

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) 3 адзінкі ўверх;   | 2) 5 адзінак уніз;    |
| 3) 7 адзінак уніз;    | 4) 4 адзінкі ўверх;   |
| 5) 2,1 адзінкі ўніз;  | 6) 8,4 адзінкі ўніз;  |
| 7) 0,9 адзінкі ўверх; | 8) 0,3 адзінкі ўверх. |

**6.26°.** Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = -3,2x^2$  зрухам уздоўж восі  $Oy$  на:

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) 6 адзінак уверх;  | 2) 4,6 адзінкі ўніз; |
| 3) 2,4 адзінкі ўніз; | 4) 7 адзінак уверх.  |

**6.27°.** Як трэба пераўтварыць парабалу  $y = -0,73x^2$ , каб ураўненне атрыманай парабалы мела выгляд:

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $y = -0,73x^2 + 6$ ;        | 2) $y = -0,73x^2 - 27$ ;       |
| 3) $y = -0,73x^2 - \sqrt{3}$ ; | 4) $y = -0,73x^2 + \sqrt{5}$ ? |

**6.28.** Як трэба пераўтварыць парабалу  $y = x^2$ , каб ураўненне атрыманай парабалы мела выгляд:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $y = -7x^2 + 3$ ;                     | 2) $y = 5x^2 - 6$ ;                      |
| 3) $y = \frac{1}{4}x^2 - (\sqrt{5})^2$ ; | 4) $y = \frac{1}{9}x^2 + (\sqrt{7})^4$ ? |

**6.29°.** Запішыце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $y = 1 - x^2$ і $y = -8$ ;           | 2) $y = x^2 - 4$ і $y = 5$ ;                                   |
| 3) $y = x^2 - 1$ і $y = 3$ ;            | 4) $y = x^2 + 3$ і $y = 4$ ;                                   |
| 5) $y = -x^2 - 6$ і $y = -10$ ;         | 6) $y = -x^2 + 7$ і $y = -9$ ;                                 |
| 7) $y = \frac{1}{3}x^2 + 6$ і $y = 9$ ; | 8) $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}$ і $y = -1\frac{3}{5}$ . |

**6.30.** Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння парабалы і прамой:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) $y = 5x^2 + 1$ і $y = 6x$ ;      | 2) $y = 6x^2 - 1$ і $y = 5x$ ;                      |
| 3) $y = x^2 + 2$ і $y = 4x - 3$ ;   | 4) $y = 2x^2 - 1$ і $y = x - 4$ ;                   |
| 5) $y = 8x^2 - 1$ і $y = -3 - 8x$ ; | 6) $y = \frac{1}{9}x^2 + 1$ і $y = -\frac{2}{3}x$ . |

6.31. Ці мае парабола  $y = 6x^2 - 1$  агульныя пункты з прамой:

- 1)  $y = 8$ ;                      2)  $y = 0$ ;                      3)  $y = 1$ ;  
4)  $y = -1$ ;                      5)  $y = -10$ ;                      6)  $y = -3$ ?

Калі мае, то знайдзіце іх каардынаты.

6.32. Ці мае парабола  $y = -3x^2 + 2$  агульныя пункты з прамой:

- 1)  $y = 0$ ;                      2)  $y = 2$ ;                      3)  $y = 9$ ;  
4)  $y = -1$ ;                      5)  $y = -10$ ;                      6)  $y = 1,025$ ?

Калі мае, то знайдзіце іх каардынаты.

6.33°. Запішыце каардынаты вяршыні парабалы:

- 1)  $y = x^2 - 3$ ;                      2)  $y = x^2 + 4$ ;  
3)  $y = \frac{1}{12}x^2 + 1,5$ ;                      4)  $y = \frac{7}{9}x^2 - 3,2$ ;  
5)  $y = -0,6x^2 - 4\frac{1}{8}$ ;                      6)  $y = -2,1x^2 + 8\frac{1}{3}$ .

6.34. Выкарыстаўшы відарыс парабалы на рысунку 63, запішыце яе ўраўненне.

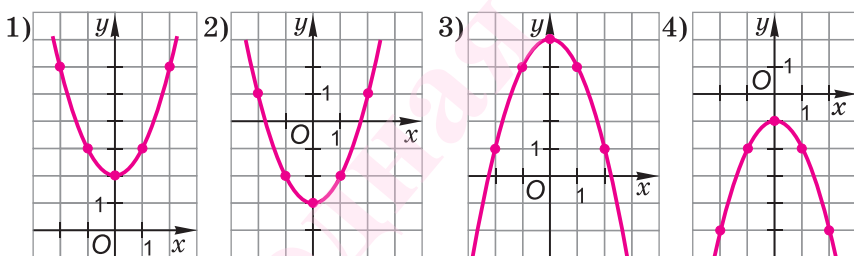


Рис. 63

6.35. Для кожнай квадратичнай функцыі з практыкавання 6.34 пазначце:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;  
б) ураўненне восі сіметрыі парабалы;  
в) напрамак галін парабалы;  
г) каардынаты пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;  
д) каардынаты пункта перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

6.36. Пры якіх значэннях  $p$  парабола  $y = x^2 + p$  праходзіць праз пункт:

- 1)  $A(0; -3)$ ;                      2)  $B(-4; 17)$ ;  
3)  $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{6})$ ;                      4)  $M(-0,5; -6,45)$ ?

**6.37\*.** Покажіть відарис графіка функції:

1)  $y = 2x|x| + 1, x \leq 0;$

2)  $y = \frac{1}{4}x|x| - 2, x \geq 0;$

3)  $y = -3x|x| + 3, x \geq 0;$

4)  $y = -\frac{1}{2}x|x| - 1, x \leq 0.$

### 6.4. Функція $y = a(x - s)^2$

Разгледзім функцію  $y = a(x - s)^2$ , дзе  $a \neq 0, s \neq 0$ .

Прывядзём чатыры прыклады з рознымі камбінацыямі знакаў лікаў  $a$  і  $s$ : 1)  $a > 0, s > 0$ ; 2)  $a > 0, s < 0$ ; 3)  $a < 0, s > 0$ ; 4)  $a < 0, s < 0$ .

**Прыклад 1.** Разгледзім функцію  $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$  (тут  $a = \frac{1}{2}; s = 3$ ).

Выкарыстаўшы даныя табліцы, пакажам у адной сістэме каардынат відарысы графікаў гэтай функцыі і функцыі  $y = \frac{1}{2}x^2$  (рыс. 64).

| $x$                        | -1            | $-\frac{1}{2}$ | 0              | $\frac{1}{2}$  | 1             | $1\frac{1}{2}$ | 2             | $2\frac{1}{2}$ | 3              | $3\frac{1}{2}$ | 4             |
|----------------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| $y = \frac{1}{2}x^2$       | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$  | 0              | $\frac{1}{8}$  | $\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{8}$ | 2             | $3\frac{1}{8}$ | $4\frac{1}{2}$ | $6\frac{1}{8}$ | 8             |
| $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ | 8             | $6\frac{1}{8}$ | $4\frac{1}{2}$ | $3\frac{1}{8}$ | 2             | $1\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$  | 0              | $\frac{1}{8}$  | $\frac{1}{2}$ |

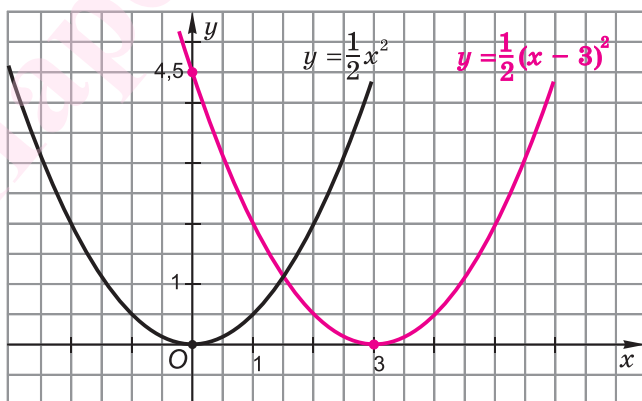


Рис. 64



Калі ўважліва паглядзець на рысунк, то сувязь паміж графікамі функцый становіцца відавочнай: парабола  $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$  зрушана адносна парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  на 3 адзінкі ўправа ўздоўж восі  $Ox$ . Значыць, вось сіметрыі парабалы  $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$  — гэта прмая  $x = 3$ , яна паралельная восі  $Oy$  і праходзіць праз пункт  $(3; 0)$ .

Такім чынам, па відарысе парабалы  $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$  можна ўбачыць, што:

- а) пункт  $(3; 0)$  — вяршыня парабалы;
- б)  $x = 3$  — ураўненне восі сіметрыі парабалы;
- в) галіны парабалы накіраваныя ўверх;
- г) пункт  $(3; 0)$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;
- д) пункт  $(0; 4,5)$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

**Прыклад 2.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{3}(x + 2)^2$  (тут  $a = \frac{1}{3}$ ;  $s = -2$ ).

Выкарыстаўшы даныя табліцы, пакажам у адной сістэме каардынат відарысы графікаў гэтай функцыі і функцыі  $y = \frac{1}{3}x^2$  (рыс. 65).

|                            |                 |               |                 |                |                 |               |                |                |                 |               |
|----------------------------|-----------------|---------------|-----------------|----------------|-----------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|---------------|
| $x$                        | $-3\frac{1}{2}$ | $-3$          | $-2\frac{1}{2}$ | $-2$           | $-1\frac{1}{2}$ | $-1$          | $-\frac{1}{2}$ | $0$            | $\frac{1}{2}$   | $1$           |
| $y = \frac{1}{3}x^2$       | $4\frac{1}{12}$ | $3$           | $2\frac{1}{12}$ | $1\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4}$   | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $0$            | $\frac{1}{12}$  | $\frac{1}{3}$ |
| $y = \frac{1}{3}(x + 2)^2$ | $\frac{3}{4}$   | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$  | $0$            | $\frac{1}{12}$  | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4}$  | $1\frac{1}{3}$ | $2\frac{1}{12}$ | $3$           |

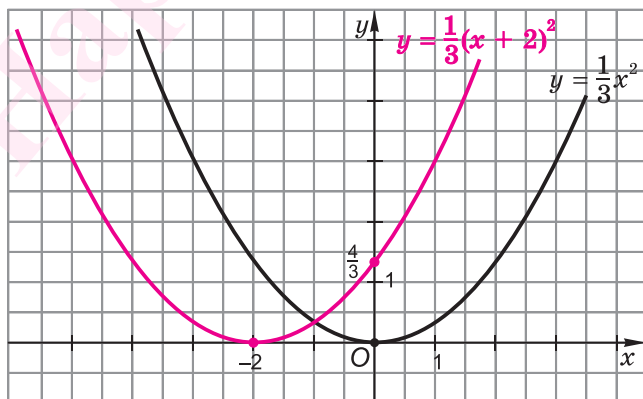


Рис. 65

Па рисунку лѣгка заўважыць, што парабала  $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$  зрушана адносна парабалы  $y = \frac{1}{3}x^2$  на 2 адзінкі ўлева ўздоўж восі  $Ox$ .

Па відарысе парабалы  $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$  на рисунку 65 можна ўбачыць, што:

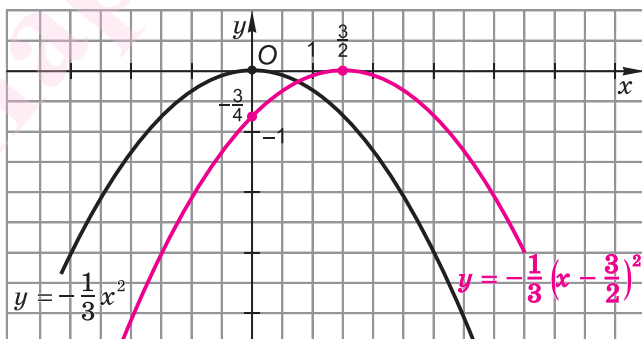
- а) пункт  $(-2; 0)$  — вяршыня парабалы;
- б)  $x = -2$  — ураўненне восі сіметрыі парабалы;
- в) галіны парабалы накіраваныя ўверх;
- г) пункт  $(-2; 0)$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;
- д) пункт  $(0; 1\frac{1}{3})$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

**Прыклад 3.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$  (тут  $a = -\frac{1}{3}$ ;  $s = \frac{3}{2}$ ).

Паказаўшы ў адной сістэме каардынат відарысы графікаў функцый  $y = -\frac{1}{3}x^2$  і  $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$ , можна ўбачыць, што парабала  $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$  зрушана адносна парабалы  $y = -\frac{1}{3}x^2$  на  $\frac{3}{2}$  адзінкі ўправа ўздоўж восі  $Ox$ .

Па відарысе парабалы  $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$  на рисунку 66 можна пазначыць таксама, што:

- а) пункт  $(\frac{3}{2}; 0)$  — вяршыня парабалы;
- б)  $x = \frac{3}{2}$  — ураўненне восі сіметрыі парабалы;



Рыс. 66

в) галіны парабалы накіраваныя ўніз;

г) пункт  $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;

д) пункт  $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$  — пункт перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

**Прыклад 4.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$  (тут  $a = -\frac{1}{3}$ ;  $s = -\frac{3}{2}$ ).

Паказаўшы ў адной сістэме каардынат відарысы графікаў функцый  $y = -\frac{1}{3}x^2$  і  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ , можна ўбачыць, што парабала  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$  зрушана адносна парабалы  $y = -\frac{1}{3}x^2$  на  $\frac{3}{2}$  адзінкі ўлева ўздоўж восі  $Ox$ .

Па відарысе парабалы  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$  на рысунку 67 сфармулюе ўласцівасці адпаведнай функцыі самастойна.

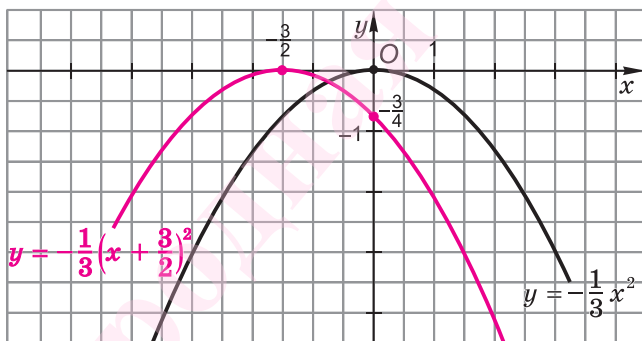


Рис. 67

Прыклады 1—4 паказваюць, што



парабала  $y = a(x - s)^2$  атрымліваецца зрухам парабалы  $y = ax^2$  уздоўж восі  $Ox$ :

на  $s$  адзінак управа пры  $s > 0$  і на  $|s|$  адзінак улева пры  $s < 0$ .



1. Якім пераўтварэннем можна атрымаць парабалу  $y = a(x - s)^2$  з парабалы  $y = ax^2$ ?

2\*. Назавіце для парабалы  $y = a(x - s)^2$  уласцівасці а) — д) (гл. прыклады 1—3 гэтага пункта): а) пры  $a > 0$ ; б) пры  $a < 0$ .

## Практиканні

**6.38°.** Пакажыце відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай, і назавіце яго ўласцівасці:

1)  $y = (x - 1)^2$ ;

2)  $y = (x + 2)^2$ ;

3)  $y = -2(x + 4)^2$ ;

4)  $y = -\frac{5}{4}(x - 4)^2$ ;

5)  $y = \frac{7}{3}(x - 3)^2$ ;

6)  $y = -\frac{1}{5}(x + 5)^2$ .

**6.39.** Як з графіка функцыі  $y = 5x^2$  можна атрымаць графік функцыі:

1)°  $y = 5(x - 3)^2$ ;

2)°  $y = 5(x + 7)^2$ ;

3)  $y = 5x^2 - 50x + 125$ ;

4)  $y = 5x^2 - 20x + 20$ ;

5)  $y = 5x^2 + 10\sqrt{7}x + 35$ ;

6)  $y = 5x^2 + 10\sqrt{3}x + 15$ ?

**6.40°.** Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = 2,3x^2$  зрухам уздоўж восі  $Ox$  на:

1) 4 адзінкі ўлева;

2) 5 адзінак управа;

3) 0,7 адзінкі ўправа;

4) 2,3 адзінкі ўлева.

**6.41°.** Якімі пераўтварэннямі з парабалы  $y = -0,4x^2$  можна атрымаць парабалу:

1)  $y = -0,4(x - 2)^2$ ;

2)  $y = -0,4(x + 6,8)^2$ ;

3)  $y = -0,4(x + 7,3)^2$ ;

4)  $y = -0,4(x - 9)^2$ ?

**6.42°.** Якімі пераўтварэннямі з парабалы  $y = 27x^2$  можна атрымаць парабалу:

1)  $y = 27(x - 9^2)^2$ ;

2)  $y = 27(x - 67^0)^2$ ;

3)  $y = 27(x + 53^0)^2$ ;

4)  $y = 27(x + 3^4)^2$ ?

**6.43°.** Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый:

1)  $y = (2 + x)^2$  і  $y = 4$ ;

2)  $y = (x - 4)^2$  і  $y = 9$ ;

3)  $y = (4x - 5)^2$  і  $y = 8x + 25$ ;

4)  $y = (3 - 8x)^2$  і  $y = 9 + 16x$ .

6.44°. Знайдіть координати вершини параболы:

- 1)  $y = -9\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ ;
- 2)  $y = 2,4(x - 2,5)^2$ ;
- 3)  $y = \frac{3}{8}(4 + x)^2$ ;
- 4)  $y = -\frac{9}{11}(x + 0,8)^2$ ;
- 5)  $y = x^2 - 4x + 4$ ;
- 6)  $y = x^2 + 25 - 10x$ .

6.45. Задайте формулой квадратичную функцию, вид которой показан на рисунке 68.

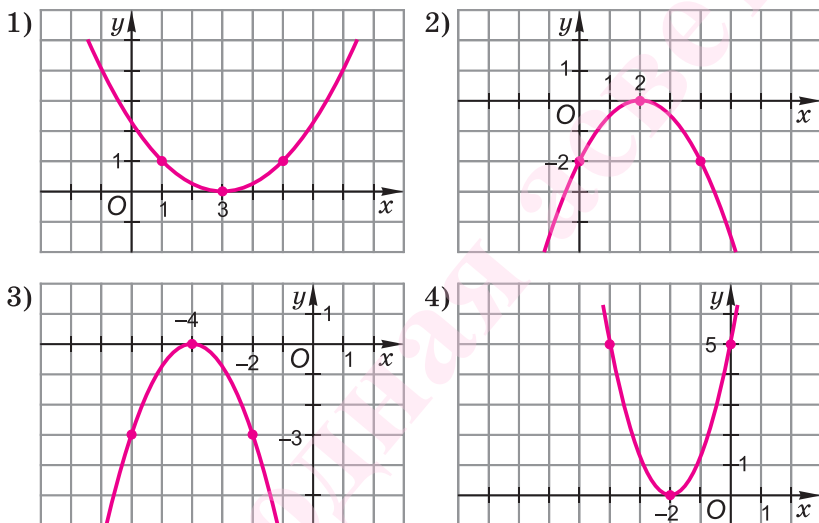


Рис. 68

6.46°. Дана функция  $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ . Ці належать графіку функції пункт:

- 1)  $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$ ;
- 2)  $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ;
- 3)  $C(3,5; 9)$ ;
- 4)  $K(-7,5; -49)$ ?

6.47°. Запишіть уравнение оси симметрии параболы:

- 1)  $y = p(x + 5)^2$ ;
- 2)  $y = px^2 - 4$ ;
- 3)  $y = px^2 + \frac{3}{4}$ ;
- 4)  $y = p(x + 1,8)^2$ ;
- 5)  $y = -(x + p)^2$ ;
- 6)  $y = -x^2 + p$ .

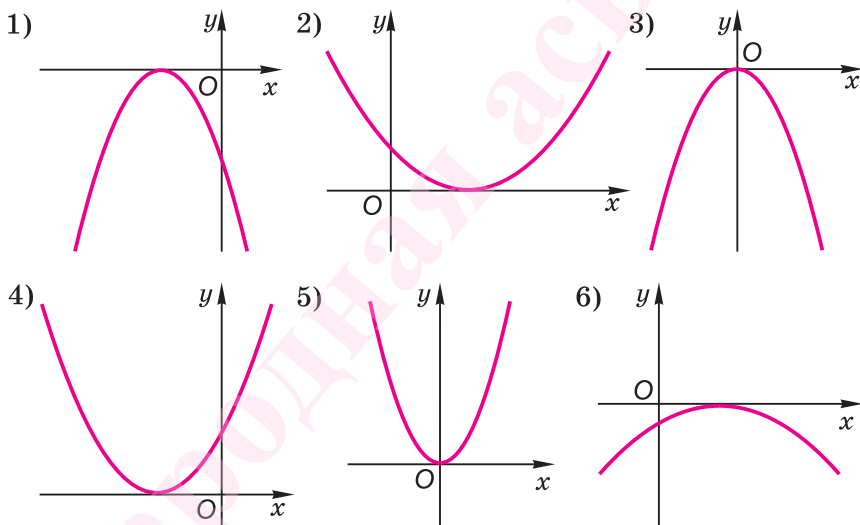
**6.48.** Ці правільна, што пры любым значэнні  $p$  графік функцыі з практыкавання 6.47 не мае агульных пунктаў з прамой:

- а)  $y = -374$ ;      б)  $y = 0$ ;      в)  $y = 128$ ?

**6.49.** Пры якім значэнні  $k$  графіку функцыі  $y = k(x + 5)^2$  належыць пункт:

- 1)  $(0; 5)$ ;      2)  $(-7; 5)$ ;      3)  $(7; -5)$ ;  
4)  $(7; 5)$ ;      5)  $(\frac{1}{2}; 5)$ ;      6)  $(0,5; -5)$ ?

**6.50.** На рысунку 69 паказаны відарыс парабалы  $y = m(x + p)^2$ . Вызначыце знакі лікаў  $m$  і  $p$ .



Рыс. 69

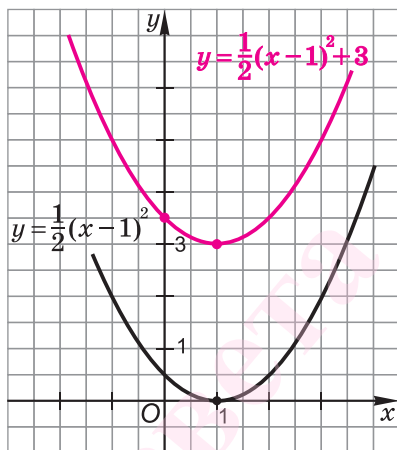
### 6.5. Функцыя $y = a(x - s)^2 + t$

Разгледзім функцыю  $y = a(x - s)^2 + t$ , дзе  $a \neq 0$ ,  $s \neq 0$ ,  $t \neq 0$ . Прывядзём чатыры прыклады такой функцыі для выпадкаў:

- 1)  $a > 0$ ,  $s > 0$ ,  $t > 0$ ;      2)  $a > 0$ ,  $s < 0$ ,  $t < 0$ ;  
3)  $a < 0$ ,  $s > 0$ ,  $t > 0$ ;      4)  $a < 0$ ,  $s < 0$ ,  $t < 0$ .

**Прыклад 1.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$  (тут  $a = \frac{1}{2}$ ;  $s = 1$ ;  $t = 3$ ).

Яе графік можна атрымаць з парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  наступным чынам. Зрушым парабалу  $y = \frac{1}{2}x^2$  уздоўж восі  $Ox$  на 1 адзінку ўправа. У выніку атрымаем парабалу  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ . Цяпер зрушым гэту парабалу ўздоўж восі  $Oy$  на 3 адзінкі ўверх і атрымаем парабалу  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$  (рыс. 70).



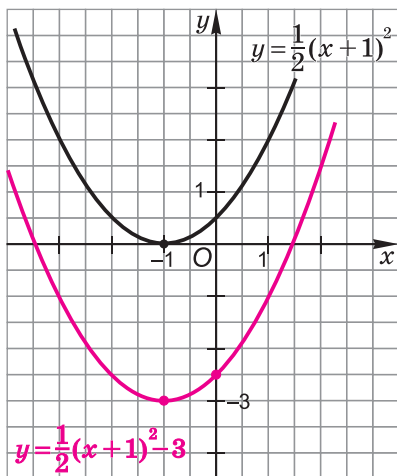
Рыс. 70

Выкарыстаўшы гэты рысунак, назавіце самастойна:

- а) каардынаты вяршыні парабалы;
- б) ураўненне восі сіметрыі парабалы;
- в) напрамак галін парабалы;
- г) каардынаты пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ ;
- д) каардынаты пункта перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ .

**Прыклад 2.** Разгледзім функцыю  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  (тут  $a = \frac{1}{2}$ ;  $s = -1$ ;  $t = -3$ ).

Яе графік можна атрымаць з парабалы  $y = \frac{1}{2}x^2$  наступным чынам. Зрушым парабалу  $y = \frac{1}{2}x^2$  уздоўж восі  $Ox$  на 1 адзінку ўлева. У выніку атрымаем парабалу  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ . Цяпер зрушым гэту парабалу ўздоўж восі  $Oy$  на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$  і атрымаем парабалу  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  (рыс. 71).



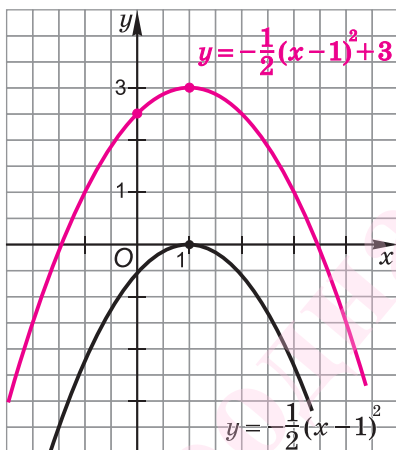
Рыс. 71

Выкарыстаўшы відарыс парабалы  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ , наза-  
віце яе ўласцівасці а)–д), пералічаныя ў прыкладзе 1.

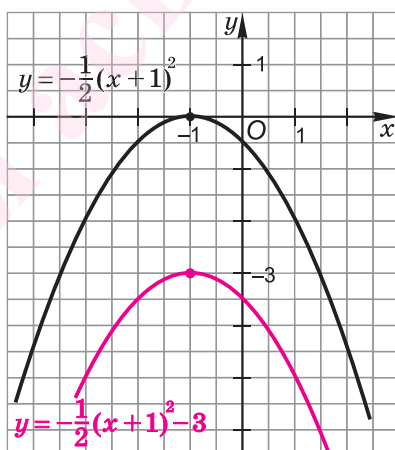
**Прыклад 3.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$  (тут  $a = -\frac{1}{2}$ ;  $s = 1$ ;  $t = 3$ ).

Графік гэтай функцыі атрымліваецца з парабалы  $y = -\frac{1}{2}x^2$  зрухам на 1 адзінку ўправа ўздоўж восі  $Ox$  і на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі  $Oy$  (рыс. 72).

Выкарыстаўшы відарыс парабалы  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ , на-  
завіце яе ўласцівасці а)–д), пералічаныя ў прыкладзе 1.



Рыс. 72



Рыс. 73

**Прыклад 4.** Разгледзім функцыю  $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$  (тут  $a = -\frac{1}{2}$ ;  $s = -1$ ;  $t = -3$ ).

Графік гэтай функцыі атрымліваецца з парабалы  $y = -\frac{1}{2}x^2$  зрухам на 1 адзінку ўлева ўздоўж восі  $Ox$  і на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі  $Oy$  (рыс. 73).

Прыклады 1–4 паказваюць наступнае.



Парабала  $y = a(x-s)^2 + t$  атрымліваецца зрухам парабалы  $y = ax^2$ : уздоўж восі  $Ox$  на  $s$  адзінак управа пры  $s > 0$  і на  $|s|$  адзінак улева пры  $s < 0$ ;



уздоўж восі  $Oy$  на  $t$  адзінак уверх пры  $t > 0$  і на  $|t|$  адзінак уніз пры  $t < 0$ .

Воссю сіметрыі парабалы  $y = a(x - s)^2 + t$  з'яўляецца прамая  $x = s$  (гэта прамая паралельная восі  $Oy$ ).

Вось сіметрыі перасякае парабалу  $y = a(x - s)^2 + t$  у пункце  $P(s; t)$ . Гэты пункт з'яўляецца вяршыняй парабалы.

Галіны парабалы  $y = a(x - s)^2 + t$  накіраваныя ўверх, калі  $a > 0$ , і ўніз, калі  $a < 0$ .

**Прыклад 5.** Ці перасякаецца парабала  $y = -0,38(x + 4)^2 + 7$  з прамымі  $y = -10,3$ ,  $y = 17,3$  і  $y = 0$ ?

Рашэнне. Паколькі  $a = -0,38 < 0$ , то галіны парабалы накіраваныя ўніз; вяршыня парабалы — пункт  $(-4; 7)$ ; вось сіметрыі парабалы — прамая  $x = -4$ .

Паказаўшы відарыс гэтай парабалы (зрабіце гэта), можна ўбачыць, што яна перасякаецца з прамымі  $y = -10,3$  і  $y = 0$  і не мае агульных пунктаў з прамой  $y = 17,3$ .



1. Якім пераўтварэннем з парабалы  $y = ax^2$  можна атрымаць парабалу  $y = a(x - s)^2 + t$ ?
2. Назавіце для парабалы  $y = a(x - s)^2 + t$  уласцівасці а) — д) (гл. с. 239): а) пры  $a > 0$ ; б) пры  $a < 0$ .

### Практыкаванні

Якімі пераўтварэннямі з парабалы  $y = x^2$  можна атрымаць дадзеную парабалу (6.51—6.52)?

6.51°. 1)  $y = (x - 5)^2 + 1$ ;      2)  $y = (x + 3)^2 - 4$ ;  
3)  $y = (x + 2)^2 - 7$ ;      4)  $y = (x - 1)^2 + 5$ .

