

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Пад рэдакцыяй прафесара
Л. Б. Шнэпермана

*Далучана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

3-е выданне, перагледжанае і выпраўленае

Мінск «Народная асвета» 2013

Правообладатель Народная асвета

УДК 512(075.3=161.3)

ББК 22.14я721

А45

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Аўтары:

А. П. Кузняцова, Г. Л. Мураўёва, Л. Б. Шнэперман, Б. Ю. Яшчын

Рэцэнзенты:

кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання
матэматыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(канд. фіз.-мат. навук дацэнт *Ю. Д. Чурбанаў*);
метадыст вышэйшай катэгорыі аддзела агульнаадукацыйных
дысцыплін дзяржаўнай установы дадатковай адукацыі дарослых
«Віцебскі абласны інстытут развіцця адукацыі» *Т. Т. Талькова*;
настаўнік матэматыкі вышэйшай катэгорыі дзяржаўнай установы
адукацыі «Міёрская сярэдняя школа № 1» *І. А. Ханецкая*

Алгебра : вучэб. дапам. для 10-га кл. устаноў агул. ся-
А45 рэд. адукацыі з беларус. мовай навучання / А. П. Кузняцо-
ва [і інш.] ; пад рэд. праф. Л. Б. Шнэпермана ; пер. з рус.
мовы Н. М. Алганавай. — 3-е выд., перагледж. і выпр. —
Мінск : Нар. асвета, 2013. — 271 с. : іл.
ISBN 978-985-12-2132-1.

УДК 512(075.3=161.3)

ББК 22.14я721

ISBN 978-985-12-2132-1

© Алганавы Н. М., пераклад на
беларускую мову, 2013

© Афармленне. УП «Народная
асвета», 2013

АД АЎТАРАЎ

У 10-м класе вы пазнаёміцеся з вельмі важным паняццем вытворнай функцыі і даведаецеся, як пры дапамозе вытворнай можна вызначыць некаторыя ўласцівасці функцыі. Вы таксама будзеце вывучаць трыганаметрычныя выразы і трыганаметрычныя функцыі, паказваць відарысы графікаў такіх функцый, рашаць трыганаметрычныя ўраўненні.

Практыкаванні ў вучэбным дапаможніку нумаруюцца па раздзелах. Лік перад кропкай абазначае нумар раздзела, лік пасля кропкі — нумар практыкавання ў гэтым раздзеле. Напрыклад, 1.15 — гэта 15-е практыкаванне з 1-га раздзела. Аналагічна пункт тэорыі 3.7 абазначае 7-ы пункт з 3-га раздзела.

Сярод практыкаванняў сустракаюцца нумары з кружком (напрыклад, 2.20°), з зорчак (напрыклад, 1.111*) і нумары без абазначэнняў (напрыклад, 2.38). Кружком пазначаны практыкаванні, якія павінны ўмець рашаць усе навучэнцы. Астатнія заданні адрасаваны тым, хто хоча лепш ведаць алгебру і атрымліваць адзнакі, вышэйшыя, чым 5—6 балаў. Найбольш цяжкія заданні пазначаны зорчак.

Тлумачэнні да пераўтварэнняў пры рашэнні прыкладаў размяшчаюцца паміж дзвюма вертыкальнымі стрэлкамі ($\downarrow \dots \downarrow$ або $\uparrow \dots \uparrow$); напрамак стрэлак паказвае, якое пераўтварэнне тлумачыцца.

Канец доказу тэарэтычнага сцверджання абазначаецца сімвалам $\square$. Тэарэтычны матэрыял, вылучаны трохвугольнікамі $\blacktriangle$, прызначаны для навучэнцаў, якія цікавяцца матэматыкай. Асаблівасці тэорыі, на якія трэба звярнуць увагу, пазначаны клічнікам $!$.

Варі $\mathbb{A}$ нарысаваны там, дзе можна параўнаць варыянты рашэння або доказу.

Гістарычныя звесткі, што сустракаюцца ў вучэбным дапаможніку, вылучаны знакам $\mathbb{A}$.

Пад знакам $\mathbb{A}$ размешчаны матэрыял для паўтарэння.

Пасля кожнага пункта тэорыі прапанаваны пытанні пад знакам $?$. Яны дапамогуць паўтарыць новы матэрыял і вылучыць у ім галоўнае.

Раздзел 1

Вытворная і яе прымяненне

1.1. Функцыя



Напомнім азначэнне функцыі і ўвядзём некаторыя абазначэнні, звязаныя з гэтым паняццем.

Азначэнне. *Функцыяй, вызначанай на лікавым мностве D , называецца закон, па якім кожнаму значэнню x з мноства D ставіцца ў адпаведнасць адзін пэўны лік y .*

Пры гэтым x называюць незалежнай зменнай або аргументам, y — залежнай зменнай або функцыяй ад x , мноства D — абсягам вызначэння функцыі.

Будзем абазначаць функцыю якой-небудзь літарай, скажам f . Лік y , які функцыяй f ставіцца ў адпаведнасць ліку x , называецца значэннем функцыі f у пункце x і абазначаецца $f(x)$ (чытаецца «эф ад ікс»).

Пры такіх абазначэннях аргумента і функцыі той факт, што y з'яўляецца функцыяй ад x , запісваецца ў выглядзе роўнасці $y = f(x)$, а функцыю f называюць яшчэ «функцыя $y = f(x)$ ».

Заўважым, што для абазначэння функцыі выкарыстоўваюцца і іншыя літары, напрыклад g , h і да т. п.

Разгледзім некалькі прыкладаў функцый.

Прыклад 1. Для функцыі f , зададзенай формулай $y = x^2$, сімвал f азначае ўзвядзенне аргумента ў квадрат, а $f(x) = x^2$.

Прыклад 2. Для функцыі f , зададзенай формулай $y = \frac{1}{x}$, сімвал f азначае адшуканне ліку, адваротнага аргументу, а $f(x) = \frac{1}{x}$.

Прыклад 3. Для функцыі f , зададзенай формулай $y = \sqrt{x}$, сімвал f азначае здабыванне арыфметычнага квадратнага кораня з аргумента, а $f(x) = \sqrt{x}$.

Абсяг вызначэння функцыі f абазначаецца $D(f)$.



Калі функцыя f зададзена формулай $y = f(x)$, а яе абсяг вызначэння не названы, то лічыцца, што абсяг вы-

значэння $D(f)$ складаецца з тых значэнняў x , пры якіх выраз $f(x)$ мае сэнс, г. зн. $D(f)$ супадае з натуральным абсягам вызначэння выразу $f(x)$. Калі ў заданні трэба знайсці абсяг вызначэння функцыі $y = f(x)$, то маецца на ўвазе, што трэба знайсці менавіта натуральны абсяг вызначэння выразу $f(x)$.

Так, у прыкладзе 1 абсяг вызначэння $D(f) = \mathbf{R}$; у прыкладзе 2 абсяг вызначэння $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; у прыкладзе 3 абсяг вызначэння $D(f) = [0; +\infty)$.

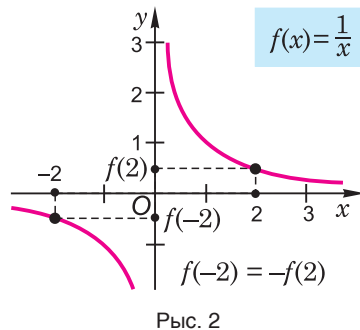
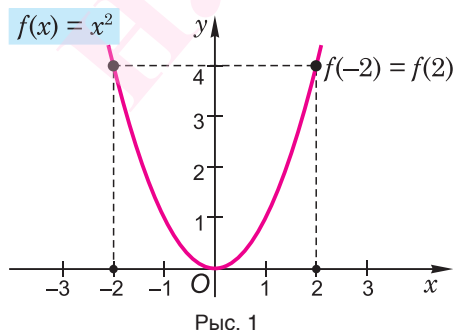
Напомнім, што мноства ўсіх значэнняў, якія можа прымаць функцыя, называецца **мноствам (абсягам) значэнняў функцыі**.

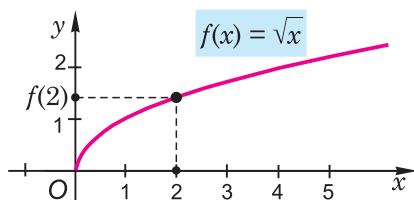
Мноства значэнняў функцыі f абазначаецца $E(f)$. Так, у прыкладзе 1 мноства значэнняў $E(f) = [0; +\infty)$; у прыкладзе 2 мноства значэнняў $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; у прыкладзе 3 мноства значэнняў $E(f) = [0; +\infty)$.

Графікам функцыі f называецца мноства ўсіх пунктаў $(x; f(x))$ на каардынатнай плоскасці, дзе $x \in D(f)$, г. зн. мноства ўсіх пунктаў, абсцысы якіх — значэнні аргумента, а ардынаты — адпаведныя ім значэнні функцыі.

Такім чынам, пры паказе відарыса графіка функцыі $y = f(x)$ на каардынатнай плоскасці Oxy адзначаюць пункты $(x; f(x))$.

На рысунках 1, 2, 3 паказаны відарысы графікаў функцый $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ адпаведна.





Рыс. 3

Выкарыстаўшы ўведзенае абазначэнне функцыі, напомним азначэнні нарастальнай і спадальнай функцый і сфармулюем азначэнні цотнай і няцотнай функцый.

Азначэнне. Функцыя f называецца **нарастальнай на некаторым прамежку**, калі на гэтым прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі, г. зн. калі $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцыя f называецца **спадальнай на некаторым прамежку**, калі на гэтым прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне функцыі, г. зн. калі $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Так, у прыкладзе 1 функцыя f спадальная на прамежку $(-\infty; 0]$ і нарастальная на прамежку $[0; +\infty)$; у прыкладзе 2 функцыя f спадальная на прамежку $(-\infty; 0)$ і спадальная на прамежку $(0; +\infty)$; у прыкладзе 3 функцыя f нарастальная на ўсім абсягу вызначэння.



Пры даследаванні функцый на нарастанне і спаданне прынята запісваць прамежкі нарастання і прамежкі спадання найбольшай даўжыні.

Азначэнне. Функцыя f называецца **цотнай**, калі для любога значэння x з яе абсягу вызначэння значэнне $-x$ таксама належыць абсягу вызначэння і з'яўляецца правільнай роўнасць

$$f(-x) = f(x).$$



Такім чынам, абсяг вызначэння цотнай функцыі сіметрычны адносна нуля.

Функцыя $f(x) = x^2$ цотная, паколькі яе абсяг вызначэння $D(f) = \mathbb{R}$ сіметрычны адносна нуля і пры гэтым для любога $x \in D(f)$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Па азначэнні цотнай функцыі пункты $(x; f(x))$ і $(-x; f(-x))$ яе графіка з процілеглымі абсцысамі x і $-x$ маюць адну і тую ж ардынату $f(x)$. Значыць, гэтыя пункты сіметрычныя адносна восі ардынаты, такім чынам, графік цотнай функцыі сіметрычны адносна восі ардынаты (гл. рис. 1).

Азначэнне. Функцыя f называецца **няцотнай**, калі для любога значэння x з яе абсягу вызначэння значэнне $-x$ таксама належыць абсягу вызначэння і з'яўляецца правільнай роўнасць

$$f(-x) = -f(x).$$



Такім чынам, абсяг вызначэння няцотнай функцыі сіметрычны адносна нуля.

Функцыя $f(x) = \frac{1}{x}$ няцотная, паколькі яе абсяг вызначэння $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сіметрычны адносна нуля і пры гэтым для любога $x \in D(f)$

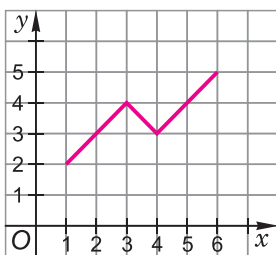
$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Па азначэнні няцотнай функцыі пункты $(x; f(x))$ і $(-x; f(-x))$ яе графіка з процілеглымі абсцысамі x і $-x$ маюць ардынаты процілеглыя лікі $f(x)$ і $-f(x)$. Значыць, гэтыя пункты сіметрычныя адносна пачатку каардынаты, і, такім чынам, графік няцотнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынаты (гл. рис. 2).

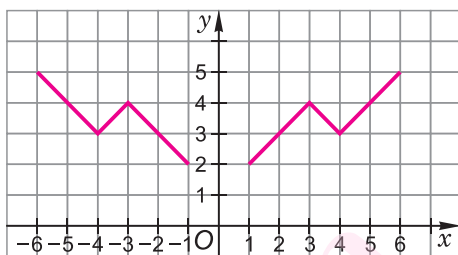
Пры паказе відарыса графіка цотнай або няцотнай функцыі дастаткова спачатку атрымаць відарыс часткі графіка, што складаецца з усіх пунктаў з неадмоўнымі абсцысамі, а затым адлюстравать атрыманую частку графіка сіметрычна адносна восі Oy для цотнай функцыі і сіметрычна адносна пачатку каардынаты для няцотнай функцыі.

Прыклад 4. На рысунку 4 паказаны відарыс часткі графіка некаторай функцыі f , якая складаецца з усіх пунктаў з неадмоўнымі абсцысамі. Паказаць відарыс графіка функцыі, калі вядома, што яна:

- а) цотная; б) няцотная.



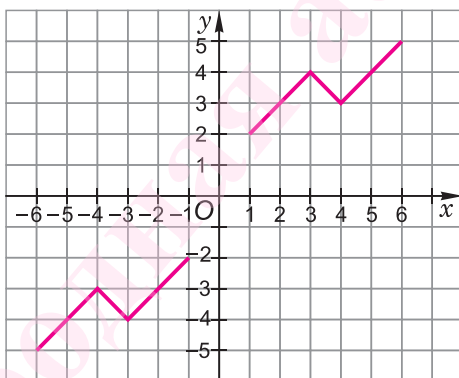
Рыс. 4



Рыс. 5

Рашэнне. а) Адлюструем дадзеную частку графіка адносна восі Oy (рыс. 5).

б) Адлюструем дадзеную частку графіка адносна пачатку каардынат (рыс. 6).

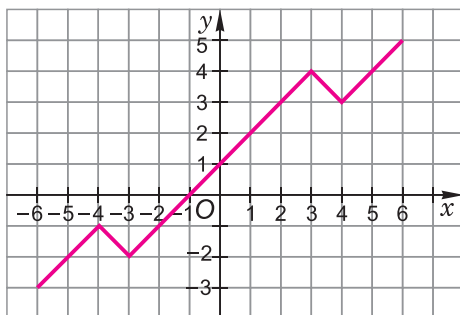


Рыс. 6

Функцыя $f(x) = \sqrt{x}$ не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай, паколькі яе абсяг вызначэння не сіметрычны адносна нуля ($D(f)$ змяшчае толькі неадмоўныя лікі, гл. рыс. 3).

На рысунку 7 паказаны відарыс графіка функцыі з сіметрычным адносна нуля абсягам вызначэння. Аднак гэтая функцыя таксама не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай, паколькі яе графік не сіметрычны ні адносна восі ардынаты Oy , ні адносна пачатку каардынат.

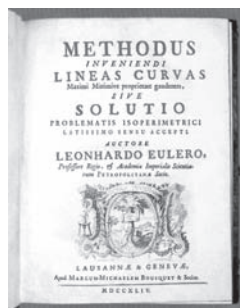
Функцыя $y = 0$ з'яўляецца адначасова і цотнай, і няцотнай.



Рыс. 7

А

Абазначэнне $f(x)$ для адвольнай функцыі ў 1734 г. увёў Леанард Эйлер (1707—1783). Ён нарадзіўся ў швейцарскім горадзе Базелі, але большую частку свайго творчага жыцця правёў у Расіі. Сучаснікі называлі Эйлера агульным настаўнікам і першым матэматыкам свету, а XVIII ст. у гісторыі матэматыкі часта называюць стагоддзем Эйлера. Яго імем названы розныя формулы, ураўненні, тэарэмы, метады. Эйлер вызначаўся надзвычайнай шырынёй інтарэсаў. Сярод яго твораў ёсць працы па гідраўліцы, караблебудаванні, артылерыі, геаметрычнай аптыцы, тэорыі музыкі, астраноміі, механіцы цвёрдага цела, нябеснай механіцы.