6.52°. 1)  $y = -(x + 3)^2 - 1$ ;      2)  $y = 5 - (x - 2)^2$ ;  
3)  $y = 6 - (x - 4)^2$ ;      4)  $y = -(x + 9)^2 - 7$ .

6.53. Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = 7x^2$  зрухамі ўздоўж восі  $Ox$  і ўздоўж восі  $Oy$  адпаведна на:

- 1) 3 адзінкі ўлева і 2 адзінкі ўніз;
- 2) 5 адзінак управа і 6 адзінак уніз;
- 3) 0,5 адзінкі ўправа і 5 адзінак уверх;
- 4) 3,5 адзінкі ўлева і 2 адзінкі ўверх.

**6.54°.** Вызначыце па відарысе графіка функцыі  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$  (гл. рыс. 71), пры якіх значэннях  $x$  функцыя прымае:

- 1) дадатныя значэнні;
- 2) адмоўныя значэнні;
- 3) значэнні, роўныя нулю;
- 4) значэнні, не большыя за нуль.

**6.55°.** Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі (гл. рыс. 72), назавіце ўласцівасці а)–д) (гл. прыклад 1) функцыі, зададзенай формулай  $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ .

**6.56°.** Якімі пераўтварэннямі (зрухамі) з парабалы  $y = 6x^2$  можна атрымаць парабалу:

- 1)°  $y = 6x^2 - 3$ ;      2)°  $y = 6(x-1)^2$ ;      3)  $y = 6(x-1)^2 + 3$ ?

**6.57.** Якімі пераўтварэннямі з парабалы  $y = \frac{1}{2}(x+6)^2$  можна атрымаць парабалу:

- 1)  $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 5$ ;      2)  $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 + 7$ ;  
3)  $y = -\frac{1}{2}(x+6)^2 + 10$ ;      4)  $y = -\frac{1}{2}(x+6)^2 - 12$ ?

**6.58.** Якімі пераўтварэннямі з парабалы  $y = -3(x-4)^2$  можна атрымаць парабалу:

- 1)  $y = -3(x-4)^2 + 8$ ;      2)  $y = -3(x-4)^2 - 9$ ;  
3)  $y = 3(x-4)^2 - 24$ ;      4)  $y = 3(x-4)^2 + 16$ ?

**6.59°.** Запішыце ўраўненне восі сіметрыі парабалы:

- 1)  $y = 3(x-4)^2 - 2$ ;      2)  $y = -6(x+2)^2 + 6$ ;  
3)  $y = -2(x+7)^2 + 1$ ;      4)  $y = 4(x-3)^2 + 5$ .

**6.60°.** Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

- 1)  $y = 5(x-8)^2 + 2$ ;      2)  $y = -2(x+3)^2 - 5$ ;  
3)  $y = -4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$ ;      4)  $y = 8\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{8}$ ;  
5)  $y = (x+a)^2 - b$ ;      6)  $y = (x-c)^2 - p$ .

6.61. Покажите відарыс парабалы:

1)  $y = (1 - x)^2 - 2$ ;

2)  $y = (2 - x)^2 + 1$ ;

3)  $y = -(x + 3)^2 + \frac{3}{2}$ ;

4)  $y = -(x - 2,5)^2 - \frac{5}{2}$ ;

5)  $y = -(x + 1,5)^2 - 1,5$ ;

6)  $y = -(x + 1,5)^2 + 5,5$ .

6.62. Для кожнай функцыі з практыкавання 6.61 па відарысе яе графіка назавіце ўласцівасці а)–д) (гл. с. 239).

6.63. Задайце формулай квадратычную функцыю, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 74, і назавіце яго ўласцівасці.

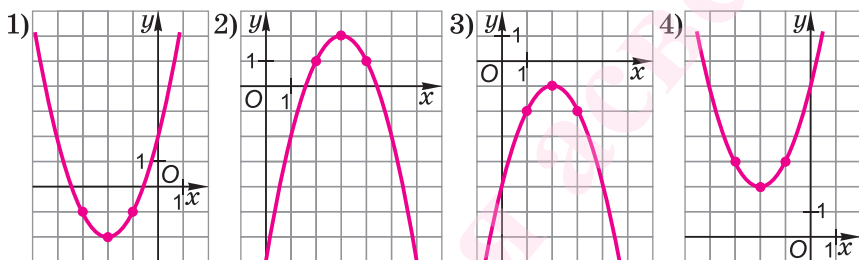


Рис. 74

6.64°. Ці належыць графіку функцыі  $y = (x - 1)^2 + 4$  пункт:

1)  $A(-3; 20)$ ;

2)  $B(0; 3)$ ;

3)  $C(1; 16)$ ;

4)  $D(2; 5)$ ?

6.65. Ці мае графік функцыі  $y = 0,8(x - 6)^2 + 5$  агульныя пункты з прамой:

1)  $y = -10$ ;

2)  $y = 100$ ;

3)  $y = 0$ ;

4)  $y = 4$ ?

6.66. Ці мае графік функцыі  $y = -6,2(x + 8)^2 - 3$  агульныя пункты з прамой:

1)  $y = 200$ ;

2)  $y = -300$ ;

3)  $y = -3$ ;

4)  $y = 8$ ?

6.67. Пры якіх значэннях  $p$  дадзены пункт належыць графіку функцыі  $y = 3(x + p)^2 - 2$ :

1)  $(1; 10)$ ;

2)  $(-2; -2)$ ;

3)  $(-3; 5)$ ;

4)  $(2; 10)$ ?

6.68. Пры якіх значэннях  $p$  дадзеная функцыя прымае толькі адмоўныя значэнні:

1)  $y = p(x - 7)^2 - 3$ ;

2)  $y = 2(x + p)^2 - 1$ ;

3)  $y = -0,3(x + 8)^2 + p$ ;

4)  $y = -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + p$ ?

**6.69.** Ці правільна, што пры любым значэнні  $p$  парабола з практыкавання 6.68 мае агульныя пункты з прамой:

а)  $y = -10$ ;      б)  $y = 0$ ;      в)  $y = 27$ ?

**6.70.** Назавіце, пры якіх умовах вяршыня парабалы  $y = a(x - s)^2 + t$  будзе размешчана:

- 1) у III або IV каардынатым вугле (чвэрці);
- 2) у II каардынатым вугле (чвэрці);
- 3) не ў IV каардынатым вугле (чвэрці);
- 4) у II або III каардынатым вугле (чвэрці).

## 6.6. Квадратычная функцыя



Напомнім, што функцыя

$$y = ax^2 + bx + c,$$

дзе  $a, b, c$  — лікі,  $a \neq 0$ , называецца квадратычнай (квадратнай).



Абсцысу  $x_0$  вяршыні парабалы  $y = ax^2 + bx + c$  і ардынату  $y_0$  можна знайсці па формулах:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{D}{4a}, \quad (1)$$

дзе  $D$  — дыскрымінант квадратнага трохчлена  $ax^2 + bx + c$ .

▲ Дакажам гэта сцверджанне.

Пераўтварым формулу, што задае квадратычную функцыю  $y = ax^2 + bx + c$ .

Вынесем за дужкі старшы каэфіцыент  $a \neq 0$ :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Далей у квадратным трохчлене, што стаіць у дужках, вылучым поўны квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}, \end{aligned}$$

дзе  $D = b^2 - 4ac$  — дыскрымінант квадратнага трохчлена  $ax^2 + bx + c$ .

У выніку атрымаем

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Такім чынам, вяршыняй парабалы  $y = ax^2 + bx + c$  з'яўляецца пункт  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$ .  $\boxtimes \blacktriangle$

Ведаючы абсцысу  $x_0$  вяршыні парабалы, яе ардынату  $y_0$  можна атрымаць, падставіўшы ва ўраўненне парабалы значэнне  $x = x_0$ , г. зн.  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ .

**Прыклад 1.** Паказаць відарыс графіка функцыі

$$y = x^2 - 4x + 3. \quad (2)$$

Рашэнне. Па формулах (1) знаходзім абсцысу вяршыні парабалы (2) і вылічаем яе ардынату:

$$x_0 = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2; \quad y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Такім чынам, графікам квадратычнай функцыі (2) з'яўляецца парабала з вяршыняй у пункце  $(2; -1)$ ; яе вось сіметрыі — прамая  $x = 2$  — праходзіць праз гэты пункт паралельна восі  $Oy$ , а галіны накіраваны ўверх.

Знойдзем каардынаты пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ , г. зн. тых пунктаў парабалы, ардынаты якіх роўныя нулю. Тады атрымаем, што ў формуле (2)  $y = 0$  і абсцысы пунктаў перасячэння з воссю  $Ox$  задавальняюць ураўненне

$$0 = x^2 - 4x + 3.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , значыць, восі  $Ox$  належаць пункты  $(1; 0)$  і  $(3; 0)$ .

Каб знайсці пункт перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ , дастаткова заўважыць, што абсцыса гэтага пункта роўная нулю, г. зн. пры  $x = 0$  у формуле (2)  $y = 3$ . Значыць, пункт перасячэння парабалы з воссю  $Oy$  — гэта пункт  $(0; 3)$ .

На парабале ёсць яшчэ адзін пункт  $(4; 3)$  з ардынатай 3, які сіметрычны пункту  $(0; 3)$  адносна прамой  $x = 2$ . Абсцысу гэтага пункта можна знайсці, падставіўшы  $y = 3$  у формулу (2).

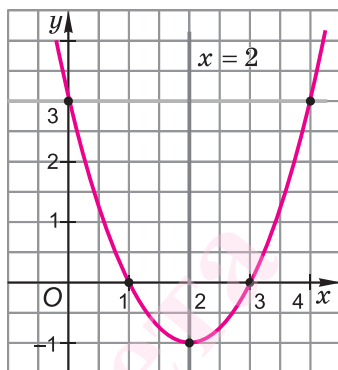
Адзначыўшы атрыманыя пяць пунктаў на каардынатнай плоскасці, злучыўшы іх плаўнай лініяй, атрымаем відарыс парабалы (2) (рыс. 75).

Такім чынам,



каб атрымаць відарыс парабалы трэба:

- 1) знайсці каардынаты вяршыні парабалы;
- 2) запісаць вось сіметрыі парабалы;
- 3) знайсці каардынаты пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$ , калі яны ёсць;
- 4) знайсці каардынаты пункта перасячэння парабалы з воссю  $Oy$ ;
- 5) знайсці каардынаты дадатковых пунктаў (пры неабходнасці);
- 6) адзначыць атрыманыя пункты на каардынатнай плоскасці;
- 7) паказаць відарыс парабалы, якая праходзіць праз адзначаныя пункты.



Рыс. 75

**Прыклад 2.** Паказаць схематычна відарыс графіка функцыі

$$y = -2x^2 + 10x - 13. \quad (3)$$

Рашэнне. Графікам квадратычнай функцыі, зададзенай ураўненнем (3), з'яўляецца парабала.

- 1) Вяршыня парабалы — пункт  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .
- 2) Вось сіметрыі парабалы — прамая  $x = \frac{5}{2}$ .
- 3) Абсцысы пунктаў перасячэння парабалы з воссю  $Ox$  знойдзем з квадратага ўраўнення

$$0 = -2x^2 + 10x - 13.$$

Яго дыскрымінант  $D = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 13 = -4$ . Такім чынам, гэта ўраўненне не мае каранёў, а значыць, парабала не мае пунктаў перасячэння з воссю  $Ox$ . (Гэта можна было вызначыць і без вылічэнняў, паколькі вяршыня парабалы ляжыць ніжэй за вось  $Ox$  і яе галіны накіраваныя ўніз.)

4) Координаты точки пересечения параболы с осью  $Oy$ :  $x = 0$  и  $y = -13$ , значить, точка пересечения параболы с осью  $Oy$  — это точка  $(0; -13)$ .

5) Точка, симметричная точке  $(0; -13)$  относительно оси симметрии параболы (3), имеет абсциссу  $-13$ . Применяя, что  $y = -13$  в формуле (3), получаем, что его абсцисса задается уравнением

$$-13 = -2x^2 + 10x - 13.$$

Решив это уравнение, найдем  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 5$ . Значить, на параболу (3) лежит и точка  $(5; -13)$ .

6) Определим на координатной плоскости точки  $(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$ ,  $(0; -13)$ ,  $(5; -13)$ .

7) Покажем график параболы

$$y = -2x^2 + 10x - 13 \text{ (рис. 76).}$$

**Пример 3.** Покажем график параболы

$$y = 3x^2 + 3x - 6.$$

Решение.

1) Вершина параболы — точка  $(-\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4})$ .

2) Ось симметрии параболы — прямая  $x = -\frac{1}{2}$ .

3) Точки пересечения параболы с осью  $Ox$ :  $(-2; 0)$  и  $(1; 0)$  (перепроверим это).

4) Точка пересечения параболы с осью  $Oy$ :  $(0; -6)$ .

5) Точка  $(-1; -6)$  симметрична точке  $(0; -6)$  относительно оси симметрии параболы (перепроверим это).

6) Определим на координатной плоскости все пять точек.

7) Покажем график параболы

$$y = 3x^2 + 3x - 6 \text{ (рис. 77).}$$

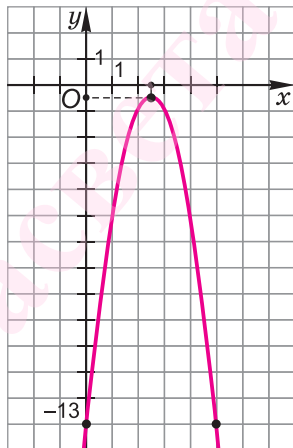


Рис. 76

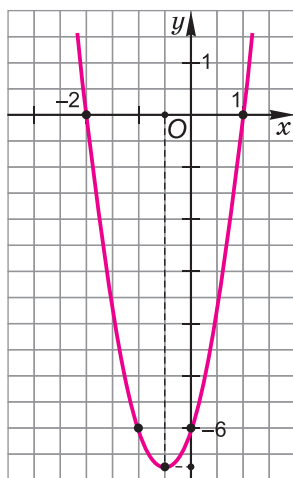


Рис. 77

**Прыклад 4.** Якімі пераўтварэннямі (зрухамі) з парабалы  $y = 3x^2$  можна атрымаць парабалу  $y = 3x^2 - 24x + 9$ ?

Рашэнне. Знайдзем каардынаты вяршыні парабалы. Па ўмове  $a = 3$ ,  $b = -24$ ,  $c = 9$ ,

$$\text{тады } D = (-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 6^2 \cdot 13.$$

Адсюль па формулах (1) маем:

$$x_0 = -\frac{-24}{2 \cdot 3} = 4; \quad y_0 = -\frac{6^2 \cdot 13}{4 \cdot 3} = -39.$$

Значыць, маем  $y = 3(x - 4)^2 - 39$  (гл. п. 6.5).

Адказ: парабалу  $y = 3x^2 - 24x + 9$  можна атрымаць з парабалы  $y = 3x^2$  зрухам на 4 адзінкі ўправа ўздоўж восі  $Ox$  і на 39 адзінак уніз ўздоўж восі  $Oy$ .

Такім чынам, мы атрымалі яшчэ адзін спосаб паказу відарыса графіка квадратычнай функцыі  $y = ax^2 + bx + c$ .



Многія з'явы рэчаіснасці, як аказваецца, звязаны з квадратычнай функцыяй і яе графікам. Напрыклад, шлях, пройдзены цела пры роўнапаскораным руху, вылічваецца па формуле

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Вядома, што траекторыя камяня, кінутага пад вуглом да гарызонту, футбольнага мяча або артылерыйскага снарада, які ляціць, будзе парабай (пры адсутнасці супраціўлення паветра).

Уласцівасці парабалы выкарыстоўваюцца пры вырабе пражэктараў і аўтамабільных фар.



1. Якая функцыя называецца квадратычнай?
2. Як для парабалы  $y = ax^2 + bx + c$  знайсці:
  - а) каардынаты вяршыні;
  - б) каардынаты пункта перасячэння з воссю  $Oy$ ;
  - в) каардынаты пунктаў перасячэння з воссю  $Ox$ ;
  - г) каардынаты пунктаў перасячэння з прамой  $y = c$ ?
3. Якія з пунктаў, пералічаных у пытанні 2, ёсць у любой парабалы  $y = ax^2 + bx + c$ ?
4. Як паказаць відарыс графіка функцыі  $y = ax^2 + bx + c$ ?
5. Якімі пераўтварэннямі (зрухамі) з парабалы  $y = ax^2$  можна атрымаць парабалу  $y = ax^2 + bx + c$ , калі яе вяршыня ў пункце:
  - а)  $(-4; 5)$ ;
  - б)  $(k; m)$ ?



## Практыкаванні

Пакажыце відарыс дадзенай парабалы (6.71—6.72).

- 6.71°. 1)  $y = x^2 + 20x + 6$ ; 2)  $y = x^2 - 6x + 10$ ;  
3)  $y = -x^2 - 8x + 3$ ; 4)  $y = -x^2 - 11x - 20$ ;  
5)  $y = 4x^2 - 12x + 8$ ; 6)  $y = 5x^2 + 15x + 2$ .

- 6.72. 1)  $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ ; 2)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ ;  
3)  $y = (-2x - 7)x$ ; 4)  $y = (-3x + 2)x$ .

6.73°. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы і пакажыце відарыс гэтай парабалы:

- 1)  $y = 4 + x - x^2$ ; 2)  $y = 6 - x - x^2$ ;  
3)  $y = x^2 + 2 - 9x$ ; 4)  $y = x^2 - 8 + 5x$ .

6.74. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы і каардынаты пунктаў яе перасячэння з восямі  $Ox$  і  $Oy$ :

- 1)  $y = 9x^2 + 6x - 3$ ; 2)  $y = 4x^2 + 12x - 7$ ;  
3)  $y = \frac{1}{9}x^2 + 2 - x$ ; 4)  $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$ .

6.75°. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння з восямі  $Ox$  і  $Oy$  графіка функцыі:

- 1)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\frac{1}{2}$ ; 2)  $y = -2x^2 + 4x + 16$ ;  
3)  $y = -2x^2 - 3x + 14$ ; 4)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$ .

6.76. Пакажыце відарыс графіка функцыі і назавіце яго ўласцівасці:

- 1)  $y = -2x^2 - 4x + 6$ ; 2)  $y = 4x^2 + 4x - 8$ ;  
3)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ ; 4)  $y = -\frac{1}{5}x^2 - x + 1$ .

6.77. Дакажыце, што парабала не перасякаецца з воссю  $Ox$ :

- 1)  $y = 5x^2 + 7x + 21$ ;      2)  $y = 3x^2 - 15x + 37$ ;  
 3)  $y = -7x^2 - x - 7$ ;      4)  $y = -6x^2 + 5x - 8$ .

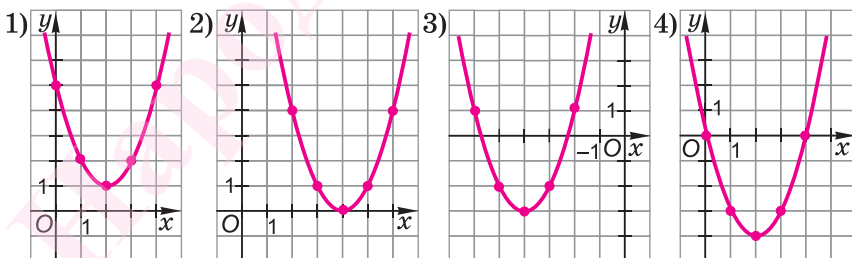
6.78\*. Пры якіх значэннях  $t$  парабала мае з воссю  $Ox$  толькі адзін агульны пункт:

- 1)  $y = x^2 + 2(t - 3)x + 3t + 1$ ;  
 2)  $y = -x^2 - 2(t + 2)x - 4$ ;  
 3)  $y = (t - 2)x^2 - (t - 1)x - 0,2$ ;  
 4)  $y = (t + 2)x^2 + (t + 7)x + 9$ ?

6.79\*. Пры якіх значэннях  $t$  вяршыня дадзенай парабалы размешчана:

- а) ніжэй за вось  $Ox$ ;      б) вышэй за вось  $Ox$ ;  
 в) на восі  $Ox$ :  
 1)  $y = 2tx^2 - 4x + 3$ ;      2)  $y = 3x^2 + 2x - 5t$ ;  
 3)  $y = -4tx^2 + x - 1$ ;      4)  $y = -tx^2 - x + 3$ ?

6.80. На рысунку 78 паказаны відарыс графіка функцыі  $y = x^2 + px + q$ . Вызначыце значэнні  $p$  і  $q$ .



Рыс. 78

6.81\*. Якому каардынатнаму вуглу (чвэрці) належыць вяршыня парабалы  $y = mx^2 + px + k$ , калі:

- 1)  $m > 0, p > 0, k > 0$ ;      2)  $m > 0, p < 0, k > 0$ ;  
 3)  $m < 0, p < 0, k < 0$ ;      4)  $m < 0, p > 0, k < 0$ ?

6.82\*. Визначте знакі лікаў  $m$ ,  $n$  і  $k$ , калі галіны парабалы  $y = mx^2 + nx + k$  накіраваныя ўніз, а вяршыня гэтай парабалы належыць:

- 1) II каардынатнаму вуглу (чвэрці);
- 2) I каардынатнаму вуглу (чвэрці);
- 3) IV каардынатнаму вуглу (чвэрці);
- 4) III каардынатнаму вуглу (чвэрці).

6.83\*. На рысунку 79 паказаны відарыс парабалы  $y = ax^2 + bx + c$ . Визначце знакі лікаў  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

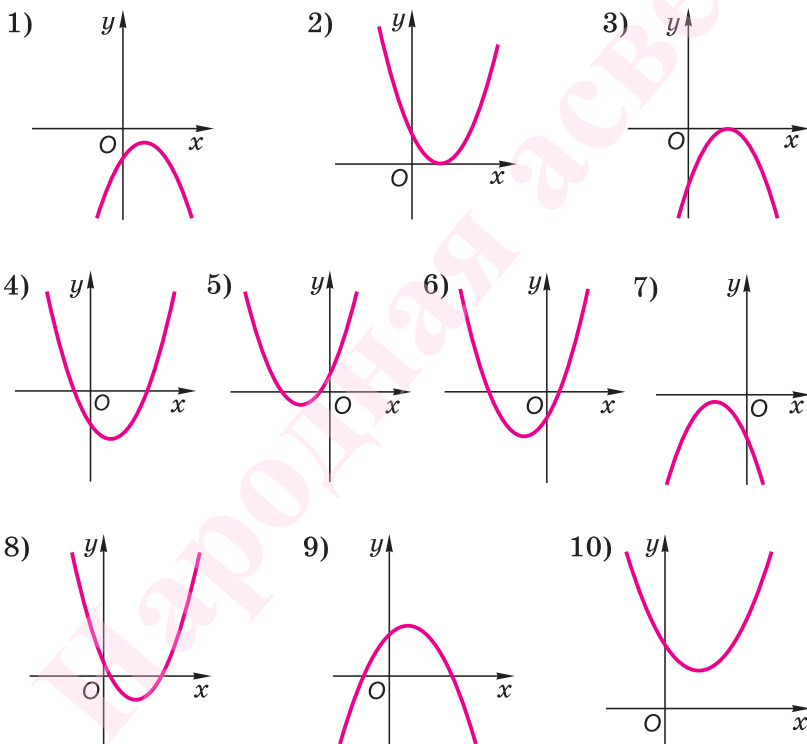


Рис. 79

## МАТЭРЫЯЛЫ ДЛЯ ПАЎТАРЭННЯ

**1. Практыкаванні для паўтарэння  
арыфметычнага і алгебраічнага матэрыялу  
курса матэматыкі 5—7-х класаў**

Вылічыце (1—2).

1. 1)  $34,17 : 1,7 + \left(2\frac{3}{4} + 0,15\right) : \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8};$

2)  $5,85 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7};$

3)  $\left(1\frac{1}{4} - 1,842\right) \cdot 1\frac{13}{37} + \left(3\frac{1}{2} - 1,52\right) : 1,1;$

4)  $\left(1\frac{1}{5} - 1,911\right) \cdot 1\frac{21}{79} + \left(0,91 + 1\frac{3}{4}\right) : 1,4.$

2. 1)  $13^{-2};$

2)  $20^{-1};$

3)  $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-3};$

4)  $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2};$

5)  $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1};$

6)  $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4};$

7)  $(0,01)^{-1};$

8)  $(0,2)^{-4};$

9)  $(1,6)^{-3};$

10)  $(-5)^{-4};$

11)  $\left(-\frac{8}{9}\right)^{-2};$

12)  $\left(-1\frac{1}{8}\right)^{-3}.$

Знайдзіце значэнне выразу (3—4).

3. 1)  $5^{-3} + 15^{-2};$

2)  $10^{-1} + 2^{-4} - 5^{-2};$

3)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + (-2,8)^0 - 4^{-3};$

4)  $\left(\frac{2}{25}\right)^{-2} \cdot 5^{-5};$

5)  $3^{-1} - 6 \cdot 3^{-2} + 9 \cdot 3^{-3};$

6)  $2^{-2} + 8 : 2^{-1} - (-2)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}.$

4. 1)  $3^{-1} + \frac{5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} - 16^{-1} \cdot 133}{9 - 0,5^{-1}} \cdot \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1};$

2)  $4^{-1} + \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} - 9^{-1} \cdot 160}{0,125^{-1} - 4} \cdot \left(\frac{2}{9} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}.$

Спрасціце выраз (5—8).

5. 1)  $\frac{m^4x}{n^3y} : \frac{n^5y}{m^2x};$

2)  $\frac{27y^3}{16m^2} : \frac{0,9}{8m^2n};$

3)  $\frac{9xy}{4a} : \frac{45xy^5}{16a^2};$

4)  $\frac{pz^8}{py^6} : \frac{qz^6}{p^2y^7};$

5)  $\frac{6m^5t^4}{13np^2} : \frac{36m^4t^3}{169n^2p^5};$

6)  $\frac{3p^2mq^3}{2a^2b^2} : \frac{9p^2q^2}{28a^3b^4}.$

6. 1)  $-54p^{10}n^{17} : \frac{27p^8n^{14}}{22a^6};$

2)  $28a^{18}b^{19} : \left(-\frac{14a^{14}b^{15}}{15c^4}\right);$

3)  $\frac{72a^{12}b^{10}}{25y^4} : (-24a^{11}b^8);$

4)  $-\frac{48x^9y^{10}}{49z^9} : (16x^7y^8);$

5)  $\frac{x^2y^3}{8q} : \left(-2\frac{1}{2}xy\right)^3;$

6)  $\frac{21a^3b^{30}}{10mn} : (-7b^3)^5;$

7)  $(-36m^2)^4 : -\left(\frac{12m^2n}{5p}\right);$

8)  $\left(5\frac{1}{3}a^4x\right)^2 : \frac{16a^3x}{3m};$

9)  $16x^2y^3 : \left(-20 \cdot \frac{x^5y^4}{3a^2b}\right);$

10)  $46x^{14}y^{25} : \left(-23 \cdot \frac{x^{10}y^{20}}{9z^2}\right).$

7. 1)  $\left(\frac{17x^4y^{13}}{6a^2b^3} : \frac{68x^2y^5}{9a^5b^4}\right) : \frac{3y^6b}{4x^3a^5};$

2)  $\left(\frac{11a^5b^{12}}{12cd^6} : \frac{55a^3b^2}{18c^7d^4}\right) : \frac{21b^6d^2}{20a^7c^3};$

3)  $\left(\frac{3m^5n^3}{4b^4}\right)^3 : \left(\frac{3m^3n^2}{16b^6}\right)^4;$

4)  $\left(\frac{5m^3n^4}{9k^2}\right)^3 : \left(\frac{5m^2n^2}{3k^3}\right)^4.$

8. 1)  $(2m - 3mn)^2 - (3m - 2mn)^2;$

2)  $(a + 4)^2 + 4(a + 1)^2;$

3)  $4(5 - b)^2 + 3(b - 2)^2;$

4)  $6(1 - b)^2 - 4(b + 1)^2;$

5)  $(3m + 4)^2 - (2m - 3)(2m + 3);$

6)  $(2a + 3b)(5a - b) - (a + b)(10a - 3b).$

Раскладзіце на множнікі (9—11).

9. 1)  $a^4 - a^2 + a^2 - 1;$

2)  $b^4 + b^2 + b^2 + 1;$

3)  $a^5 + a^3 - a^2 - 1;$

4)  $b^4 - b^3 - b + 1.$

10. 1)  $m^2 - 36;$

2)  $4m^2n^2 - 100;$

3)  $n^4 - n^6;$

4)  $(2m + n)^2 - 9(m + n)^2.$

11. 1)  $m^2 - 6m + 9;$

2)  $9m^2 + 4 + 12m;$

3)  $m^4 - 14m^2 + 24;$

4)  $16m^2 + 8mn - 3n^2.$

Выканайце дзеянні (12—15).