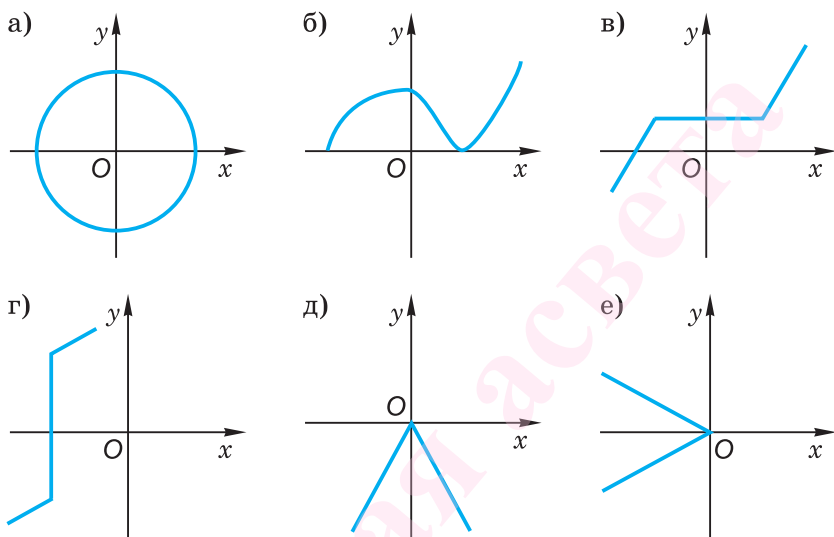


?

1. Сфармулюйце азначэнне функцыі.
2. Што называецца графікам функцыі f ?
3. Ці можа графік функцыі мець некалькі пунктаў перасячэння з воссю Ox ? З воссю Oy ?
4. Як абазначаюцца абсяг вызначэння і мноства (абсяг) значэнняў функцыі f ?
5. Сфармулюйце азначэнне функцыі, нарастальнай (спадальнай) на некаторым прамежку.
6. Сфармулюйце азначэнне цотнай (няцотнай) функцыі. Якія асаблівасці яе абсягу вызначэння і яе графіка?

Практиканні

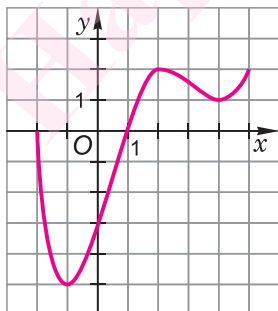
1.1°. На яким з рисункаў 8 (а—е) лінія сіняга колеру можа быць відарысам графіка некаторай функцыі $y = f(x)$?



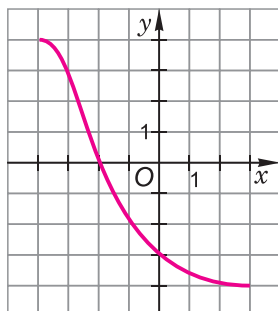
Рыс. 8

1.2°. Для функцыі f , зададзенай графікам (рыс. 9—12), запішыце:

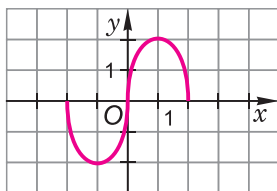
- а) абсяг вызначэння $D(f)$;
- б) мноства (абсяг) значэнняў $E(f)$;



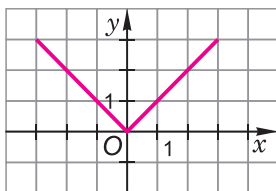
Рыс. 9



Рыс. 10



Рыс. 11



Рыс. 12

в) яе нулі;

г) каардынаты пункта перасячэння яе графіка з воссю Oy .

1.3. Для функцыі f , зададзенай графікам (рыс. 13—16), запішыце:

а) прамежкі нарастання;

б) прамежкі спадання;

в) найбольшае значэнне;

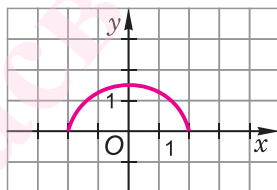
г) найменшае значэнне;

д) яе нулі;

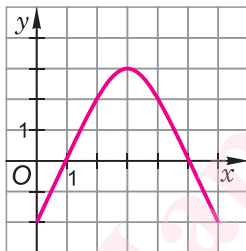
е) прамежкі знакапастаянства;

ж) каардынаты пункта перасячэння яе графіка з воссю Oy ;

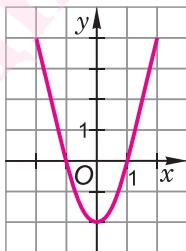
з) каардынаты пунктаў перасячэння яе графіка з воссю Ox .



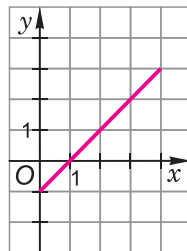
Рыс. 13



Рыс. 14



Рыс. 15



Рыс. 16

1.4. Запішыце абсяг вызначэння функцыі:

1) $f(x) = \sqrt{5 + 10x}$;

2) $f(x) = \sqrt{6 - 24x}$;

3) $f(x) = \frac{x+8}{\sqrt{9+8x-x^2}}$;

4) $f(x) = \frac{3x-21}{\sqrt{40-3x-x^2}}$;

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-25x}}{x^2-1}$;

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-49x}}{x^2-11x-26}$.

1.5. Знайдзіце нулі функцыі:

1) $f(x) = |x - 5| - 1$;

2) $f(x) = |x + 4| - 8$;

3) $f(x) = |x^2 + 3x| - 4$;

4) $f(x) = |x^2 + 11x| - 12$;

5) $f(x) = (x - 3)^3 - (x^2 - 9)$;

6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

1.6°. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, запішыце для гэтай функцыі прамежкі нарастання (спадання), калі:

1) $f(x) = x + 3$;

2) $f(x) = -3x + 6$;

3) $f(x) = \frac{6}{x}$;

4) $f(x) = -\frac{7}{x}$;

5) $f(x) = x^2$;

6) $f(x) = x^3$.

1.7. Запішыце прамежкі знакапастаянства функцыі f :

1) $f(x) = -3x^2 + 7x$;

2) $f(x) = -5x^2 + 12x$;

3) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 1$;

4) $f(x) = \frac{1}{x-5} + 2$;

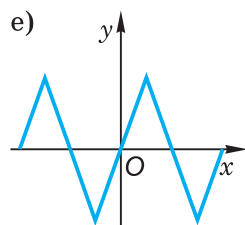
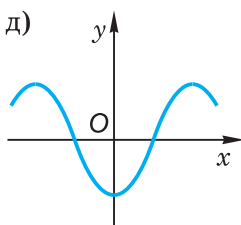
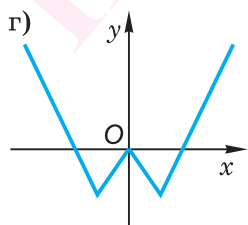
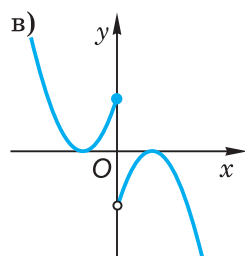
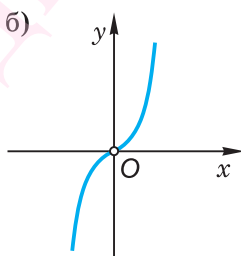
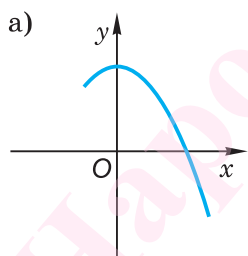
5) $f(x) = 3 - 5\sqrt{2-x}$;

6) $f(x) = 4 - 3\sqrt{6-x}$.

1.8°. Вызначыце, якія з функцый, зададзеных графікам (рыс. 17), з'яўляюцца:

1) цотнымі;

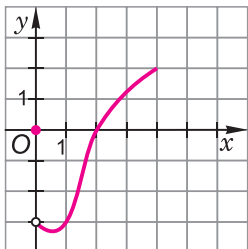
2) няцотнымі.



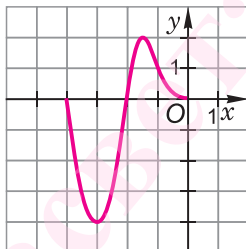
Рыс. 17

- 1.9. 1) Пакажыце відарыс графіка цотнай функцыі, вызначанай на адрэзку $[-4; 4]$, частка графіка якой паказана:
а) на рысунку 18; б) на рысунку 19.

- 2) Пакажыце відарыс графіка няцотнай функцыі, вызначанай на адрэзку $[-4; 4]$, частка графіка якой паказана:
а) на рысунку 18; б) на рысунку 19.



Рыс. 18



Рыс. 19

- 1.10°. 1) Вядома, што функцыя f з'яўляецца цотнай і $f(2) = 5$, $f(-10) = -8$, $f(7) = -9,3$, $f(-4) = 0$. Знайдзіце $f(-2)$, $f(10)$, $f(-7)$, $f(4)$.
2) Вядома, што функцыя f з'яўляецца няцотнай і $f(-5) = 2$, $f(16) = 1$, $f(-1) = 2,5$, $f(-3) = -4$. Знайдзіце $f(5)$, $f(-16)$, $f(1)$, $f(3)$.

- 1.11. Дакажыце, што функцыя f цотная, калі:

1) $f(x) = \frac{16x^4}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x|}$;

3) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x^8} + |x| + \frac{3}{x^6 - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} - \sqrt{x^2} - \frac{x^{10}}{6 - x^6}$;

5) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 3} + \sqrt{3x^2 - 5}$;

6) $f(x) = |8x^4 - 10| + |10 - 8x^4|$.

- 1.12. Дакажыце, што функцыя f няцотная, калі:

1) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 9}$;

2) $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$;

3) $f(x) = x^{13} - \frac{2x^{21}}{\sqrt{x^8}}$;

4) $f(x) = (x^3)^5 + \frac{2}{(x^{11})^3}$;

$$5) f(x) = x\sqrt{25x^{12}} - \frac{6x^{10}}{x^5 - x^3};$$

$$6) f(x) = x\sqrt{x^4} + \frac{3}{x^3\sqrt{x^4 + 10x^2 + 25}}.$$

1.13°. Функцыя f зададзена на мностве $\mathbf{R}$ і з'яўляецца на-
растальнай на ўсім абсягу вызначэння. Параўнайце яе значэнні:

$$1) f(5) \text{ і } f(-2);$$

$$2) f(-8) \text{ і } f(8);$$

$$3) f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ і } f\left(\frac{1}{4}\right);$$

$$4) f\left(-\frac{4}{5}\right) \text{ і } f\left(-\frac{5}{7}\right);$$

$$5) f(2\sqrt{2}) \text{ і } f(\sqrt{11});$$

$$6) f(3\sqrt{2}) \text{ і } f(\sqrt{19}).$$

1.14°. Функцыя f зададзена на мностве $\mathbf{Q}$ і з'яўляецца спадаль-
най на ўсім абсягу вызначэння. Параўнайце яе значэнні:

$$1) f(29) \text{ і } f(30);$$

$$2) f(-100) \text{ і } f(200);$$

$$3) f\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ і } f\left(-\frac{4}{5}\right);$$

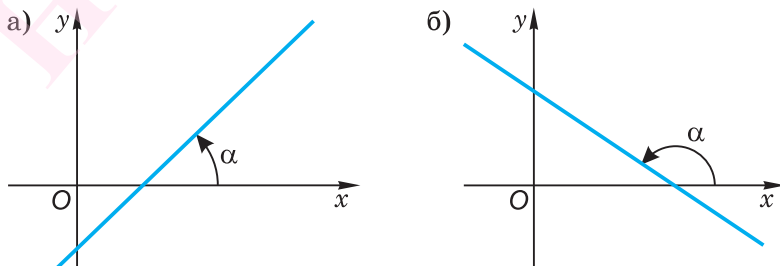
$$4) f\left(\frac{5}{7}\right) \text{ і } f\left(\frac{17}{21}\right).$$

1.2. Ураўненне прамой з дадзеным вуглавым каэфіцыентам

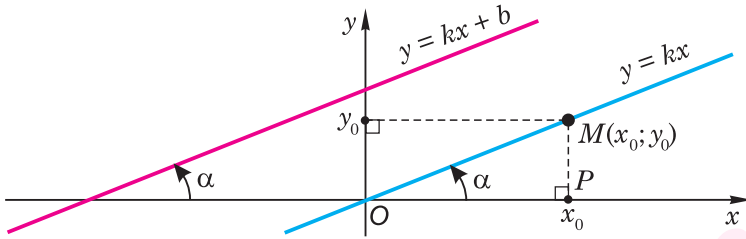
Пакажам на каардынатнай плоскасці Oxy відарыс прамой

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Вуглом нахілу гэтай прамой да восі Ox называецца вугал α , які адлічваецца ад дадатнага напрамку восі Ox супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі (рыс. 20, а, б). Калі прамая (1) паралельна восі Ox , то вугал нахілу лічыцца роўным нулю.



Рыс. 20



Рыс. 21

Як мы ведаем, прамая (1) не паралельна восі Oy (патлумачце чаму), таму $\alpha \neq 90^\circ$, г. зн. $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ або $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Прамая $y = kx + b$ паралельна прамой $y = kx$ (рыс. 21).

Няхай пункт $M(x_0; y_0)$ належыць прамой $y = kx$, тады $k = \frac{y_0}{x_0}$. З трохвугольніка MPO ($\angle P = 90^\circ$) атрымліваем:

$$k = \frac{y_0}{x_0} = \frac{MP}{OP} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Каэфіцыент k ва ўраўненні $y = kx + b$ называецца **вуглавым каэфіцыентам прамой**.

Такім чынам, **вуглавы каэфіцыент прамой** — гэта тангенс вугла нахілу гэтай прамой да восі Ox . Значыць:

1) калі вуглавы каэфіцыент прамой дадатны, то яна ўтварае востры вугал з дадатным напрамкам восі Ox ;

2) калі вуглавы каэфіцыент прамой адмоўны, то яна ўтварае тупы вугал з дадатным напрамкам восі Ox ;

3) калі вуглавы каэфіцыент прамой роўны нулю, то яна паралельна восі Ox .

Правільныя і адваротныя сцверджанні.

Прыклад 1. Запісаць ураўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам 3, якая праходзіць праз пункт $T(-2; 1)$.

Рашэнне. Няхай $y = 3x + b$ — ураўненне шуканай прамой. Падставіўшы ў яго каардынаты пункта T , атрымаем ураўненне

$$1 = 3(-2) + b,$$

адкуль знойдзем $b = 7$.

Адказ: $y = 3x + 7$.

Прыклад 2. Запісаць ураўненне прамой, якая праходзіць праз пункты $M(-2; 9)$ і $P(4; -3)$.

Рашэнне. Няхай $y = kx + b$ — ураўненне шуканай прамой. Падставіўшы ў яго каардынаты пунктаў M і P , атрымаем сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} 9 = -2k + b, \\ -3 = 4k + b. \end{cases}$$

Рашыўшы гэту сістэму ўраўненняў, знойдзем: $k = -2$, $b = 5$.

Адказ: $y = -2x + 5$.

Калі прамая (1) праходзіць праз пункт $(x_0; y_0)$, то будзе правільнай роўнасць

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Адкуль $b = y_0 - kx_0$. Падставіўшы гэта значэнне b ва ўраўненне (1), атрымаем

$$y = kx + y_0 - kx_0,$$

адкуль

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2)$$

Ураўненне (2) называецца *ўраўненнем прамой з вуглавым каэфіцыентам k , якая праходзіць праз пункт $(x_0; y_0)$* .

Прыклад 3. Запісаць ураўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам 2, якая праходзіць праз пункт $(3; -1)$.

Рашэнне. *Спосаб 1* аналагічны рашэнню прыкладу 1.



Спосаб 2. Ва ўраўненне (2) падставім $k = 2$, $x_0 = 3$ і $y_0 = -1$. Тады атрымаем ураўненне прамой:

$$y + 1 = 2(x - 3), \text{ г. зн. } y = 2x - 7.$$

Адказ: $y = 2x - 7$.

▲ Няхай прамая (1) праходзіць праз два пункты: $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, тады маем дзве правільныя лікавыя роўнасці:

$$y_1 = kx_1 + b, \quad y_2 = kx_2 + b.$$

Адкуль атрымліваем таксама правільную роўнасць (патлумачце як):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Паколькі прамая (1) не паралельна восі Oy , то $x_2 \neq x_1$ (патлумачце чаму). Такім чынам, маем

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3)$$

Гэта *формула вуглавога каэфіцыента прамой, якая праходзіць праз два дадзеныя пункты*.

Прыклад 4. Запісаць ураўненне прамой, якая праходзіць праз пункты $(-1; 7)$ і $(2; 4)$.

Рашэнне. *Способ 1* аналагічны рашэнню прыкладу 2.