12. 1)  $\left(\frac{c}{c-4} - \frac{c}{c+4} - \frac{c^2+16}{16-c^2}\right) : \frac{4c+c^2}{(4-c)^2};$   
 2)  $\left(\frac{c}{c+6} + \frac{36+c^2}{36-c^2} - \frac{c}{c-6}\right) : \frac{6c+c^2}{(6-c)^2};$   
 3)  $\left(\frac{2m}{n+2m} - \frac{4m^2}{n^2+4m^2+4mn}\right) : \left(\frac{2m}{n^2-4m^2} + \frac{1}{2m-n}\right);$   
 4)  $\left(\frac{2p}{2p+q} - \frac{4p^2}{4p^2+q^2+4pq}\right) : \left(\frac{2p}{4p^2-q^2} + \frac{1}{q-2p}\right);$   
 5)  $\left(\frac{1}{x-2y} - \frac{4x}{4y^2-x^2} - \frac{5}{x+2y}\right) : \left(\frac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2} - 1\right);$   
 6)  $\left(\frac{1}{2a-b} - \frac{4a}{b^2-4a^2} - \frac{3}{2a+b}\right) : \left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1\right).$
13. 1)  $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right) : \frac{b}{a-b};$   
 2)  $\left(\frac{2a-1}{a-3} - \frac{a^2-4}{a^2+6a+9} \cdot \frac{a+3}{a-2} + \frac{3}{9-a^2}\right) : \frac{a^2}{a-3};$   
 3)  $\frac{10a-25}{2a+5} + \left(\frac{6a}{2a+5} - \frac{16a}{4a^2+25+20a}\right) : \frac{6a+7}{4a^2-25};$   
 4)  $\frac{n+2}{4-n} + \frac{n(n+4)}{n^2+12} \cdot \left(\frac{n+3}{n-4} + \frac{7n}{16-n^2}\right) : \frac{n^2}{2n+16}.$
- 14\*. 1)  $\frac{b^2-4}{(b+3)^2} \cdot \frac{b^3+9b^2+27b+27}{(b^3+8)(b-2)};$   
 2)  $\frac{x^3+27}{(x-2)^3} : \frac{x^2-3x+9}{(x-2)^2};$   
 3)  $\frac{m^3-125n^3}{m^2+10mn+25n^2} \cdot \frac{(m^2-25n^2)^2}{m^2+5mn+25n^2};$   
 4)  $\frac{(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)}{(x+2y)^3(x^2-2xy+4y^2)} \cdot \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+2xy+4y^2}.$
- 15\*. 1)  $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}} + \frac{1}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}\right) \cdot \frac{a^{-3}-b^{-3}}{2ab};$   
 2)  $\left(\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}} + \frac{1}{a^{-1}-b^{-1}}\right) \cdot \frac{a^{-2}+b^{-2}+a^{-1}b^{-1}}{(a^{-1}+b^{-1})^2}.$

Знайдзіце значэнне выразу (16—19).

16. 1)  $\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab} - \frac{1}{a^2+b^2-2ab}\right) \cdot \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{ab}$   
 пры  $a = 12,03$ ,  $b = -16,97$ ;

$$2) \left( \frac{1}{a^2 + 25b^2 + 10ab} - \frac{1}{a^2 + 25b^2 - 10ab} \right) \cdot \frac{a^4 - 50a^2b^2 + 625b^4}{ab}$$

пры  $a = -24,71$ ,  $b = -25,29$ ;

$$3)* \left( \frac{p^3 + 2p^2 + 4p}{p^3 - 8} - \frac{p^2 + p + 2}{p^2 - 4} \right) : \frac{5}{8p + 16} \text{ пры } p = -3\frac{11}{13};$$

$$4)* \left( \frac{n^3 + 125}{(n^2 - 5n + 25)(n - 5)} - \frac{n}{n + 5} \right) : \frac{3n + 5}{n^2 - 25} \text{ пры } n = 2\frac{7}{17}.$$

$$17. 1) (a + b)^{-1} \cdot \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} : \left( \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{2ab}{a + b} \right)^{-2} \text{ пры } a = -\frac{1}{4}, b = 0,4;$$

$$2) \frac{m^{-2}n^{-1} - m^{-1}n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \frac{1}{m} \cdot (mn^{-1} + 2 + m^{-1}n)^{-1}$$

пры  $m = 0,003$ ,  $n = 0,007$ .

$$18. 1) \frac{a^{-3} - 4}{a^{-3}} - \frac{a^{-6} - 16}{a^{-3}} \cdot \frac{1}{a^{-3} - 4} \text{ пры } a = -3,5;$$

$$2) \frac{a^{-10} - 25}{a^{-5}} \cdot \frac{1}{a^{-5} + 5} - \frac{a^{-5} + 5}{a^{-5}} \text{ пры } a = -0,4.$$

$$19. 1) \left( \frac{4a^{-4}}{a^{-4} + 1} - \frac{a^{-4}}{a^{-8} + 1 + 2a^{-4}} \right) : \frac{4a^{-4} + 3}{a^{-4} + 1} + \frac{2a^{-4}}{a^{-4} + 1} \text{ пры } a = -\frac{1}{2};$$

$$2) \left( \frac{3a^{-6}}{a^{-12} + 25 - 10a^{-6}} - \frac{a^{-6}}{a^{-6} - 5} \right) : \frac{8 - a^{-6}}{25 - a^{-12}} - \frac{5a^{-6}}{5 - a^{-6}} \text{ пры } a = -1.$$

Дакажыце тоеснасць (20—21).

$$20. 1) (1 + m)(1 - m)(m^2 + 1) = 1 - m^4;$$

$$2) 5n^2 - 3(n - 1)(1 + n) = 2n^2 + 3;$$

$$3) 7(p^2 - 2) - 22 = 3p^2 + 4(p + 3)(p - 3);$$

$$4) 8(6 - q)(q + 6) + 5q^2 = 3(82 - q^2) + 42.$$

$$21*. 1) \frac{(a^n b^n)^{-2}}{a^{-n} b^{-2n} - a^{-2n} b^{-n}} + \left( \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} \cdot \left( \frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right) \right)^{-1} = \frac{2a^n}{a^{2n} - b^{2n}};$$

$$2) \left( \frac{a^{-n} \cdot b^{-n}}{a^{-3n} - b^{-3n}} + \frac{1}{a^{-n} - b^{-n}} \right) \cdot \frac{(a^{-n} + b^{-n})^{-2}}{(a^{-2n} + b^{-2n} + a^{-n} \cdot b^{-n})^{-1}} = \frac{(b^n - a^n)^{-1}}{a^{-n} \cdot b^{-n}}.$$

Рашыце ўраўненне (22—25).

$$22. 1) 8x - 6 = 5x + 3;$$

$$2) 7x + 19 = 2x - 31;$$

$$3) \frac{5x}{2} - \frac{16x}{7} - \frac{1}{7} = 2;$$

$$4) \frac{3x}{2} - \frac{2x}{9} + \frac{x}{6} = 13;$$

- 5)  $\frac{x + (x - 5)}{2} = 11$ ;      6)  $\frac{2x - (3 - x)}{2} = 3\frac{3}{8}$ .
23. 1)  $\frac{5t - 1}{7} = \frac{1 + 8t}{3}$ ;      2)  $\frac{11 + 3t}{5} = \frac{5t - 7}{15}$ ;  
 3)  $\frac{7z + 3}{7} = \frac{8 + 8z}{8}$ ;      4)  $\frac{8z + 5}{37} = \frac{7z - 2}{111}$ ;  
 5)  $\frac{3 + x}{6} + \frac{x - 7}{3} = \frac{x + 11}{2}$ ;      6)  $\frac{1 + 3x}{5} - \frac{7x + 3}{15} = \frac{2x - 1}{3}$ .
24. 1)  $3(x + 1)(x + 2) - (3x - 4)(x + 2) = 36$ ;  
 2)  $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = 48$ .
25. 1)  $x(x + 2) - (x - 3)(3 + x) = 13$ ;  
 2)  $(3x - 1)^2 = (7 - 5x)^2 - (4x + 5)^2$ ;  
 3)  $(3y - 1)(2y + 7) = (y + 1)^2 + (5y - 1)(3 + y)$ ;  
 4)  $(y - 2)^3 - 2(y - 3)(y^2 + 9 + 3y) + (y + 2)^3 = 0$ .
26. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўмову роўнасці дробу нулю:
- 1)  $1 - \frac{2x - 1}{1 - 4x} = 0$ ;      2)  $\frac{2y^2 - 17}{y^2 - 1} - 1 = 0$ ;  
 3)  $\frac{(x + 2)^3 - x(x + 3)^2}{3x + 8} - 2 = 0$ ;  
 4)  $\frac{x(x - 3)^2 - (x - 2)^3}{16 - 6x} + 2 = 0$ .
27. Знайдзіце  $p^2 + \frac{1}{p^2}$ , калі:
- 1)  $p - \frac{1}{p} = 4$ ;      2)  $p + \frac{1}{p} = 3$ .
28. 1) Знайдзіце значэнне выразу  $\frac{m^2 + mn - n^2}{m^2 - mn + n^2}$ , калі  $\frac{m}{n} = 4$ .  
 2) Знайдзіце значэнне выразу  $\frac{4m^2 - 3mn + n^2}{m^2 - mn + n^2}$ , калі  $\frac{n}{m} = 2$ .

## 2. Тэкставыя задачы

У 7-м класе мы рашалі задачы з дапамогай ураўненняў. Напамнім гэты метада рашэння.

**Задача 1.** Для будаўніцтва дома прывезлі стальных бэлькі двух відаў: масай па 125 кг і па 250 кг, прычым бэлек другога віду было на 8 больш, чым першага. Колькі прывезлі



бэлек першага і другога відаў, калі іх агульная маса скла-ла 4,25 т?

Рашэнне. Няхай  $x$  — колькасць бэлек масай па 125 кг, тады  $x + 8$  — колькасць бэлек масай па 250 кг. Агульная маса бэлек складае  $(125x + 250(x + 8))$  кг і па ўмове роўная 4,25 т, г. зн. 4250 кг, таму можна запісаць ураўненне

$$125x + 250(x + 8) = 4250.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x = 6$ .

Значыць, колькасць бэлек масай па 250 кг роўная  $6 + 8$ , г. зн. 14.

Адказ: 6 бэлек масай па 125 кг і 14 бэлек масай па 250 кг.

**Задача 2.** Повар Таццяна разліла малако з бітона па-роўну ў 25 кубкаў, і ў бітоне засталася яшчэ паўлітра мала-ка. Таццяна падлічыла, што калі наліваць з таго ж бітона ў кожны кубак на 0,03 л малака больш, то яго не хопіць роўна на адзін кубак. Колькі літраў малака змяшчае бітон?

Рашэнне. *Спосаб 1.* Няхай бітон змяшчае  $x$  л малака, тады Таццяна налівала ў кожны кубак па  $\frac{x - 0,5}{25}$  л малака.

Калі б Таццяна налівала малако з дабаўкай, то яго хапіла б толькі на 24 кубкі, г. зн. у кожны кубак было б наліта па  $\frac{x}{24}$  л малака. Па ўмове дабаўка роўная 0,03 л, такім чынам, саставім ураўненне

$$\frac{x - 0,5}{25} = \frac{x}{24} - 0,03.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x = 6$ .

Адказ: 6 л.



*Спосаб 2.* Няхай  $x$  л малака Таццяна наліла ў кожны з 25 кубкаў, тады ў бітоне ўсяго  $(25x + 0,5)$  л малака.

Калі б Таццяна налівала малака па  $(x + 0,03)$  л, то яго хапіла б на 24 кубкі, значыць, умяшчальнасць бітона роўная  $((x + 0,03) \cdot 24)$  л. Саставім ураўненне

$$25x + 0,5 = (x + 0,03) \cdot 24.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x = 0,22$ .

Такім чынам, у кожны кубак налілі па 0,22 л, значыць, у бітоне было  $(0,22 \cdot 25 + 0,5)$  л малака, г. зн. 6 л.

**Задача 3.** З вёскі Замошша ў вёску Слабодка выйшла група турыстаў са скорасцю  $6 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ . Праз 3 г за турыстамі на вела-сіпедзе выехаў інструктар Васіль са скорасцю  $18 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ . Васіль прыехаў у Слабодку праз 20 мін пасля таго, як туды прыйшлі турысты. Знайсці адлегласць ад Замошша да Слабодкі.

Рашэнне. *Спосаб 1.* Няхай  $x$  км — адлегласць ад Замошша да Слабодкі, тады  $\frac{x}{6}$  г затрацілі на ўвесь шлях турысты,  $\frac{x}{18}$  г затраціў на шлях да Слабодкі Васіль. Паколькі Васіль выехаў з Замошша на 3 г пазней і прыехаў на 20 мін (г. зн. на  $\frac{1}{3}$  г) пазней, то турысты былі ў дарозе на  $2\frac{2}{3}$  г больш, чым Васіль. Саставім ураўненне

$$\frac{x}{6} - 2\frac{2}{3} = \frac{x}{18}.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x = 24$ .

Адказ: 24 км.



*Спосаб 2.* Няхай  $x$  г — час, за які турысты прайшлі ўвесь шлях, тады Васіль затраціў на гэты шлях  $(x - 3 + \frac{1}{3})$  г. Васіль праехаў  $18(x - 2\frac{2}{3})$  км, а турысты прайшлі  $6x$  км. Паколькі Васіль і турысты пераадолелі адну і тую ж адлегласць, то саставім ураўненне

$$18(x - 2\frac{2}{3}) = 6x.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымаем  $x = 4$ .

Мы знайшлі, што турысты былі ў дарозе 4 г, значыць, адлегласць ад Замошша да Слабодкі роўная  $(6 \cdot 4)$  км, г. зн. 24 км.

**Задача 4.** Калі двухзначны лік, у якім лічба дзясяткаў на 3 большая за лічбу адзінак, паменшыць на 20 %, то сума гэтага і атрыманага лікаў будзе на 10 большая за суму зыходнага ліку і ліку, атрыманага з зыходнага перастаноўкай лічбаў. Знайсці зыходны лік.

Рашэнне. Няхай  $x$  — лічба адзінак, тады  $x + 3$  — лічба дзясяткаў, а  $10(x + 3) + x$  — шуканы лік. Пасля памяншэння зыходнага ліку на 20 % атрымаем новы лік, роўны  $0,8(10(x + 3) + x)$ . Паколькі па ўмове сума зыходнага і гэтага

новага ліку на 10 большая за суму зыходнага ліку і ліку, атрыманага з зыходнага перастаноўкай лічбаў, то саставім ураўненне

$$10(x + 3) + x + 0,8(10(x + 3) + x) - 10 = 10(x + 3) + x + 10x + x + 3.$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымалі  $x = 5$  (пераканайцеся ў гэтым).

Такім чынам, 5 — лічба адзінак, значыць, 8 — лічба дзясяткаў, значыць, зыходны лік 85.

Адказ: 85.

**Задача 5.** На занятак тэатральна-музычнай студыі прыйшло 15 дзяўчынак і 25 хлопчыкаў. Некалькі танцавальных пар выйшла на сцэну для рэпетыцыі фінальнага танца. Колькі пар выйшла на сцэну, калі адносіна ліку хлопчыкаў да ліку дзяўчынак, што засталіся ў зале, роўная 9 : 4?

Рашэнне. Няхай на сцэну выйшла  $x$  пар, тады ў зале засталася  $(25 - x)$  хлопчыкаў і  $(15 - x)$  дзяўчынак. Па ўмове задачы саставім ураўненне

$$\frac{25 - x}{15 - x} = \frac{9}{4}.$$

Па ўласцівасці прапарцыі гэта ўраўненне раўназначнае ўраўненню

$$4(25 - x) = 9(15 - x).$$

Рашыўшы гэта ўраўненне, атрымалі  $x = 7$ .

Адказ: 7 пар.



Напомнім, што правільнасць рашэння задачы (правільнасць састаўлення ўраўнення і вылічэнняў) можна правярыць рознымі спосабамі: састаўленнем адваротнай задачы, рашэннем задачы іншым спосабам і г. д. Такую праверку звычайна не запісваюць пры афармленні рашэння задачы, яе выконваюць для сябе, на чарнавіку.

### Практыкаванні

29. Групе з 5 хлопчыкаў і 8 дзяўчынак даручылі арганізаваць дыскатэку. Кожны хлопчык прынёс на 4 кампакт-дыскі больш, чым кожная дзяўчынка. Колькі дыскаў прынеслі дзеці, калі хлопчыкі прынеслі на 2 кампакт-дыскі больш, чым дзяўчынкі?

30. Ручка і металічная частка малатка важаць 500 г. Вядома, што 70 ручак цяжэйшыя, чым 15 металічных частак малаткоў, на 1 кг. Якая маса адной ручкі?
31. Для абсталявання кіназалы прывезлі крэслы. Калі ў кожным з 22 радоў паставілі па аднолькавай колькасці крэслаў, 44 крэслы аказаліся нявыкарыстанымі. Калі ж колькасць крэслаў у кожным радзе павялічылі на 20 %, то не хапіла 22 крэслаў. Колькі крэслаў было прывезена?
32. Наборшчыцу папрасілі набраць на камп'ютары рукапіс за 12 дзён. Калі яна штодзень будзе набіраць на 6 старонак менш, чым павінна была набіраць, каб паспець у адпаведны тэрмін, то адхіліцца ад тэрміну на 3 дні. Колькі старонак у рукапісе?
33. З пасёлка Трусава ў пасёлак Зайцава адначасова выехалі два веласіпедысты. Ваня ехаў са скорасцю  $15 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ , а Тамара — са скорасцю  $7 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ . Калі Ваня даехаў да Зайцава, ён адразу развярнуўся і сустрэў Тамару на адлегласці 20 км ад Зайцава. Якая адлегласць паміж пасёлкамі?
34. Саша з акна пасажырскага поезда, які рухаўся са скорасцю  $57 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ , заўважыў, што сустрэчны таварны поезд прайшоў міма за 9 с. Знайдзіце даўжыню таварнага поезда, калі яго скорасць  $63 \frac{\text{км}}{\text{г}}$ .
- 35\*. У двухзначным ліку лічба адзінак на 3 меншая за лічбу дзясяткаў. Сума гэтага ліку і ліку, атрыманага з яго перастапоўкай лічбаў, з'яўляецца квадратам нейкага ліку. Знайдзіце гэты лік.
36. Сума лічбаў двухзначнага ліку роўная 12. Знайдзіце гэты лік, калі вядома, што, павялічаны на 6, ён у 9 разоў перавысіць лічбу адзінак зыходнага ліку.
37. Адзін з трактароў за 1 г узорвае на  $\frac{1}{24}$  участка больш, чым другі. За які час другі трактар можа ўзараць увесь участак, калі за 7 г працы другога трактара і за 8 г працы першага трактара будзе ўзарана  $\frac{5}{6}$  участка?

38. Басейн становіцца пустым на 5 г хутчэй, чым напаўняецца. За які час напоўніцца пусты басейн, калі вада, набраная за 4 г, выпякае за 3 г?
39. Цэлюлоза змяшчае 70 % вады. Пасля выпарвання 91 кг вады адносіна масы сухога рэчыва да масы вады ў атрыманай цэлюлозе склала 4 : 5. Якая зыходная маса цэлюлозы?
40. Дадзены дроб  $\frac{93}{112}$ . Які лік трэба адняць ад лічніка і дадаць да назоўніка, каб атрыманы дроб стаў роўным дробу  $\frac{2}{3}$ ?
41. У адзін з дзён месяца (не лютага!) Ваня заўважыў, што да канца месяца засталася на 2 дні больш, чым прайшло з пачатку месяца. Назавіце чысло, калі Ваня заўважыў гэта.

### 3. Практыкаванні для паўтарэння алгебраічнага матэрыялу курса матэматыкі 8-га класа

42. Размясціце ў парадку нарастання:
- 1)  $48 : 6$ ,  $-48 : (-8)$  і  $48 : (-2)$ ;
  - 2)  $-56 : (-7)$ ,  $0,4 : 8$  і  $-0,2 : 5$ .
43. Параўнайце значэнні выказаў:
- 1)  $6(-5)(-0,2)$  і  $-0,4(-5)(-3)$ ;
  - 2)  $-7(-3)(-2)$  і  $2(-8)\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 9$ .
44. Параўнайце з нулём:
- 1)  $-1,2^{-200}$ ;
  - 2)  $-(-1,4)^{-6}$ ;
  - 3)  $-(-2,5)^{-15}$ ;
  - 4)  $-3,7^{-9}$ ;
  - 5)  $-6,4^{-8}$ ;
  - 6)  $-24,1^{10}$ .
45. Параўнайце з адзінкай:
- 1)  $16^{-4}$ ;
  - 2)  $140^0$ ;
  - 3)  $0,5^{-7}$ ;
  - 4)  $\left(\frac{3}{7}\right)^{-8}$ ;
  - 5)  $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ ;
  - 6)  $\left(\frac{14}{15}\right)^{-1}$ .
46. Няхай  $m < 0$ . Ці правільна, што:
- 1)  $21,0157 + m < 21,0157$ ;
  - 2)  $-171,049 - m < -171,049$ ?

47. Няхай  $p > 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $-80,492 + p < -80,492$ ;      2)  $-25\,173 - p < -25\,173$ ?

48. Параўнайце лікі  $x$  і  $y$ , калі:

- 1)  $x - y = 24$ ;      2)  $x - y = -9$ ;  
3)  $x - y = (-4)^3$ ;      4)  $x - y = (-3)^4$ .

49. Вядома, што  $a > 0$ ,  $b < 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $a^3 b^2 > 0$ ;      2)  $-\frac{a}{b^8} > 0$ ;      3)  $a^2 b^3 > 0$ ;  
4)  $\frac{a^3}{b^3} < 0$ ;      5)  $\frac{a}{|b^7|} > 0$ ;      6)  $\frac{b^{13}}{a+7} < 0$ ?

50. Ці можа рознасць лікаў  $x - y$  быць:

- 1) меншай за  $x$ ;      2) большай за  $y$ ;  
3) роўнай  $x$ ;      4) роўнай  $-y$ ?

51. Вядома, што  $k < 0$ . Які з двух пунктаў ляжыць лявей на каардынатнай прамой:

- 1)  $A(p)$  або  $B(p+k)$ ;      2)  $A(p)$  або  $C(p+k^2)$ ;  
3)  $A(p)$  або  $C(p+k^3)$ ;      4)  $A(p)$  або  $E(p-k^4)$ ?

52. Няхай  $a > b$  — правільная лікавая няроўнасць. Параўнайце значэнні выказаў:

- 1)  $a + 5,3$  і  $b$ ;      2)  $a$  і  $b - 3$ ;  
3)  $a - 2$  і  $b - 3$ ;      4)  $a + 2,9$  і  $b + 1,01$ .

53. Няхай  $a > b$  — правільная лікавая няроўнасць. Размясціце ў парадку спадання:

- 1)  $b$ ;  $a + 32$ ;  $a + 2,9$ ;  $b - 3\frac{1}{2}$ ;  $b - 7,9$ ;  $a$ ;  
2)  $a$ ;  $a + 7,6$ ;  $a + 52,6$ ;  $b - 89,03$ ;  $b$ ;  $b - 0,01$ .

54. Ці можа рознасць лікаў  $m$  і  $n$  быць:

- 1) большай за  $m + n$ ;      2) меншай за  $m + n$ ;  
3) роўнай  $m + n$ ?

55. Няхай  $m < n$  — правільная лікавая няроўнасць. Параўнайце:

- 1)  $3m - 2(m+1)$  і  $n + 8$ ;  
2)  $10(m-1) - 6(m+1) - 3m$  і  $n - 11$ ;  
3)  $-(5m-2)^2 + 5m(5m-3) - 4m$  і  $-(2n-3)(8n+5) + (4n-3)^2 + 11n$ ;

4)  $(3m + 2)^2 - (3m + 1)(3m - 1) - 11m$  і  $(2n - 3)(3n + 2) - 6((n - 2)(n + 2) - n)$ .

56. Выкарыстаўшы ўласцівасці лікавых няроўнасцей, пераўтварыце правільную лікавую няроўнасць  $p + 6 < k - 4$  у правільную лікавую няроўнасць, левая частка якой мае выгляд:

- 1) 6;                      2)  $-4$ ;                      3)  $p$ ;                      4)  $k$ ;  
5)  $p + 2$ ;                      6)  $p - 2$ ;                      7)  $k + 3$ ;                      8)  $k - 4$ .

57. Пераўтварыце лікавую няроўнасць  $a - b > 7$  ( $b > 0$ ) у няроўнасць, левая частка якой мае выгляд:

- 1) квадрата рознасці  $a$  і  $b$ ;  
2) рознасці квадратаў  $a$  і  $b$ ;  
3)\* рознасці кубоў  $a$  і  $b$ ;  
4)\* куба рознасці  $a$  і  $b$ .

58. Пераўтварыце лікавую няроўнасць  $a^2 + ab > 3$  у няроўнасць, левая частка якой мае выгляд:

- 1) квадрата сумы  $a$  і  $b$ ;  
2) квадрата рознасці  $a$  і  $b$ ;  
3) рознасці квадратаў  $a$  і  $b$ ;  
4) сумы квадратаў  $a$  і  $b$ ;  
5) патроенага здабытку  $a$  і  $b$ ;  
6) здабытку  $a$  і сумы  $a + b$ .

59\*. Ці правільная лікавая няроўнасць пры  $a < 0$ :

- 1)  $\frac{a-6}{a+6} > 1$ ;                      2)  $a + 5 > \frac{a+5}{2}$ ;  
3)  $a < \frac{a^2-9}{a+3}$ ;                      4)  $a - 7 > \frac{7a-a^2}{7}$ ?

60. Ведаючы, што  $c < 0$ ,  $k < 0$ ,  $p < 0$ , памножце абедзве часткі няроўнасці  $3m - 5 > 2n + 8$  на лік:

- 1)  $ck$ ;                      2)  $c^2k$ ;                      3)  $ckp$ ;                      4)  $ckp^2$ ;  
5)  $c^3kp$ ;                      6)  $ck^3p^2$ ;                      7)  $-kp$ ;                      8)  $-4c$ .

61. Ведаючы, што  $k < 0$ ,  $p < 0$ ,  $t < 0$ , падзяліце абедзве часткі няроўнасці  $2 - 3x < 17y$  на лік:

- 1)  $pt^2$ ;                      2)  $kp$ ;                      3)  $k^3pt$ ;                      4)  $k^2p^3t$ ;  
5)  $kpt^2$ ;                      6)  $kp^2t^2$ ;                      7)  $-kpt$ ;                      8)  $-kt^3$ .

62. Вядома, што  $(p - k)^5 < (p - k)^3$  і  $p > k$ . Ці правільна, што:

- 1)  $(p - k)^4 > (p - k)^3$ ;                      2)  $(p - k)^3 > (p - k)^2$ ;  
3)  $(p - k)^2 < p - k$ ;                      4)  $p - k < -1$ ?

63. Параўнайце лікі  $a$  і  $b$  з нулём, калі:

- 1)  $ab > 0$ ;                      2)  $ab < 0$ ;                      3)  $\frac{a}{b} > 0$ ;                      4)  $\frac{a}{b} < 0$ .

64. Вядома, што  $m > n$  і  $n > 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $\frac{m}{n} > 1$ ;                      2)  $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ ?

65. Вядома, што  $m > n$  і  $m < 0$ . Ці правільна, што:

- 1)  $\frac{m}{n} < 1$ ;                      2)  $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} > 0$ ?

66. Складзіце няроўнасці:

- 1)  $8a - 2b > t - 3$  і  $5b - 6a > 2t - 1$ ;  
2)  $5a^2 + 3b > 2t - 1$  і  $-2b - 4a^2 > 2 - t$ ;  
3)  $a^2 + 5a - 2b < 3m + 1$  і  $25 + m < 2a^2 - 3a + 3b$ ;  
4)  $2a^2 - b^2 + 1 < 4m + 2m^2 - 1$  і  $a^2 + b^2 - 1 < 3m - 2m^2 - 2$ .

67. Няхай  $A > B$  і  $C > D$  — правільныя лікавыя няроўнасці. Складзіце іх, калі:

- 1)  $A = \frac{a^2}{a^2 - 16}$ ;  $B = \frac{5}{b^2 - 4}$ ;  $C = \frac{-a}{a + 4}$ ;  $D = \frac{-5}{b^2 + 2b}$ ;  
2)  $A = \frac{4}{x^2 - 3x}$ ;  $B = \frac{a}{a - b}$ ;  $C = \frac{-4}{x^2 + 3x}$ ;  $D = \frac{ab + b^2}{a^2 - b^2}$ .

68. Няхай  $a$  — адвольны лік. Ці правільна, што:

- 1)  $16a^2 + 1 \geq 0$ ;                      2)  $-(25a - 1)^2 \leq 0$ ;  
3)  $8 - a^2 \geq -6$ ;                      4)  $(3a - 2)^2 + 25 \geq 0$ ;  
5)  $-(6a + 1)^2 \geq 10$ ;                      6)  $(5a - 4)^2 \leq -3$ ;  
7)  $-a^2 - 7 \leq 0$ ;                      8)  $2a \geq a$ ;  
9)  $a \geq -a$ ;                      10)  $a^2 > a$ ?

69. Дакажыце, што:

- 1) калі  $a \neq 0$  і  $a^2b \geq 0$ , то  $b \geq 0$ ;  
2) калі  $\frac{a^2}{b^3} \leq 0$ , то  $b < 0$ ;  
3) калі  $\frac{a}{b^2} \geq 0$ , то  $a \geq 0$ ;  
4) калі  $a \neq 0$  і  $a^2b < 0$ , то  $b < 0$ .



70\*. Дакажыце, што:

- 1) калі  $a + b = 4$ , то  $a^2 - 2b \geq -9$ ;
- 2) калі  $a + b = 4$ , то  $a^2 + b^2 \geq 8$ ;
- 3) калі  $a + b = 2$ , то  $4a^2 + 12b - 15 \geq 0$ ;
- 4) калі  $a - b = 4$ , то  $a^2 + b^2 \geq 8$ .

71. Вядома, што  $6 \leq c < 9$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $-6c$ ;
- 2)  $-4c$ ;
- 3)  $3c - 6$ ;
- 4)  $5c + 4$ ;
- 5)  $\frac{c}{4} - 5$ ;
- 6)  $\frac{c}{5} + 2$ ;
- 7)  $\frac{7}{c}$ ;
- 8)  $\frac{6}{c}$ .

72. Вядома, што  $2 \leq a \leq 3$  і  $4 < b < 5$ . Ацаніце значэнні выразу:

- 1)  $0,2b - 0,1a$ ;
- 2)  $0,5b - 0,3a$ ;
- 3)  $a^2 + b^2$ ;
- 4)  $a^2 - b^2$ ;
- 5)  $a^3 - b^3$ ;
- 6)  $a^3 + b^3$ ;
- 7)  $3a^3 - 4b^3$ ;
- 8)  $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}b^3$ .