Способ 2. Вуглавый каэфіцыент прамой знойдзем па формуле (3):

$$k = \frac{4 - 7}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Запішам ураўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам -1 , якая праходзіць праз пункт $(-1; 7)$:

$$y - 7 = -1(x + 1), \text{ г. зн. } y = -x + 6.$$

Адказ: $y = -x + 6$.

Зразумела, што можна было запісаць і ўраўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам -1 , якая праходзіць праз пункт $(2; 4)$. Атрымаўся б такі ж вынік (праверце гэта). ▲



1. Сфармулюйце азначэнне вугла нахілу прамой да восі Ox .
2. Што называецца вуглавым каэфіцыентам прамой?
3. Чаму роўны вуглавый каэфіцыент прамой?
4. Запішыце ўраўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам k , якая праходзіць праз пункт $(x_0; y_0)$.
5. Які вугал з дадатным напрамкам восі Ox утварае прамая, калі яе вуглавый каэфіцыент:
 - а) дадатны; б) адмоўны; в) роўны нулю?
6. Які знак мае вуглавый каэфіцыент прамой, калі яна ўтварае з дадатным напрамкам восі Ox :
 - а) востры вугал;
 - б) тупы вугал?
- 7*. Запішыце формулу вуглавога каэфіцыента прамой, якая праходзіць праз два дадзеныя пункты.

Практыкаванні

1.15°. Запішыце вуглавый каэфіцыент прамой:

1) $y = 3x + 8$;

2) $y = 12x - 7$;

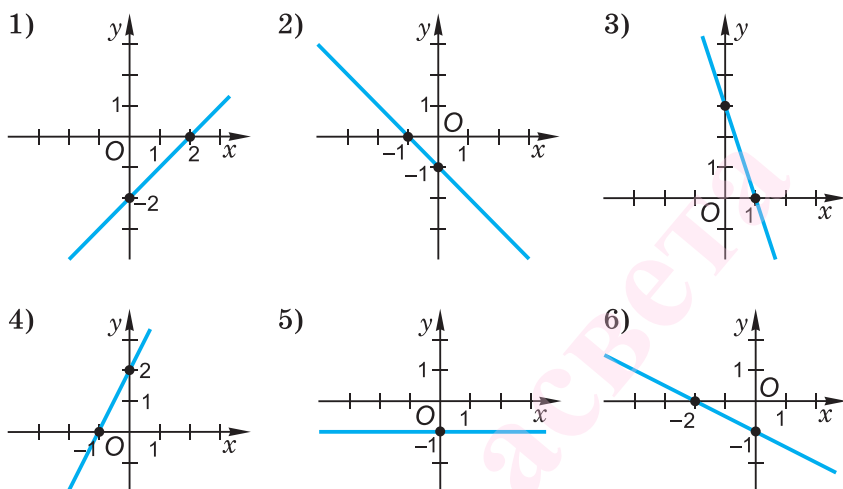
3) $y = 5 - 1,5x$;

4) $y = 4 + \frac{2}{3}x$;

5) $y = \frac{x}{6} - 4$;

6) $y = 9 - \frac{x}{12}$.

1.16°. Визначыце вуглавы каэфіцыент прамой, відарыс якой паказаны на рысунку 22.



Рыс. 22

1.17. Пакажыце відарыс прамой, якая праходзіць праз пункт $F(2; 6)$, з вуглавым каэфіцыентам k , калі:

- 1) $k = 4$; 2) $k = -4$;
 3) $k = -\frac{1}{3}$; 4) $k = 0,2$.

1.18. Запішыце ўраўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам k , якая праходзіць праз пункт $M(x_0; y_0)$, калі:

- 1) $k = -\frac{1}{9}$, $M(-1; -2)$; 2) $k = \frac{2}{3}$, $M(7; -1)$;
 3) $k = \sqrt{121}$, $M(2; 6)$; 4) $k = -\sqrt{100}$, $M(-4; 1)$.

1.19. Запішыце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункты A і B , калі:

- 1) $A(1; -2)$; $B(-3; 2)$; 2) $A(2; 5)$; $B(3; 0)$;
 3) $A(-4; -5)$; $B(2; 1)$; 4) $A(-6; 3)$; $B(-1; -1)$.

1.20°. Назавіце пары паралельных прамых:

$$\begin{aligned} y &= 4x - 9; & y &= 5x - 1; & y &= 4 - x; & y &= 3 + 4x; \\ y &= \sqrt{25}x + 1; & y &= (-1)^{15}x + 3. \end{aligned}$$

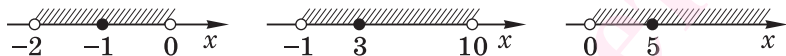
- 1.21. Складзіце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $P(x; y)$ і паралельна прамой $y = -x + 5$:
- 1) $P(2; -3)$; 2) $P(-5; -1)$;
3) $P(4; -1)$; 4) $P(-1; -1)$.
- 1.22. Складзіце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $P(-5; 2)$ і паралельна прамой:
- 1) $y = \frac{x}{4} - 1$; 2) $y = 6 - \frac{x}{3}$;
3) $y = \sqrt{5} - 0,7x$; 4) $y = \sqrt{\pi} + 0,1x$.
- 1.23. Складзіце ўраўненне прамой, якая паралельна прамой $4(x + 2y) - 8 = 5x - 2$ і праходзіць праз пункт перасячэння прамых:
- 1) $y = 2x$ і $y = x + 3$; 2) $y = 4x$ і $y = x - 3$;
3) $y = 2x - 3$ і $x = 9$; 4) $y = 4x + 6$ і $y = -2$.
- 1.24. Складзіце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $R(3; 1)$ і перасякае вось Ox пад вуглом α , калі:
- 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 60^\circ$;
3) $\alpha = 45^\circ$; 4) $\alpha = 120^\circ$.
- 1.25. Складзіце ўраўненне прамой, якая мае вугал нахілу да восі Ox , роўны 30° , і праходзіць праз пункт перасячэння прамых:
- 1) $y = 5 - x$ і $y = x - 3$;
2) $y = 1 - 2x$ і $y = 2x - 3$;
3) $2x + 11y = 15$ і $10x - 11y = 9$;
4) $x + 3y = -7$ і $2x + 15y = -11$.
- 1.26. 1) Знайдзіце вуглавы каэфіцыент прамой $y = kx + 5$, калі яна перасякаецца з прамой $y = -0,5x - 1$ у пункце з абсцысай, роўнай $-0,8$.
2) Знайдзіце вуглавы каэфіцыент прамой $y = kx - 1$, калі яна перасякаецца з прамой $y = 8x + 2$ у пункце з абсцысай, роўнай $-0,2$.
- 1.27. Знайдзіце вугал нахілу прамой MN да восі Ox , калі:
- 1) $M(-1; 2)$ і $N(-4; -1)$;
2) $M(1; 2)$ і $N(5; -2)$.

1.3. Прырашчэнне функцыі

Напомнім, што лікавыя прамежкі выгляду $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$ называюцца **інтэрваламі**.

Наваколлем пункта x_0 называецца любы інтэрвал, які змяшчае гэты пункт.

Напрыклад, наваколлем пункта -1 з'яўляецца інтэрвал $(-2; 0)$, наваколлем пункта 3 — інтэрвал $(-1; 10)$, а наваколлем пункта 5 — інтэрвал $(0; +\infty)$ (рыс. 23).



Рыс. 23

Разгледзім функцыю $y = f(x)$, вызначаную на некаторым прамежку. Няхай x_0 — фіксаваны пункт з абсягу вызначэння гэтай функцыі, x — адвольны пункт з некаторага наваколля пункта x_0 , прычым $x \neq x_0$.

Рознасць $x - x_0$ называецца **прырашчэннем аргумента ў пункце x_0** .

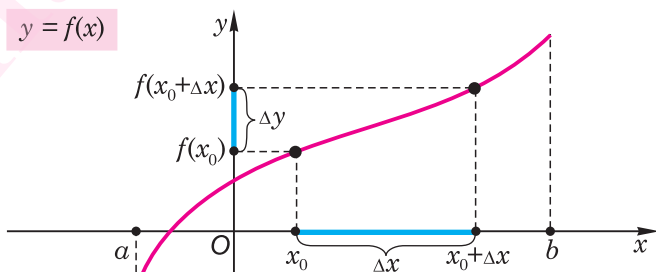
Рознасць $f(x) - f(x_0)$ называецца **прырашчэннем функцыі ў пункце x_0** .

Прырашчэнне аргумента ў пункце x_0 абазначаецца Δx (чытаецца «дэльта ікс»), прырашчэнне функцыі ў пункце x_0 абазначаецца Δy (чытаецца «дэльта ігрэк») або Δf (чытаецца «дэльта эф»). Такім чынам,

$$\Delta x = x - x_0, \text{ адкуль } x = x_0 + \Delta x;$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Геаметрычны сэнс прырашчэнняў Δx і Δy бачны на рысунку 24.



Рыс. 24

Прыклад 1. Знайсці прырашчэнне функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 , якое адпавядае прырашчэнню аргумента Δx , калі:

а) $f(x) = 3x - 1$;

б) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = \frac{4}{x}$;

г)* $f(x) = \sqrt{x}$.

Рашэнне.

а) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x) - 1 - 3x_0 + 1 = 3\Delta x$.

б) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

в) Няхай $x_0 + \Delta x \neq 0$, тады

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{4}{x_0 + \Delta x} - \frac{4}{x_0} = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

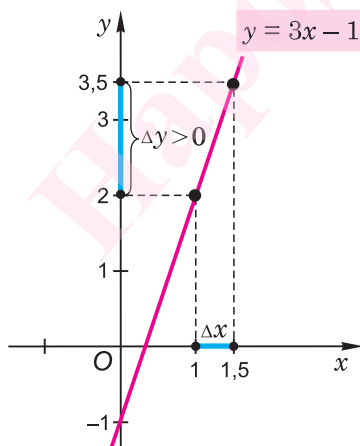
▲ г) Няхай $x_0 + \Delta x \geq 0$, тады

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \\ &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

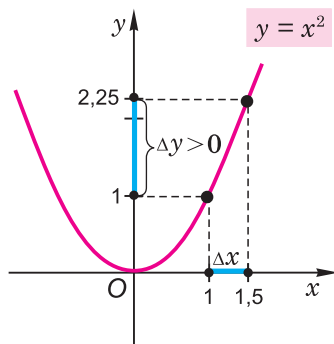
Прыклад 2. Вылічыць значэнні прырашчэнняў функцый з прыкладу 1, калі $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0,5$. Паказаць прырашчэнне кожнай з функцый на графіку.

Рашэнне. а) $\Delta y = 3\Delta x = 3 \cdot 0,5 = 1,5$ (рыс. 25).

б) $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0,5 + (0,5)^2 = 1,25$ (рыс. 26).



Рыс. 25



Рыс. 26

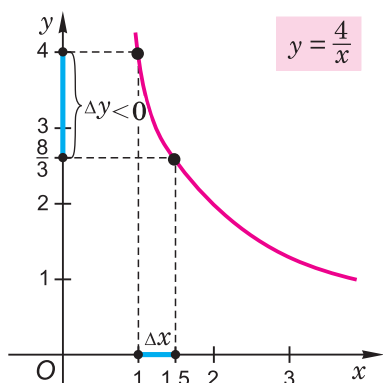


Рис. 27

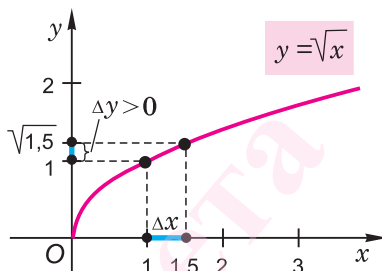


Рис. 28

$$\text{в) } \Delta y = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-4 \cdot 0,5}{1(1 + 0,5)} = -\frac{4}{3} \text{ (рис. 27).}$$

$$\text{г) } \Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{1 + 0,5} - \sqrt{1} = \sqrt{1,5} - 1 \approx 0,22 \text{ (рис. 28).}$$



1. Што називається наваколлем пункту x_0 ?
2. Што називається приращенням аргумента функції f у пункце x_0 ?
3. Што називається приращенням функції f у пункце x_0 ?
4. Як абазначається:
 - а) приращенне аргумента; б) приращенне функції?
- 5*. Чаму приращенне функції Δy у пункце x_0 можна лічыць функцыяй ад приращення аргумента Δx ?

Практикаванні

1.28°. Па рысунку 29 запішыце лікавым прамежкам заштрыхаванае наваколле пункту x_0 .

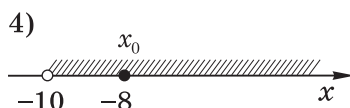
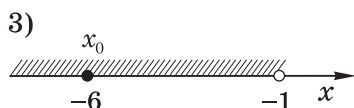
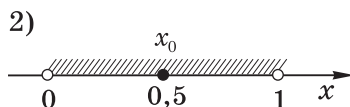
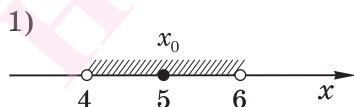


Рис. 29

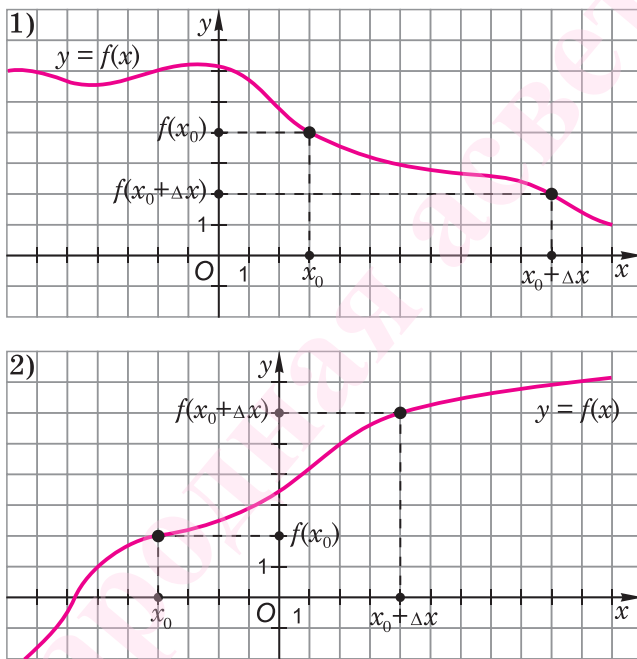
1.29°. Запішыце тры розныя наваколлі пункта:

- 1) 2; 2) 7; 3) -12; 4) -25.

1.30°. Запішыце тры пункты, што належаць наваколлю:

- 1) (12; 15); 2) (-13; -11);
3) $(-\infty; -100)$; 4) $(31; +\infty)$.

1.31°. Па рысунку 30 вызначыце прырашчэнне аргумента Δx у пункце x_0 і прырашчэнне функцыі Δf у пункце x_0 .



Рыс. 30

1.32°. Знайдзіце прырашчэнне Δy функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 , якое адпавядае прырашчэнню аргумента Δx , калі:

- 1) $f(x) = 5x - 3$; 2) $f(x) = 1 - 3x$;
3) $f(x) = x^2 + 1$; 4) $f(x) = 2 - x^2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$; 6) $f(x) = \frac{3}{x} + 4$.

1.33. Знайдзіце прырашчэнне Δy функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 і пакажыце яго на відарысе графіка функцыі f , калі:

- 1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,4$;

- 2) $f(x) = 5x + 2$, $x_0 = 0,2$, $\Delta x = 0,5$;
 3) $f(x) = 2x^2 + 1$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $\Delta x = -0,8$;
 4) $f(x) = 4 - 3x^2$, $x_0 = 5$, $\Delta x = -0,6$;
 5) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,6$;
 6) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$, $x_0 = -2$, $\Delta x = -0,9$.
- 1.34. Знайдзіце для функцыі $y = f(x)$ прырашчэнне аргумента Δx і прырашчэнне функцыі Δy у пункце x_0 , калі:
- 1) $f(x) = \frac{x}{4} + 8$, $x_0 = -4,9$, $x = -3,4$;
 2) $f(x) = 5 - \frac{x}{2}$, $x_0 = -2,4$, $x = 1,2$;
 3) $f(x) = x + 2x^2$, $x_0 = 2,1$, $x = -1,3$;
 4) $f(x) = \frac{x^2}{6} - x$, $x_0 = -1,8$, $x = 0,4$.
- 1.35*. Знайдзіце прырашчэнне Δy функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 , якое адпавядае прырашчэнню аргумента Δx , калі:
- 1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$;
 3) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$; 4) $f(x) = 2 - \sqrt{2x + 3}$.
- 1.36. Параўнайце прырашчэнні функцый $y = f(x)$, $y = g(x)$ у пункце x_0 пры дадзеным Δx , калі:
- 1) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 5x + 25$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,1$;
 2) $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = -2x - 10$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,5$.
- 1.37. 1) Складзіце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $E(1; -2)$, калі вядома, што $\Delta y = -0,3$ — прырашчэнне функцыі, графікам якой з'яўляецца гэтая прамая, — адпавядае прырашчэнню аргумента $\Delta x = 0,1$.
 2) Складзіце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $P(-4; 3)$, калі вядома, што $\Delta y = 1,5$ — прырашчэнне функцыі, графікам якой з'яўляецца гэтая прамая, — адпавядае прырашчэнню аргумента $\Delta x = -0,4$.