73\*. Якое найбольшае цэлае значэнне можа прымаць выраз:

- 1)  $2x - 3y$ , калі  $-1,5 < x < 2$  і  $-4 < y < 3,2$ ;
- 2)  $4,6x - 9y$ , калі  $-4 < x < -3$  і  $-1 < y < 0,2$ ;
- 3)  $3x - \frac{2}{y}$ , калі  $-2 < x < \frac{1}{3}$  і  $0,5 < y < 4$ ;
- 4)  $\frac{1}{x} - 2y$ , калі  $3 < x < 4$  і  $-0,2 < y < 0,1$ ?

74\*. 1) Значэнне выразу  $\frac{m}{k+1}$  — цэлы лік. Знайдзіце яго, калі:

$$1,3 < m < 1,5 \text{ і } 0,4 < k < 0,8.$$

2) Значэнне выразу  $\frac{2+m}{3k}$  — цэлы лік. Знайдзіце яго, калі:

$$2,3 < m < 3,1 \text{ і } 1\frac{1}{3} < k < 2\frac{2}{3}.$$

75\*. Запішыце найменшае і найбольшае значэнні выразу:

- 1)  $\frac{2}{m} - p$ , калі  $0,5 \leq m \leq 3$  і  $1,5 \leq p \leq 2,8$ ;
- 2)  $2m - \frac{3}{p}$ , калі  $-2,3 \leq m \leq 3,4$  і  $0,5 \leq p \leq 4$ ;
- 3)  $4mp - m$ , калі  $1 \leq m \leq 2$  і  $\frac{1}{2} \leq p \leq 4,25$ ;
- 4)  $8m - pm$ , калі  $\frac{1}{4} \leq m \leq 4$  і  $2,4 \leq p \leq 2,5$ .

76. Калі да падвоянага ліку дадаць 3, то атрыманая сума будзе не большай за 5, а калі да здабытку зыходнага ліку і

- 7 дадаць 12, то сума будзе не меншай за 19. Знайдзіце гэты лік.
77. У актавай зале можна размясціць ад 23 да 27 радоў, а ў кожным радзе можа быць ад 29 да 35 крэслаў. Якой можа быць колькасць крэслаў у актавай зале?
78. 1) Ураджай бульбы з дачнага ўчастка чакаецца ад 900 кг да 1200 кг, а страты, магчымыя пры захоўванні, складаюць ад 60 да 90 кг. Якой можа быць маса захаванай бульбы?
- 2) Кожная з 15 закройшчыц можа за 1 г выкраіць ад 3 да 9 вырабаў, а кожная з 8 швачак за 1 г можа сфастрыгаваць ад 5 да 12 раскrojеных вырабаў. Якой можа быць колькасць несфастрыгаваных за гадзіну вырабаў?
79. На прамавугольны стэнд памерам  $175 \times 220$  см наклеены 8 фотакартак прамавугольнай формы памерам  $a \times b$  см, пры гэтым  $9 < a < 15$ ,  $8 < b < 12$ . Паверхня стэнда, не закрытая фотакарткамі, павінна быць пафарбаваная. Колькі можа спатрэбіцца фарбы, калі на фарбаванне плошчы  $1000 \text{ см}^2$  трэба 15 г фарбы?
80. Маргарын расфасоўваюць у пачкі масай 200 г і 250 г. Колькасць пачкаў масай 250 г можа быць ад 16 да 24. Якой можа быць колькасць пачкаў масай 200 г?
81. Вызначыце, ці з'яўляецца правільным сцверджанне:
- 1)  $-0,9$  ёсць лік, процілеглы арыфметычнаму квадратнаму караню з ліку  $0,81$ ;
  - 2)  $\frac{1}{3}$  ёсць лік, адваротны квадратнаму караню з ліку 9;
  - 3)  $-\frac{1}{2}$  ёсць лік, адваротны кубічнаму караню з ліку  $-8$ ;
  - 4)  $-0,5$  ёсць лік, процілеглы караню чацвёртай ступені з ліку  $0,0625$ ;
  - 5) сума каранёў чацвёртай ступені з ліку 16 роўная 0;
  - 6) нулявая ступень кораня сёмай ступені з ліку 128 роўная 1.
82. Ці з'яўляецца лік  $b$  каранем  $n$ -й ступені з ліку  $a$ , калі:
- 1)  $b = 1$ ,  $a = 1$ ,  $n = 5$ ;
  - 2)  $b = -1$ ,  $a = 1$ ,  $n = 3$ ;

- 3)  $b = 1, a = -1, n = 9$ ; 4)  $b = -1, a = -1, n = 7$ ;  
5)  $b = 0,5, a = 2,5, n = 2$ ; 6)  $b = -0,5, a = 0,25, n = 2$ ;  
7)  $b = -1,5, a = 2\frac{1}{4}, n = 2$ ; 8)  $b = 2\frac{1}{2}, a = -6,25, n = 2$ ;  
9)  $b = -2, a = 1024, n = 10$ ; 10)  $b = 3,2, a = 243, n = 5$ ?

83. Запішыце для ліку 81:

- 1) квадратны корань, меншы за лік  $-5$ ;  
2) корань 4-й ступені, большы за лік 2;  
3) карані 4-й ступені і іх здабытак;  
4) квадратныя карані і іх здабытак.

Знайдзіце квадратныя карані з ліку (84—85).

84. 1)  $a^8$ ; 2)  $a^{10}$ ; 3)  $b^4$ ;  
4)  $b^{14}$ ; 5)  $t^{12}$ ; 6)  $t^{22}$ .  
85. 1)  $4a^2$ ; 2)  $9b^4$ ; 3)  $a^4b^6$ ; 4)  $c^8d^{12}$ ;  
5)  $\frac{49}{a^{12}}$ ; 6)  $\frac{81}{c^{10}}$ ; 7)  $\frac{a^2}{b^8}$ ; 8)  $\frac{a^4}{16c^6}$ ;  
9)  $a^2 - 2ab + b^2$ ; 10)  $a^2 + 2ab + b^2$ ;  
11)  $9 + 6a + a^2$ ; 12)  $d^2 - 8d + 16$ .

86. Знайдзіце квадратныя карані са значэння выразу:

- 1)  $12^2 + 16^2$ ; 2)  $5^2 + 12^2$ ;  
3)  $17^2 - 8^2$ ; 4)  $50^2 - 14^2$ ;  
5)  $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2$ ; 6)  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$ ;  
7)  $\frac{7(12^2 - 5^2)}{17}$ ; 8)  $\frac{15^2 - 6^2}{21}$ ;  
9)  $4 \cdot 64$ ; 10)  $9 \cdot 25$ ;  
11)  $25 \cdot 81 \cdot 16$ ; 12)  $4 \cdot 121 \cdot 25$ .

87. Ці існуе квадратны корань са значэння выразу:

- 1)  $1 - \frac{9}{25}$ ; 2)  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$ ; 3)  $16 - 7$ ; 4)  $\frac{-25}{-9}$ ;  
5)  $\frac{9}{-16}$ ; 6)  $5 - 14$ ; 7)  $3^2 - 7^2$ ; 8)  $5^2 - 4^2$ ;  
9)  $(-3)^2$ ; 10)  $-3^2$ ; 11)  $(-7^2)^{-2}$ ; 12)  $(-64)^{0?}$

88. Знайдзіце значэнне выразу (калі яно існуе):

- 1)  $\sqrt{3a+10}$  пры  $a$ , роўным  $-4$ ;  $-3$ ;  $-2$ ;  $2$ ;  
2)  $2\sqrt{10-2c}$  пры  $c$ , роўным  $-3$ ;  $3$ ;  $5$ ;  $6$ ;

- 3)  $\sqrt{-5-3k}$  пры  $k$ , роўным  $-7$ ;  $-3$ ;  $-2$ ;  $2$ ;  
4)  $5\sqrt{-2+6p}$  пры  $p$ , роўным  $3$ ;  $1$ ;  $0$ ;  $-2$ .

89. Ці правільная роўнасць:

- 1)  $\sqrt{81-2\cdot 9\cdot 8+64}=9-8$ ;  
2)  $\sqrt{16-2\cdot 4\cdot 6+36}=4-6$ ;  
3)  $\sqrt{9-2\cdot 3\cdot 5+25}=3-5$ ;  
4)  $\sqrt{49-2\cdot 7\cdot 4+16}=7-4$ ?

90. Ці правільна, што здабытак любога квадратнага кораня з 25 і любога квадратнага кораня з 9:

- 1) роўны значэнню выразу  $\sqrt{25}\sqrt{9}$ ;  
2) большы за значэнне выразу  $\sqrt{25}\sqrt{9}$ ;  
3) не большы за значэнне выразу  $\sqrt{25}\sqrt{9}$ ;  
4) не меншы за значэнне выразу  $\sqrt{25}\sqrt{9}$ ?

91. Ці правільна, што рознасць любога квадратнага кораня з 25 і любога квадратнага кораня з 4:

- 1) роўная 3;                      2) большая за 3;  
3) не меншая за  $-7$ ;            4) не большая за  $-7$ ?

92. Пры якім значэнні  $a$  правільная роўнасць:

- 1)  $\sqrt{a}=9$ ;                      2)  $-\sqrt{a}=-5$ ;  
3)  $6+\sqrt{a}=7$ ;                4)  $12-\sqrt{a}=9$ ;  
5)  $-6\sqrt{a}=-72$ ;              6)  $-\sqrt{a}=-\frac{4}{5}$ ;  
7)  $2,9+0,2\sqrt{a}=4,5$ ;        8)  $1-\sqrt{a}=0,4$ ?

Рашыце ўраўненне (93—95).

93. 1)  $2x^2+3=53$ ;                      2)  $5x^2-7=73$ ;  
3)  $\frac{1}{7}x^2+9=16$ ;                      4)  $\frac{1}{9}x^2-10=-1$ ;  
5)  $3x^2-120=243$ ;                      6)  $2x^2+12=350$ ;  
7)  $\frac{1}{2}x^2+28=100$ ;                      8)  $\frac{1}{3}x^2-40=35$ .
94. 1)  $(x-4)^2=9$ ;                      2)  $(5-x)^2=1$ ;  
3)  $(2x+1)^2-4=0$ ;                      4)  $(3x-2)^2=16$ ;  
5)  $(9-3x)^2=25$ ;                      6)  $(1-4x)^2-40=9$ .

95. 1)  $\sqrt{1-x} = 2$ ; 2)  $\sqrt{3-x} = 5$ ;  
3)  $\sqrt{x} = -3$ ; 4)  $\sqrt{x} = -12$ ;  
5)  $\sqrt{-x} = 7$ ; 6)  $\sqrt{-x} = 8$ ;  
7)  $2\sqrt{5x+4} = -8$ ; 8)  $-3\sqrt{4-3x} = 15$ .
96. Пласціна складаецца з 8 аднолькавых квадратаў. Знайдзіце даўжыню стараны квадрата, калі вядома, што плошча пласціны роўная:  
1)  $392 \text{ см}^2$ ; 2)  $128 \text{ см}^2$ ;  
3)  $6,48 \text{ см}^2$ ; 4)  $13,52 \text{ см}^2$ .
97. Знайдзіце даўжыню канта куба, калі плошча яго поўнай паверхні роўная:  
1)  $216 \text{ см}^2$ ; 2)  $150 \text{ см}^2$ ;  
3)  $4,86 \text{ см}^2$ ; 4)  $3,84 \text{ см}^2$ .
98. Запішыце натуральны абсяг вызначэння  $D$  выразу:  
1)  $\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$ ; 2)  $\frac{1}{x-3} + \sqrt{x+2}$ ;  
3)  $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ; 4)  $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x-2}$ ;  
5)  $\sqrt{2-x} - \frac{4}{\sqrt{6-x}}$ ; 6)  $\frac{1}{\sqrt{8-x}} + \sqrt{10-x}$ .
99. Знайдзіце значэнне выразу пры  $k$ , роўным 0; 2; -2; -3; 3:  
1)  $6\sqrt{k^2}$ ; 2)  $5\sqrt{(k-1)^2}$ ;  
3)  $\frac{1}{4}\sqrt{(2-k)^2}$ ; 4)  $0,1\sqrt{(1-k^2)^2}$ .
100. Ці правільна, што:  
1)  $\sqrt{a^4} = a^2$ ; 2)  $\sqrt{a^8} = a^4$ ;  
3)  $\sqrt{\frac{16a^{20}}{25}} = \frac{4|a^{10}|}{5}$ ; 4)  $\sqrt{2\frac{1}{4}a^{26}} = \frac{3}{2}|a^{13}|$ ?
101. Знайдзіце значэнне выразу пры  $t$ , роўным -2; -1; 0; 3; 5:  
1)  $\sqrt{t^4}$ ; 2)  $\sqrt{t^6}$ ; 3)  $0,1\sqrt{t^6}$ ; 4)  $\frac{1}{30}\sqrt{t^{10}}$ .

102. Вылічыце:

$$1) \sqrt{19\frac{61}{81} : 121};$$

$$2) \sqrt{12\frac{132}{289} : 2,25};$$

$$3) \sqrt{\frac{8\frac{1}{36} \cdot 3\frac{6}{25}}{2\frac{47}{121}}};$$

$$4) \sqrt{\frac{6\frac{30}{49} \cdot 7^2}{0,0289}}.$$

103. Ці правільна, што калі  $a$  — рацыянальны лік,  $b$  — ірацыянальны лік, то з'яўляецца рацыянальным лік:

$$1) a + b; \quad 2) a - b?$$

Калі правільна, то прывядзіце два прыклады значэнняў  $a$  і  $b$ , якія праілюструюць ваш адказ.

104. Ці правільна, што пры любым рацыянальным  $a$  і ірацыянальным  $b$  з'яўляецца ірацыянальным лік:

$$1) ab; \quad 2) a : b?$$

Калі няправільна, то прывядзіце два прыклады значэнняў  $a$  і  $b$ , што адпавядаюць умове, пры якіх  $ab$  і  $a : b$  — рацыянальныя лікі.

Параўнайце лікі (105—106).

$$105. \quad 1) \sqrt{26} \text{ і } 4;$$

$$2) \sqrt{23} \text{ і } 14;$$

$$3) -\sqrt{21} \text{ і } -\sqrt{40};$$

$$4) -\sqrt{24} \text{ і } -\sqrt{65};$$

$$5) \sqrt{3} \text{ і } -\sqrt{2};$$

$$6) -\sqrt{5} \text{ і } \sqrt{6};$$

$$7) \sqrt{16} + \sqrt{9} \text{ і } \sqrt{23};$$

$$8) \sqrt{25} + \sqrt{144} \text{ і } \sqrt{161};$$

$$9) \sqrt{9}\sqrt{16} \text{ і } \sqrt{145};$$

$$10) \sqrt{144} : \sqrt{25} \text{ і } \sqrt{5,79}.$$

$$106. \quad 1) 5,5 \text{ і } \sqrt{29};$$

$$2) \sqrt{54} \text{ і } 7,5;$$

$$3) \sqrt{38} \text{ і } 6,5;$$

$$4) 3,5 \text{ і } \sqrt{12};$$

$$5) \sqrt{290,9} \text{ і } 17,3;$$

$$6) \sqrt{1058,4} \text{ і } 32,4.$$

107. Дакажыце няроўнасць:

$$1) \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \text{ пры } a > 0, b > 0;$$

$$2) \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{a^2} \geq 2ab \text{ пры } a > 0, b > 0;$$

$$3)* 2a^3 + 1 \geq 3a^2 \text{ пры } a > 0;$$

$$4) \frac{4a^3 + 4a^2 + a + 1}{a\sqrt{a}} \geq 8 \text{ пры } a > 0;$$

5)  $a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$  пры  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ;

6)  $\frac{m+n}{p} + \frac{m+p}{n} + \frac{n+p}{m} \geq 6$  пры  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $p > 0$ .

108. Дакажыце, што для любых лікаў правільнае сцверджанне: калі  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$  і  $\sqrt{b} > \sqrt{c}$ , то  $\sqrt{a} > \sqrt{c}$ .

109. Размясціце лікі ў парадку спадання:

- 1)  $\sqrt{114}$ ;  $\sqrt{129}$ ;  $\sqrt{111}$ ;      2)  $\sqrt{3,09}$ ;  $\sqrt{3,19}$ ;  $\sqrt{3,01}$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{4}{11}}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{13}}$ ;  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ;      4)  $\sqrt{\frac{29}{30}}$ ;  $\sqrt{\frac{26}{35}}$ ;  $\sqrt{\frac{23}{29}}$ .

Рашыце няроўнасць (110—119).

110\*. 1)  $\sqrt{x} \geq \frac{3}{4}$ ;      2)  $\sqrt{x} \leq \frac{2}{5}$ ;

3)  $\sqrt{x} < 0,7$ ;      4)  $\sqrt{x} > 6$ .

111\*. 1)  $\sqrt{2-x} > 5$ ;      2)  $\sqrt{4-x} \geq 4$ ;

3)  $\sqrt{5+x} < 10$ ;      4)  $\sqrt{3+x} < 6$ .

112\*. 1)  $\frac{2}{\sqrt{9x-18}} < 6$ ;      2)  $\frac{5}{\sqrt{16+4x}} > 2,5$ ;

3)  $\frac{\sqrt{2-3x}}{14} > -1$ ;      4)  $\frac{\sqrt{7x+9}+19}{19} < 1$ .

113\*. 1)  $\sqrt{-x} \leq -4$ ;      2)  $\sqrt{-x} \geq -6$ .

114\*. 1)  $\sqrt{|x-4|} < 2$ ;      2)  $\sqrt{|x+5|} > 7$ .

115. 1)  $\sqrt{x^2} > 6$ ;      2)  $\sqrt{x^2} < 1$ ;

3)  $\sqrt{(x-1)^2} \leq 2$ ;      4)  $\sqrt{(x-2)^2} \geq 3$ .

116. 1)  $\sqrt{(x+7)^2} > 0$ ;      2)  $-\sqrt{(4+x)^2} < 0$ ;

3)  $\sqrt{-(3x-21)^2} < 0$ ;      4)  $\sqrt{-(5x+25)^2} > 0$ ;

5)  $-\sqrt{-(12-x)^2} < 0$ ;      6)  $-\sqrt{-(9+x)^2} > 0$ .

117. 1)  $\sqrt{4+4x+x^2} > 0$ ;      2)  $\sqrt{1+x^2+2x} < 0$ ;

3)  $\sqrt{-1+8x-16x^2} < 0$ ;      4)  $\sqrt{12x-4-9x^2} > 0$ .

118. 1)  $-\sqrt{10 - 2\sqrt{10x + x^2}} < 0$ ; 2)  $-\sqrt{5 + 4\sqrt{5x + 4x^2}} > 0$ ;  
3)  $-\sqrt{-25x^2 - 10\sqrt{3}x - 3} < 0$ ; 4)  $-\sqrt{4\sqrt{5}x - 4x^2 - 5} > 0$ .

119. 1)  $\sqrt{16x^2 - 8x + 1} > 8$ ; 2)  $\sqrt{100x^2 + 40x + 4} \geq 9$ ;  
3)  $\sqrt{25 + 30x + 9x^2} < 7$ ; 4)  $\sqrt{49x^2 - 28x + 4} > 5$ .

120. Запішыце ўраўненне ў выглядзе  $ax^2 + bx + c = 0$  пры  $a > 0$  і назаўце старшы і сярэдні каэфіцыенты, а таксама свабодны член:

1)  $(x - 1)^2 + 3(x - 1) + 7(x^2 - 1) = 0$ ;

2)  $(x + 2)^2 - 4(x - 1)^2 + 5(2 - x) = 0$ ;

3)  $(3x + 2)^2 = 8 - 7(2x - 5)^2 - 2x^2$ ;

4)  $(2x - 1)^2 = 3(x - 1)^2 - 5x$ .

121. Ці раўназначныя ўраўненні:

1)  $3x - 1 = x^2 - 7$  і  $3x - 1 - x^2 = -7$ ;

2)  $2x - 3 = x - 5$  і  $x = -2$ ;

3)  $2x - 3 = x - 5$  і  $4x^2 - 9 = (x - 5)(2x + 3)$ ;

4)  $(x^2 + 1)(x + 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$  і  $x + 3 = 2x - 3$ ?

Рашыце ўраўненне (122—132).

122. 1)  $x^2 = 256$ ; 2)  $x^2 = 0,64$ ; 3)  $x^2 = 1,21$ ;  
4)  $x^2 = \frac{25}{81}$ ; 5)  $25x^2 = 121$ ; 6)  $64x^2 = 225$ .

123. 1)  $3x^2 + 11x + 6 = 0$ ; 2)  $4x^2 + x - 3 = 0$ ;  
3)  $6x^2 - 7x - 3 = 0$ ; 4)  $3x^2 - 36x + 105 = 0$ ;  
5)  $2x^2 - 42 = 0$ ; 6)  $\frac{x^2}{3} - 0,5 = 0$ .

124. 1)  $x^2 - 6x - 7 = 0$ ; 2)  $x^2 + 6x - 40 = 0$ ;  
3)  $x^2 + 4x - 5 = 0$ ; 4)  $x^2 - 8x - 9 = 0$ .

125. 1)  $x^2 - x - 12 = 0$ ; 2)  $x^2 + 7x + 3 = 0$ ;  
3)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ; 4)  $x^2 + 2x - 4 = 0$ ;  
5)  $21x^2 + 22x - 8 = 0$ ; 6)  $15x^2 + 34x + 15 = 0$ .

126. 1)  $(x + 3)(x - 7) + (x + 5)(x - 1) = 72$ ;  
2)  $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$ ;



$$3) 25(x-2)^2 - (x-10)^2 = (5x+1)(5x-1) + 1;$$

$$4) (2x+7)(7-2x) - x(x+2) = 49.$$

$$127. 1) \frac{6x^2+7}{7} - 3 = \frac{5x^2-3}{8};$$

$$2) \frac{x^2-4}{5} = 9 - \frac{2x^2-41}{9};$$

$$3) \frac{4y^2-3}{2} - \frac{3y^2-4}{6} - \frac{5-2y^2}{12} = 5;$$

$$4) \frac{9y^2-5}{2} - \frac{3+2y^2}{3} - \frac{8y^2-2}{4} = 2.$$

$$128. 1) 12x^2 + 5x - 2 = 0;$$

$$3) 3x^2 - 10x + 3 = 0;$$

$$5) -16x^2 + 16x - 4 = 0;$$

$$2) 7x^2 - 19x - 6 = 0;$$

$$4) 5x^2 - 9x - 2 = 0;$$

$$6) -4x^2 - 20x - 25 = 0.$$

$$129. 1) x^2 + 12x + 20 = 0;$$

$$3) x^2 + 12x + 36 = 0;$$

$$5) x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$7) (x+5)^2 - 4 = 0;$$

$$9) (2x-1)^2 - 18 = 0;$$

$$2) x^2 - 8x + 15 = 0;$$

$$4) x^2 - x + \frac{1}{4} = 0;$$

$$6) x^2 + x - 6 = 0;$$

$$8) (x-2)^2 - 25 = 0;$$

$$10) (3x+4)^2 - 50 = 0.$$

$$130. 1) 6x(2x+1) = 5x+1;$$

$$3) x^2 + 2x - 8 = 2x(x-2);$$

$$2) 8x(1+2x) = -1;$$

$$4) 3x-1 = 9x(x+1).$$

$$131. 1) (x+2)^2 = 3131 - 2x;$$

$$3) y^2 + 4\sqrt{2}y - 10 = 0;$$

$$5) 4y^2 - 3y - 2\sqrt{3} = 0;$$

$$7) 5y^2 - 2y + 2\sqrt{3} - 15 = 0;$$

$$8) 4y^2 + 4y - 4\sqrt{3} - 12 = 0.$$

$$2) (x+1)^2 = 7918 - 2x;$$

$$4) 2y^2 - \sqrt{5}y + 1 = 0;$$

$$6) 9y^2 - 2\sqrt{6}y - 2\sqrt{5} = 0;$$

$$132. 1) x(x+1) + 3(x+1) = 2x^2(x+1);$$

$$2) 4x^2(8x-2) - x(8x-2) + 8x-2 = 0.$$

133. Вылучыце поўны квадрат:

$$1) x^2 - 2x - 8;$$

$$3) x^2 + 4x - 12;$$

$$5) x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{5}{2};$$

$$2) x^2 + 8x + 7;$$

$$4) x^2 + 2x - 15;$$

$$6) x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}.$$

134. Дакажыце няроўнасць, выкарыстаўшы вылучэнне з трохчлена квадрата двухчлена:

1)  $a^2 + 2a + 2 > 0$ ;

2)  $a^2 - 6a + 10 > 0$ ;

3)  $a^2 > 2a - 5$ ;

4)  $9a^2 + 14 > 6a$ .

135. Дакажыце, што пры любым значэнні  $x$  трохчлен прымае дадатныя значэнні:

1)  $3x^2 + 5x + 9$ ;

2)  $16x^2 - 24x + 25$ .

136. Дакажыце, што пры любым значэнні  $x$  трохчлен прымае адмоўныя значэнні:

1)  $-3x^2 + 3x - 11$ ;

2)  $-2x^2 + 5x - 7$ .

137\*. Пры якім значэнні  $x$  трохчлен прымае найбольшае значэнне:

1)  $-7x^2 + 6x - 2$ ;

2)  $-2x^2 - x - 0,125$ ?

138\*. Пры якім значэнні  $x$  трохчлен прымае найменшае значэнне:

1)  $x^2 + 6x + 15$ ;

2)  $x^2 - 2x - 8$ ?

139. Пры якіх значэннях  $t$  ураўненне мае адзіны карань:

1)  $tx^2 + 4x + 1 = 0$ ;

2)  $x^2 + tx + 9 = 0$ ;

3)  $x^2 + 2(t - 4)x + t^2 + 6t + 3 = 0$ ;

4)  $(5t + 3)x^2 + 2(5t - 3)x + 5t - 4 = 0$ ?

Рашыце ўраўненне адносна  $x$  (140—144).

140\*. 1)  $k^2x^2 + p^2 = 0$ ;

2)  $k^2x^2 - p^2 = 0$ ;

3)  $c^2x^2 + \frac{c^2}{k^2} = 0$ ;

4)  $c^4x^2 + \frac{c^8}{t^4} = 0$ .

141. 1)  $x^4 - 36b^4 - 24b^2 - 4 = 0$ ;

2)  $x^4 - 121n^4 - 25 + 110n^2 = 0$  ( $n > 1$ ).

142. 1)  $\frac{5+2m}{5-2m} \cdot x^2 - 4m^2 = -25$ ;

2)  $\frac{3n+4}{4-3n} \cdot x^2 + 16 = 9n^2$ .

143\*. 1)  $3x^2 + 2bx - b^2 = 0$ ;

2)  $6x^2 + bx - b^2 = 0$ .

144\*. 1)  $x^2 + 10kx + 9k^2 = 0$ ;

2)  $x^2 - 6kx + 8k^2 = 0$ ;

3)  $x^2 + 3kx - 40k^2 = 0$ ;

4)  $x^2 - 13kx + 12k^2 = 0$ ;

- 5)  $x^2 - 10kx - 24k^2 = 0$ ;      6)  $x^2 + 5kx - 6k^2 = 0$ ;  
7)  $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$ ;      8)  $x^2 - (k+1)x + k = 0$ .

145. Састаўце прыведзенае квадратнае ўраўненне па яго каранях:

- 1)  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ ;  
2)  $x_1 = 5 + \sqrt{7}$ ,  $x_2 = 5 - \sqrt{7}$ ;  
3)  $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ ,  $x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ;  
4)  $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ,  $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

146. Запішыце карані квадратнага ўраўнення, выкарыстаўшы тэарэму, адваротную тэарэме Віета:

- 1)  $x^2 + x - 56 = 0$ ;      2)  $x^2 + 11x - 12 = 0$ ;  
3)  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ;      4)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;  
5)  $x^2 + 3234x - 3235 = 0$ ;      6)  $x^2 + 7006x - 7007 = 0$ ;  
7)  $x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0$ ;      8)  $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 42 = 0$ ;  
9)  $x^2 - (\sqrt{9x})^2 - 10 = 0$ ;      10)  $x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 6 = 0$ .

147. Праверце, ці з'яўляюцца лікі  $x_1$  і  $x_2$  каранямі ўраўнення:

- 1)  $9x^2 - 20 = 24x$ ,  $x_1 = 3\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{2}{3}$ ;  
2)  $9x^2 - 5 = 12x$ ,  $x_1 = 1\frac{2}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ;  
3)  $4x^2 - 4x = 15$ ,  $x_1 = 2,5$ ,  $x_2 = -1,5$ ;  
4)  $4x^2 - 3 = 4x$ ,  $x_1 = 1,5$ ,  $x_2 = -0,5$ .

148. Раскладзіце трохчлен на множнікі:

- 1)  $5x^2 + 17x - 126$ ;      2)  $3x^2 - 7x - 40$ ;  
3)  $6x^2 + 5x - 6$ ;      4)  $21x^2 + 22x - 8$ ;  
5)  $x^2 - \sqrt{2}x - 1$ ;      6)  $x^2 + \sqrt{2}x - 8$ .

149. Скараціце дроб:

- 1)  $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 5x - 14}$ ;      2)  $\frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 2x - 35}$ ;      3)  $\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x - 3}$ ;  
4)  $\frac{-x^2 + x + 2}{3x^2 + x - 2}$ ;      5)  $\frac{5x + 5}{3x^2 + 2x - 1}$ ;      6)  $\frac{12 - 7a + a^2}{4a - 16}$ ;  
7)  $\frac{49 - t^2}{t^2 - 5t - 14}$ ;      8)  $\frac{m^2 - 9m - 10}{m^2 - 100}$ .

150. Выканайце дзеянні:

- 1)  $\frac{a+2}{a+1} + \frac{9a^2-4}{5a^2+a-4} : \frac{3a-2}{5a-4};$
- 2)  $\frac{16a^2-9}{3a^2+a-2} : \frac{4a+3}{3a-2} - \frac{a-6}{a+1};$
- 3)  $\left( \frac{4,8}{1+a} + \frac{3}{a-4} + \frac{3a}{a^2-3a-4} \right) : \frac{2a-3}{a^2-4a};$
- 4)  $\left( \frac{3}{a+1} + \frac{2}{a-5} + \frac{6-a}{a^2-4a-5} \right) : \frac{4a-7}{2a^2-10a}.$

Рашыце ўраўненне (151—154).

151. 1)  $\frac{4x^3-9x}{x-1,5} = 0;$       2)  $\frac{4x^3-44x^2+21x}{x-6} = 0;$   
 3)  $\frac{x^3-2x}{x^2-8} = 0;$       4)  $\frac{3x^2+x^3}{x^2-4} = 0.$

152. 1)  $\sqrt{x-4}(x^2-5x+6) = 0;$       2)  $\sqrt{x-2}(x^2-5x-6) = 0;$   
 3)  $\sqrt{3-x}(x^2-6x+8) = 0;$       4)  $\sqrt{1-x}(x^2+3x-10) = 0.$

153. 1)  $27x^4 + 6x^2 - 5 = 0;$       2)  $2x^4 + x^2 - 1 = 0;$   
 3)  $2x^4 - 7x^2 - 1 = 0;$       4)  $4x^4 + 7x^2 - 1 = 0;$   
 5)  $121x^4 - 144 = 0;$       6)  $225x^4 - 256 = 0;$   
 7)  $0,01x^4 - 3,24 = 0;$       8)  $-2x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$

154. 1)  $x^4 - 9x^2 = 0;$       2)  $25x^2 - x^4 = 0;$   
 3)  $0,04x^2 + 0,25x^4 = 0;$       4)  $1,96x^4 + 0,09x^2 = 0;$   
 5)  $5x^4 + x^2 = 4;$       6)  $3x^4 = x^2 + 2;$   
 7)  $12x^4 = 6 - x^2;$       8)  $6x^4 = 15 + x^2.$

155. Раскладзіце мнагачлен на множнікі:

- 1)  $x^4 - 29x^2 + 100;$       2)  $x^4 - 89x^2 + 1600;$
- 3)  $4x^4 - 5x^2 + 1;$       4)  $3x^4 - 28x^2 + 9.$

Рашыце ўраўненне (156—166).

156. 1)  $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9) = 4x^2-75;$   
 2)  $(2x-1)(1+2x)(4x^2+1) = x^2+1.$

157. 1)  $2x^2 - 5|x| + 2 = 0$ ;                      2)  $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ ;  
3)  $x^2 + \frac{1}{6}|x| - \frac{7}{6} = 0$ ;                      4)  $x^2 - \frac{1}{7}|x| - 1\frac{1}{7} = 0$ .
158. 1)  $x^2 - 2x + 1 + |x - 1| = 12$ ;  
2)  $x^2 + 4x + 4 + |x + 2| = 20$ ;  
3)  $2(x^2 - 3x + 2,25) - 3|x - 1,5| = 20$ ;  
4)  $3(x^2 + 7x + 12,25) + 4|x + 3,5| = 20$ ;  
5)  $x^2 - 6x + 5|x - 3| = 5$ ;  
6)  $x^2 + 8x - 3|x + 4| = -12$ .
159. 1)  $x|x| - 4x - 12 = 0$ ;                      2)  $x|x| + 7x + 6 = 0$ ;  
3)  $x|x| - 7\sqrt{x^2} - 30 = 0$ ;                      4)  $x|x| + 4\sqrt{x^2} - 5 = 0$ .
160. 1)  $(x^2 - 2x)^2 - 14(x^2 - 2x) - 15 = 0$ ;  
2)  $(6x^2 + 7x)^2 - 2(6x^2 + 7x) - 3 = 0$ ;  
3)  $(4x^2 + 12)^4 - 11(4x^2 + 12)^2 + 28 = 0$ ;  
4)  $(x^2 - 4x)^4 + 9(x^2 - 4x)^2 + 20 = 0$ .
161. 1)  $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$ ;  
2)  $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$ ;  
3)  $21x^2 - (x^2 - 4x)^2 = 4x(x^2 - 4x)$ ;  
4)  $(x^2 + x - 5)^2 + 3x^2 + 4x(x^2 + x - 5) = 0$ .
162. 1)  $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 2) = 8$ ;  
2)  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) = 15$ .
163. 1)  $(x^2 - 2x)^2 + 5(4x - 3)(x^2 - 2x) + 4(4x - 3)^2 = 0$ ;  
2)  $(x^2 + 4x)^2 + 6(2 - 7x)^2 + 7(2 - 7x)(x^2 + 4x) = 0$ ;  
3)  $35 + x = 12\sqrt{x}$ ;  
4)  $x + 4\sqrt{x} = 21$ ;  
5)  $x + 5 - 13\sqrt{x + 5} + 42 = 0$ ;  
6)  $2x - 1 - 4\sqrt{2x - 1} - 21 = 0$ .
164. 1)  $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 18$ ;  
2)  $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 7} + 11 = 0$ .

165. 1)  $x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 14x^2 + 10x + 20 = 0$ ;  
2)  $x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 15x^2 - 18x - 90 = 0$ .
166. 1)  $\frac{x^3}{|x|} - 8x - 20 = 0$ ;      2)  $\frac{x^5}{|x^3|} + 2x - 3 = 0$ .
167. Як з графіка функції  $y = 5x^2$  можна атрымаць графік функцыі:  
1)  $y = 5x^2 + 10x + 5$ ;      2)  $y = 5x^2 - 40x + 80$ ?
168. Запішыце ўраўненне парабалы, атрыманай з парабалы  $y = 2,3x^2$  зрухам уздоўж восі  $Ox$  на:  
1) 3 адзінкі ўправа;      2) 7 адзінак улева;  
3) 1,5 адзінкі ўлева;      4) 0,4 адзінкі ўправа.
169. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый:  
1)  $y = (3 - 2x)^2$  і  $y = 1$ ;      2)  $y = (6x - 4)^2$  і  $y = 16$ .
170. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:  
1)  $y = 4\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ ;      2)  $y = -0,1(0,75 - x)^2$ .
171. Запішыце ўраўненне восі сіметрыі парабалы:  
1)  $y = (x - p)^2$ ;      2)  $y = (x + p)^2$ ;  
3)  $y = -x^2 - p$ ;      4)  $y = -(x - p)^2$ .
172. Якімі пераўтварэннямі (зрухамі) з парабалы  $y = x^2$  можна атрымаць парабалу:  
1)  $y = 8 + (x - 9)^2$ ;      2)  $y = -6 + (x + 8)^2$ ?
173. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:  
1)  $y = -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 6$ ;      2)  $y = \frac{1}{5}(x - 6)^2 - 3$ ;  
3)  $y = k(x - p)^2 + t$ ;      4)  $y = m(x + n)^2 + p$ .
174. Пакажыце відарыс парабалы:  
1)  $y = (x - 2)^2 + 3$ ;      2)  $y = (x + 4)^2 - 1$ .
175. Ці мае графік функцыі  $y = 0,8(x - 6)^2 + 5$  агульныя пункты з прамой:  
1)  $y = 5$ ;      2)  $y = 6$ ?

- 1)  $y = x^2 - 6x + 8$ ;                      2)  $y = x^2 + 4x - 1$ ;  
3)  $y = -3x^2 + 6x - 3$ ;                      4)  $y = 4x^2 + 4x - 8$ .

183. Дакажыце, што дадзеная парабола не перасякаецца з воссю  $Ox$ :

1)  $y = 2x^2 - 3x + 10$ ;

2)  $y = 4x^2 + 9x + 15$ ;

3)  $y = -x^2 + 4x - 5$ ;

4)  $y = -2x^2 - 3x - 4$ .

184\*. Якому каардынатнаму вуглу (каардынатнай чвэрці) належыць вяршыня парабалы  $y = mx^2 + px + k$ , калі:

1)  $m > 0, p > 0, k < 0$ ;

2)  $m > 0, p < 0, k < 0$ ?

185\*. Вывзначыце знакі лікаў  $a, b, c$ , калі галіны парабалы  $y = ax^2 + bx + c$  накіраваныя ўверх, а вяршыня гэтай парабалы належыць:

1) II каардынатнаму вуглу (чвэрці);

2) I каардынатнаму вуглу (чвэрці);

3) IV каардынатнаму вуглу (чвэрці);

4) III каардынатнаму вуглу (чвэрці).



## Даведачныя матэрыялы

### Асноўныя ўласцівасці складання і множання

- *Перамяшчальны закон:*

$$a + b = b + a; \quad ab = ba.$$

- *Спалучальны закон:*

$$(a + b) + c = a + (b + c); \quad (ab)c = a(bc).$$

- *Размеркавальны закон:*

$$(a + b)c = ac + bc.$$

- Існуюць лікі 0 (нуль) і 1 (адзінка) такія, што для любога ліку  $a$  будуць правільнымі роўнасці:

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a.$$

- Для любога ліку  $a$  існуе процілеглы яму лік  $-a$  такі, што  $a + (-a) = 0$ .

- Для любога ліку  $a \neq 0$  існуе адваротны яму лік  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  такі, што  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

### Азначэнне модуля ліку

$$|a| = -a \text{ пры } a < 0 \text{ і } |a| = a \text{ пры } a \geq 0.$$

### Азначэнне і ўласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі

**Азначэнне.** Пры  $a \neq 0$ ,  $n$  — натуральным:

- $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разоў}} \quad (n > 1)$

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \geq 1)$

**Уласцівасці.** Пры  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  і цэлых  $l$ ,  $m$ :

- $a^l a^m = a^{l+m}$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $a^l : a^m = a^{l-m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^l)^m = a^{lm}$

### Формулы скарачанага множання

- Квадрат сумы:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .
- Квадрат рознасці:  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ .
- Рознасць квадратаў:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

- Куб сумы:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ;  
 $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ .
- Куб рознасці:  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ;  
 $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ .
- Сума кубоў:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .
- Рознасць кубоў:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

#### Вынікі з формул скарачанага множання

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

#### Уласцівасці рацыянальных дробаў

- $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$
- $\frac{A \cdot K}{B \cdot K} = \frac{A}{B}$
- $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$

#### Прыбліжаныя значэнні некаторых квадратных каранёў (з дакладнасцю да $10^{-7}$ з недахопам)

|                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| $\sqrt{2} \approx 1,4142135$  | $\sqrt{11} \approx 3,3166247$ |
| $\sqrt{3} \approx 1,7320508$  | $\sqrt{13} \approx 3,6055512$ |
| $\sqrt{5} \approx 2,2360679$  | $\sqrt{14} \approx 3,7416573$ |
| $\sqrt{6} \approx 2,4494897$  | $\sqrt{15} \approx 3,8729833$ |
| $\sqrt{7} \approx 2,6457513$  | $\sqrt{17} \approx 4,1231056$ |
| $\sqrt{10} \approx 3,1622776$ | $\sqrt{19} \approx 4,3588989$ |

#### Прыклады прыбліжаных вылічэнняў

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1,414214 = 2,828428$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \approx 2 \cdot 2,2361 = 4,4722$$

## АДКАЗЫ

### Раздел 1

- 1.1. 1)  $-7,1$ ;  $-3,6$ ;  $-2,8$ ;  $1\frac{2}{9}$ ;  $2\frac{1}{4}$ ;  $2,26$ .
- 1.2. 2)  $-25(-6) : (-15)$ ,  $-5(-0,8) : 4$ ,  $-8(-4) : 16$ .
- 1.3. 1) Больш; 3) менш.
- 1.4. 2) Менш; 4) менш; 6) менш.
- 1.5. 1) Больш; 3) больш; 5) менш.
- 1.6. 2) Менш; 4) больш.
- 1.7. 1) Больш; 3) больш; 5) больш.
- 1.8. 2) Менш; 4) менш; 6) менш.
- 1.9. 1) Менш; 3) больш; 5) менш.
- 1.10. 2) Больш; 4) больш; 6) менш.
- 1.12. Напрыклад, 2)  $0,8$ ;  $2$ ;  $10$ ; 4)  $1$ ;  $2$ ;  $3$ ; 6)  $-10$ ;  $-20$ ;  $-30$ .
- 1.13. 1) Правільна.
- 1.14. 2) Правільна.
- 1.15. 1)  $a > b$ ; 3)  $a = b$ .
- 1.16. 2)  $c > 0$ ; 4)  $c > 0$ ; 6)  $c < 0$ .
- 1.17. 1) Правільна; 3) няправільна; 5) правільна.
- 1.18. 2) Няправільна; 4) правільна; 6) правільна.
- 1.19. 1) Можа; 3) можа.
- 1.20. 2) Можа; 4) можа.
- 1.21. 1) Няправільна; 3) правільна.
- 1.22. 2)  $A < B$ ; 4)  $A < B$ .
- 1.23. 1)  $C < D$ ; 3)  $C < D$ .
- 1.24. Напрыклад, 2)  $A(7)$ ,  $B(6)$ ,  $C(10)$ ; 4)  $M(-10)$ ,  $N(-20)$ ,  $P(-4)$ .
- 1.26. 2)  $n > -1$ ; 4)  $n \neq -6$ ; 6)  $n < 12$ .
- 1.28. 2) Правільна; 4) правільна.
- 1.29. 1) Правей; 3) лявей; 5) правей; 7) правей.
- 1.30. 2)  $K$ ; 4)  $E$ .
- 1.31. 1)  $A$ ; 3)  $A$ .
- 1.32. 2)  $d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; 4)  $b$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $d$ .
- 1.33. 1) Больш; 3) менш; 5) больш; 7) больш.
- 1.34. 2) Няправільная; 4) няправільная; 6) няправільная.
- 1.35. 1) Правільная; 3) правільная.
- 1.36. 2) Няправільна; 4) няправільна; 6) няправільна.
- 1.37. 1) Няправільна; 3) правільна; 5) правільна; 7) правільна.
- 1.39. Напрыклад, 1)  $x = 2$ ,  $y = 1$ ;  $x = 21$ ,  $y = 1$ ; 3)  $x = 2$ ,  $y = 3$ ;  $x = 18$ ,  $y = 81$ ;  
5)  $x = 1$ ,  $y = 1$ ;  $x = 9$ ,  $y = 9$ .
- 1.40. 2) Правільна; 4) не заўсёды.
- 1.41. 1) Правільна; 3) правільна.
- 1.42. 2) Няправільная; 4) правільная.
- 1.43. 1) Няправільна.
- 1.44. 2) Менш; 4) менш.
- 1.45. 1)  $A > B$ .
- 1.47. 1)  $-5,1 < 7,9$ ; 3)  $-16,2 < -3,2$ .
- 1.48. 2)  $-b - 1 < -b + 15$ ; 4)  $4n - 6 < 4n + 10$ .
- 1.49. 1)  $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ ; 3)  $-1\frac{11}{12} > -2\frac{1}{12}$ .

- 1.50. 2)  $-6,9 > -20,9$ ; 4)  $5,5 > -8,5$ .  
1.51. 1)  $-k - 21 < -k - 15$ ; 3)  $7m - 4 < 7m + 2$ .  
1.52. 2)  $\frac{15}{28} < \frac{7}{8}$ ; 4)  $-1\frac{32}{35} < -1\frac{23}{40}$ .  
1.53. 1)  $-3a + 3 > 0$ ; 3)  $100 + 3k - 2k^2 < 0$ .  
1.54. Напрыклад, 2)  $14n > -15$ ; 4)  $5a > 7$ ; 6)  $k^3 > -1$ .  
1.55. 1)  $(a + b)^2 < a^2 + b^2 + 13$ ; 3)  $(a + b)^2 > a^2 + 5ab - 4$ ;  
5)  $(a + b)^2 < -4a^2 + 2ab + 1$ .  
1.56. 2)  $(m - n)^2 < 8mn + n^2 + 3$ ; 4)  $(m - n)^2 > 8 - 2mn$ ;  
6)  $(m - n)^2 < m^2 - 10mn + 10$ .  
1.58. 2) Няправільная.  
1.59. 1) Не заўсёды; 3) не заўсёды.  
1.60. 2) Менш.  
1.61. 1) Правільна.  
1.62. 2) Няправільна.  
1.63. 1) Правільна.  
1.64. 2)  $4 > -7$ ;  $2\frac{2}{3} > -4\frac{2}{3}$ ;  $3,5 > -2$ ;  $14 > -8$ ; 4)  $-\frac{1}{2} < 1\frac{1}{6}$ ;  $-\frac{1}{3} < \frac{7}{9}$ ;  $-\frac{7}{18} < \frac{1}{6}$ ;  
 $-2\frac{1}{3} < 1$ .  
1.65. 1)  $87 > -12$ ; 3)  $-5,1 < 14,4$ ; 5)  $3p < 3,75k$ .  
1.66. 2)  $0,3 > -0,2$ ; 4)  $0,8 > 0,7$ ; 6)  $-\frac{n}{5} < \frac{5a}{6}$ .  
1.67. 1)  $-p > -1$ ; 3)  $p < -2$ .  
1.68. 2)  $a - b > 2a + 2b$ ; 4)  $(a - b)^2 < a^2 + ab + b^2$ .  
1.69. 1)  $a < 5b$ ; 3)  $(a - b)(a + b)^2 < a - b$ .  
1.70. 2) Правільна; 4) няправільна; 6) правільна.  
1.71. 1) Няправільна; 3) правільна; 5) няправільна.  
1.72. 2) Няправільна; 4) правільна.  
1.73. 1) Правільная; 3) правільная; 5) правільная.  
1.74. 2) Менш; 4) менш; 6) больш; 8) менш.  
1.75. 1) Менш; 3) менш; 5) менш.  
1.76. 2)  $\frac{1}{k}$ ;  $\frac{1}{m}$ ;  $\frac{1}{n}$ ;  $\frac{1}{p}$ .  
1.77. 1) Правільна; 3) правільна; 5) няправільна; 7) правільна.  
1.79. 1)  $15 < 19$ ; 3)  $2\frac{1}{6} < 5\frac{1}{5}$ .  
1.80. 2)  $21 < 63$ ; 4)  $6\frac{2}{3} > 1\frac{1}{5}$ .  
1.81. 1)  $8 > 0$ ; 3)  $1 < 15$ ; 5)  $\frac{1}{3} > 0$ ; 7)  $-\frac{1}{8} < \frac{11}{12}$ .  
1.82. 2)  $77 < 117$ ; 4)  $58\frac{1}{2} > 33\frac{1}{3}$ ; 6)  $\frac{1}{36} < \frac{2}{5}$ ; 8)  $0,014 > 0,0006$ .  
1.83. 1)  $20 < 150$ ; 3)  $8\frac{1}{36} > 6\frac{1}{100}$ ; 5)  $12 < 80$ ; 7)  $16\frac{1}{8} > 6\frac{1}{36}$ .  
1.84. 2)  $\frac{1}{16} < \frac{1}{3}$ ; 4)  $\frac{1}{54} < \frac{9}{64}$ ; 6)  $1728 > 100$ ; 8)  $1 > \frac{1}{7}$ .

- 1.85. 1) Правільна; 3) не заўсёды.
- 1.86. 2)  $2p < p + 7$ ; 4)  $4a^2 + 2a - 3 > 4b^2 + 5$ .
- 1.87. 1)  $6k + 24 > k^2$ ; 3)  $y^4 - 3y^2 > 5x^2 + 5x$ .
- 1.88. 2)  $4ay - 7ax^2 > 80xy^2 - 25x^2y^3$ .
- 1.89. 1)  $(a + b)^2 > 5a$ ; 3)  $x^2 - y^2 > y^2 + 5$ ; 5)  $a^2 + 2a < b^2 + b$ .
- 1.90. 2)  $60ab^2(a - 2b) > -\frac{4a^2}{2a + 3b}$ .
- 1.96. 2)  $t \geq 0$  °C; 4)  $n \geq 50$ ; 6)  $n \leq 6$ .
- 1.97. 1)  $n \leq -1$ ; 3)  $n > 0$ ; 5)  $n > -3$ .
- 1.99. 1)  $a \leq b$ ; 3)  $a + b \leq 2$ ; 5)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .
- 1.100. 2) Няправільная; 4) правільная; 6) правільная; 8) правільная.
- 1.101. 1)  $5 \geq 2$ ; 3)  $k - 8 \leq p + 2$ ; 5)  $m + \frac{1}{3} \leq 2m + \frac{1}{9}$ .
- 1.102. 2)  $6 \leq 24$ ; 4)  $\frac{k}{3} \leq 2,1p$ ; 6)  $5n^2 \geq 4n + 28$ .
- 1.103. 1)  $-5a + 5 < 6 - 4n$ ; 3)  $x^2 + 2x > 2y + 4$ ; 5)  $a + 4b < 8$ .
- 1.104. 2) Правільна; 4) няправільна; 6) правільна.
- 1.105. 1) Правільна; 3) няправільна; 5) правільна.
- 1.106. 2)  $19c - 1 \geq 0$ ; 4)  $-a^2 + a > 0$ ; 6)  $-24p^2 - 4p \geq 0$ .
- 1.107. 1)  $0 \leq 4 - 4c$ ; 3)  $0 \leq 7c - 23$ ; 5)  $0 \geq -83$ .
- 1.108. 2) Няправільна; 4) правільна; 6) не заўсёды.
- 1.112. 2) Немагчыма; 4)  $[0; 6)$ , або  $0 \leq a < 6$ ; 6) немагчыма.
- 1.113. 1) а)  $-1 \leq a \leq 5$ ; 6)  $\begin{cases} a \geq -1, \\ a \leq 5; \end{cases}$  3) а)  $-3 < a \leq 7$ ; 6)  $\begin{cases} a > -3, \\ a \leq 7; \end{cases}$
- 5) а)  $0 < a < 4$ ; 6)  $\begin{cases} a > 0, \\ a < 4; \end{cases}$  7) а)  $-100 \leq a < 100$ ; 6)  $\begin{cases} a \geq -100, \\ a < 100; \end{cases}$
- 9) а)  $5 \leq a \leq 16$ ; 6)  $\begin{cases} a \geq 5, \\ a \leq 16. \end{cases}$
- 1.114. 2)  $\begin{cases} m \geq 13, \\ m \leq 118; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} t > -5, \\ t \leq 12; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} p \geq -20, \\ p < 0. \end{cases}$
- 1.115. 1)  $5 < a < 7$ ; 3)  $-4 \leq p < 0$ .
- 1.116. 2)  $\frac{1}{4} < \frac{t}{4} < 1\frac{3}{4}$ ; 4)  $-1 < -\frac{t}{7} < -\frac{1}{7}$ ; 6)  $-2 < t - 3 < 4$ ; 8)  $-10 < 4 - 2t < 2$ .
- 1.117. 1)  $2 \leq t - 10 \leq 10$ ; 3)  $-1 \leq 2t - 25 \leq 15$ ; 5)  $9 \leq \frac{t}{4} + 6 \leq 11$ ;  
7)  $3 \leq 8 - \frac{t}{4} \leq 5$ .
- 1.118. 2)  $21 < 7a \leq 35$ ; 4)  $-15 \leq -3a < -9$ ; 6)  $-2 < a - 5 \leq 0$ ; 8)  $-5 \leq 10 - 3a < 1$ ;  
10)  $\frac{3}{5} < \frac{a}{5} \leq 1$ ; 12)  $1\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a} + 1 < 1\frac{1}{3}$ .
- 1.119. 1)  $-6 \leq -k \leq -2$ ; 3)  $-12 < -4p < -4$ ; 5)  $-1 < k - p < 5$ ; 7)  $-2 < 5k - 4p < 26$ ;  
9)  $\frac{1}{3} < \frac{1}{p} < 1$ ; 11)  $\frac{2}{3} < \frac{k}{p} < 6$ .

- 1.120. 2)  $2\frac{1}{12} < y + \frac{1}{x} < 4\frac{1}{4}$ ; 4)  $4\frac{1}{6} < x + \frac{y}{x} < 13$ ; 6)  $-\frac{7}{2} \leq -\frac{7}{y} \leq -\frac{7}{4}$ ;  
 8)  $-7\frac{11}{12} < \frac{1}{x} - 2y < -3\frac{3}{4}$ ; 10)  $6\frac{3}{4} < 4y - \frac{5}{x} < 15\frac{7}{12}$ ;  
 12)  $-14 < -x - \frac{2y}{x} < -4\frac{1}{3}$ .
- 1.121. 1)  $12,8 \leq P \leq 13,2$ ;  $10,24 \leq S \leq 10,89$ .  
 1.122. 2)  $6 < c < 18$ ;  $12 < p < 18$ .  
 1.123. 1)  $b > 4$ .  
 1.124. Ад 1350 да 1950.  
 1.125. Наклеек ад 226 да 286, марак ад 74 да 134.  
 1.131. 1) Правільная; 3) правільная; 5) няправільная.  
 1.132. 2) Правільная; 4) няправільная; 6) няправільная.

## Раздзел 2

- 2.1. 1) Можна; 3) нельга; 5) нельга; 7) можна.  
 2.2. 2) 0,5(6); 4) 1,70(45); 6) 22,1(6); 8) 5,541(6).  
 2.3. 1) Няправільная; 3) правільная; 5) няправільная.  
 2.4. 2) 0,(571428); 4) 0,93(18); 6) 4,61(6); 8) 23,(407).  
 2.5. Напрыклад, 1) 1; 2; 3; 3) 3; 5; 7; 5) 2; 4; 6; 7) 5; 10; 15; 9) 1; 2; 2,5; 11) 6; 12; 18.  
 2.6. 2)  $\frac{119}{15}$ ; 4)  $\frac{18}{25}$ ; 6)  $-\frac{71}{12}$ ; 8)  $-\frac{21}{25}$ .  
 2.8. 2) а) з'яўляецца; б) з'яўляецца; в) з'яўляецца; г) не заўсёды.  
 2.9. 1) Не заўсёды; 3) не заўсёды.  
 2.10. 2) Правільна; 4) правільна; 6) правільна.  
 2.11. 1) Правільна; 3) правільна; 5) правільна.  
 2.12. 2), 4), 6) а) Напрыклад, паўтараць далей апошнюю лічбу; б) напрыклад, далей пісаць па парадку ўсе натуральныя лікі.  
 2.13. 1) Больш; 3) менш; 5) больш; 7) менш; 9) больш; 11) менш.  
 2.14. 2) а) 8,232323...; б) 8,232323...; 4) а) 3,(702); б) -3,(702).  
 2.15. 1) Правільна; 3) няправільна.  
 2.16. 2) М; 4) М; 6) аднолькава.  
 2.17. 1) Больш; 3) менш.  
 2.19. 1)  $m \leq -4,1$  або  $m \geq 8,6$ ; 3)  $-12 \leq m \leq -9$  або  $-7 < m \leq 0$  або  $m \geq 3$ ;  
 5)  $m < -7$  або  $-7 < m < 7$ ; 7)  $-5 \leq m \leq 5$ .  
 2.20. 2) 9,97975; 9,97976; 4) 103,67757; 103,67758.  
 2.21. 1) -29,568; -29,567; 3) -0,411; -0,410.  
 2.23. 1)  $\begin{cases} m \geq -1, \\ m \leq 2; \end{cases}$  [-1; 2]; 3)  $\begin{cases} m > -4, \\ m < 1; \end{cases}$  (-4; 1); 5)  $m > 2$ ; (2; +∞);  
 7)  $m \leq 0$ ,  $3 < m \leq 7$ ;  $(-\infty; 0] \cup (3; 7]$ .  
 2.25. 1)  $(-\infty; 0] \cup (6; +\infty)$ ; 3)  $[4; +\infty)$ ; 5)  $(-5; 2]$ ; 7)  $[0; 4]$ ; 9)  $(-8; 0] \cup [1; 4)$ .  
 2.26. 2) [6; 8]; 4) [-4; 4]; 6) (0; 6); 8) такіх лікаў няма.  
 2.27. 1)  $-2\frac{1}{9} \in (-3; 2\frac{1}{3})$ ;  $-2 \in (-3; 2\frac{1}{3})$ ;  $-1 \in (-3; 2\frac{1}{3})$ ;  $0 \in (-3; 2\frac{1}{3})$ ;  
 3)  $-7 \in (-\infty; 6,8]$ ;  $-4,1 \in (-\infty; 6,8]$ ;  $-3 \in (-\infty; 6,8]$ ;  $-2\frac{1}{9} \in (-\infty; 6,8]$ ;

$$-2 \in (-\infty; 6,8]; -1 \in (-\infty; 6,8]; 0 \in (-\infty; 6,8]; 2\frac{1}{3} \in (-\infty; 6,8];$$

$$5 \in (-\infty; 6,8]; 6,8 \in (-\infty; 6,8].$$

2.28. 2) -6; -3,9; 5; 6,9; 8,3; 4) -6; 8,3.

2.29. Напрыклад, 1) а) 1; 2; 3; -1,1; -1,2; -1,3; б) 7; 8; 9; -7; -8; -9;

$$3) \text{ а) } \frac{1}{9}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; -0,7; -0,8; -0,9; \text{ б) } 1; 2; 3; -2; -3; -4; \text{ 5) а) } 0,1; 0,2; 0,3;$$

$$-3; -2; -1; \text{ б) } 1; 2; 3; \text{ такіх адмоўных лікаў няма; 7) а) } 0,001; 0,002; 0,003; -3; -2; -1; \text{ б) } 1; 2; 3; -7; -6; -5.$$

2.30. 2) 7; 8; 4) 0.

2.31. 1) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 3) -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2.

2.32. 2) 15; 4) 5; 6) 2; 8) няма такога ліку.

2.33. 1) -3; 3) -2; 5) 8; 7) няма такога ліку.

2.34. 2) Напрыклад, 7,991; 7,992; 7,993; 4) нельга; 6) нельга.