1.4. Вытворная

Разгледзім функцыю $y = f(x)$, дзе $f(x) = x^2$. Прырашчэнне гэтай функцыі ў пункце x_0 (гл. п. 1.3, прыклад 1, б) роўна

$$\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Разгледзім адносіну прырашчэння функцыі да прырашчэння аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x. \quad (1)$$

Будзем надаваць прырашчэнню Δx значэнні, якія ўсё менш і менш адрозніваюцца ад нуля, але не роўны нулю. Гэта запісваецца так: $\Delta x \rightarrow 0$ (чытаецца « Δx імкнецца да нуля»).

Паколькі значэнне $2x_0$ пастаяннае і не залежыць ад Δx , то, калі Δx усё менш і менш адрозніваецца ад нуля, сума $2x_0 + \Delta x$ усё менш і менш адрозніваецца ад ліку $2x_0$. Гэта запісваецца так:

$$(2x_0 + \Delta x) \rightarrow 2x_0 \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0 \quad (2)$$

(чытаецца « $2x_0 + \Delta x$ імкнецца да $2x_0$ пры Δx , што імкнецца да нуля»).

З (1) і (2) вынікае, што

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2x_0 \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

Лік $2x_0$, да якога імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ пры Δx , што імкнецца да нуля, называецца **выворнай функцыі $y = x^2$ у пункце x_0** .

Азначэнне. **Выворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 называецца лік, да якога імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ пры Δx , што імкнецца да нуля.**

Функцыя, якая мае выворную ў пункце x_0 , называецца дыферэнцуемай у гэтым пункце.

Выворная функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 абазначаецца $f'(x_0)$ (чытаецца «эф штрых ад x_0 »).

Такім чынам, для функцыі $f(x) = x^2$ мы атрымалі выворную ў пункце x_0 :

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Няхай функцыя $y = f(x)$ мае выворную ў кожным пункце з некаторага прамежку. Паставіўшы ў адпаведнасць кожнаму ліку x з гэтага прамежку лік $f'(x)$, мы атрымалі новую функцыю, якая называецца **выворнай функцыі f і абазначаецца f' або y'** .

Так, для функцыі $f(x) = x^2$ на мностве $\mathbf{R}$ мы атрымалі вытворную $f'(x) = 2x$. Пішучь таксама

$$(x^2)' = 2x.$$

Прыклад 1. Знайсці вытворную лінейнай функцыі

$$y = kx + b.$$

Рашэнне. Тут $f(x) = kx + b$. Знойдзем Δy — прырашчэнне функцыі f у пункце x_0 :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x.$$

Знойдзем адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (напомнім, што $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не залежыць ад Δx ; пры любым значэнні Δx яна роўна k . Значыць, і пры Δx , што імкнецца да нуля, гэта адносіна роўна k . А раз так, то можна сказаць, што яна імкнецца да k . Такім чынам:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0,$$

г. зн. $f'(x_0) = k$.

Такім чынам,

$$(kx + b)' = k.$$

Адказ: $(kx + b)' = k$.



У прыватнасці, пры $k = 0$ атрымліваем $b' = 0$, г. зн. **вытворная пастаяннай роўна нулю**.

Прыклад 2. Знайсці вытворную квадратычнай функцыі

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Рашэнне. Тут $f(x) = ax^2 + bx + c$. Знойдзем Δy — прырашчэнне функцыі f у пункце x_0 :

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ &= a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) = \\ &= 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x. \end{aligned}$$

Знойдзем адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x + b.$$

Калі $\Delta x \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2ax_0 + b$, г. зн. $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Такім чынам,

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Адказ: $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.



Рэшаныя прыклады паказваюць, што для вылічэння вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 трэба:

- 1) знайсці Δy — прырашчэнне функцыі f у пункце x_0 ;
- 2) запісаць адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- 3) вызначыць, да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля.

Вылічэнне вытворнай функцыі называецца **дыферэнцаваннем функцыі**.

Прыклад 3. Знайсці вытворную функцыі

$$f(x) = \frac{k}{x}.$$

Рашэнне. Няхай x_0 — адвольны пункт з абсягу вызначэння функцыі $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

1) Выберам Δx так, каб выраз $f(x_0 + \Delta x)$ меў сэнс, г. зн. $x_0 + \Delta x \neq 0$, тады $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{-k\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ (гл. п. 1.3, прыклад 1, в).

2) Знайдзем адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-k}{x_0(x_0 + \Delta x)}. \quad (3)$$

3) Знайдзем, да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля. Зразумела, што

$$(x_0 + \Delta x) \rightarrow x_0 \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

Значыць, назоўнік дробу ў правай частцы роўнасці (3) імкнецца да x_0^2 :

$$x_0(x_0 + \Delta x) \rightarrow x_0^2 \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

А паколькі лічнік гэтага дробу роўны $-k$ пры любым значэнні Δx , то маем:

$$\frac{-k}{x_0(x_0 + \Delta x)} \rightarrow \frac{-k}{x_0^2} \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0. \quad (4)$$

З (3) і (4) вынікае, што $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{-k}{x_0^2}$ пры $\Delta x \rightarrow 0$.
Такім чынам,

$$\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}.$$

Адказ: $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$.

Прыклад 4*. Знайсці вытворную функцыі $f(x) = \sqrt{x}$.

Рашэнне. Няхай $x_0 > 0$.

1) Выберам Δx так, каб выраз $f(x_0 + \Delta x)$ меў сэнс, г. зн. $x_0 + \Delta x \geq 0$, тады

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \quad (\text{гл. п. 1.3, прыклад 1, г}).$$

2) Знайдзем адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдзем, да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля. Маем:

$$(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}) \rightarrow 2\sqrt{x_0} \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

Такім чынам,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Адказ: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ для любога $x > 0$.

Наогул, функцыя можа і не мець вытворнай у дадзеным пункце. Так, у пункце $x = 0$ вытворная функцыі $f(x) = \sqrt{x}$ не існуе. Але мы будзем разглядаць функцыі толькі на прамежках, дзе вытворная існуе.



1. Як чытаецца і што азначае запіс $\Delta x \rightarrow 0$?
2. Што называецца вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 ?
3. Як абазначаецца вытворная функцыі $y = f(x)$?
4. Чаму роўна вытворная лінейнай функцыі

$$f(x) = kx + b?$$
5. Чаму роўна вытворная пастаяннай?
6. Чаму роўна вытворная квадратычнай функцыі

$$f(x) = ax^2 + bx + c?$$
7. Чаму роўна вытворная функцыі:
 - а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \sqrt{x}$?

Практыкаванні

1.38°. Вылічыце адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ у пункце x_0 , калі:

- 1) $f(x) = 4x - 6$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,5$;
- 2) $f(x) = 12 - 3x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$;
- 3) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,2$;
- 4) $f(x) = 6x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,4$.

1.39°. Да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ у пункце x_0 пры $\Delta x \rightarrow 0$, калі:

- 1) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = 0,5 - 5x$, $x_0 = 10$;
- 3) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = 1 - 3x^2$, $x_0 = -5$?

Выкарыстаўшы азначэнне вытворнай, знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце $x_0 = a$ (1.40—1.46).

- 1.40°. 1) $f(x) = 3$, $a = 10$; 2) $f(x) = -6$, $a = 1$;
 3) $f(x) = \pi$, $a = -4$; 4) $f(x) = \sqrt{8}$, $a = -5$.

- 1.41°. 1) $f(x) = 4x$, $a = 1$;
 2) $f(x) = -5x$, $a = 7$;
 3) $f(x) = -2,5x - 2$, $a = -2$;
 4) $f(x) = -4,2x + 3$, $a = -6$;
 5) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $a = 0$;
 6) $f(x) = 2 + \frac{3x}{4}$, $a = 1$.

1.42°. 1) $f(x) = 4x^2$, $a = 0$;

2) $f(x) = -7x^2$, $a = 0,5$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$, $a = -2$;

4) $f(x) = 3 - \frac{x^2}{6}$, $a = 3$.

1.43. 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $a = 0,25$;

2) $f(x) = x^2 - x + 2$, $a = 0$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{6} - 0,2x + 8$, $a = 3$;

4) $f(x) = \frac{4x^2}{5} - \frac{x}{10} + 1$, $a = -1$;

5) $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 9}{3}$, $a = -2$;

6) $f(x) = \frac{6 - 6x - 12x^2}{6}$, $a = -3$.

1.44. 1) $f(x) = (3 + x)^2$, $a = -2$;

2) $f(x) = (4 - x)^2$, $a = -1,5$;

3) $f(x) = x(x + 2)$, $a = 0,1$;

4) $f(x) = x(x - 4)$, $a = 1$;

5) $f(x) = x^2 - (x + 2)^2$, $a = -0,5$;

6) $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$, $a = 2,5$.

1.45. 1) $f(x) = \frac{5}{x}$, $a = 0,1$;

2) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $a = -0,1$;

3) $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$, $a = -1$;

4) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$, $a = -0,5$;

5) $f(x) = \frac{3}{x} + x^2$, $a = 5$;

6) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $a = 0,2$.

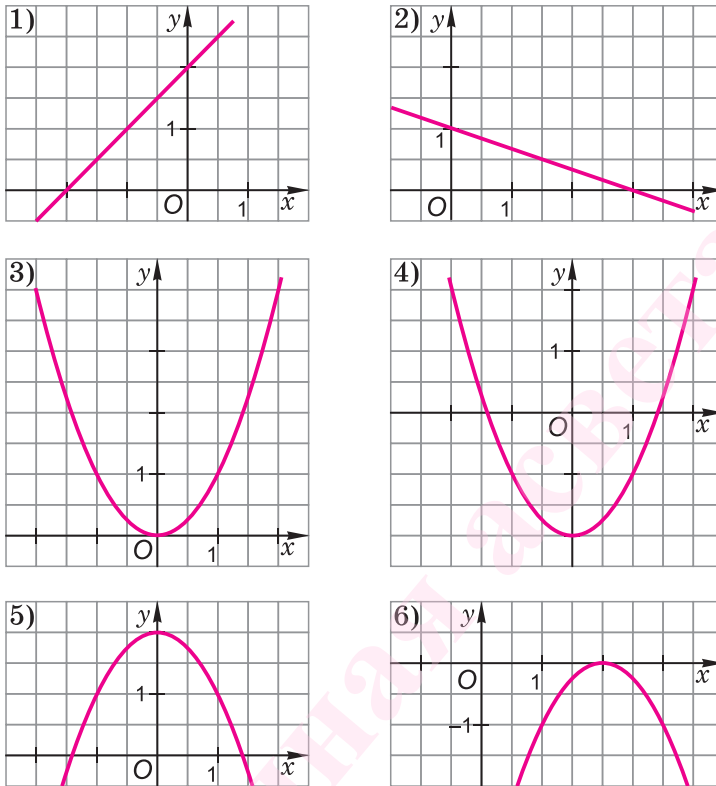
1.46*. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0,01$;

2) $f(x) = \sqrt{4x}$, $a = 0,04$;

3) $f(x) = -\sqrt{0,01x}$, $a = 100$;

4) $f(x) = \sqrt{9x} + 1$, $a = 1$.

1.47. Выкарыстаўшы рысунк 31, дзе паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$ (на рысунках 1), 2) — прамыя, на рысунках 3)–6) — парабалы), пакажыце відарыс графіка вытворнай $y = f'(x)$.



Рыс. 31

1.48. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$:

1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$;

2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$;

3) $f(x) = (x - 4)^2$;

4) $f(x) = (2 - x)^2 - 4$.

1.49. Рашыце няроўнасць $f'(x) \leq 0$:

1) $f(x) = 5x^2 + x + 2$;

2) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$;

3) $f(x) = \frac{2}{1+x}$;

4) $f(x) = \frac{5}{x-2}$;

5)* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$;

6)* $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{4} + 1$.

1.50*. Запішыце пункты з абсягу вызначэння функцыі f , у якіх вытворная функцыі f не існуе, калі:

- 1) $f(x) = \sqrt{x+2}$; 2) $f(x) = -\sqrt{x-6}$;
 3) $f(x) = 4\sqrt{8+x}$; 4) $f(x) = 9 + \sqrt{x+1}$.

1.51. Запішыце функцыю, вытворная якой роўна:

- 1) 2; 2) -6; 3) $2x$; 4) $-x$;
 5) $x+1$; 6) $x-2$; 7)* $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$; 8)* $4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1.5. Механічны сэнс вытворнай

Будзем разглядаць прамалінейны рух пункта. Кожнаму моманту часу t паставім у адпаведнасць шлях $s(t)$, пройдзены пунктам за час t . Тады шлях, пройдзены пунктам за адрэзак часу ад t_0 да $t_0 + \Delta t$, г. зн. за Δt , будзе роўны

$$s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s.$$

Сярэдняя скорасць пункта на адрэзку часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ вызначаецца як адносіна пройдзенага шляху Δs да часу Δt , за які гэты шлях пройдзены:

$$v_{\text{сярэдн}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1)$$

Калі прамежак часу Δt імкнецца да нуля, то значэнне сярэдняй скорасці $v_{\text{сярэдн}}$, як правіла, імкнецца да некаторага ліку. Гэты лік лічыцца значэннем скорасці ў момант часу t_0 і абазначаецца $v(t_0)$ (у механіцы такую скорасць называюць імгненнай скорасцю):

$$v_{\text{сярэдн}} \rightarrow v(t_0) \text{ пры } \Delta t \rightarrow 0.$$

А па азначэнні вытворнай функцыі s у пункце t_0 маем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow s'(t_0) \text{ пры } \Delta t \rightarrow 0.$$

Такім чынам, пры Δt , што імкнецца да нуля, левая частка роўнасці (1) імкнецца да $v(t_0)$, а правая — да $s'(t_0)$. Значыць,

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Таму, калі закон руху пункта задаецца дыферэнцуемай функцыяй s , скорасць пункта ў момант часу t вызначаецца формулай

$v(t) = s'(t).$

(2)



У роўнасці (2) і заключаецца **механічны** (гавораць яшчэ **фізічны**) **сэнс вытворнай**.

Яго звычайна фармулююць так: *скорасць ёсць вытворная ад пройдзенага шляху па часе*.

Прыклад 1. Знайсці скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = 0,25t^2$ (s — шлях у метрах, t — час у мінутах), праз 6 мінут пасля пачатку руху.

Рашэнне. Выкарыстаем механічны сэнс вытворнай і формулу вытворнай квадратычнай функцыі (гл. прыклад 2 п. 1.4):

$$\begin{aligned}v(t) &= s'(t) = 0,5t; \\v(6) &= 0,5 \cdot 6 = 3 \left(\frac{\text{м}}{\text{мін}} \right).\end{aligned}$$

Адказ: $3 \frac{\text{м}}{\text{мін}}$.

Прыклад 2. Цела кінута вертыкальна ўверх з пачатковай скорасцю $v_0 = 70 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Якую скорасць будзе мець цела на вышыні 240 м ад паверхні Зямлі?

Рашэнне. З курса фізікі вядома, што закон руху цела, кінутага вертыкальна ўверх з пачатковай скорасцю v_0 , задаецца формулай $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Мяркуючы ў гэтай формуле $h(t) = 240$ м, $v_0 = 70 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ і $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, атрымліваем ураўненне $240 = 70t - \frac{10}{2}t^2$, г. зн. $t^2 - 14t + 48 = 0$.

Рашыўшы яго, знойдзем: $t = 6$ або $t = 8$.

Выкарыстаўшы механічны сэнс вытворнай і формулу вытворнай квадратычнай функцыі (гл. прыклад 2 п. 1.4), знойдзем:

$$v(t) = h'(t) = v - gt = 70 - 10t.$$

Пры $t = 6$ атрымаем $v(6) = 70 - 10 \cdot 6 = 10$, а пры $t = 8$ атрымаем $v(8) = 70 - 10 \cdot 8 = -10$.

Такім чынам, на вышыні 240 м ад паверхні Зямлі на 6-й секундзе руху цела будзе ляцець уверх са скорасцю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а на 8-й секундзе — падаць уніз (на гэта паказвае знак «-») з той жа скорасцю.