### Раздзел 3

3.1. 1) Раўназначныя; 3) раўназначныя; 5) раўназначныя; 7) раўназначныя.

3.2. 2) 0; 1; 2; 4) -5; -3; -1; 0.

3.3. 1)  $x \geq -2$ ; 3)  $x \geq -3$ ; 5)  $x < 14$ ; 7)  $x > 8$ ; 9)  $x \leq 32$ .

3.4. 2)  $(-\infty; 2]$ ; 4)  $(-\infty; 1]$ ; 6)  $(6; +\infty)$ ; 8)  $(-\infty; 2]$ ; 10)  $(-\infty; 0]$ .

3.5. 1)  $[2; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; 1,5)$ ; 5)  $(-\infty; 0]$ .

3.6. 2) 5; 4) -8; 6) -20; 8) 8.

3.7. 1)  $(6; +\infty)$ ; 3)  $(3; +\infty)$ ; 5)  $(-\infty; 3,4)$ ; 7)  $(-\infty; -1\frac{15}{17})$ ; 9)  $(-\infty; 2)$ ;  
11)  $(-3\frac{2}{3}; +\infty)$ .

3.8. 2)  $(-\infty; 5)$ ; 4)  $(-\infty; 0,5)$ ; 6)  $(1\frac{5}{14}; +\infty)$ ; 8)  $(-\infty; \frac{3}{8})$ ; 10)  $(\frac{9}{14}; +\infty)$ .

3.9. 1)  $(0; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; -\frac{7}{13}]$ .

3.10. 2)  $[-0,5; +\infty)$ ; 4)  $(3; +\infty)$ ; 6)  $[-4; +\infty)$ ; 8)  $(-\infty; 2,25)$ .

3.11. 1)  $[1,25; +\infty)$ ; 3)  $(0,96; +\infty)$ .

3.12. 2) 4; 4) -8.

3.13. 1) 2; 3) 8; 5) яго няма.

3.14. 2) Няма рашэнняў; 4)  $x$  — любы; 6)  $z$  — любы; 8) няма рашэнняў;  
10) няма рашэнняў.

3.15. 1)  $x$  — любы; 3) няма рашэнняў; 5) няма рашэнняў; 7)  $x$  — любы.

3.16. 2)  $x$  — любы; 4) няма рашэнняў.

3.17. 1)  $(0; +\infty)$ ; 3)  $[0; +\infty)$ ; 5)  $\{-4\}$ ; 7)  $\{-2\}$ ; 9)  $R$ ; 11) няма рашэнняў.

3.18. 2)  $(-\infty; 55)$ .

3.19. 1)  $(-\infty; 0,4)$ .

3.20. 2)  $(-\infty; 2]$ ; 4)  $(-1,2; +\infty)$ .

3.21. 1)  $(-\infty; -6)$ ; 3)  $[9; +\infty)$ .

3.22. 2)  $(-\infty; 4)$ ; 4)  $(-\infty; 0,2)$ ; 6)  $[-7; +\infty)$ .

3.23. 1)  $(-\infty; 3,5)$ ; 3)  $(-\infty; 0,75)$ ; 5)  $(-\infty; 3)$ ; 7)  $[0,6; +\infty)$ .

3.24. 2)  $(-\infty; \frac{14}{23})$ ; 4)  $[0,2; +\infty)$ .

3.25. 1)  $(2,5; +\infty)$ ; 3)  $[0; 10]$ .

- 3.26. 2)  $R$ ; 4)  $(-\infty; 0)$ ; 6)  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ; 8) няма рашэнняў.
- 3.27. 1)  $(-\infty; \frac{2}{k}]$ ; 3)  $(-\infty; \frac{p-8}{5})$ ; 5)  $[-\frac{1}{p+3}; +\infty)$ ; 7)  $(\frac{c}{k-1}; +\infty)$ .
- 3.28. 2)  $(-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$ ; 4)  $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$ ; 6) няма рашэнняў; 8) няма рашэнняў.
- 3.29. 1)  $(7; +\infty)$ ; 3)  $(6; +\infty)$ ; 5)  $(-\infty; -1]$ ; 7)  $(1; 4)$ ; 9) няма рашэнняў.
- 3.30. Напрыклад, 2)  $\begin{cases} 3y > 0, \\ 2y < 15; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} 2t + 18 \geq 0, \\ 5t + 34 \geq 0; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} 2p \leq 26, \\ 3p + 3 > 0; \end{cases}$
- 8)  $\begin{cases} 17x + 29 < 45, \\ 3x + 72 < 0. \end{cases}$
- 3.31. 1) Няма рашэнняў; 3)  $(-\infty; -3)$ ; 5)  $\{3\}$ ; 7)  $(9; +\infty)$ ; 9)  $[-1,5; 5]$ .
- 3.32. 2)  $(6; 8]$ ; 4)  $(-5; 12)$ .
- 3.33. 1) Няма рашэнняў; 3)  $(0; 2,5]$ .
- 3.34. 2)  $(-\infty; 0,64)$ ; 4)  $(-4\frac{4}{7}; +\infty)$ .
- 3.35. 1)  $-3; -2; -1; 0; 1$ .
- 3.36. 2)  $(-5; 7)$ ; 4)  $[3; 4)$ .
- 3.37. 1)  $[-3; 5) \cup (7; +\infty)$ .
- 3.39. 1)  $[-1; 2]$ ; 3)  $[-3,5; 0,5]$ ; 5)  $(9; 18]$ ; 7)  $[6; 12)$ ; 9)  $[-10; 0)$ ;  
11)  $[-3\frac{1}{3}; 6\frac{2}{3}]$ .
- 3.40. 2)  $(1; 6]$ ; 4)  $(3; 9)$ ; 6)  $[-10; -1]$ ; 8)  $(-2,8; -1,8)$ ; 10)  $[9; 12)$ .
- 3.41. 1)  $[0,75; 3)$ ; 3)  $(-11; 9)$ ; 5)  $(-1; 1)$ ; 7)  $(\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}]$ .
- 3.42. 2)  $[\frac{1}{9}; \frac{1}{3}]$ ; 4)  $(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}]$ .
- 3.43. 1)  $-2$ ; 3)  $-6$ .
- 3.44. 2)  $-4$ ; 4)  $-10$ .
- 3.45. 1) а)  $(0; +\infty)$ ; 6)  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ ; 3) а)  $(-1; +\infty)$ ; 6)  $(-0,6; -0,4]$ .
- 3.46. 2) а)  $(-\infty; -3)$ ; 6)  $[-4; -2)$ ; 4) а)  $(-\infty; -0,75)$ ; 6)  $[-1,25; -0,25)$ .
- 3.47. 1)  $50 < 11x + 2 < 60$ ; 57; 2)  $90 < 5x + 10 < 100$ ; 85.
- 3.48. 2)  $|x| > 1$ ; 4)  $|x| \leq 2,75$ .
- 3.49. 1)  $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ ; 3)  $[-0,5; 0,5]$ ; 5)  $(-5; 5)$ ; 7)  $(-\infty; -3,5] \cup [3,5; +\infty)$ ;  
9)  $[-1; 7]$ .
- 3.51. 1) Няправільна; 3) няправільна; 5) правільна.
- 3.52. 2) Няправільна; 4) няправільна.
- 3.53. 1) Няправільна; 3) не заўсёды; 5) не заўсёды; 7) правільна.
- 3.54. 2)  $-4,2; 4,2$ ; 4)  $x < -3$  або  $x > 3$ ; 6)  $-8 \leq x \leq 8$ .
- 3.55. 1) Няма рашэнняў; 3)  $\{0\}$ ; 5)  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ ; 7)  $[-0,1; 0,1]$ ;  
9)  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ; 11)  $R$ .
- 3.56. 2)  $(-9; 1)$ ; 4)  $(-\infty; -1] \cup [11; +\infty)$ ; 6)  $[-2,9; -0,9]$ ; 8)  $(-1; 2)$ .
- 3.57. 1)  $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ ; 3)  $(-27; 27)$ ; 5)  $(-\infty; -0,05] \cup [0,05; +\infty)$ ; 7)  $[-9; 9]$ .
- 3.58. 2)  $(-\infty; -5\frac{1}{3}] \cup [10; +\infty)$ ; 4)  $[-7,75; 9]$ ; 6)  $(-11\frac{1}{3}; 6)$ ;  
8)  $(-\infty; -17] \cup [26; +\infty)$ ; 10)  $(-45; 33)$ .



- 3.59. 1)  $R$ ; 3)  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ ; 5) няма рашэнняў; 7)  $R$ ; 9)  $\{-4\}$ .  
3.60. 2)  $(-\infty; -4] \cup [4; 5,5)$ ; 4)  $(-7; -3] \cup [3; 7)$ ; 6)  $(-\infty; -13] \cup [1; 2,5) \cup (2,5; +\infty)$ .  
3.61. 1)  $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$ ; 3)  $[-10; 10]$ .

## Раздзел 4

- 4.1. 1) Няправільнае; 3) правільнае; 5) правільнае; 7) няправільнае.  
4.2. 2) Няправільнае; 4) правільнае; 6) няправільнае.  
4.3. 1)  $-125$ ; 3)  $64$ ; 5)  $1$ .  
4.4. 2)  $-29$ ; 29; 4)  $-5$ ; 5)  $5$ ; 6)  $-3003$ ;  $3003$ .  
4.5. 1)  $-2\frac{1}{2}$ ;  $2\frac{1}{2}$ ; 3)  $-0,6$ ;  $0,6$ ; 5)  $-\frac{2}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$ .  
4.6. 2) Не існуе; 4) існуе.  
4.7. 1) Не існуе; 3) існуе; 5) існуе.  
4.8. Напрыклад, 2)  $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ ; 4)  $(-10)^2$ .  
4.9. 1)  $3$  см; 3)  $\frac{2}{5}$  дм; 5)  $0,4$  м.  
4.10. 2)  $0$ ; 4)  $\pm 0,6$ ; 6)  $\pm \frac{5}{7}$ ; 8)  $\pm 10$ ; 10) няма каранёў; 12)  $\pm 4$ .  
4.11. 1) Правільна; 3) няправільна.  
4.12. 2) Няправільная; 4) няправільная; 6) няправільная; 8) няправільная; 10) правільная.  
4.13. 1) Правільная; 3) няправільная; 5) няправільная; 7) правільная; 9) правільная; 11) няправільная; 13) няправільная.  
4.14. 2)  $0,1$ ; 4)  $0,05$ ; 6)  $0,08$ .  
4.15. 1)  $3$ ; 3)  $4$ ; 5)  $9$ ; 7)  $87,5$ ; 9)  $2$ .  
4.16. 2)  $17$ ; 4)  $10$ ; 6)  $9$ ; 8)  $2$ ; 10)  $3$ .  
4.17. 1)  $6$ ; 3)  $4$ ; 5)  $6$ ; 7)  $6$ ; 9)  $9$ .  
4.18. 2) Не мае; 4) мае; 6) не мае; 8) мае; 10) не мае; 12) не мае; 14) мае; 16) не мае.  
4.19. 1) Мае; 3) не мае; 5) не мае.  
4.20. 2)  $0,3$ ; 4)  $11$ .  
4.21. 1)  $9,25$ ; 3)  $1$ .  
4.22. 2) Больш; 4) больш.  
4.23. 1) Больш; 3) менш.  
4.24. 2)  $9$ ; 4)  $14$ ; 6)  $20$ .  
4.25. 1)  $5$  см; 3)  $\frac{4}{7}$  мм; 5)  $0,9$  м.  
4.27.  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $\pi$ .  
4.28. 2)  $(-\infty; 5]$ ; 4)  $R$ ; 6)  $R$ .  
4.29. 1)  $(-\infty; 5]$ ; 3)  $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$ .  
4.30. 2)  $(-5; +\infty)$ ; 4)  $(-\infty; 2,5]$ .  
4.31. 1)  $[4; +\infty)$ ; 3)  $[2; 3]$ .  
4.32. 2)  $(5; 7) \cup (7; 12]$ ; 4)  $[-4; 7) \cup (7; 9)$ .

- 4.33. 1) 0,3; 3) 0,5; 5)  $-0,2$ ; 7) 5; 9)  $5\frac{1}{4}$ .
- 4.34. 2) 0,354; 4)  $5\frac{6}{11}$ ; 6) 1,23.
- 4.35. 1) 7; 3)  $2\frac{29}{42}$ .
- 4.36. 2) Няправільная; 4) правільная; 6) няправільная; 8) правільная.
- 4.37. 1) Правільная; 3) няправільная.
- 4.38. 2) 1; 4) 2.
- 4.39. 1)  $\sqrt{15} - 3$ ; 3)  $8 - \sqrt{17}$ .
- 4.40. 2) 100; 4) 50.
- 4.41. 1) 3; 3) 4; 5) 1; 7) 1.
- 4.42. 2) 16; 4) 343; 6) 16 807; 8) 25.
- 4.43. 1) 2744; 3) 625; 5) 125.
- 4.44. 2) 27; 4) 49; 6) 81.
- 4.45. 1)  $4a^8b^7$ .
- 4.46. 2) Правільная; 4) правільная.
- 4.47. 1)  $p$ ; 3)  $p^2$ ; 5)  $p^2$ ; 7)  $p^3$ .
- 4.48. 2)  $-p^3$ ; 4)  $p^{14}$ ; 6)  $p^{26}$ ; 8) 1.
- 4.49. 1)  $x$ ; 3)  $-\frac{y}{4}$ ; 5)  $-0,2t^2$ ; 7)  $-b$ ; 9)  $-n^3$ .
- 4.50. 2)  $a - 3$ ; 4)  $-9a - 1$ .
- 4.52. 2) 10.
- 4.53. 1) 140; 136.
- 4.54. 2) а)  $A > 1$ ; б)  $A = 1$ ; в)  $A > 1$ .
- 4.55. 1) 20; 3) 0.
- 4.56. 2)  $4 - 2\sqrt{3}$ ; 4)  $-1$ .
- 4.57. 1) 1.
- 4.58. 2)  $-a - 2$ .
- 4.59. 1)  $\frac{1}{3}$ ; 3) 2.
- 4.60. 2)  $2 + \sqrt{7}$ ; 4)  $\sqrt{5} - 1$ .
- 4.61. 1) 2; 3)  $-1$ .
- 4.62. 2)  $(-\infty; 0]$ ; 4)  $[0; +\infty)$ ; 6)  $(-\infty; 0]$ .
- 4.63. 1)  $[5; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; 5]$ ; 5)  $\mathbf{R}$ .
- 4.64. 2)  $(-\infty; 3]$ .
- 4.65. Няправільна.
- 4.66. 2) Няма каранёў; 4)  $-15$ ; 3.
- 4.67. 1)  $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ ; 3)  $[-3; 5]$ .
- 4.68. 2)  $(8; +\infty)$ ; 4)  $[3; 15]$ .
- 4.69. 1)  $(-\infty; -3]$ ; 3)  $(-\infty; -4)$ .
- 4.70. 2) 6.
- 4.71. 1) 20; 3) 24; 5) 360; 7) 1300; 9) 36 000.
- 4.72. 2) 4,8; 4) 21; 6) 2,4; 8) 0,14; 10) 0,065.
- 4.73. 1) 0,6; 3) 0,05.
- 4.74. 2) 22,4; 4) 0,055; 6) 71,25.

- 4.75. 1) 8; 3) 36; 5) 3.  
4.76. 2) 90; 4) 90; 6) 30; 8) 360; 10) 46 410.  
4.77. 1) 6,5; 3) 6; 5) 6,5.  
4.78. 2) 14; 4) 21; 6) 15; 8) 4,2; 10) 40; 12) 70.  
4.79. 1) 450; 3) 1700; 5) 0,23; 7) 4,9; 9) 0,59.  
4.80. 2) 2500; 4) 0,045; 6) 65 000; 8) 8,5.  
4.81. 1) 375; 3) 77 760; 5) 172 800; 7) 700.  
4.82. 2)  $5\sqrt{2}$ ; 4)  $10\sqrt{5}$ ; 6)  $17\sqrt{7}$ ; 8)  $7\sqrt{2}$ .  
4.83. 1)  $53\sqrt{2}$ ; 3)  $16\sqrt{7}$ ; 5)  $-13\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ; 7)  $9\sqrt{5} - \sqrt{7}$ ; 9)  $12\sqrt{2} + 96\sqrt{3}$ .  
4.84. 2) Няправільная; 4) няправільная.  
4.85. 1) 147; 3) 180; 5) 16.  
4.86. 2)  $3t^2$ ; 4)  $-\frac{k^3}{3}$ ; 6)  $n^2 p \sqrt{p}$ ; 8)  $km^6 p \sqrt{-t}$ .  
4.87. Напрыклад, 1)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ ; 3)  $\sqrt{13} \cdot \sqrt{x}$ ; 5)  $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$ ;  
7)  $\sqrt{-m} \cdot \sqrt{-k - p}$ .  
4.88. 2) 80; 4) 25; 6) 10; 8) 29.  
4.89. 1) 96; 3) 60; 5) 35; 7) 0,45.  
4.90. 2) 27; 4) 4; 6) 25; 8) 1.  
4.91. 1)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; 3)  $-3\sqrt{3}$ ; 5)  $\sqrt{5}$ ; 7) 1,5; 9)  $\sqrt{3}$ ; 11)  $3\sqrt{3}$ .  
4.92. 2)  $t\sqrt{t}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{p}}{p^2}$ ; 6)  $\sqrt{a+b}$ .  
4.93. 1)  $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ; 3)  $-\frac{5\sqrt{3} + 6}{13}$ ; 5)  $11 + 2\sqrt{30}$ ; 7)  $\frac{\sqrt{21} + 4\sqrt{7} - 4\sqrt{3} - 7}{4}$ ;  
9)  $\sqrt{33}$ .  
4.94. 2)  $\frac{3c(\sqrt{c} + \sqrt{p})}{c - p}$ ; 4)  $\sqrt{t} - \sqrt{a}$ ; 6)  $\frac{\sqrt{st} + s}{t - s}$ .  
4.95. 1)  $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$ ; 3)  $\frac{a(\sqrt{a} + 1)}{1 - a}$ ; 5)  $2\sqrt{3} - 3$ ; 7)  $\frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}$ ;  
9)  $(\sqrt{a} + 1)\sqrt{1 - \sqrt{a}}$ ;  $(2 - \sqrt{t})\sqrt{2 + \sqrt{t}}$ .  
4.96. 2)  $\frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{10}}{2}$ ; 4)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; 6)  $5\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3$ ;  
8)  $4\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ .  
4.97. 1) 7,2; 3)  $-\sqrt{5}$ ; 5)  $\pm 3\sqrt{3}$ .  
4.98. 2) Няма каранёў; 4) 8; 6)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ .  
4.99. 1) 21 дм; 3) 33 м.  
4.100. Сярэдняе арыфметычнае ў заданні: 2) больш; 4) больш; 6) больш.  
4.101. 1)  $\frac{1}{26}$ ; 3)  $1\frac{1}{4}$ ; 5)  $2\frac{1}{2}$ ; 7)  $1\frac{5}{6}$ .  
4.102. 2)  $\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{2}{5}$ .

- 4.103. 1)  $6\frac{2}{3}$ ; 3)  $1\frac{3}{4}$ ; 5)  $\frac{9}{35}$ .
- 4.104. 2) 2; 4) 1; 6)  $\frac{1}{10}$ .
- 4.105. 1)  $1\frac{23}{40}$ ; 3)  $\frac{52}{77}$ .
- 4.106. 2)  $2 + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}$ ; 4)  $\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 4$ .
- 4.107. 1)  $15 + 12\sqrt{2}$ ; 3) 22,5.
- 4.108. 2)  $1\frac{5}{49}$ ; 4)  $\frac{1}{75}$ .
- 4.109. 1) 12; 3) 11; 5) 2,2.
- 4.110. 2) У 5 разоў; 4) у 9 разоў.
- 4.111. 1)  $5\frac{5}{11}$ ; 3) 3,6; 5) 1.
- 4.112. 2) У 2 разы; 4) 50 м.
- 4.113. 1)  $\frac{4a}{13b^3}$ ; 3)  $\frac{6a^5}{5b^{13}}$ ; 5)  $-\frac{37a^{15}}{44b^6}$ .
- 4.114. 2)  $\frac{7}{5b}$ ; 4)  $-\frac{30b^3}{a^2}$ ; 6)  $-\frac{13}{12a^3b^5}$ .
- 4.115. 1)  $\frac{7|k|^3}{9}$ ; 3)  $-75m^5n^9$ .
- 4.116. 2) 720; 4) 64.
- 4.117. 1)  $\frac{a^m}{b^{2n}}$ ; 3)  $\frac{a^{3m+1}}{b^{2n+2}}$ .
- 4.118. 2)  $\frac{\sqrt{7a}}{2\sqrt{b}}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{5p}}{3\sqrt{-t}}$ .
- 4.119. 1)  $-p\sqrt{-m}$ ; 3)  $\frac{-m^3}{n\sqrt{n}}$ ; 5)  $-m^7n^3\sqrt{-mn}$ .
- 4.120. 2)  $0 \leq t < 2$ ; 4)  $t < -7$  або  $t \geq 6$ ; 6)  $t < 0$ .
- 4.121. 1) -0,7; 3) -11; 9) 5; 5) -1; 11.
- 4.122. 2)  $[-5; 0) \cup (0; 5]$ ; 4)  $(-2; +\infty)$ ; 6)  $(-7; 1) \cup (1; 9)$ .
- 4.123. 1)  $5\sqrt{2}$ ; 3)  $5\sqrt{5}$ ; 5)  $6\sqrt{2}$ ; 7)  $6\sqrt{5}$ ; 9)  $2\sqrt{14}$ ; 11)  $0,4\sqrt{2}$ .
- 4.124. 2) -2; 4)  $24\sqrt{6}$ ; 6)  $10\sqrt{2}$ ; 8)  $2\sqrt{5}$ ; 10)  $-0,5\sqrt{6}$ ; 12)  $7\sqrt{3}$ .
- 4.126. 2)  $3\sqrt{2n}$ ; 4)  $7\sqrt{c}$ ; 6)  $b\sqrt{5a}$ ; 8)  $\sqrt{13}p^3$ .
- 4.127. 1)  $\frac{\sqrt{k}}{11}$ ; 3)  $\frac{a^2}{b\sqrt{b}}$ ; 5)  $\frac{12\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}$ .
- 4.128. 2)  $5k^2\sqrt{3k}$ ; 4)  $7k^4\sqrt{k}$ ; 6)  $4kt^2\sqrt{2kt}$ ; 8)  $6k^2t^5\sqrt{2t}$ .
- 4.129. 1)  $\frac{7}{ty}\sqrt{\frac{k}{t}}$ ; 3)  $k^3\sqrt{5k}$ ; 5)  $\frac{t^3}{k}\sqrt{\frac{t}{3}}$ ; 7)  $\frac{4p^3}{c^3}\sqrt{2p}$ ; 9)  $\frac{2k^9}{3\sqrt{t}}$ .
- 4.130. 2)  $a^2c\sqrt{ab}$ ; 4)  $a^3bc^2\sqrt{abc}$ ; 6)  $5a^2b^4c^5\sqrt{bc}$ .
- 4.131. 1)  $-3a$ ; 3)  $-15\sqrt{2}b^3$ ; 5)  $-7a^2b^5$ ; 7)  $-8b^5d^2$ ; 9)  $-2\frac{1}{4}x^9y^{11}\sqrt{y}$ .

- 4.132. 2)  $-4mn^2$ ; 4)  $-5\sqrt{2}mn^3\sqrt{m}$ ; 6)  $-8\sqrt{2}m^4n^3$ ; 8)  $2\sqrt{2}c^8d^{12}$ ;  
10)  $5\sqrt{5}c^4d^{10}$ .
- 4.133. 1)  $a^nb^{2m}c^2\sqrt{c}$ ; 3)  $a^{2n+2}b^{m+1}c^4\sqrt{c}$ .
- 4.134. 2)  $-7\sqrt{5}ay^2(a-b)^2\sqrt{ay(a-b)}$ ; 4)  $\frac{7\sqrt{2}}{2}x^2y^2(x-y)^3\sqrt{y(x-y)}$ ;  
6)  $\frac{\sqrt{7}|5x-y|}{7}$ ; 8)  $-2\sqrt{2}$ .
- 4.135. 1)  $-b\sqrt{-3b}$ ; 3)  $-4m^3\sqrt{-2m}$ ; 5)  $-3a^7\sqrt{-3a}$ .
- 4.136. 2)  $-24t^{11}\sqrt{-2t}$ ; 4)  $b^2\sqrt{-3b}$ ; 6)  $\frac{d^{11}}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ .
- 4.137. 1)  $\sqrt{27}$ ; 3)  $-\sqrt{16,2}$ ; 5)  $\sqrt{0,32}$ ; 7)  $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ; 9)  $\sqrt{0,2}$ ; 11)  $-\sqrt{\frac{27}{4}}$ .
- 4.138. 2)  $\sqrt{9b^8c}$ ; 4)  $\sqrt{49c^2d^2}$ ; 6)  $-\sqrt{16t^3}$ .
- 4.139. 1)  $\sqrt{3p^2}$ ; 3)  $\sqrt{p^3}$ ; 5)  $\sqrt{p}$ ; 7)  $\sqrt{18kp^4}$ ; 9)  $\sqrt{2kp}$ ; 11)  $\sqrt{p(p+1)^2}$ .
- 4.140. 2)  $\sqrt{7p^2}$ ; 4)  $-\sqrt{7p^2}$ ; 6)  $\sqrt{kp^2}$ ; 8)  $\sqrt{81kp^{10}}$ ; 10)  $-\sqrt{3k^3p^2}$ ;  
12)  $-\sqrt{\frac{2k}{3p^2}}$ .
- 4.141. 1)  $-\sqrt{5p^2}$ ; 3)  $\sqrt{5p^2}$ ; 5)  $\sqrt{kp^2}$ ; 7)  $-\sqrt{49kp^6}$ ; 9)  $\sqrt{\frac{k^3}{2}}$ ; 11)  $\frac{1}{\sqrt{5kp^4}}$ .
- 4.142. 2)  $\sqrt{\frac{40a^3}{49}}$ ; 4)  $\sqrt{3ab^3}$ ; 6)  $-\sqrt{-4a^3}$ .
- 4.143. 1)  $-\sqrt{3a^3}$ ; 3)  $-\sqrt{5m^{11}}$ .
- 4.144. 2)  $\sqrt{5np^6}$ ; 4)  $-\sqrt{7n^8p^8}$ ; 6)  $-\sqrt{2np^8}$ ; 8)  $\sqrt{11np^4}$ .
- 4.145. 1)  $-\sqrt{38-12\sqrt{10}}$ ; 3)  $\sqrt{140-50\sqrt{3}}$ ; 5)  $-\sqrt{99-24\sqrt{17}}$ ;  
7)  $-\sqrt{(7-4\sqrt{3})ab}$ .
- 4.146. 2)  $-\sqrt{n-m}$ ; 4)  $-\sqrt{2a(a+b)x^2}$ ; 6)  $\sqrt{\frac{18m(c-d)}{c+d}}$ .
- 4.147. 1)  $\sqrt{a+1}$ ; 3)  $\sqrt{27b+18}$ ; 5)  $\sqrt{a-5}$ ; 7)  $\sqrt{\frac{b-7}{3}}$ .
- 4.148. 2)  $\sqrt{27x} + \sqrt{12x} + \sqrt{32x}$ .
- 4.149. 1) а) 1; 6) -1.
- 4.150. 2)  $a \leq 0$ ; 4)  $a > 0$ .
- 4.151. 1)  $p \leq 0$ ; 3)  $p \geq 0$ ; 5)  $p$  — любы.
- 4.152. 2)  $(-\infty; 0]$ ; 4)  $R$ ; 6)  $[0; +\infty)$ .
- 4.153. 1)  $R$ ; 3)  $(-\infty; 0]$ ; 5)  $R$ .
- 4.154. 2)  $4ab^6\sqrt{2a}$ ; 4)  $3a^2b^2\sqrt{-6a}$ ; 6)  $2x^8y^2\sqrt{y}$ .
- 4.155. 1)  $-\sqrt{x^7y^5}$ ; 3)  $\sqrt{\frac{1}{2}x^9y^{13}}$ ; 5)  $-\sqrt{x^5y^7}$ .
- 4.156. 2) 192; 4) 0,125.
- 4.157. 1)  $24mn$ ; 3)  $3150m^5n^4$ .
- 4.158. 2)  $7b^3y^{12}$ ; 4)  $100m^2$ .

- 4.159. 1)  $-3xy^5$ ; 3)  $4(m-n)^2$ .
- 4.160. 2)  $(2y - 3x^2y^3 + 1,5)xy\sqrt{xy}$ .
- 4.161. 1)  $(m+n)\sqrt{m-n}$ ; 3)  $(1-m)m$ .
- 4.162. 2)  $(y - \sqrt{13})(y + \sqrt{13})$ ; 4)  $(p - \sqrt{22})(p + \sqrt{22})$ ; 6)  $(\sqrt{7} - d)(\sqrt{7} + d)$ ;  
8)  $(b - 2\sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$ .
- 4.163. 1)  $y - \sqrt{5}$ ; 3)  $\frac{1}{k + \sqrt{2}}$ ; 5)  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ; 7)  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .
- 4.164. 2)  $\frac{3}{\sqrt{7} + 1}$ ; 4)  $3\sqrt{a} + \sqrt{3}$ ; 6)  $\frac{3a + \sqrt{b}}{3a - \sqrt{b}}$ ; 8)  $\frac{\sqrt{n} + \sqrt{8}}{\sqrt{n} - \sqrt{8}}$ ; 10)  $\frac{\sqrt{y} + \sqrt{13}}{\sqrt{y} - \sqrt{13}}$ .
- 4.165. 1) 625; 3)  $22\frac{9}{16}$ ; 5) 9.
- 4.166. 2) 9; 4) няма каранёў.
- 4.167. 1) 49; 3) 25.
- 4.168. 2) 25; 4) 0,04.
- 4.169. 1) 361 3) 49.
- 4.170. 2)  $[0; 4) \cup (4; 9) \cup (9; +\infty)$ ; 4)  $[5; 9) \cup (9; +\infty)$ .
- 4.173. 1)  $2\sqrt{3}$ ; 3) 1.
- 4.174. 2)  $\frac{4}{11}$ ; 4)  $\frac{12 + 16\sqrt{3}}{39}$ .
- 4.175. 1) 1.
- 4.176. 2) 0; 4)  $(a-1)^2$ .
- 4.177. 1)  $-\sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt{1-a^2}$ .
- 4.178. 2)  $-2\sqrt{a}$ .
- 4.179. 1)  $2\sqrt{2\sqrt{10}}$ .
- 4.180. 2) 2,8; 4)  $8\frac{8}{9}$ .
- 4.181. 1) 48; 3) -70; 5) 18.
- 4.182. 2) -4; 4) 40; 6) 0.
- 4.183. 1) -440; 3) 13 000; 5) 4029.
- 4.184. 2)  $19 - 8\sqrt{3}$ ; 4)  $37 + 20\sqrt{3}$ ; 6)  $21 + 14\sqrt{2}$ .
- 4.185. 1) 2; 3) 5; 5) 20; 7)  $33 - 13\sqrt{10}$ .
- 4.186. 2)  $16\sqrt{30} - 5$ .
- 4.187. 1) 2,5; 3) 0,4; 5)  $-\frac{2}{3}$ .
- 4.188. 2)  $\sqrt{58}$ ; 4) 18.
- 4.189. 1) Не мае; 3) мае; 5) не мае; 7) не мае.
- 4.190. 2)  $\frac{1}{3}$ ; 4) 10; 6) няма каранёў; 8)  $2\frac{2}{7}$ .
- 4.192. 2) Няправільна; 4) няправільна; 6) правільна; 8) няправільна.
- 4.193. 1) Няправільна; 3) правільна; 5) няправільна.
- 4.194. 2) Правільна; 4) правільна.
- 4.195. Напрыклад, 1) 4; 9; 3) 2; 5; 5) няма двух значэнняў, ёсць 0.

- 4.196. 2) Няправільна, напрыклад,  $1 - \sqrt{3}$  і  $2 - \sqrt{3}$ ;  $\sqrt{48}$  і  $4\sqrt{3}$ ; 4) няправільна, напрыклад,  $6\sqrt{2}$  і  $2\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3} - 5$  і  $7\sqrt{3} - 35$ .
- 4.197. 1) Не можа; 3) можа, напрыклад,  $2$  і  $3$ ;  $\frac{4}{7}$  і  $\frac{5}{9}$ .
- 4.198. 2)  $4 < \sqrt{17}$ ; 4)  $\sqrt{18} < 4\sqrt{2}$ ; 6)  $5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$ .
- 4.199. 1)  $-4\sqrt{20} < -3\sqrt{20}$ ; 3)  $5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}$ ; 5)  $-8\sqrt{6} < -6\sqrt{8}$ .
- 4.200. 2) Роўныя; 4)  $-\frac{1}{3}\sqrt{189} > -\frac{1}{2}\sqrt{208}$ .
- 4.201. 1)  $\frac{15}{\sqrt{5}} > \frac{12}{\sqrt{6}}$ ; 3)  $\frac{11}{2\sqrt{3}+1} < \frac{19}{2\sqrt{5}-1}$ .
- 4.202. 2)  $9 - \sqrt{39} > 0$ ; 4)  $6 - \sqrt{87} < 0$ .
- 4.203. 1) 1 і 2; 3) 4 і 5; 5) 8 і 9; 7) 16 і 17.
- 4.204. 2) -6; -5; -4; 4) 1; 2; 3; 4; 5.
- 4.205. 1) 2; 3) 12; 5) 15.
- 4.206. 2) 4; 4) 17; 6) 32.
- 4.207. 1) Правільная; 3) правільная; 5) правільная; 7) правільная.
- 4.208. 2) Правільная; 4) няправільная.
- 4.209. 1)  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{9,9}$ ;  $\sqrt{12}$ ; 3)  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ;  $\sqrt{\frac{7}{8}}$ ;  $\sqrt{\frac{11}{12}}$ .
- 4.210. 2)  $-\sqrt{75}$ ;  $-\sqrt{27}$ ;  $\frac{1}{7}\sqrt{147}$ ;  $\frac{3}{8}\sqrt{432}$ ;  $100\sqrt{48}$ .
- 4.212. 2) Няправільная; 4) няправільная.
- 4.219. 1) (4;  $+\infty$ ); 3) (0;  $+\infty$ ); 5) [0; 0,81]; 7) [0;  $+\infty$ ).
- 4.220. 2) (14;  $+\infty$ ); 4) [-8; -4].
- 4.221. 1) {2}; 3) [-2;  $+\infty$ ); 5) [0,5;  $+\infty$ ); 7) няма рашэнняў.
- 4.222. 2)  $\left(1\frac{5}{24}; +\infty\right)$ ; 4)  $\left[\frac{23}{64}; \frac{3}{4}\right)$ .
- 4.223. 1)  $(-\infty; 0]$ ; 3)  $(-\infty; 0]$ ; 5)  $(-\infty; -4]$ .
- 4.224. 2) [-4; 4]; 4)  $(-\infty; -12) \cup (20; +\infty)$ ; 6)  $(-\infty; -2) \cup (8; +\infty)$ .
- 4.225. 1) {-3}; 3)  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .
- 4.226. 2)  $\mathbb{R}$ ; 4) {3}; 6) {-1}.
- 4.227. 1) {-3}; 3) {7}.
- 4.228. 2)  $\mathbb{R}$ ; 4)  $\left\{\frac{\sqrt{15}}{5}\right\}$ .
- 4.229. 1)  $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$ ; 3)  $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ .
- 4.230. 2) (9; 16); 4) (1; 25]; 6) [3; 8).

## Раздзел 5

- 5.1. 1) 2; 6; -8; 3) 3; 0; -21; 5) -1; -1; 0; 7) -1; -4; 3; 9) 31; 0; 0; 11) 4; 18; 0.
- 5.2. 2) 21; -4; -8; 4) 24; -69; 124; 6) 24; -9; 9.
- 5.3. 1) -1; 1; 3) 1; 4; 5) -3; 3.
- 5.4. 2)  $\pm 0,2$ ; 4) няма каранёў; 6) 0.
- 5.5. 1)  $\pm 10$ ; 3)  $\pm 5$ ; 5) няма каранёў.

- 5.6. 2)  $\pm 1,25$ ; 4)  $\pm 2$ ; 6)  $\pm 8$ .
- 5.7. 1)  $\pm\sqrt{3}$ ; 3)  $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ ; 5)  $\pm\sqrt{1,6}$ .
- 5.8. 2) 3; 4)  $-0,7$ ; 6)  $0,25$ .
- 5.9. 1) 0; 1; 3)  $-2$ ; 0; 5) 0;  $1\frac{1}{3}$ ; 7)  $-6$ ; 0; 9)  $-\frac{1}{343}$ ; 0.
- 5.10. 2)  $-\frac{5}{12}$ ; 0; 4)  $-1,5$ ; 0; 6) 0; 6.
- 5.11. 1) 0; 6,2; 3)  $-1,5$ ; 0; 5) 0; 2; 7) 0;  $\frac{3}{7}$ .
- 5.12. 2)  $-2$ ; 0; 4) 0; 2; 6)  $-1\frac{7}{9}$ ; 0; 8) няма каранёў.
- 5.13. 1)  $\pm\sqrt{87}$ ; 3)  $-8\frac{2}{3}$ ; 0; 5)  $\pm 2$ .
- 5.14. 2) 0;  $3\frac{3}{7}$ ; 4)  $\pm 3$ ; 6)  $\pm 2$ .
- 5.15. 1) Няма каранёў; 3)  $\pm 5$ .
- 5.16. 2) 0; 4)  $-\frac{3}{8}$ ; 0;  $\frac{3}{8}$ .
- 5.17. 1)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ; 3)  $\pm 8$ .
- 5.18. 2) а)  $t > 0$ ; б)  $t = 0$ ; в)  $t < 0$ .
- 5.19. 1)  $\pm p$ ; 3)  $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$ , калі  $k < 0$ ; 0, калі  $k = 0$ ; няма каранёў, калі  $k > 0$ ;  
5)  $x = \pm\frac{1}{\sqrt{ck}}$ , калі  $c$  і  $k$  адрозныя ад 0 і аднаго знака; калі  $c = k = 0$   
або калі  $c$  і  $k$  розных знакаў, то няма каранёў.
- 5.20. 2)  $\pm(k-3)$ ; 4)  $\pm(2t+3)$ ; 6)  $\pm(5a^2-1)$ .
- 5.21. 1)  $\pm\frac{t}{2}$ ; 3)  $\pm\frac{\sqrt{2k^2}}{8}$ ; 5)  $\pm(c-1)$ ,  $c \neq \pm 1$ , калі  $c = -1$ , то  $x$  — любы лік.
- 5.22. 2) 49; 4)  $6,25$ ; 6)  $20,25$ .
- 5.23. 1) 9; 3)  $12,75$ ; 5)  $0,5$ .
- 5.24. 2)  $3(x-3)^2-12$ ; 4)  $4(x-4)^2-4$ ; 6)  $\frac{1}{4}(x-1)^2-5\frac{1}{4}$ .
- 5.25. 1)  $-1$ ; 9; 3)  $-3$ ; 5) 1; 3; 7) 2; 4.
- 5.26. 2)  $-1,6$ ; 1; 4)  $0,5$ ;  $1,25$ ; 6)  $-1,2$ ; 2; 8)  $-2$ ;  $2,75$ .
- 5.27. 1)  $-3$ ; 11; 3)  $-2,4$ ; 2; 5)  $-0,95$ ;  $1,45$ .
- 5.28. 2) а)  $-4$ ; 5; б)  $-7$ ; 8; в) ні пры якіх.
- 5.29. 1) 5 і 6.
- 5.30. 2) 2.
- 5.34. 2)  $2,5$ .
- 5.35. 1)  $-0,25$ .
- 5.36. 2) Не мае каранёў; 4) мае карані; 6) мае карані; 8) не мае каранёў.
- 5.37. 1) Мае карані; 3) мае карані; 5) мае адзіны карань; 7) не мае каранёў.
- 5.38. 2) Не мае каранёў; 4) мае адзіны карань; 6) мае адзіны карань; 8) мае адзіны карань.
- 5.39. 1)  $-2,5$ ; 2; 3)  $\frac{1}{3}$ ; 3; 5)  $\frac{1}{2}$ ; 7)  $0,5$ .



- 5.40. 2)  $\frac{3 \pm \sqrt{69}}{2}$ ; 4)  $\frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$ ; 6) 1,6; 4; 8)  $-\frac{1}{30}$ ;  $\frac{1}{10}$ .
- 5.41. 1) 2; 10; 3)  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{6}$ ; 5) -2; -0,5; 7) 1,5; 3.
- 5.42. 2) 0,2; 1; 4) 16; 36; 6) -1;  $2\frac{7}{15}$ ; 8) 0,2.
- 5.43. 1) -4; 5; 3) 1; 25; 5) 4; 7.
- 5.44. 2) -3; 5; 4)  $-\frac{1}{3}$ ; 4; 6) -7; 6.
- 5.45. 1) Няма каранёў; 3)  $-3\frac{2}{3}$ ; 2; 5) -0,2; 1,7; 7) -4; 0,5.
- 5.46. 2) 1,75; 4; 4) 0; 2; 6) -2; 3.
- 5.47. 1) -12; -2; 3) ні пры якіх.
- 5.48. 2) 2; 3; 4) -1; 6.
- 5.49. 1) 25; 3) 0,6; 2; 5) 7.
- 5.50. 2)  $\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2}$ ; 4) -1;  $-\sqrt{2}$ ; 6)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} \pm \sqrt{24 - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}}{2(\sqrt{3} - 2)}$ .
- 5.51. 1)  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4$ ; 3)  $5\sqrt{2} + 4$ ;  $-5\sqrt{2} - 13$ .
- 5.52. 2) 0;  $\frac{1}{6}$ ; 1; 4) 0; 4; 25.
- 5.53. 1) -2; -1; 4; 3) 0,5;  $\frac{1}{3}$ ; 4.
- 5.54. 2) -1,25; 1; 4)  $\frac{3}{5}$ ;  $11\frac{124}{165}$ .
- 5.55. 1)  $-\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{7} - 1$ .
- 5.56. 2)  $-3 + \sqrt{2} > -9$ .
- 5.57. 1)  $p < 1$ ; 3)  $p < 0,25$ ; 5)  $p > -25$ .
- 5.58. 2)  $p < 0,125$ ; 4)  $p < 2,625$ ; 6)  $p < 24,45$ .
- 5.59. 1) 36; 3)  $\pm 28$ ; 5)  $-\frac{2}{9}$ .
- 5.60. 2)  $-\frac{a}{2}$ ;  $-a$ ; 4)  $-1,5c$ .
- 5.61. 1) -3; 5k; 3)  $k + 1$ ;  $2k - 3$ .
- 5.62. 1) -3; -2 або 2; 3; 2) -4; -6 або 4; 6.
- 5.63. 1) 4; 6; 8; 2) 9; 10; 11.
- 5.64. 1) 49; 2) 62.
- 5.65. 1) 3; 4; 2) 1; 2; 3.
- 5.66. 1) 29; 2) 9.
- 5.67. 1) 12; 2) 8.
- 5.68. 1) 10; 2) 36.
- 5.69. 1) 2; 2) 3; 3) 7; 4) 6.
- 5.70. 1) 2.
- 5.71. 1) 19; 2) 10.
- 5.72. 2)  $(x - 7)(x + 5)$ ; 4)  $(x - 10)(x + 6)$ ; 6)  $(x + 6)(x + 19)$ ; 8)  $(x - 8)(x - 9)$ .
- 5.73. 1)  $(x - 1)(3x + 1)$ ; 3)  $(2x - 1)(x - 2)$ ; 5)  $(5x + 3)(3x + 5)$ .
- 5.74. 2)  $(x - a)(x + 2a)$ ; 4)  $(x - 6a)(x + 4a)$ .

- 5.75. 1)  $\frac{1}{3}(3x-3+2\sqrt{6})(3x-3-2\sqrt{6})$ ; 3)  $\frac{(4x+1)(x-25)}{5}$ ;  
5)  $\frac{1}{4}(2x+\sqrt{2}+\sqrt{10})(2x+\sqrt{2}-\sqrt{10})$ .
- 5.77. 1)  $\frac{x-4}{x-5}$ ; 3)  $\frac{x+6}{2x+3}$ .
- 5.78. 2)  $\frac{y+5}{2y+1}$ ; 4)  $-\frac{p+5}{p+6}$ ; 6)  $\frac{k+3}{4k-5}$ .
- 5.79. 1) Калі выраз абазначыць  $A$ , то пры  $x=4$  і  $x=5$   $A$  не існуе, калі  $x=-5$ , то  $A=1,5$ ; калі  $x=-4$ , то  $A=1\frac{1}{3}$ .
- 5.80. 2) 1.
- 5.81. 1)  $\frac{2a}{a+3}$ .
- 5.82. 2) 13; 42; 4) -17; 66; 6) 0; -15; 8) 42; 0.
- 5.83. 1)  $1\frac{2}{3}$ ;  $-\frac{2}{3}$ ; 3) 1,6; 0,6; 5) няма каранёў; 7) 6,76; 0.
- 5.84. 2) Розныя; 4) плюс; 6) розныя; 8) мінус.
- 5.85. 1) Мінус; 3) плюс; 5) плюс; 7) розныя.
- 5.86. 2) Няма каранёў; 4) мінус.
- 5.87. 1) 18.
- 5.88. 2) -21; 4) 0.
- 5.89. 1) 66; 3) 0,72; 5) 0,34.
- 5.90. 2) 16,04; 4) 4,808.
- 5.91. 1) 410,0625; 3) -0,125.
- 5.92. 2)  $x^2-8,2x+16=0$ ; 4)  $x^2-12,25=0$ ; 6)  $x^2-18x+81=0$ .
- 5.93. 1)  $x^2+6x-6=0$ ; 3)  $x^2-8x-12=0$ ; 5)  $x^2-3x+1=0$ .
- 5.94. Напрыклад, 2)  $36x^2-5x-1=0$ ; 4)  $x^2-14x+49=0$ .
- 5.95. 1) -2; 4; 3) -2; 9; 5) 8; 11; 7) -8; 6.
- 5.96. 2) -4; 14; 4) 5; 8; 6) 1; 5613.
- 5.97. 1) 3; 3) 8; 5) 5; 8.
- 5.98. 2) 5 і -3; 4) 5 і 3.
- 5.99. 1) Не з'яўляюцца; 3) не з'яўляюцца.
- 5.100. 2) Правільна; 4) няправільна.
- 5.101. 1)  $5x^2-32x+44=0$ .
- 5.102. 2)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$ ;  
4)  $(-\infty; -\frac{7+\sqrt{93}}{2}) \cup (-\frac{7+\sqrt{93}}{2}; \frac{-7+\sqrt{93}}{2}) \cup (\frac{-7+\sqrt{93}}{2}; +\infty)$ ;  
6)  $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ .
- 5.104. 2)  $\pm\sqrt{0,4}$ ; 4)  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\pm\sqrt{3}$ ; 6)  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- 5.105. 1)  $\pm 2$ ; 3) няма каранёў; 5)  $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- 5.106. 2) 0;  $\pm\frac{1}{23}$ ; 4) 0;  $\pm\frac{21}{8}$ ; 6) 0.
- 5.107. 1)  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ; 3) няма каранёў; 5)  $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

- 5.108. 2) Няма каранёў; 4)  $\pm\sqrt{9 \pm 6\sqrt{2}}$ .
- 5.109. 1) Не з'яўляецца.
- 5.110. 2)  $(x^2 - 2)(x^2 - 12)$ ; 4)  $(x - 3)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$ ;  
6)  $(x - 6)(x - 1)(x + 1)(x + 6)$ .
- 5.111. 1)  $(3x^2 - 1)(x^2 - 2)$ ; 3)  $-(4x^2 + 3)(3x^2 - 2)$ ; 5)  $-(x^2 + 1)(5x^2 - 4)$ .
- 5.112. 2)  $\frac{p^2 - 5}{p^2 - 6}$ ; 4)  $\frac{y^2 - 16}{y^2 - 49}$ .
- 5.113. Напрыклад, 1)  $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ ; 3)  $x^4 - 11x^2 - 80 = 0$ ;  
5)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ .
- 5.114. Напрыклад, 2)  $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$ ; 4)  $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ ;  
6)  $49x^4 - 1229x^2 + 100 = 0$ .
- 5.115. 1) 0; 3) 0.
- 5.117. 1)  $a > 36$ ; 3)  $a > -20$ .
- 5.118. 2) а)  $k < -2\sqrt{21}$ ; б) ні пры якіх; в)  $k > -2\sqrt{21}$ .
- 5.119. Напрыклад, 1)  $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$ .
- 5.120. 2) 0;  $\pm\sqrt{6}$ ; 4)  $\pm\frac{1}{3\sqrt{5}}$ ;  $\pm\sqrt{1,4}$ .
- 5.121. 1)  $\pm\sqrt{2}$ ;  $\pm\sqrt{3}$ ; 3)  $-0,5$ ;  $4,5$ .
- 5.122. 2)  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{5}{4}$ ; 4)  $1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ .
- 5.123. 1)  $-4$ ; 3)  $-3$ ; 2.
- 5.124. 2)  $25$ ; 4)  $9$ ; 6)  $7$ ;  $39$ .
- 5.125. 1)  $-1$ ; 4)  $3$ ;  $\pm 3\sqrt{2}$ .
- 5.126. 2)  $-\sqrt{3}$ ; 1;  $\sqrt{3}$ ; 4)  $\frac{1}{3}$ .
- 5.127. 1)  $-1$ ; 5; 3)  $-7$ ; 2; 5) няма каранёў.
- 5.128. 2) 3; 4; 4) 1; 2,4; 6)  $\frac{7 - \sqrt{129}}{4}$ ; 0; 3,5;  $\frac{7 + \sqrt{129}}{4}$ .
- 5.129. 1) Няма каранёў; 3) няма каранёў; 5) няма каранёў; 7) няма каранёў.
- 5.130. 2)  $-1$ ;  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $-1\frac{2}{3}$ ; 2; 6)  $-1$ ; 1.
- 5.131. 1)  $-2$ ; 3; 3)  $\frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4}$ ;  $-3,5$ ; 0; 5)  $\frac{-7 \pm \sqrt{129}}{10}$ .
- 5.132. 2)  $-2$ ; 4) 6; 6)  $-5$ ; 4; 6; 8)  $-2$ ; 0; 1.
- 5.133. 1)  $\pm 7$ ; 3)  $-5$ ; 5; 5)  $\pm\frac{1}{3}$ ;  $\pm 1$ .
- 5.134. 2) 3; 4)  $-\frac{1}{7}$ ; 6)  $-1$ ; 1; 8) 3; 10)  $\frac{-4 - \sqrt{70}}{9}$ .
- 5.135. 1)  $\frac{\sqrt{29} - 1}{2}$ ; 3)  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .
- 5.136. 2) 3; 4) 5.

## Раздзел 6

- 6.1. 1)  $(-3)^2 > (-2)^2$ ; 3) роўныя; 5)  $\left(2\frac{3}{4}\right)^2 > \left(2\frac{4}{9}\right)^2$ ; 7)  $(-37,4)^2 > 0$ ;  
9)  $(28,7)^2 > 0$ ; 11)  $(-3)^2 < 7^2$ .
- 6.2. 2)  $\pm 0,2$ ; 4)  $\pm 1,1$ ; 6)  $\pm 16$ .
- 6.3. 1) Належыць; 3) не належыць; 5) належыць; 7) не належыць; 9) належыць.
- 6.4. 2)  $(2; 4)$ ; 4)  $(-\sqrt{7}; -7)$ ; 6)  $(-2,4; 0)$ ; парабале належаць пункты  $B, C, M$ .
- 6.5. 1) Належаць; 3) не належаць; 5) належаць.
- 6.6. 2)  $\pm 3$ ; 4)  $\pm\sqrt{13}$ ; 6)  $\pm 2\sqrt{3}$ .
- 6.7. 1) Мае; 3) не мае; 5) мае.
- 6.8. 2), 4), 6)  $y = x^2$ ; а)  $(0; 0)$ ; б) I і II; в)  $x = 0$ ; г) пры ўсіх, акрамя  $x = 0$ ;  
д) ні пры якіх; е)  $x = 0$ .
- 6.9. 1)  $(-2; 2)$ ; 3)  $x \neq 0$ .
- 6.11. 1) Няправільна; 3) няправільна.
- 6.12. 2)  $(-4; 64)$ ,  $(4; 64)$ ; 4)  $\left(-\frac{1}{14}; \frac{1}{49}\right)$ ;  $\left(\frac{1}{14}; \frac{1}{49}\right)$ ; 6) няма.
- 6.13. 1)  $(-6; -6)$ ,  $(6; -6)$ ; 3)  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{54}\right)$ ;  $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{54}\right)$ ; 5) няма.
- 6.14. 2)  $y = -3x^2$ ; 4)  $y = -0,4x^2$ .
- 6.15. 1) 5; 3)  $a \neq 0$ ; 5) 0,25.
- 6.16. 2)  $y = 8x^2$ ; 4)  $y = x^2$ .
- 6.17. 1) -4; 3)  $-\frac{1}{9}$ .
- 6.18. 2)  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ; 4) ні пры якіх.
- 6.19. 1)  $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ ; 3)  $(-1; 1)$ .
- 6.20. 1)  $p \neq 2$ ; 2)  $p = 2$ .
- 6.21.  $y = 6x^2$ .
- 6.22. 2)  $y = -\frac{1}{3}x^2$ ,  $x \leq 0$ ; 4)  $y = 0,25x^2$ ,  $x \leq 0$ .
- 6.24. Зрух уздоўж восі  $Oy$ : 2) на 1 адзінку ўніз; 4) на 9 адзінак уверх.
- 6.25. 1)  $y = 7x^2 + 3$ ; 3)  $y = 7x^2 - 7$ ; 5)  $y = 7x^2 - 2,1$ ; 7)  $y = 7x^2 + 0,9$ .
- 6.26. 2)  $y = -3,2x^2 - 4,6$ ; 4)  $y = -3,2x^2 + 7$ .
- 6.27. Зрух уздоўж восі  $Oy$ : 1) на 6 адзінак уверх; 3) на  $\sqrt{3}$  адзінкі ўніз.
- 6.28. 2) Расцяжэнне ўздоўж восі  $Oy$  адносна восі  $Ox$  у 5 разоў і зрух уздоўж восі  $Oy$  атрыманай парабалы на 6 адзінак уніз; 4) сцісканне ўздоўж восі  $Oy$  адносна восі  $Ox$  у 9 разоў і зрух уздоўж восі  $Oy$  атрыманай парабалы на 49 адзінак уверх.
- 6.29. 1)  $(-3; -8)$ ,  $(3; -8)$ ; 3)  $(-2; 3)$ ,  $(2; 3)$ ; 5)  $(-2; -10)$ ,  $(2; -10)$ ; 7)  $(-3; 9)$ ,  $(3; 9)$ .
- 6.30. 2)  $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ ,  $(1; 5)$ ; 4) няма пунктаў перасячэння; 6)  $(-3; 2)$ .
- 6.31. 1) Мае;  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; 0\right)$ ; 3) не мае; 5) мае;  $(-2; -10)$ ;  $(2; -10)$ .
- 6.32. 2) Мае;  $(0; 2)$ ; 4) мае;  $(-1; -1)$ ,  $(1; -1)$ , 6) мае;  $\left(-\frac{\sqrt{130}}{20}; \frac{41}{40}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{130}}{20}; \frac{41}{40}\right)$ .

- 6.33. 1) (0; -3); 3) (0; 1,5); 5) (0; -4,125).  
6.34. 2)  $y = x^2 - 3$ ; 4)  $-x^2 - 1$ .  
6.35. 1) а) (0; 2); б)  $x = 0$ ; в) уверх; г) няма; д) (0; 2); 3) а) (0; 5); б)  $x = 0$ ; в) уніз; г)  $(-\sqrt{5}; 0)$ ;  $(\sqrt{5}; 0)$ ; д) (0; 5).  
6.36. 2) 1; 4) -6,7.  
6.37. 1)  $y = -2x^2 + 1$ ,  $x \leq 0$ ; 3)  $y = -3x^2 + 3$ ,  $x \geq 0$ .  
6.39. Зрух уздоўж восі  $Ox$ : 1) на 3 адзінкі ўправа; 3) на 5 адзінак управа; 5) на  $\sqrt{7}$  адзінкі ўлева.  
6.40. 2)  $y = 2,3(x - 5)^2$ ; 4)  $y = 2,3(x + 2,3)^2$ .  
6.41. Зрух уздоўж восі  $Ox$ : 1) на 2 адзінкі ўправа; 3) на 7,3 адзінкі ўлева.  
6.42. Зрух уздоўж восі  $Ox$ : 2) на 1 адзінку ўправа; 4) на 81 адзінку ўлева.  
6.43. 1) (-4; 4); (0; 4); 3) (0; 25); (3; 49).  
6.44. 2) (2,5; 0); 4) (-0,8; 0); 6) (5; 0).  
6.45. 1)  $y = 0,25(x - 3)^2$ ; 3)  $y = -0,75(x + 4)^2$ .  
6.46. 2) Не належыць; 4) не належыць.  
6.47. 1)  $x = -5$ ; 3)  $x = 0$ ; 5)  $x = -p$ .  
6.48. 2) а) Няправільна; б) няправільна; в) няправільна; 4) а) няправільна; б) няправільна; в) няправільна; 6) а) няправільна; б) няправільна; в) няправільна.  
6.49. 1) 0,2; 3)  $-\frac{5}{144}$ ; 5)  $\frac{20}{121}$ .  
6.50. 2)  $m > 0$ ;  $p < 0$ ; 4)  $m > 0$ ;  $p > 0$ ; 6)  $m < 0$ ;  $p < 0$ .  
6.51. 1) Зрух уздоўж восі  $Ox$  на 5 адзінак управа і ўздоўж восі  $Oy$  на 1 адзінку ўверх; 3) зрух уздоўж восі  $Ox$  на 2 адзінкі ўлева і ўздоўж восі  $Oy$  на 7 адзінак уніз.  
6.52. 2) Спачатку графік  $y = x^2$  адлюстравець сіметрычна адносна восі  $Ox$  і да атрыманага графіка ажыццявіць: 2) зрух уздоўж восі  $Ox$  на 2 адзінкі ўправа і ўздоўж восі  $Oy$  на 5 адзінак уверх; 4) зрух уздоўж восі  $Ox$  на 9 адзінак улева і ўздоўж восі  $Oy$  на 7 адзінак уніз.  
6.53. 1)  $y = 7(x + 3)^2 - 2$ ; 3)  $y = 7(x - 0,5)^2 + 5$ .  
6.54. 2) (-3,5; 3,5); 4) [-3,5; 3,5].  
6.55. а) (1; 3); б)  $x = 1$ ; в) уніз; г) (-2,5; 0), (2,5; 0); д) (0; 2,5).  
6.56. 2) Зрух уздоўж восі  $Ox$  на 1 адзінку ўправа.  
6.57. 1) Зрух уздоўж восі  $Oy$  на 5 адзінак уніз; 3) сіметрыя адносна восі  $Ox$  і зрух уздоўж восі  $Oy$  атрыманага графіка на 10 адзінак уверх.  
6.58. 2) Зрух уздоўж восі  $Oy$  на 9 адзінак уніз; 4) сіметрыя адносна восі  $Ox$  і зрух уздоўж восі  $Oy$  атрыманага графіка на 16 адзінак уверх.  
6.59. 1)  $x = 4$ ; 3)  $x = -7$ .  
6.60. 2) (-3; -5); 4)  $(\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ ; 6)  $(c; -p)$ .  
6.62. 2) а) (2; 1); б)  $x = 2$ ; в) уверх; г) няма; д) (0; 5); 4) а) (2,5; -2,5); б)  $x = 2,5$ ; в) уніз; г) няма; д) (0; -8,75); 6) а) (-1,5; 5,5); б)  $x = -1,5$ ; в) уніз; г)  $(\frac{-3 \pm \sqrt{22}}{2}; 0)$ ; д) (0; 3,25).  
6.63. 1)  $y = (x + 2)^2 - 2$ ; а) (-2; -2); б)  $x = -2$ ; в) уверх; г)  $(-2 \pm \sqrt{2}; 0)$ ; д) (0; 2); 3)  $y = -(x - 2)^2 - 1$ ; а) (2; -1); б)  $x = 2$ ; в) уніз; г) няма; д) (0; -5).  
6.64. 2) Не належыць; 4) належыць.