Адказ: $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

А

Ужо ў першай палове XVII ст. французскі матэматык П'ер Ферма ўмеў знаходзіць вытворныя ад найпростейшых функцый — мнагачленаў. Але сістэматычнае выкарыстанне вытворных пры рашэнні розных задач фізікі і матэматыкі пачалося са стварэння матэматычнага аналізу Ісаакам Ньютанам (Англія) і Готфрыдам Вільгельмам Лейбніцам (Германія).

У кнізе Ісаака Ньютана «Математические начала натуральной философии» даказаны асноўныя законы руху нябесных цел. У сваіх працах «Рассуждения о квадратуре кривых» і «Метод флюксии и бесконечных рядов» Ньютан распрацаваў асновы матэматычнага аналізу.

?

1. Як вызначаецца сярэдняя скорасць цела на адрэзку часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$?
2. У чым заключаецца механічны (фізічны) сэнс вытворнай?

Практыкаванні

1.52°. Па графіку (рыс. 32) знайдзіце сярэднюю скорасць руху матацыкліста на адрэзку часу:

- 1) $[0; 2]$; 2) $[2; 5]$; 3) $[2; 6]$; 4) $[5; 9]$.

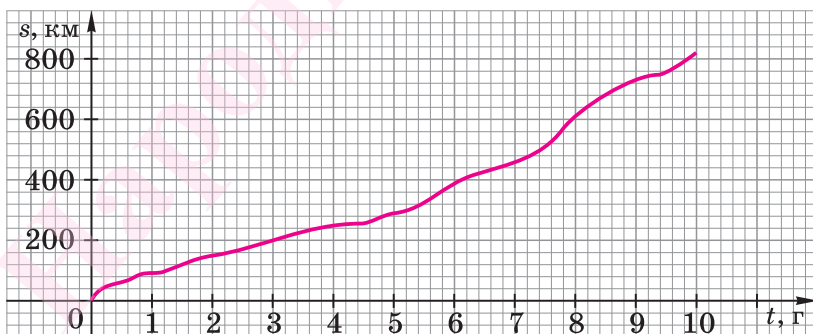


Рис. 32

1.53. На адрэзку часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ знайдзіце сярэднюю скорасць цела, якое рухаецца прамалінейна па законе:

- 1) $s(t) = 12t + 9$; 2) $s(t) = 5 - 4t$;
 3) $s(t) = t^2 + 1$; 4) $s(t) = 6 - t^2$.

1.54°. Ведаючы, што пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = 2t^2 - 8t - 9$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах), вылічыце скорасць руху пункта ў момант часу:

- 1) $t = 5$ с; 2) $t = 12$ с; 3) t с.

1.55°. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). У які момант часу t скорасць руху пункта v роўна:

- 1) $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 2) $0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) $12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$?

1.56. Знайдзіце скорасць у дадзены момант часу t пункта, які рухаецца прамалінейна па законе $s(t)$, дзе s — шлях у метрах, t — час у секундах:

- 1) $s(t) = t^2 + 2t + 1$, $t = 3$;
2) $s(t) = 2t^2 - 3t + 4$, $t = 2$.

1.57. Махавік верціцца вакол сваёй восі па законе $\varphi = t^2 - 1$ (φ — вугал павароту ў радыянах, t — час у секундах). Знайдзіце вуглавую скорасць вярчэння махавіка ω у момант часу:

- 1) t с; 2) 2 с; 3) 8 с.

1.58. Шлях, пройдзены кляццю пад'ёмнай машыны, вызначаецца з ураўнення $s = 6 + 8t$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). Знайдзіце скорасць руху кляці ў любы момант часу t .

1.59. Два матэрыяльныя пункты рухаюцца прамалінейна па законах s_1 і s_2 (t — час у секундах, s — шлях у метрах). У які момант часу іх скорасці роўныя, калі:

- 1) $s_1 = 2,5t^2 + 6t + 1$, $s_2 = 3,5t^2 - t - 12$;
2) $s_1 = \frac{3t^2}{2} + 5t - 13$, $s_2 = 1 - 7t - 4t^2$?

1.60. Два матэрыяльныя пункты рухаюцца прамалінейна па законах s_1 і s_2 (t — час у секундах, s — шлях у метрах). У які момант часу скорасць першага пункта ў n разоў большая за скорасць другога, калі:

- 1) $s_1 = t^2 - 8t + 4$, $s_2 = 5t^2 - 4t - 9$, $n = 3$;
2) $s_1 = 0,5t^2 + 8t + 1$, $s_2 = 9t - 7$, $n = 2$?

- 1.61.** Тэмпература цела ў залежнасці ад часу задаецца формулай $T = 0,3t^2$ (T — тэмпература ў градусах, t — час у секундах). Знайдзіце скорасць змянення тэмпературы цела ў момант часу t , калі:
- 1) $t = 5$; 2) $t = 4$; 3) $t = 1$.
- 1.62.** Цела кінута вертыкальна ўверх і рухаецца па законе $h(t)$. Знайдзіце скорасць цела ў момант дотыку да паверхні Зямлі (h — вышыня ў метрах, t — час у секундах, паскарэнне g лічыць роўным $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$), калі:
- 1) $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$; 2) $h(t) = 6 + 7t - 5t^2$.
- 1.63*.** Цела кінута вертыкальна ўверх з вышыні 20 м ад паверхні Зямлі з пачатковай скорасцю $50 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. (Паскарэнне g лічыць роўным $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.)
- 1) У які момант часу скорасць кінутага цела будзе роўна нулю?
- 2) На якой адлегласці ад паверхні Зямлі будзе знаходзіцца цела ў той момант, калі яго скорасць роўна нулю?
- 1.64.** Змяненне сілы току I ў залежнасці ад часу t зададзена ўраўненнем $I = 4t^2 - 9t$ (I — сіла току ў амперах, t — час у секундах). Знайдзіце скорасць змянення сілы току ў момант часу $t = 10$ с.
- 1.65.** Вядома, што цела масай $m = 6$ кг рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = 3t^2 - 14$ (t — час у секундах, s — шлях у метрах). Знайдзіце кінетычную энергію цела праз 4 с пасля пачатку руху.
- 1.66.** Цела масай m кг рухаецца прамалінейна па законе $s(t)$, дзе s — шлях у метрах, t — час у секундах. Знайдзіце скорасць цела і яго кінетычную энергію праз n с пасля пачатку руху. Якая сіла дзейнічае на цела ў гэты момант часу, калі:
- 1) $m = 4$, $s(t) = 4t^2 - 5t - 1$, $n = 4$;
2) $m = 1$, $s(t) = 2t^2 - 6t - 2$, $n = 3$?

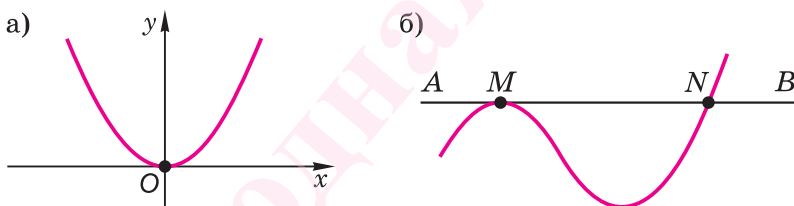
1.67*. Пункт рухаецца па парабале $y = f(x)$ так, што яго абсцыса змяняецца па законе $x = g(t)$, дзе x — шлях у метрах, t — час у секундах. Знайдзіце скорасць змянення ардынаты пункта праз n с пасля пачатку руху, калі:

1) $f(x) = 16x - x^2$, $g(t) = 2\sqrt{t}$, $n = 8$;

2) $f(x) = 4x^2 + 2$, $g(t) = 0,5\sqrt{t}$, $n = 2$.

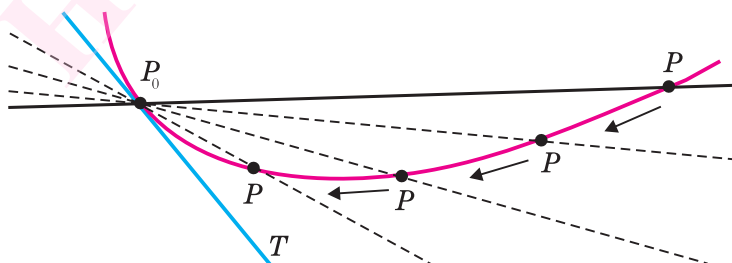
1.6. Геаметрычны сэнс вытворнай. Ураўненне датычнай да графіка функцыі

Мы ведаем, што датычная да акружнасці — гэта прамая, якая мае з ёй адзіны агульны пункт. Але такое азначэнне датычнай падыходзіць далёка не для ўсякай прамой. Напрыклад, і вось Oy , і вось Ox маюць адзін агульны пункт (пачатак каардынат) з парабалай $y = x^2$ (рыс. 33, а), але вось Ox з'яўляецца датычнай да парабалы, а вось Oy не з'яўляецца датычнай да яе. А прамая AB датыкаецца да крывой у пункце M , але мае з гэтай крывой не адзін, а два агульныя пункты (рыс. 33, б).



Рыс. 33

Каб даць азначэнне датычнай да дадзенай крывой у пункце P_0 (рыс. 34), возьмем на гэтай крывой яшчэ адзін пункт P і правядзём сякучую P_0P . Будзем перамяшчаць пункт P



Рыс. 34

па крывой, набліжаючы яго неабмежавана да пункта P_0 . Тады сякучая P_0P будзе паварочвацца вакол пункта P_0 . Пры гэтым сякучая будзе імкнуцца да некаторага гранічнага становішча — прамой P_0T . Гэтая прамая P_0T і называецца **датычнай да дадзенай крывой у пункце P_0** .

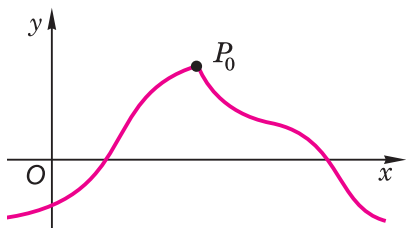


Рис. 35

Заўважым, што ў пункце P_0 крывая можа не мець датычнай, як, напрыклад, на **рысунку 35**.

Няхай цяпер разглядаемая крывая (рис. 36) з'яўляецца графікам некаторай функцыі $y = f(x)$. Рэшым задачу: *знайсці вуглавы каэфіцыент датычнай*

да графіка гэтай функцыі ў пункце $P_0(x_0; y_0)$.

Вугал нахілу датычнай P_0T да восі Ox абазначым φ . Возьмем на крывой яшчэ адзін пункт $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і правядзём сякучую P_0P . Вугал нахілу сякучай да восі Ox абазначым α (гл. рис. 36). З трохвугольніка P_0PK ($\angle K = 90^\circ$) атрымліваем, што вуглавы каэфіцыент сякучай (гл. п. 1.2) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{PK}{P_0K}$, г. зн.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

Калі Δx імкнецца да нуля, пункт P , рухаючыся па крывой, неабмежавана набліжаецца да пункта P_0 . Пры гэтым сякучая P_0P паварочваецца вакол пункта P_0 і імкнецца за-

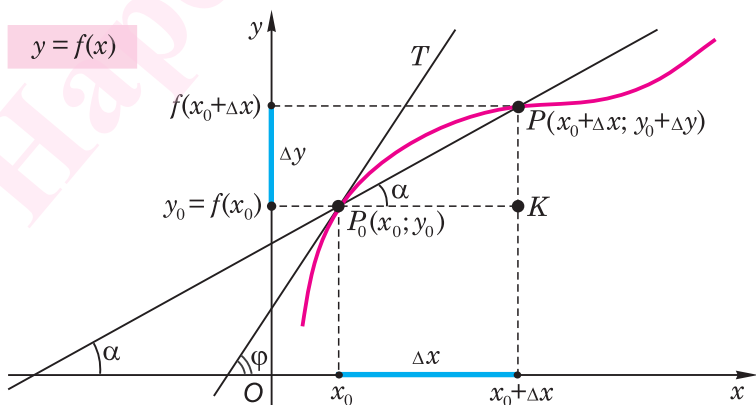


Рис. 36

няць становішча датычнай P_0T . Але тады велічыня вугла α імкнецца да велічыні вугла φ . Такім чынам, і $\operatorname{tg} \alpha$ імкнецца да $\operatorname{tg} \varphi$, г. зн.

$$\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \varphi \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

А па азначэнні вытворнай функцыі $f(x)$ у пункце x_0 маем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \text{ пры } \Delta x \rightarrow 0.$$

Такім чынам, пры Δx , што імкнецца да нуля, левая частка роўнасці (1) імкнецца да $\operatorname{tg} \varphi$, а правая — да $f'(x_0)$. Значыць,

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0). \quad (2)$$

Такім чынам, $\operatorname{tg} \varphi$ — гэта вуглавая каэфіцыент датычнай.



У роўнасці (2) і заключаецца *геаметрычны сэнс вытворнай*. Яго фармулююць так:

вуглавая каэфіцыент датычнай да графіка функцыі ў пункце з абсцысай x_0 роўны вытворнай гэтай функцыі ў пункце x_0 .

Іншымі словамі:

вытворная функцыі ў пункце x_0 ёсць тангенс вугла нахілу да восі Ox датычнай, праведзенай да графіка гэтай функцыі ў пункце $(x_0; f(x_0))$.

Прыклад 1. Чаму роўны вуглавая каэфіцыент датычнай да графіка функцыі $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 2$?

Рашэнне. Абазначым вуглавая каэфіцыент датычнай літарай k . Тады, выкарыстаўшы геаметрычны сэнс вытворнай і формулу вытворнай квадратычнай функцыі, атрымаем:

$$k = f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{4}x_0 = \frac{1}{2}x_0.$$

Паколькі $x_0 = 2$, то $k = 1$.

Адказ: 1.

Знойдзем цяпер *ураўненне датычнай да графіка функцыі* $y = f(x_0)$ у пункце $(x_0; f(x_0))$. Для гэтага выкарыстаем формулу (2) з п. 1.2. Тут $y_0 = f(x_0)$, а згодна з геаметрычным сэнсам вытворнай $k = f'(x_0)$. Падставіўшы гэтыя значэнні y_0 і k у формулу $y - y_0 = k(x - x_0)$, атрымаем $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Гэта і ёсць шуканае ўраўненне. Звычайна яго запісваюць так:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (3)$$

Прыклад 2. Запісаць ураўненне датычнай да графіка функцыі $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 2$.

Рашэнне. У прыкладзе 1 вуглавый каэфіцыент датычнай да графіка гэтай функцыі ўжо знайшлі: $k = f'(x_0) = 1$.

Знойдзем ардынату $f(x_0)$ пункта дотыку:

$$f(x_0) = \frac{1}{4}x_0^2 + 2 = 3.$$

Падставіўшы ў формулу (3) значэнні $f'(x_0)$, x_0 і $f(x_0)$, атрымаем

$$y = 1(x - 2) + 3, \text{ г. зн. } y = x + 1.$$

Адказ: $y = x + 1$.

А

Готфрыд Вільгельм Лейбніц (1646—1716) — вялікі нямецкі вучоны. Яго творчасць была надзвычай шматграннай: ён быў дыпламатам, займаўся філасофіяй, юрыспрудэнцыяй, матэматыкай.

У сваіх працах «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных...» і «О скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных» Лейбніц увёў у матэматыку тэрміны і абазначэнні, якімі карыстаюцца і цяпер: абсцыса, ардыната, каардыната, функцыя, вытворная, алгарытм, дыферэнцыял, дыферэнцыяльнае вылічэнне і г. д.

?

1. Што такое датычная да крывой у пункце P_0 ?
2. Чаму роўны вуглавый каэфіцыент датычнай да графіка функцыі f у пункце з абсцысай x_0 ?
3. У чым заключаецца геаметрычны сэнс вытворнай?
4. Выведзіце ўраўненне датычнай да крывой $y = f(x)$ у пункце x_0 .

Практыкаванні

1.68. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, правядзіце да яго датычную ў пункце з абсцысай x_0 і вызначыце знак вуглавога каэфіцыента датычнай, калі:

1) $f(x) = (x + 3)^2 - 5$, $x_0 = 0$;

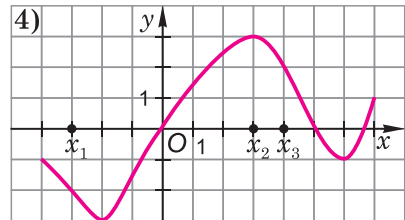
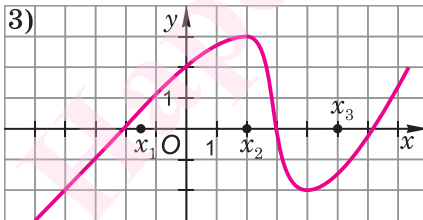
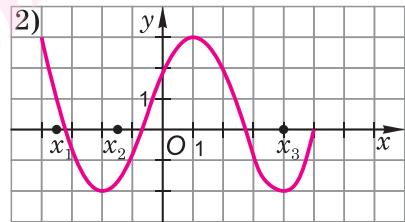
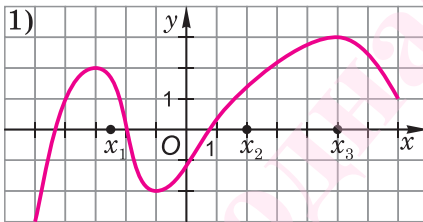
2) $f(x) = (x - 2)^2 + 4$, $x_0 = 1$.

1.69*. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, правядзіце да яго датычную (калі яна існуе) у пункце з абсцысай x_0 і вызначыце знак вуглавога каэфіцыента датычнай, калі:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \frac{4}{x+2} - 2$, $x_0 = 0$.

1.70. Па рысунку 37 вызначыце знак вуглавога каэфіцыента кожнай з датчных, праведзеных да графіка функцыі ў пунктах з абсцысамі x_1 , x_2 , x_3 .



Рыс. 37

1.71. 1) Знайдзіце значэнне выворнай функцыі $y = x^2 + 2$ у пункце $x = -1$.

2) Чаму роўны $\operatorname{tg} \alpha$, дзе α — вугал нахілу да восі Ox датычнай, праведзенай да графіка функцыі $y = x^2 + 2$ у пункце з абсцысай $x_0 = -1$?

3) Вядома, што вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі ў пункце з абсцысай x_0 роўны 0,42. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі ў гэтым пункце.

4) Датычная да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 утварае з воссю Ox вугал нахілу 45° . Знайдзіце $f'(x_0)$.

1.72. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі Ox датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 , калі:

1) $f(x) = 4x^2 - 6x$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = 3x - 4x^2 + 20$, $x_0 = -2$.

1.73. Які вугал нахілу (востры або тупы) да восі Ox утварае датычная, праведзеная да графіка функцыі:

1) $y = (x - 4)^2$ у кожным з пунктаў з абсцысамі 0; 8; -5;

2) $y = -(x - 1)^2$ у кожным з пунктаў з абсцысамі 0; 1; 2?

1.74. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 , калі:

1) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -2$;

4) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

1.75. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце P . Пакажыце відарыс графіка гэтай функцыі і датычнай да яго ў пункце P , калі:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 4$, $P(1; 8)$;

2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $P(2; 5)$;

3) $f(x) = 4x - 2x^2$, $P(1; 2)$;

4) $f(x) = 3x - x^2$, $P(0; 0)$.

1.76. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце M . Пакажыце відарыс графіка функцыі f і датычнай да яго ў пункце M , калі:

1) $f(x) = x^2 + 5$, $M(-1; 6)$;

2) $f(x) = x^2 - 3$, $M(-2; 1)$;

3) $f(x) = (x - 3)^2$, $M(2; 1)$;

- 4) $f(x) = (5 - x)^2$, $M(6; 1)$;
- 5) $f(x) = (x + 4)^2 - 7$, $M(-4; -7)$;
- 6) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$, $M(-3; 6)$.

1.77. Вугал нахілу да восі Ox датычнай, праведзенай да графіка функцыі $y = f(x)$, роўны α . Знайдзіце каардынаты пункта дотыку, калі:

- 1) $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $\alpha = 45^\circ$;
- 2) $f(x) = -4x^2 + 3x + 2$, $\alpha = 45^\circ$;
- 3) $f(x) = 1 + 2x^2 + \sqrt{3}x$, $\alpha = 60^\circ$;
- 4) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x + 6$, $\alpha = 60^\circ$;
- 5)* $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = 60^\circ$;
- 6)* $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = 30^\circ$.

1.78. 1) Складзіце ўраўненне датычнай, паралельнай восі абсцыс, да графіка функцыі $f(x) = 3x - x^2$.
2) Складзіце ўраўненне датычнай, перпендыкулярнай восі ардынаты, да графіка функцыі $f(x) = x^2 + 4x$.

1.79. Датычная да крывой $y = f(x)$ паралельна прамой $y = g(x)$. Знайдзіце каардынаты пункта дотыку, калі:

- 1) $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 6x + 13$;
- 2) $f(x) = 2x^2 + x - 1$, $g(x) = -4x + 5$.

1.80. 1) Да графіка функцыі $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ праведзена датычная, паралельная восі абсцыс. Знайдзіце каардынаты пункта дотыку.

2) У якім пункце графіка функцыі $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ датычная да яго паралельна восі абсцыс?

1.81*. 1) Складзіце ўраўненні датычных да графіка функцыі $y = -x^2$, якія праходзяць праз пункт $M(1; 0)$.

2) Складзіце ўраўненні датычных да графіка функцыі $y = x^2 - 3x + 1$, якія праходзяць праз пункт $K(2; -2)$.

1.82. Знайдзіце пункт перасячэння датычных да графіка функцыі $y = f(x)$, адна з якіх датыкаецца да графіка ў пункце з абсцысай x_1 , а другая — у пункце з абсцысай x_2 , калі:

- 1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;
- 2) $f(x) = 8 - x^2 - 2x$, $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

1.83. Знайдзіце пункт перасячэння датычных, праведзеных да графіка функцыі $y = f(x)$ у яго пунктах з абсцысамі x_1 і x_2 , калі:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 9$, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$;

2) $f(x) = x^2 + 7 - 4x$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

1.84*. 1) Пры якіх значэннях a прамая $y = 3x - 2$ з'яўляецца датычнай да графіка функцыі $y = x^2 + ax + 2$?

2) Пры якім значэнні a прамая $y = 3x + a$ з'яўляецца датычнай да графіка функцыі $y = 2x^2 - 5x + 1$?

1.7. Тэарэмы аб вылічэнні вытворных

Функцыі u і v , што разглядаюцца ў гэтым пункце, маюць вытворныя на некаторым прамежку, x_0 — пункт з гэтага прамежку. Мы выведзем правілы вылічэння вытворнай сумы, здабытку, дзелі функцый u і v .

Тэарэма 1 (аб вытворнай сумы).

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Гэта тэарэма каратка фармулюецца так: *вытворная сумы роўна суме вытворных складаемых.*

▲ **Доказ.** 1) Няхай $y = u + v$. Знайдзем Δy — прырашчэнне функцыі $y(x) = u(x) + v(x)$ у пункце x_0 :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \\ &= u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \\ &\quad \uparrow \text{ заўважым, што } u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) = \Delta u, \quad \uparrow \\ &\quad v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) = \Delta v \\ &= \Delta u + \Delta v, \text{ г. зн. } \Delta y = \Delta u + \Delta v. \end{aligned}$$

2) Знайдзем адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

3) Няхай $\Delta x \rightarrow 0$. Тады

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'; \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow u' + v'.$$

Левая частка роўнасці $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ імкнецца да y' , а правая — да $u' + v'$.

Значыць, $y' = u' + v'$. $\square \blacktriangle$

Тэарэма 2 (аб вытворнай здабытку).

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

▲ Доказ. 1) Няхай $y = uv$. Знойдзем Δy — прырашчэнне функцыі $y(x) = u(x)v(x)$ у пункце x_0 :

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= u(x_0)v(x_0) + \Delta uv(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u\Delta v - u(x_0)v(x_0) = \\ &= \Delta uv(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

Такім чынам,

$$\Delta y = \Delta uv(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

2) Знойдзем адносіну $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v. \quad (1)$$

3) Няхай $\Delta x \rightarrow 0$. Тады

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'; \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'; \quad \Delta v \rightarrow 0.$$

Таму

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \rightarrow \\ &\rightarrow u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) + u'(x_0) \cdot 0. \end{aligned}$$

Левая частка роўнасці (1) імкнецца да y' , а правая — да $u'v + uv'$. Значыць,

$$y' = u'v + uv'.$$

А паколькі $y = uv$, то

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad \square \blacktriangle$$

Тэарэма 3 (аб вынясенні пастаяннай за знак вытворнай).

$$(cu)' = cu'.$$

На падставе гэтай тэарэмы прынята гаварыць, што *пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай*.

▲ Доказ правядзіце самастойна, выкарыстаўшы тэарэму 2 і тое, што $c' = 0$ (гл. п. 1.4). ▲

Тэарэма 4 (аб вытворнай дзелі).

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

▲ Доказ. Абазначым $y = \frac{u}{v}$. Тады $u = yv$ і па тэарэме 2 маем $u' = y'v + yv'$.

Выразім з гэтай формулы y' , а затым замест y падставім $\frac{u}{v}$:

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

А паколькі $y = \frac{u}{v}$, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad \square \quad \blacktriangle$$

Прыклад 1. Знайсці вытворную функцыі

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Рашэнне. Выкарыстаем тэарэмы 1 і 3:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' = a(x^2)' + bx' + c' = \\ &\downarrow \text{ведаючы, што } (x^2)' = 2x, x' = 1, c' = 0, \text{ атрымаем } \downarrow \\ &= a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b. \end{aligned}$$

Адказ: $f'(x) = 2ax + b$.

Прыклад 2. Знайсці вытворную функцыі:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^4$.

Рашэнне. а) Ведаючы, што $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, і выкарыстаўшы тэарэму 2, атрымаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' = (x \cdot x^2)' = x' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = \\ &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f'(x) &= (x^4)' = (x \cdot x^3)' = x' \cdot x^3 + x \cdot (x^3)' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = \\ &= x^3 + 3x^3 = 4x^3 \quad (\text{можна дзейнічаць інакш: } f'(x) = (x^2 \cdot x^2)'). \end{aligned}$$

Адказ: а) $f'(x) = 3x^2$; б) $f'(x) = 4x^3$.

Прыклад 3. Знайсці вытворную функцыі:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы тэарэму 4 і ўжо вядомыя нам формулы для вылічэння вытворных, атрымаем:

а) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$;

б) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{1' \cdot x^3 - 1 \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$.

Адказ: а) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; б) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

▲ Разгледзеўшы вынікі, атрыманыя пры рашэнні прыкладаў 2 і 3, можна заўважыць, што для любога натуральнага n правільныя формулы:

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Гэту заканамернасць можна сфармуляваць і інакш.

Тэарэма 5 (аб вытворнай ступені). Для любога цэлага k правільная формула

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Гэту тэарэму прымем без доказу.

Прыклад 4. Знайсці вытворную функцыі:

а) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 3$; б) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

Рашэнне. а) $f'(x) = (2x^4 - x^3 + 5x - 3)' =$

$$= (2x^4)' + (-x^3)' + (5x)' + (-3)' = 2(x^4)' - (x^3)' + 5x' + 0 =$$

↓ выкарыстаем тэарэму 5 ↓

$$= 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 5 = 8x^3 - 3x^2 + 5.$$

б) $f'(x) = \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(x^3 - 3x)'(x^2 - 1) - (x^3 - 3x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$

$$= \frac{(3x^2 - 3)(x^2 - 1) - (x^3 - 3x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 3 - 2x^4 + 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}.$$

Адказ: а) $8x^3 - 3x^2 + 5$; б) $\frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}$. ▲



1. Сфармулуйце тэарэму аб вытворнай сумы.
2. Сфармулуйце тэарэму аб вытворнай здабытку.
3. Сфармулуйце тэарэму аб вынясенні пастаяннай за знак вытворнай.
4. Сфармулуйце тэарэму аб вытворнай дзелі.
- 5*. Сфармулуйце тэарэму аб вытворнай ступені.

Практыкаванні

Знайдзіце вытворную функцыі f (1.85—1.92).

- 1.85. 1) $f(x) = 4x + 5$; 2) $f(x) = 2 - 8x$;
3) $f(x) = 2\frac{7}{13} + 1\frac{3}{11}x$; 4) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$;
5) $f(x) = 4 - 3x^2 - 8x$; 6) $f(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{3}$.
- 1.86. 1) $f(x) = 9\left(4x + \frac{1}{3}\right)$; 2) $f(x) = 4\left(7 - \frac{3}{8}x\right)$;
3) $f(x) = (x + 3)(x - 6)$; 4) $f(x) = (x + 8)(9 - x)$.
- 1.87. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; 2) $f(x) = \frac{4}{x} + x$;
3) $f(x) = -\frac{1}{x} + 4x$; 4) $f(x) = -9x - \frac{1}{x}$.
- 1.88. 1) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$; 2) $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x}$; 4) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x+2}$.
- 1.89. 1) $f(x) = \frac{x-1}{2+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{4x-7}{4+x^2}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+4}{2-x}$; 4) $f(x) = \frac{1+x}{4-x^2}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{5+x^2-2x}$; 6) $f(x) = \frac{x^2-8x+4}{1-x^2+x}$.
- 1.90. 1) $f(x) = (x^2 + 2x)(x + 3)$;
2) $f(x) = (x^2 - 5x)(x - 4)$;
3) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$;
4) $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^2\right)(x^2 - 4x)$.

- 1.91. 1) $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)(5 - 3x)$;
2) $f(x) = -2(x + 7)(9 - x)$;
3) $f(x) = (x + 6)(3 - x)(7 + x)$;
4) $f(x) = (13 - x)(4 - x)(5 + x)$;
5)* $f(x) = \frac{\pi}{2}(5x + 2)(x - 4)^3$;
6)* $f(x) = \frac{\pi}{4}(2x - 7)(x + 5)^3$.

- 1.92. 1) $f(x) = \frac{5(4x - 1)(2 - 3x)}{3 - x^2}$;
2) $f(x) = \frac{8(2 - 9x)(x + 6)}{5 - x^2}$;
3)* $f(x) = \frac{(5 - x)(7x - 2)}{(x + 6)(x - 3)(2 - 4x)}$;
4)* $f(x) = \frac{(3 - 4x)(x + 5)(x - 7)}{(x - 6)(3 - x)}$;
5)* $f(x) = \frac{(2x - 1)^2(6 - x)}{(x + 2)^3}$;
6)* $f(x) = \frac{(x - 3)^3}{(7 - x)(2x + 1)^2}$.

1.93. Ці правільна, што:

- 1) $f'(0) < g'(0)$, калі $f(x) = x^2 - 6x$ і $g(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\right)$;
2) $f'(0) > g'(0)$, калі $f(x) = x^2 + 3x$ і $g(x) = x^2\left(\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}\right)$?

1.94. Параўнайце значэнні вытворных функцый f і g у пункце $x = a$, калі:

- 1) $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$, $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{6 - x}$, $a = 2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$, $g(x) = \frac{x + 5}{3x - x^2}$, $a = -1$;
3)* $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 15x$, $g(x) = \frac{3 - x}{2 + x}$, $a = 0$;
4)* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = \frac{3 + x}{2 - x}$, $a = 0$.

1.95. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі:

- 1) $f(x) = 2x^3 - 6x + 14$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$;

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$;

5)* $f(x) = x^2(x - 2)^3$;

6)* $f(x) = \frac{(x - 2)^3}{x^2}$.

1.96. Рашыце ўраўненне:

1) $f'(x) - f(x) = 0$, калі $f(x) = x^3$;

2) $g'(x) + g(x) = 0$, калі $g(x) = -x^3$;

3) $f'(x) = g'(x)$, калі $f(x) = x^2 + 4$ і $g(x) = (x + 1)(4x - 3)$;

4) $f'(x) - g'(x) = 0$, калі $f(x) = x^2 - 3$ і $g(x) = (x - 2)(3x + 2)$.

1.97. Рашыце няроўнасць:

1) $f'(x) < g'(x)$, калі $f(x) = 5x + 3$ і $g(x) = 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)$;

2) $f'(x) > g'(x)$, калі $g(x) = 4x - 5$ і $f(x) = \frac{x}{2}(2 - 6x)$.

1.98. 1) Пры якіх значэннях x вытворная функцыі

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$$
 прымае дадатныя значэнні?

2) Пры якіх значэннях x вытворная функцыі

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$$
 прымае адмоўныя значэнні?

1.99. Вугал нахілу да восі Ox датычнай, праведзенай да графіка функцыі $y = f(x)$, роўны α . Знайдзіце каардынаты пунктаў дотыку, калі:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$;

2) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1$, $\alpha = 30^\circ$.

1.100*. Пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t)$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). Дакажыце, што скорасць руху гэтага пункта не перавышае $n \frac{m}{c}$, калі:

1) $s(t) = \frac{2t + 1}{t + 1}$, $n = 1$;

2) $s(t) = \frac{3t + 1}{t + 2}$, $n = 2$.