- 6.65. 1) Не мае; 3) не мае.  
 6.66. 2) Мае; 4) не мае.  
 6.67. 1)  $-3$ ; 1; 3)  $\frac{9 \pm \sqrt{21}}{3}$ .  
 6.68. 2) Ні пры якіх; 4)  $p < 0$ .  
 6.69. 1) а) Няправільна; б) няправільна; в) няправільна; 3) а) няправільна; б) няправільна; в) няправільна.  
 6.70. 2)  $s < 0$ ;  $t > 0$ ; 4)  $s < 0$ .  
 6.71. 1)  $y = (x + 10)^2 - 94$ ; 3)  $y = -(x + 4)^2 + 19$ ; 5)  $y = 4(x - 1,5)^2 - 1$ .  
 6.72. 2)  $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4\frac{1}{2}$ ; 4)  $y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$ .  
 6.73. 1) (0,5; 4,25); 3) (4,5; -18,25).  
 6.74. 2) (-1,5; -16); (-3,5; 0); (0,5; 0); (0; -7); 4) (-2; -9); (-8; 0); (4; 0); (0; -8).  
 6.75. 1) (-5; 0), (1; 0), (0; -2,5); 3) (-3,5; 0), (2; 0), (0; 14).  
 6.76. 2) а) (-0,5; -9); б)  $x = -0,5$ ; в) уверх; г) (-2; 0), (1; 0); д) (0; -8);  
 4) а) (-2,5; 2,25); б)  $x = -2,5$ ; в) уніз; г)  $\left(\frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ ,  $\left(\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ ; д) (0; 1).  
 6.77. 1)  $y = 5(x + 0,7)^2 + 18,55$ ; 3)  $y = -7\left(x + \frac{1}{14}\right)^2 - 6\frac{27}{28}$ .  
 6.78. 2) -4; 0; 4) -1; 23.  
 6.79. 1) а)  $0 < t < \frac{2}{3}$ ; б)  $t < 0$ ,  $t > \frac{2}{3}$ ; в)  $t = \frac{2}{3}$ ; 3) а)  $t < 0$ ,  $t > \frac{1}{16}$ ; б)  $0 < t < \frac{1}{16}$ ;  
 в)  $t = \frac{1}{16}$ .  
 6.80. 2)  $p = -8$ ;  $q = 16$ ; 4)  $p = -4$ ;  $q = 0$ .  
 6.81. 1) II або III; 3) II або III.  
 6.82. 2)  $m < 0$ ;  $n > 0$ ;  $k > 0$ ; 4)  $m < 0$ ;  $n < 0$ ;  $k < 0$ .  
 6.83. 1)  $a < 0$ ;  $b > 0$ ;  $c < 0$ ; 3)  $a < 0$ ;  $b > 0$ ;  $c < 0$ ; 5)  $a > 0$ ;  $b > 0$ ;  $c > 0$ ;  
 7)  $a < 0$ ;  $b < 0$ ;  $c < 0$ .

### Матэрыялы для паўтарэння

- 1) 0,35; 3) 1.
- 2)  $\frac{1}{20}$ ; 4)  $\frac{9}{49}$ ; 6) 256; 8) 625; 10)  $\frac{1}{625}$ ; 12)  $-\frac{512}{729}$ .
- 1)  $\frac{14}{1125}$ ; 3)  $4\frac{63}{64}$ ; 5) 0.
- 2) -2.
- 1)  $\frac{m^6 x^2}{n^8 y^2}$ ; 3)  $\frac{4a}{5y^4}$ ; 5)  $\frac{13mnp^3t}{6}$ .
- 2)  $-30a^4b^4c^4$ ; 4)  $-\frac{3x^2y^2}{49z^9}$ ; 6)  $-\frac{3a^3b^{15}}{24010mn}$ ; 8)  $5\frac{1}{3}a^5mx$ ; 10)  $-18x^4y^5z^2$ .
- 1)  $0,5a^8x^5y^2$ ; 3)  $\frac{1024}{3}b^{12}m^3n$ .
- 2)  $5a^2 + 16a + 20$ ; 4)  $2b^2 - 20b + 2$ ; 6)  $6ab$ .
- 1)  $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$ ; 3)  $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 + 1)$ .

10. 2)  $4(mn - 5)(mn + 5)$ ; 4)  $-(5m + 4n)(m + 2n)$ .  
11. 1)  $(m - 3)^2$ ; 3)  $(m^2 - 12)(m^2 - 2)$ .  
12. 2)  $\frac{6 - c}{c}$ ; 4)  $\frac{2pq - 4p^2}{2p + q}$ ; 6)  $\frac{b}{2a^2}$ .  
13. 1)  $\frac{a}{a + b}$ ; 3)  $2a - 50$ .  
14. 2)  $\frac{x + 3}{x - 2}$ ; 4)  $x - 2y$ .  
15. 1)  $\frac{1}{a^2b}$ .  
16. 2)  $-20$ ; 4)  $5$ .  
17. 1)  $25$ .  
18. 2)  $\frac{64}{625}$ .  
19. 1)  $2\frac{14}{17}$ .  
22. 2)  $-10$ ; 4)  $9$ ; 6)  $3,25$ .  
23. 1)  $-\frac{10}{41}$ ; 3) каранёў няма; 5) каранёў няма.  
24. 2)  $5,75$ .  
25. 1)  $2$ ; 3)  $1\frac{2}{3}$ .  
26. 2)  $\pm 4$ ; 4) няма каранёў.  
27. 1)  $18$ .  
28. 2)  $\frac{2}{3}$ .  
29.  $98$ .  
30.  $100$  г.  
31.  $374$ .  
32.  $360$ .  
33.  $55$  км.  
34.  $300$  м.  
35.  $74$ .  
36.  $57$ .  
37.  $30$  г.  
38.  $20$  г.  
39.  $280$  кг.  
40.  $11$ .  
41.  $15$ .  
42. 2)  $-0,2 : 5$ ;  $0,4 : 8$ ;  $(-56) : (-7)$ .  
43. 1)  $6(-5)(-0,2) > -0,4(-5)(-3)$ .  
44. 2) Менш; 4) менш; 6) менш.  
45. 1) Менш; 3) больш; 5) больш.  
46. 1) Правільна; 2) няправільна.  
47. 1) Няправільна; 2) правільна.  
48. 2)  $x < y$ ; 4)  $x > y$ .

49. 1) Правільна; 3) няправільна; 5) правільна.  
 50. 2) Можа; 4) можа.  
 51. 1) B; 3) C.  
 52. 2)  $a > b - 3$ ; 4)  $a + 2,9 > b + 1,01$ .  
 53. 1)  $a + 32$ ;  $a + 2,9$ ;  $a$ ;  $b$ ;  $b - 3\frac{1}{2}$ ;  $b - 7,9$ .  
 54. 2) Можа.  
 55. 1)  $3m - 2(m + 1) < n + 8$ ;  
 3)  $-(5m - 2)^2 + 5m(m - 3) - 4m < -(2n - 3)(8n + 5) + (4n - 3)^2 + 11n$ .  
 56. 2)  $-4 < k - p - 14$ ; 4)  $k > p + 10$ ; 6)  $p - 2 < k - 12$ ; 8)  $k - 4 > p + 6$ .  
 57. 1)  $(a - b)^2 > 7a - 7b$ ; 3)  $a^3 - b^3 > 7a^2 + 7ab + 7b^2$ .  
 58. 2)  $(a - b)^2 > 3 - 3ab + b^2$ ; 4)  $a^2 + b^2 > 3 - ab + b^2$ ; 6)  $a(a + b) > 3$ .  
 59. 1) Не заўсёды; 3) няправільная.  
 60. 2)  $3c^2km - 5c^2k < 2c^2kn + 8c^2k$ ; 4)  $3ckmp^2 - 5ckp^2 > 2cknp^2 + 8ckp^2$ ;  
 6)  $3ck^3mp^2 - 5ck^3p^2 > 2ck^3np^2 + 8ck^3p^2$ ; 8)  $-12cm + 20c > -8cn - 32c$ .  
 61. 1)  $\frac{2-3x}{pt^2} > \frac{17y}{pt^2}$ ; 3)  $\frac{2-3x}{k^3pt} > \frac{17y}{k^3pt}$ ; 5)  $\frac{2-3x}{kpt^2} < \frac{17y}{kpt^2}$ ;  
 7)  $\frac{3x-2}{kpt} < \frac{17y}{-kpt}$ .  
 62. 2) Няправільна; 4) няправільна.  
 63. 1) Аднаго знака; 3) аднаго знака.  
 64. 2) Няправільна.  
 65. 1) Правільна.  
 66. 2)  $a^2 + b > t + 1$ ; 4)  $3a^2 < 7m - 3$ .  
 67. 1)  $\frac{4a}{a^2 - 16} > \frac{10}{b(b^2 - 4)}$ .  
 68. 2) Правільна; 4) правільна; 6) няправільна; 8) не заўсёды; 10) не заўсёды.  
 71. 1)  $-54 < -6c \leq -36$ ; 3)  $12 \leq 3c - 6 < 21$ ; 5)  $-3\frac{1}{2} \leq \frac{c}{4} - 5 < -2\frac{3}{4}$ ;  
 7)  $\frac{7}{9} < \frac{7}{c} \leq 1\frac{1}{6}$ .  
 72. 2)  $1,1 < 0,5b - 0,3a < 1,9$ ; 4)  $-21 < a^2 - b^2 < -7$ ; 6)  $72 < a^3 + b^3 < 152$ ;  
 8)  $20 < \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}b^3 < 44\frac{3}{4}$ .  
 73. 1) 15; 3) 0.  
 74. 2) 1.  
 75. 1)  $-2\frac{2}{15}$ ;  $2\frac{1}{2}$ ; 3) 0; 33.  
 76. 1.  
 77. Ад 667 да 945.  
 78. 1) Ад 810 кг да 1140 кг; 2) ад 5 да 95.  
 79. Ад 555,9 г да 568,86 г.  
 80. Ад 20 да 30.  
 81. 1) З'яўляецца; 3) з'яўляецца; 5) з'яўляецца.  
 82. 2) Не з'яўляецца; 4) з'яўляецца; 6) з'яўляецца; 8) не з'яўляецца; 10) не з'яўляецца.



83. 1)  $-9$ ; 3)  $-3$ ; 3)  $-9$ .
84. 2)  $\pm a^5$ ; 4)  $\pm b^7$ ; 6)  $\pm t^{11}$ .
85. 1)  $\pm 2a$ ; 3)  $\pm a^2 b^3$ ; 5)  $\pm \frac{7}{a^6}$ ; 7)  $\pm \frac{a}{b^4}$ ; 9)  $\pm(a-b)$ ; 11)  $\pm(a+3)$ .
86. 2)  $\pm 13$ ; 4)  $\pm 48$ ; 6)  $\pm 1$ ; 8)  $\pm 3$ ; 10)  $\pm 15$ ; 12)  $\pm 110$ .
87. 1) Існує; 3) існує; 5) не існує; 7) не існує; 9) існує; 11) існує.
88. 2) 8; 4) 0; няма; 4) 20; 10; няма; няма.
89. 1) Правильная; 3) няправильная.
90. 2) Няправильна; 4) няправильна.
91. 1) Няправильна; 3) правильна.
92. 2) 25; 4) 9; 6) 0,64; 8) 0,36.
93. 1)  $\pm 5$ ; 3)  $\pm 7$ ; 5)  $\pm 11$ ; 7)  $\pm 12$ .
94. 2) 4; 6; 4)  $-\frac{2}{3}$ ; 2; 6)  $-1,5$ ; 2.
95. 1)  $-3$ ; 3) няма каранёў; 5)  $-49$ ; 7) няма каранёў.
96. 2) 4 см; 4) 1,3 см.
97. 1) 6 см; 3) 0,9 см.
98. 2)  $[-2; 3) \cup (3; +\infty)$ ; 4)  $[2; +\infty)$ ; 6)  $(-\infty; 8)$ .
99. 1) 0; 12; 12; 18; 18; 3) 0,5; 0; 1; 1,25; 0,25.
100. 2) Правильна; 4) правильна.
101. 1) 4; 1; 0; 9; 25; 3) 0,8; 0,1; 0; 2,7; 12,5.
102. 2)  $2\frac{6}{17}$ ; 4)  $105\frac{15}{17}$ .
103. 1) Няправильна.
104. 2) Правильна.
105. 1)  $\sqrt{26} > 4$ ; 3)  $-\sqrt{21} > -\sqrt{40}$ ; 5)  $\sqrt{3} > -\sqrt{2}$ ; 7)  $\sqrt{16} + \sqrt{9} > \sqrt{23}$ ;  
9)  $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} < \sqrt{145}$ .
106. 2)  $\sqrt{54} < 7,5$ ; 4)  $3,5 > \sqrt{12}$ ; 6)  $\sqrt{1058,4} > 32,4$ .
109. 1)  $\sqrt{129}$ ;  $\sqrt{114}$ ;  $\sqrt{111}$ ; 3)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{13}}$ ;  $\sqrt{\frac{4}{11}}$ .
110. 2)  $[0; 0,16]$ ; 4)  $(36; +\infty)$ .
111. 1)  $(-\infty; -23)$ ; 3)  $[-5; 95)$ .
112. 2)  $(-4; -3)$ ; 4) няма рашэнняў.
113. 1) Няма рашэнняў.
114. 2)  $(-\infty; -54) \cup (44; +\infty)$ .
115. 1)  $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$ ; 3)  $[-1; 3]$ .
116. 2)  $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$ ; 4) няма рашэнняў; 6) няма рашэнняў.
117. 1)  $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ ; 3) няма рашэнняў.
118. 2) Няма рашэнняў; 4) няма рашэнняў.
119. 1)  $(-\infty; -1,75) \cup (2,25; +\infty)$ ; 3)  $(-4; \frac{2}{3})$ .
120. 2)  $3x^2 - 7x - 10 = 0$ ; 3;  $-7$ ;  $-10$ ; 4)  $x^2 + 7x - 2 = 0$ ; 1; 7;  $-2$ .
121. 1) Раўназначныя; 3) не раўназначныя.
122. 2)  $\pm 0,8$ ; 4)  $\pm \frac{5}{9}$ ; 6)  $\pm 1,875$ .

123. 1)  $-3$ ;  $-\frac{2}{3}$ ; 3)  $-\frac{1}{3}$ ;  $1\frac{1}{2}$ ; 5)  $\pm\sqrt{21}$ .
124. 2)  $-10$ ; 4)  $-1$ ; 9.
125. 1)  $-3$ ; 4)  $3$ ; 2)  $3$ ; 5)  $-\frac{4}{3}$ ;  $\frac{2}{7}$ .
126. 2)  $\pm 2$ ; 4)  $-0,4$ ; 0.
127. 1)  $\pm\sqrt{7}$ ; 3)  $\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ .
128. 2)  $-\frac{2}{7}$ ; 3)  $-0,2$ ; 2)  $6$ ;  $-2,5$ .
129. 1)  $-10$ ;  $-2$ ; 3)  $-6$ ; 5)  $-3$ ;  $-1$ ; 7)  $-7$ ;  $-3$ ; 9)  $\frac{1\pm 3\sqrt{2}}{2}$ .
130. 2)  $-0,25$ ; 4)  $-\frac{1}{3}$ .
131. 1)  $-59$ ;  $53$ ; 3)  $-5\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ; 5)  $\frac{3\pm\sqrt{9+32\sqrt{3}}}{8}$ ; 7)  $\frac{2-5\sqrt{3}}{5}$ ;  $\sqrt{3}$ .
132. 2)  $\frac{1}{4}$ .
133. 1)  $(x-1)^2-9$ ; 3)  $(x+2)^2-16$ ; 5)  $(x-0,1)^2+2,49$ .
137. 1)  $\frac{3}{7}$ .
138. 2) 1.
139. 1) 0; 4) 3)  $\frac{13}{14}$ .
140. 2) Калі  $k=p=0$ , то  $x$  — любы; калі  $k\neq 0$ , то  $x=\pm\frac{p}{k}$ ; калі  $k=0$ ,  $p\neq 0$ , то каранёў няма; 4) калі  $t=0$ , то каранёў няма; калі  $t\neq 0$ ,  $c=0$ , то  $x$  — любы; калі  $t\neq 0$ ,  $c\neq 0$ , то каранёў няма.
141. 1)  $\pm\sqrt{6b^2+2}$ .
142. 2) Калі  $n=-\frac{4}{3}$ , то  $x$  — любы; калі  $n\neq-\frac{4}{3}$ , то каранёў няма.
143. 1)  $-b$ ;  $\frac{b}{3}$ .
144. 2)  $2k$ ;  $4k$ ; 4)  $k$ ;  $12k$ ; 6)  $-6k$ ;  $k$ ; 8)  $k$ ; 1.
145. 1)  $x^2-4x+1=0$ ; 3)  $x^2-2\sqrt{5}x+2=0$ .
146. 2)  $-12$ ; 1; 4)  $-3$ ; 6)  $-7007$ ; 1; 8) 6; 10) 1.
147. 1) З'яўляюцца; 3) з'яўляюцца.
148. 2)  $(x-5)(3x+8)$ ; 4)  $(7x-2)(3x+4)$ ;  
6)  $\frac{1}{4}(2x+\sqrt{2}+\sqrt{34})(2x+\sqrt{2}-\sqrt{34})$ .
149. 1)  $\frac{x-5}{x-7}$ ; 3)  $\frac{x+4}{2x-3}$ ; 5)  $\frac{5}{3x-1}$ ; 7)  $-\frac{t+7}{t+2}$ .
150. 2) 3; 4)  $\frac{2a}{a+1}$ .
151. 1)  $-1,5$ ; 0; 3)  $\pm\sqrt{2}$ ; 0.
152. 2) 2; 6; 4)  $-5$ ; 1.
153. 1)  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; 3)  $\pm\frac{\sqrt{7+\sqrt{57}}}{2}$ ; 5)  $\pm\sqrt{\frac{12}{11}}$ ; 7)  $\pm 3\sqrt{2}$ .

154. 2) 0;  $\pm 5$ ; 4) 0; 6)  $\pm 1$ ; 8)  $\pm \frac{\sqrt{15}}{3}$ .
155. 1)  $(x-5)(x-2)(x+2)(x+5)$ ; 3)  $(x-1)(2x-1)(x+1)(2x+1)$ .
156. 2)  $\pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{129}}{32}}$ .
157. 1)  $\pm \frac{1}{2}$ ;  $\pm 2$ ; 3)  $\pm 1$ .
158. 2) -6; 2; 4) -5,5; -1,5; 6) -8; 0.
159. 1) 6; 3) 10.
160. 2)  $-1\frac{1}{2}$ ; -1;  $-\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{3}$ ; 4) няма каранёў.
161. 1)  $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ ;  $-\frac{3}{2}$ ; 1; 3) -3; 0; 7.
162. 2) -2; 1.
163. 1) -3; 1;  $-7 \pm \sqrt{61}$ ; 3) 25; 49; 5) 31; 44.
164. 2) -3; 1,5.
165. 1) -2;  $\pm \sqrt{2}$ ;  $\pm \sqrt{5}$ .
166. 2) 1.
167. 1) Зрухам уздоўж восі  $Ox$  на 1 адзінку ўлева.
168. 2)  $y = 2,3(x+7)^2$ ; 4)  $y = 2,3(x-0,4)^2$ .
169. 1) (1; 1); (2; 1).
170. 2) (0,75; 0).
171. 1)  $x = p$ ; 3)  $x = 0$ .
172. 2) Зрух уздоўж восі  $Ox$  на 8 адзінак улева і ўздоўж восі  $Oy$  на 6 адзінак уніз.
173. 1) (-2; 6); 3)  $(p; t)$ .
175. 1) Мае.
176. 2) Не мае.
177. 1) Ні пры якіх; 3)  $p > 0$ .
178. 2)  $y = (x-6,5)^2 - 41,25$ ; 4)  $y = -6(x+1,5)^2 + 18,5$ ;  
6)  $y = -0,2(x+12,5)^2 + 26,25$ .
179. 1) (12; -36); 3) (-17; -9); 5) (-3,5; 30,25).
180. 2) (-3; -4); (-5; 0); (-1; 0); (0; 5); 4) (7; 4); (5; 0); (9; 0); (0; -45).
181. 1) (-4; 0); (2; 0); (0; -8); 3)  $(-\frac{5}{3}; 0)$ ;  $(-\frac{3}{5}; 0)$ ; (0; 15); 5) (-11; 0);  
(-4; 0); (0; -44).
182. 2)  $y = (x+2)^2 - 5$ ; 4)  $y = 4(x+0,5)^2 - 9$ .
183. 1)  $y = 2(x - \frac{3}{4})^2 + 8\frac{7}{8}$ ; 3)  $y = -(x-2)^2 - 1$ .
184. 2) IV.
185. 1)  $a > 0$ ;  $b > 0$ ;  $c > 0$ ; 3)  $a > 0$ ;  $b < 0$ ;  $c$  — любы.

## ПРАДМЕТНЫ ПАКАЗАЛЬНІК

Адрэзак 67

Вынясенне множніка з-пад знака  
квадратнага караня 136, 137

Выраз падкарэнны 99

Вяршыня парабалы 218, 223

Галіны парабалы 218

Дроб бясконцы дзесятковы 51

— — — неперыядычны 57

— — — перыядычны 51

— канечны дзесятковы 51

Дыскрымінант квадратнага трох-  
члена 191

— — ураўнення 178

Здабыванне квадратнага караня 103

Знак арыфметычнага квадратнага  
караня  $\sqrt{\quad}$  102

—  $>$  (больш) 5

—  $\geq$  (больш або роўна) 31

—  $<$  (менш) 5

—  $\leq$  (менш або роўна) 31

Знакі няроўнасцей процілеглыя 7

Інтэрвал 67

Карань  $n$ -й ступені 99

— квадратнага трохчлена 191

— — — кратны 192

— — — ураўнення 192

— — — кратны 192

— квадратны 99

— — арыфметычны 102

Лік ірацыянальны 57

— рацыянальны 53

— рэчаісны 57

Метад вылучэння поўнага квадра-  
та 173

— замены зменнай 206

Няроўнасці аднаго знаку 7

— раўназначныя 74

— розных знакаў 7

Няроўнасць двайная 36

— з адной зменнай (з адным не-  
вядомым) 74

— лікавая 7

— — правільная 7

— лінейная 76

— нястрогая 30

— строгая 30

Паказчык караня 99

Парабала 217, 220

Прамежак лікавы 68

Прыбліжэнне рэчаіснага ліку ка-  
нечным дзесятковым дробам (дзе-  
сятковае прыбліжэнне) 61

— з лішкам 61

— з недахопам 61

Рашэнне няроўнасці 74

— сістэмы няроўнасцей 82

Сістэма няроўнасцей 40, 82

Сістэмы няроўнасцей раўназнач-  
ныя 83

Сярэдняе геаметрычнае двух лі-  
каў 121

Тэарэма, адваротная тэарэме Віе-  
та 201, 202

— Віета 196

Унясенне множніка пад знак квад-  
ратнага караня 136, 137

Ураўненне біквадратнае 206

— другой ступені 166

— квадратнае 166

— — няпоўнае 166

— — прыведзенае 173

Формула каранёў квадратнага ўраў-  
нення 178

Функцыя квадратычная (квадрат-  
ная) 220

## ЗМЕСТ

|                  |   |
|------------------|---|
| Ад аўтараў ..... | 3 |
|------------------|---|

### Раздзел 1. Лікавыя няроўнасці

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Лікавыя няроўнасці .....  | 5  |
| 1.2. Уласцівасці лікавых няроўнасцей, звязаныя з дзеяннямі складання і аднімання ..... | 16 |
| 1.3. Уласцівасці лікавых няроўнасцей, звязаныя з дзеяннямі множання і дзялення .....   | 20 |
| 1.4. Складанне і множанне лікавых няроўнасцей .....                                    | 25 |
| 1.5. Строгія і нястрогія няроўнасці .....  | 30 |
| 1.6. Двойныя няроўнасці .....  | 36 |
| 1.7. Доказ няроўнасцей .....   | 44 |

### Раздзел 2. Рэчаісныя лікі

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Рэчаісныя лікі .....                  | 51 |
| 1. Перыядычныя дробы .....                 | —  |
| 2. Рацыянальныя і ірацыянальныя лікі ..... | 53 |
| 2.2. Лікавыя прамежкі .....                | 66 |

### Раздзел 3. Няроўнасці са зменнай

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Няроўнасці з адной зменнай (з адным невядомым). Лінейныя няроўнасці ..... | 74 |
| 3.2. Сістэма няроўнасцей з адной зменнай .....                                 | 82 |
| 3.3. Няроўнасці, якія змяшчаюць зменную пад знакам модуля ....                 | 91 |

### Раздзел 4. Квадратныя карані

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Корань $n$ -й ступені .....   | 99  |
| 4.2. Арыфметычны квадратны корань .....  | 102 |
| 4.3. Тоеснасць $\sqrt{a^2} =  a $ .....  | 109 |
| 4.4. Квадратны корань са здабытку .....  | 118 |
| 4.5. Квадратны корань з дзелі .....  | 128 |
| 4.6. Вынясенне множніка з-пад знака кораня і ўнясенне множніка пад знак кораня ..... | 136 |
| 4.7. Некаторыя прыклады на дзеянні з квадратнымі каранямі .....                      | 146 |
| 4.8. Лікавыя няроўнасці, што змяшчаюць квадратныя карані ....                        | 158 |

### Раздзел 5. Квадратныя ўраўненні

|  |     |
|--|-----|
| 5.1. Квадратныя ўраўненні. Няпоўныя квадратныя ўраўненні .....   | 166 |
| 5.2. Метад вылучэння поўнага квадрата .....                      | 172 |
| 5.3. Формула каранёў квадратнага ўраўнення .....                 | 177 |
| 5.4. Выкарыстанне квадратных ураўненняў пры рашэнні задач ....   | 187 |
| 5.5. Раскладанне квадратнага трохчлена на лінейныя множнікі .... | 191 |
| 5.6. Тэарэма Віета .....   | 195 |
| 5.7. Тэарэма, адваротная тэарэме Віета .....                     | 201 |
| 5.8. Рашэнне ўраўненняў метадам замены зменнай .....             | 205 |
| ▲5.9. Ураўненні, якія змяшчаюць зменную пад знакам модуля ....   | 211 |

## Раздзел 6. Квадратычная функцыя

|  |     |
|--|-----|
| 6.1. Функцыя $y = x^2$ .....   | 217 |
| 6.2. Функцыя $y = ax^2$ .....  | 220 |
| 6.3. Функцыя $y = ax^2 + c$ .....  | 226 |
| 6.4. Функцыя $y = a(x - s)^2$ .....  | 232 |
| 6.5. Функцыя $y = a(x - s)^2 + t$ .....  | 238 |
| 6.6. Квадратычная функцыя .....  | 244 |
| Дадаткі .....  | 252 |
| Матэрыялы для паўтарэння .....   | —   |
| 1. Практыкаванні для паўтарэння арыфметычнага і алгебраічнага<br>матэрыялу курса матэматыкі 5—7-х класаў ..... | —   |
| 2. Тэкставыя задачы .....  | 256 |
| 3. Практыкаванні для паўтарэння алгебраічнага матэрыялу курса<br>матэматыкі 8-га класа .....                   | 261 |
| Даведчыя матэрыялы .....   | 281 |
| Адказы .....   | 283 |
| Прадметны паказальнік .....  | 308 |

Вучэбнае выданне  
Кузняцова Алена Паўлаўна  
Мураўёва Галіна Леанідаўна  
Шнэперман Леў Барысавіч  
Яшчын Барыс Юр'евіч

**АЛГЕБРА**

Вучэбны дапаможнік для 8 класа  
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі  
з беларускай мовай навучання

4-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Заг. рэдакцыі *В. Г. Бехціна*. Рэдактар *Г. А. Бабаева*. Афармленне *К. Э. Агуновіч*. Мастацкі рэдактар *А. А. Валатовіч*. Тэхнічны рэдактар *Г. А. Дудко*. Камп'ютарная вёрстка *Л. І. Шаўко, Г. А. Дудко*. Карэктары *В. С. Бабеня, А. П. Тхір, Г. В. Алешка*.

Падпісана ў друк 24.02.2015. Фармат  $60 \times 90^{1/16}$ . Папера афсетная. Гарнітура школьная. Афсетны друк. Умоўн. друк. арк.  $19,5 + 0,25$  форз. Ул.-выд. арк.  $11,54 + 0,26$  форз. Тыраж 16 000 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета»  
Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.  
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 04.10.2013.  
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

(Назва і нумар установы адукацыі)

| Навучальны год | Імя і прозвішча навучэнца | Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні | Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам |
|----------------|---------------------------|--|---|
| 20 /           |                           |  |   |
| 20 /           |                           |  |   |
| 20 /           |                           |  |   |
| 20 /           |                           |  |   |
| 20 /           |                           |  |   |