1.8. Нарастанне і спаданне функцыі

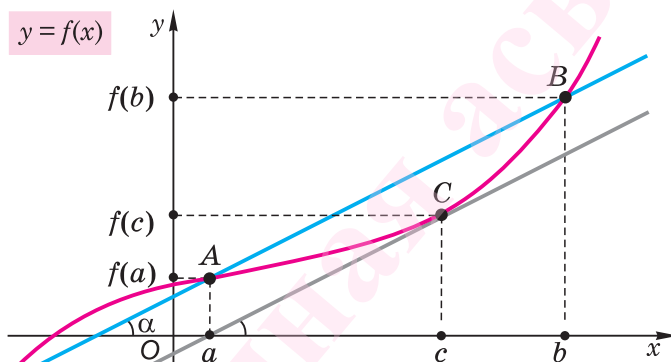
Пры дапамозе вытворнай вывучаюць розныя ўласцівасці функцый. Пакажам, як яе выкарыстоўваюць для знаходжання прамежкаў нарастання і прамежкаў спадання. Спачатку сфармулюем *прыметы нарастання і спадання функцыі*.

1. Калі ў кожным пункце x некаторага прамежку $f'(x) > 0$, то функцыя f нарастае на гэтым прамежку.

2. Калі ў кожным пункце x некаторага прамежку $f'(x) < 0$, то функцыя f спадае на гэтым прамежку.

▲ Дадзім нагляднае геаметрычнае тлумачэнне прыметы нарастання функцыі.

Няхай a і b ($a < b$) — два пункты з прамежку, на якім $f'(x) > 0$. Праз пункты $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$ правядзём прамую (рыс. 38). Яе вуглавы каэфіцыент $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Рыс. 38

На дузе AB знойдзецца такі пункт $C(c; f(c))$, што датычная да графіка функцыі ў гэтым пункце паралельная прамой AB . Вуглавы каэфіцыент датычнай $\operatorname{tg} \alpha = f'(c)$ (гл. п. 1.6). Значыць,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Паколькі $f'(c) > 0$ і $b - a > 0$, то $f(b) - f(a) > 0$.

Такім чынам, калі a і b — такія пункты з прамежку, што $b > a$, то $f(b) > f(a)$. А гэта азначае, што функцыя f нарастае на прамежку.

Нагляднае геаметрычнае тлумачэнне прыметы спадання функцыі дайце самастойна. ▲

Прыклад 1. Даказаць, што функцыя $f(x) = 5x^3 - x^2 + 6x - 7$ нарастальная.

Доказ. Абсяг вызначэння функцыі f — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. $D(f) = \mathbb{R}$.

Знойдзем вытворную функцыі f :

$$f'(x) = (5x^3 - x^2 + 6x - 7)' = 15x^2 - 2x + 6.$$

Дыскрымінант атрыманага квадратнага трохчлена адмоўны, г. зн. $D = 4 - 4 \cdot 15 \cdot 6 < 0$, значыць, пры любых значэннях x значэнні $f'(x) > 0$ (патлумачце чаму).

Такім чынам, функцыя f нарастальная на ўсім абсягу вызначэння. $\square$

Прыклад 2. Даказаць, што функцыя $f(x) = \frac{9}{x} - 6x - x^3$ спадальная на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Доказ. Заўважым, што $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Знойдзем вытворную функцыі f :

$$f'(x) = \left(\frac{9}{x} - 6x - x^3\right)' = -\frac{9}{x^2} - 6 - 3x^2 = -\frac{3(x^4 + 2x^2 + 3)}{x^2}.$$

Відавочна, што $f'(x) < 0$ для любога $x \neq 0$, г. зн. значэнні вытворнай адмоўныя на ўсім абсягу вызначэння функцыі f . Згодна з прыметай спадання функцыя f спадае на кожным з прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. $\square$



Паколькі $f(-1) = -9 + 6 + 1 < 0$ і $f(1) = 9 - 6 - 1 > 0$, то $f(-1) < f(1)$. Значыць, функцыю f нельга назваць спадальнай на ўсім абсягу вызначэння.

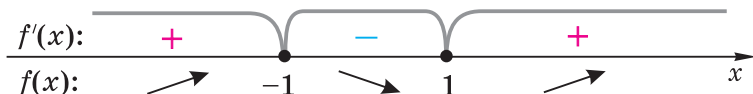
Прыклад 3. Знайсці прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Рашэнне. Знойдзем вытворную функцыі f :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Вытворная роўна нулю ў пунктах $x = -1$ і $x = 1$.

На рысунку 39 вылучаны прамежкі знакапастаянства функцыі $f'(x)$ (гэтыя прамежкі адзначаны знакамі «+» і «-» над каардынатнай прамой; патлумачце, як яны атрыманы).



Рыс. 39

Паколькі на інтэрвалах $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ вытворная $f'(x) > 0$, то на кожным з гэтых інтэрвалаў функцыя f нарастае; паколькі на інтэрвале $(-1; 1)$ вытворная $f'(x) < 0$, то на гэтым інтэрвале функцыя f спадае (на рысунку 39 нарастанне і спаданне функцыі $f(x)$ умоўна паказана стрэлкамі пад каардынатнай прамой).

У пунктах -1 і 1 функцыя f вызначана, таму іх уключаюць у прамежкі і нарастання, і спадання.

Адказ: $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$ — прамежкі нарастання функцыі f ; $[-1; 1]$ — прамежак спадання функцыі f .



Такім чынам, каб знайсці прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі f , трэба:

- 1) *знайсці вытворную $f'(x)$;*
- 2) *знайсці, у якіх пунктах вытворная роўна нулю (рашыць ураўненне $f'(x) = 0$);*
- 3) *адзначыць нулі вытворнай на каардынатнай прамой;*
- 4) *вызначыць знакі значэнняў $f'(x)$ у атрыманых (паміж нулямі) прамежках, г. зн. знайсці прамежкі знакапастаянства вытворнай $f'(x)$ (кожны з іх супадае з прамежкам нарастання або спадання функцыі f).*



1. Сфармулюйце прымету нарастання (спадання) функцыі на прамежку.
2. Як знайсці пры дапамозе вытворнай прамежкі нарастання (спадання) функцыі f ?

Практыкаванні

1.101°. Функцыя f зададзена графікам на прамежку $[a; b]$ (рыс. 40). Назавіце па рысунку прамежкі, на якіх функцыя:

- а) нарастае;
- б) спадае;
- в) мае дадатныя значэнні вытворнай;
- г) мае адмоўныя значэнні вытворнай.

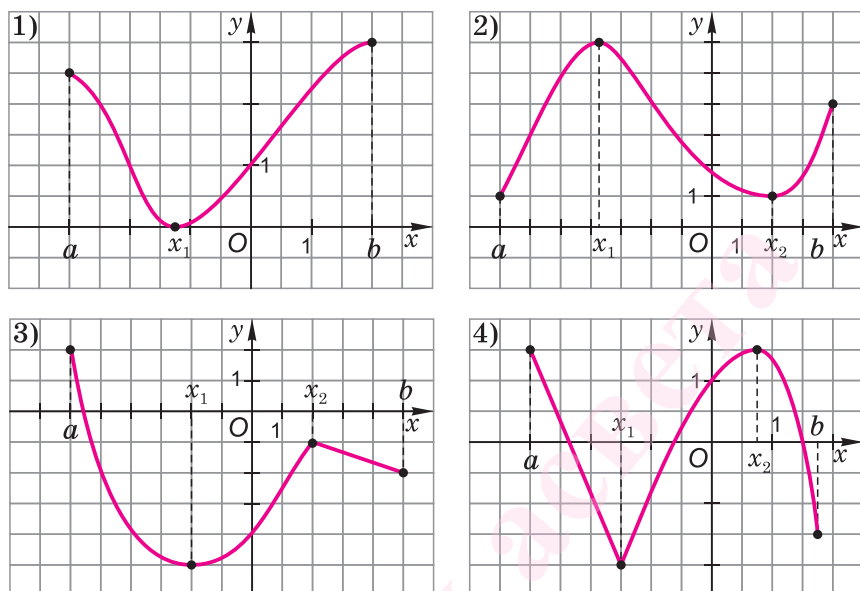


Рис. 40

1.102°. Знаки значенняў вытворнай $f'(x)$ змяняюцца па схеме (рис. 41). На якіх прамерках функцыя f нарастае, а на якіх — спадае, калі вядома, што яна вызначана на ўсёй лікавай прамой?

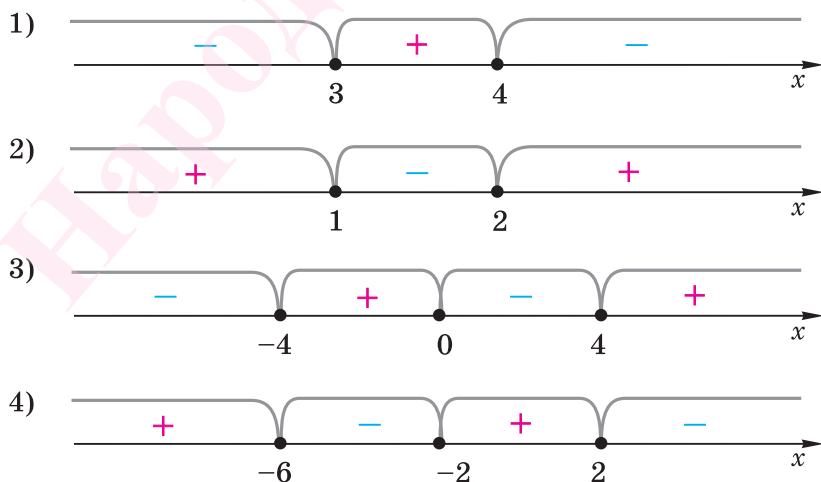
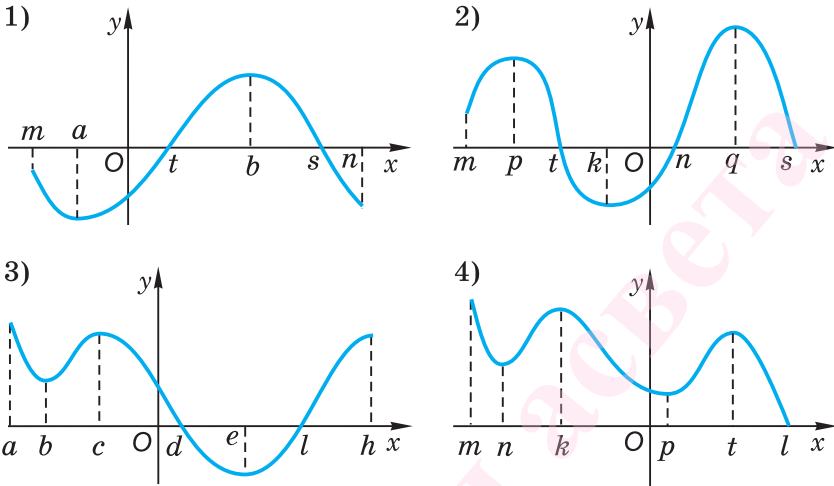


Рис. 41

1.103°. Функцыя f зададзена графікам (рыс. 42). На якіх прамежках значэнні вытворнай гэтай функцыі дадатныя, а на якіх — адмоўныя?



Рыс. 42

1.104. Знайдзіце прамежкі спадання і прамежкі нарастання функцыі f , калі яе вытворная:

- 1) $f'(x) = (x+5)(x-6)$; 2) $f'(x) = (x-3)(x+4)$;
- 3) $f'(x) = (x+1)(x-4)(x-7)$;
- 4) $f'(x) = (x+6)(x-7)(x+41)$;
- 5) $f'(x) = (x^2-1)(x^2-9)(x^2-16)$;
- 6) $f'(x) = (x^2-4)(x^2-25)(x^2-36)$.

1.105. Знайдзіце прамежкі спадання і прамежкі нарастання функцыі f , калі яе вытворная:

- 1) $f'(x) = x^2 - 6x + 9$; 2) $f'(x) = -x^2 - 10x - 25$;
- 3) $f'(x) = -x^2 + 5x - 16$; 4) $f'(x) = x^2 - 4x + 12$;
- 5) $f'(x) = -x^3 - 2x^2 + 35x$; 6) $f'(x) = -x^3 + x^2 + 30x$.

1.106. 1) Дакажыце, што функцыя $f(x) = \frac{2x^3-3}{3}$ з'яўляецца нарастальнай на ўсім абсягу вызначэння.

2) Дакажыце, што функцыя $f(x) = \frac{1-3x^3}{6}$ з'яўляецца спадальнай на ўсім абсягу вызначэння.

Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі f (1.107—1.110).

1.107. 1) $f(x) = 2x^2 - x + 12$; 2) $f(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{4}$.

1.108. 1) $f(x) = x^3 - 12x + 7$;
2) $f(x) = 6x - 2x^3 - 5$;
3) $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 6$;
4) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$;
5) $f(x) = x^4 - 4x - 3$;
6) $f(x) = x^4 + 32x + 1$;
7)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 1$;
8)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2$.

1.109. 1) $f(x) = 1 - \frac{1}{4x+1}$; 2) $f(x) = \frac{1}{1-4x} + 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

1.110. 1) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+1}$; 2) $f(x) = \frac{4x+1}{3x+1}$;
3) $f(x) = \frac{2x^2+15x-8}{x}$; 4) $f(x) = \frac{3x^2+8x-15}{x}$;
5) $f(x) = \frac{1-x}{4x^2+8x+13}$; 6) $f(x) = \frac{x-4}{4x^2+12x+9}$.

1.111*. Пры якіх значэннях a функцыя f нарастае на мностве ўсіх рэчаісных лікаў, калі:

1) $f(x) = ax^3 + ax$;
2) $f(x) = ax^5 + ax$;
3) $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$;
4) $f(x) = 4x^3 + (a-1)x^2 + \frac{1}{9}ax + 7$?

1.112. Ці з'яўляецца нарастальнай (спадальнай) на мностве ўсіх рэчаісных лікаў функцыя:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 14$;
2) $f(x) = 2x^5 - x^3 + 8x - 1$;
3)* $f(x) = -0,8x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 14$;
4)* $f(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - x^3 + x^2 - x + 14$?

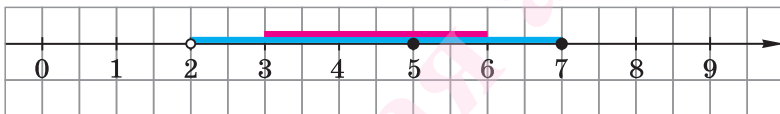
1.113*. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі f і запішыце лік яе нулёў, калі:

1) $f(x) = 4x^3 + 6x + 4\sqrt{5}$; 2) $f(x) = 6x^3 + 9x + 3\sqrt{3}$.

1.9. Максімуы і мінімуы функцыі

Пункт x_0 называецца **ўнутраным пунктам мноства D** , калі існуе такое наваколле пункта x_0 , якое змяшчаецца ў мностве D .

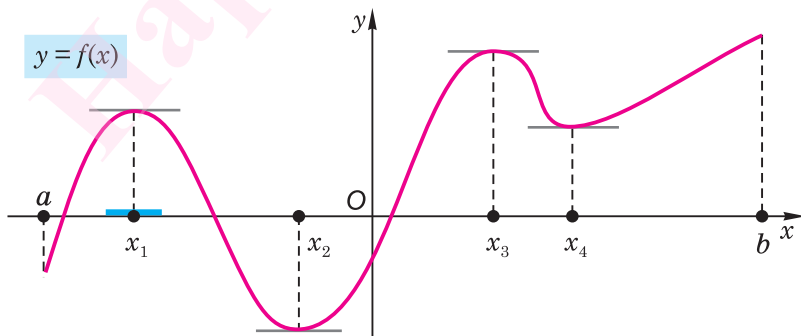
Напрыклад, пункт 5 (рыс. 43) з'яўляецца ўнутраным пунктам прамежку $(2; 7]$, яго наваколле $(3; 6)$ змяшчаецца ў гэтым прамежку. А пункт 7 не з'яўляецца ўнутраным пунктам прамежку $(2; 7]$, паколькі ніякае яго наваколле ў гэтым прамежку не змяшчаецца.



Рыс. 43

Разгледзім функцыю f , графік якой паказаны на рысунку 44. Прамежкі нарастання гэтай функцыі — $[a; x_1]$, $[x_2; x_3]$, $[x_4; b]$. Прамежкі спадання — $[x_1; x_2]$, $[x_3; x_4]$.

Разгледзім наваколле U пункта x_1 (на рысунку гэта наваколле пазначана сінім колерам). Мы бачым, што для любога x з гэтага наваколля выконваецца няроўнасць $f(x) \leq f(x_1)$,



Рыс. 44

г. зн. у наваколлі U функцыя f прымае найбольшае значэнне ў пункце x_1 . Пункт x_1 называецца *пунктам максімуму функцыі f* .

Азначэнне. Пункт x_0 называецца *пунктам максімуму функцыі f* , калі існуе такое наваколле пункта x_0 , што для любога x з гэтага наваколля правільная няроўнасць

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Пры гэтым гавораць, што функцыя f мае ў пункце x_0 *максімум*. Значэнне функцыі ў пункце максімуму называецца *максімумам функцыі*.

Функцыя f (гл. рыс. 44) мае яшчэ адзін пункт максімуму — x_3 . Увогуле, функцыя можа мець некалькі пунктаў максімуму, а можа не мець ні аднаго. Напрыклад, функцыя $f(x) = x^2$ не мае пунктаў максімуму.

Разам з пунктамі максімуму функцыі разглядаюць *пункты мінімуму функцыі*. На рысунку 44 гэта пункты x_2 і x_4 .

Азначэнне. Пункт x_0 называецца *пунктам мінімуму функцыі f* , калі існуе такое наваколле пункта x_0 , што для любога x з гэтага наваколля правільная няроўнасць

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Пры гэтым гавораць, што функцыя f мае ў пункце x_0 *мінімум*. Значэнне функцыі ў пункце мінімуму называецца *мінімумам функцыі*.

Функцыя можа мець адзін, некалькі, а можа наогул не мець пунктаў мінімуму (прывядзіце прыклады).

Пункты максімуму і мінімуму называюцца *пунктамі экстрэмуму функцыі*. Значэнне функцыі ў пункце экстрэмуму называецца *экстрэмумам функцыі*.

У кожным пункце x з $(a; x_1)$ — інтэрвалу нарастання функцыі f (гл. рыс. 44) яе вытворная прымае дадатныя значэнні, г. зн. $f'(x) > 0$. У кожным пункце x з $(x_1; x_2)$ — інтэрвалу спа-

данна функцыі f яе вытворная прымае адмоўныя значэнні, г. зн. $f'(x) < 0$. Таму гавораць: «Пры пераходзе праз пункт x_1 вытворная змяняе знак з «+» на «-».

Натуральна чакаць, што ў пункце максімуму x_1 , які падзяляе інтэрвалы нарастання і спадання функцыі f , вытворная роўна нулю, г. зн. $f'(x_1) = 0$. Аналагічна і ў пункце мінімуму x_2 натуральна чакаць, што $f'(x_2) = 0$.

Гэтыя меркаванні дазваляюць наглядна ўявіць сабе і сфармуляваць умовы экстрэмуму функцыі для ўнутраных пунктаў яе абсягу вызначэння.

Неабходная ўмова экстрэмуму

Калі пункт x_0 з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі f і ў пункце x_0 існуе вытворная, то $f'(x_0) = 0$.

Дастатковая ўмова экстрэмуму

Калі $f'(x_0) = 0$ і пры пераходзе праз пункт x_0 значэнні вытворнай змяняюць знак з «+» на «-», то x_0 з'яўляецца пунктам максімуму функцыі f .

Калі $f'(x_0) = 0$ і пры пераходзе праз пункт x_0 значэнні вытворнай змяняюць знак з «-» на «+», то x_0 з'яўляецца пунктам мінімуму функцыі f .



Заўважым яшчэ, што калі $f'(x_0) = 0$ і пры пераходзе праз пункт x_0 значэнні вытворнай не змяняюць знак, то x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму.

Разгледзім, напрыклад, функцыю $f(x) = x^3$. Яе вытворная $f'(x) = 3x^2$, але пры пераходзе праз пункт $x_0 = 0$ значэнні вытворнай не змяняюць знак, таму пункт $x_0 = 0$ не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі $f(x) = x^3$. Сапраўды, нам вядома, што гэта функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Прыклад 1. Знайсці пункты экстрэмуму функцыі

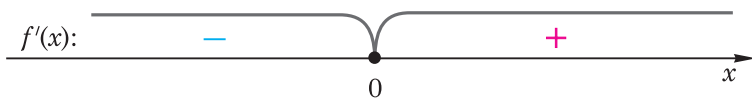
$$f(x) = 4x^3 + 7.$$

Рашэнне. Знайдзем вытворную функцыі f :

$$f'(x) = (4x^3 + 7)' = 12x^2.$$

Выворная $f'(x)$ ператвараецца ў нуль у пункце $x = 0$.

На рысунку 45 вылучаны прамежкі знакапастаянства вытворнай $f'(x) = 12x^2$.



Рыс. 45

Такім чынам, на падставе дастатковай умовы экстрэмуму пункт 0 з'яўляецца пунктам мінімуму функцыі f . Будзем пісаць: $x_{\min} = 0$.

Адказ: $x_{\min} = 0$.

Прыклад 2. Знайскі прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, яе пункты экстрэмуму, а таксама яе мінімумы і максімумы.

Рашэнне. Вытворная функцыі f :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Нулі вытворнай $f'(x)$ — гэта лікі 1 і 3. На каардынатнай прамой (рыс. 46) адзначаны нулі і прамежкі знакапастаянства вытворнай $f'(x)$. Ніжэй каардынатнай прамой стрэлкамі паказана, нарастае або спадае на кожным з гэтых прамежкаў функцыя $f(x)$.



Рыс. 46

Пры пераходзе праз 1 значэнні вытворнай змяняюць знак з «+» на «-»; пункт 1 з'яўляецца пунктам максімуму. Аналагічна высвятляецца, што пункт 3 з'яўляецца пунктам мінімуму.

Максімум функцыі f :

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 1 - 6 + 9 - 2 = 2.$$

Мінімум функцыі f :

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = 27 - 54 + 27 - 2 = -2.$$

Адказ: функцыя f нарастае на прамежках $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$; функцыя f спадае на прамежку $[1; 3]$. Пункт максімуму і мак-

сімум функцыі f : $x_{\max} = 1$; $f(1) = 2$. Пункт мінімуму і мінімум функцыі f : $x_{\min} = 3$; $f(3) = -2$.

▲ **Прыклад 3.** Знайскі пункты экстрэмуму функцыі

$$f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 7.$$

Рашэнне. $f'(x) = (2x^3 \cdot x^3 - 4x^3 + 7)' = 6x^2 \cdot x^3 + 2x^3 \cdot 3x^2 - 12x^2 + 0 = 12x^5 - 12x^2 = 12x^2(x^3 - 1)$;

$$f'(x) = 0, \text{ г. зн. } 12x^2(x^3 - 1) = 0 \text{ у пунктах } x_1 = 0 \text{ і } x_2 = 1.$$

На рысунку 47 вылучаны прамежкі знакапастаянства вытворнай $f'(x)$. На падставе дастатковай умовы экстрэмуму робім вынік, што пункт 1 з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі $f(x)$ (пунктам мінімуму), а пункт 0 не з'яўляецца яе пунктам экстрэмуму (патлумачце чаму).



Рыс. 47

Адказ: $x_{\min} = 1$.



Заўважым, што знайскі вытворную функцыі f можна хутчэй, калі выкарыстоўваць формулу вытворнай ступені $(x^k)' = kx^{k-1}$:

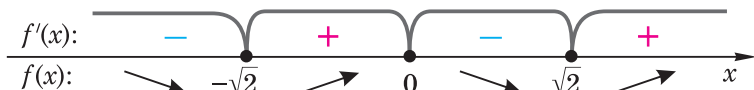
$$f'(x) = (2x^6 - 4x^3 + 7)' = 12x^5 - 12x^2.$$

Прыклад 4. Знайскі прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі $f(x) = x^6 - 12x^2 + 15$, яе пункты экстрэмуму, а таксама яе мінімумы і максімумы.

Рашэнне. $f'(x) = (x^6 - 12x^2 + 15)' = 6x^5 - 24x = 6x(x^4 - 4) = 6x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$.

На каардынатнай прамой (рыс. 48) адзначаны нулі і прамежкі знакапастаянства вытворнай $f'(x)$.

Ніжэй каардынатнай прамой стрэлкамі паказана, нарастае або спадае на кожным з гэтых прамежкаў функцыя $f(x)$.



Рыс. 48

Пункт 0 з'яўляецца пунктам максімуму, а пункты $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ — пунктамі мінімуму. Мінімумы функцыі f :

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^6 - 12(-\sqrt{2})^2 + 15 = 8 - 24 + 15 = -1;$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^6 - 12(\sqrt{2})^2 + 15 = -1.$$

Максімум функцыі f : $f(0) = 15$.

Адказ: функцыя f спадае на прамежках $(-\infty; -\sqrt{2}]$ і $[0; \sqrt{2}]$; функцыя f нарастае на прамежках $[-\sqrt{2}; 0]$ і $[\sqrt{2}; +\infty)$. Пункты мінімуму і мінімумы функцыі f : $x_{\min} = -\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -1$; $x_{\min} = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = -1$. Пункт максімуму і максімум функцыі f : $x_{\max} = 0$, $f(0) = 15$. ▲



1. Дайце азначэнне:
 - а) пункта максімуму (мінімуму) функцыі;
 - б) максімуму (мінімуму) функцыі.
2. Дайце азначэнне пунктаў экстрэмуму функцыі.
3. Сфармулюйце неабходную (дастатковую) умову экстрэмуму функцыі.

Практыкаванні

1.114°. Функцыя $f(x)$ зададзена графікам на рысунку 40. Запішыце пункты максімуму і пункты мінімуму функцыі, а таксама значэнні функцыі ў гэтых пунктах.

1.115°. Функцыя f зададзена графікам на рысунку 42. Запішыце пункты экстрэмуму гэтай функцыі.

1.116. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі f і яе значэнні ў гэтых пунктах:

- 1) $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$;
- 2) $f(x) = 5 - 4x - 4x^2$;
- 3) $f(x) = -4x^3 - 15x^2 + 18x + 2$;
- 4) $f(x) = -10x^3 + 51x^2 - 36x + 3$;
- 5) $f(x) = x^4 - 32x + 7$;
- 6) $f(x) = -x^4 + 4x - 9$.

Знайдзіце пункты максімуму і пункты мінімуму функцыі $f(x)$, а таксама значэнні функцыі ў гэтых пунктах (1.117—1.120).

1.117. 1) $f(x) = x(x - 5)$; 2) $f(x) = x(x + 1)$;
3) $f(x) = x^3(x - 5)$; 4) $f(x) = x^3(x + 1)$.

1.118. 1) $f(x) = \frac{3}{x} - 12x^2$; 2) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$;
3) $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{x}{7}$; 4) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;
5) $f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$; 6) $f(x) = \frac{8 - x^2}{3 + x}$.

1.119. 1) $f(x) = \frac{1}{x} + 2x^3 - 5x$; 2) $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{1}{3}x^3 + 5x$;
3) $f(x) = \frac{2}{x}(x^2 + 9)$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 4)$.

1.120. 1) $f(x) = \frac{(x - 2)(6 + x)}{(x - 1)^2}$; 2) $f(x) = \frac{(x - 5)(3 + x)}{(x + 2)^2}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 2}$; 4) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4x + 4}$.

1.121. Для функцыі f запішыце:

- а) абсяг вызначэння;
- б) прамежкі нарастання (спадання);
- в) пункты экстрэмуму функцыі і яе значэнні ў гэтых пунктах, калі:

1) $f(x) = -x^3 + 12x - 15$; 2) $f(x) = -x^3 - x - 2$;
3) $f(x) = 6x^5 - 10x^3$; 4) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

1.122*. Дадзена функцыя $f(x) = 2,5x^4 + 4x^3 + 1,8$.

- 1) Запішыце пункты экстрэмуму функцыі і яе значэнні ў гэтых пунктах.
- 2) Рашыце ўраўненне $f(x) = f(-1, 2)$.

1.123*. Дадзена функцыя $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 69$.

- 1) Запішыце пункты экстрэмуму функцыі і яе значэнні ў гэтых пунктах.
- 2) Рашыце ўраўненне $f(x) = f(4, 5)$.

1.124*. Дадзена функцыя $f(x) = -0,5x^4 - 16x + \sqrt{21}$.

1) Запішыце пункты экстрэмуму функцыі і яе значэнні ў гэтых пунктах.

2) Рашыце няроўнасць $f(x) \geq f(-2)$.

1.125*. Дадзена функцыя $f(x) = -x^4 + 32x - \sqrt{5}$.

1) Запішыце пункты экстрэмуму функцыі і яе значэнні ў гэтых пунктах.

2) Рашыце няроўнасць $f(x) < f(2)$.

1.10. Прымяненне вытворнай пры даследаванні функцый

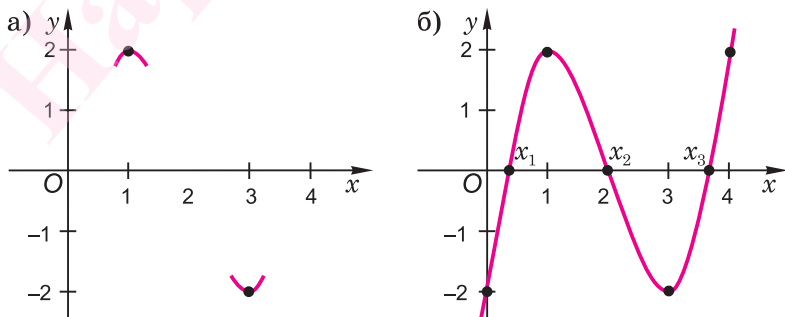
У папярэдніх пунктах ужо прыводзіліся прыклады выкарыстання вытворнай пры даследаванні функцыі на нарастанне (спаданне) і пошуку яе пунктаў экстрэмуму. Пакажам, як на аснове такога даследавання можна атрымаць відарыс графіка функцыі.

Прыклад 1. Даследаваць функцыю $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ і паказаць відарыс яе графіка.

Рашэнне. Абсяг вызначэння функцыі $D(f) = \mathbb{R}$.

З рашэння прыкладу 2 п. 1.9 ужо вядомы прамежкі нарастання (спадання) функцыі f , яе пункты максімуму і мінімуму, а таксама значэнні функцыі f у гэтых пунктах.

Для пабудавання відарыса графіка функцыі f на каардынатнай плоскасці адзначым спачатку пункты $(1; f(1))$ і $(3; f(3))$, г. зн. пункты $(1; 2)$ і $(3; -2)$ (рыс. 49, а).



Рыс. 49

Затым знойдзем каардынаты пунктаў перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ з восямі каардынат. Пункт перасячэння графіка функцыі f з восяю ардынат $(0; f(0))$, г. зн. $(0; -2)$.

Каардынаты пунктаў перасячэння графіка функцыі з восяю абсцыс знойдзем, рашыўшы ўраўненне $f(x) = 0$, г. зн. $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$; адкуль атрымаем $(x - 2)(x^2 - 4x + 1) = 0$ і адпаведна: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$.

(Не заўсёды магчыма рашыць ураўненне $f(x) = 0$, а значыць, знайсці пункты перасячэння графіка з восяю абсцыс.)

Усе пункты перасячэння графіка з восямі таксама адзначым на каардынатнай плоскасці. Карысна адзначыць на каардынатнай плоскасці і дадатковыя пункты, каардынаты якіх зручна вылічыць. Адзначым, напрыклад, пункт $(4; 2)$. Злучыўшы ўсе атрыманыя пункты плаўнай лініяй, атрымаем відарыс графіка функцыі f (рыс. 49, б).

Такім чынам, пры даследаванні ўласцівасцей функцыі з прымяненнем **вывторнай**, звычайна знаходзяць:

- 1) абсяг вызначэння функцыі;
- 2) **вывторную функцыю**, нулі і прамежкі знакапастаянства **вывторнай**;
- 3) прамежкі нарастання (спадання) функцыі, пункты экстрэмуму і значэнні функцыі ў гэтых пунктах.

Выкарыстаўшы вынікі даследавання, паказваюць відарыс графіка функцыі. Пры гэтым знаходзяць (калі гэта магчыма) каардынаты **пунктаў перасячэння графіка з восямі каардынат**, а часам і каардынаты **дадатковых пунктаў графіка**.

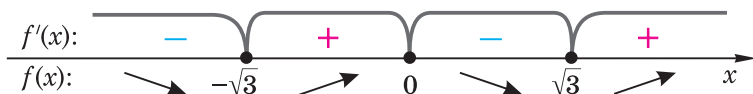
Прыклад 2. Даследаваць функцыю $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ і паказаць відарыс яе графіка.

Рашэнне. Абсяг вызначэння функцыі $D(f) = \mathbb{R}$.

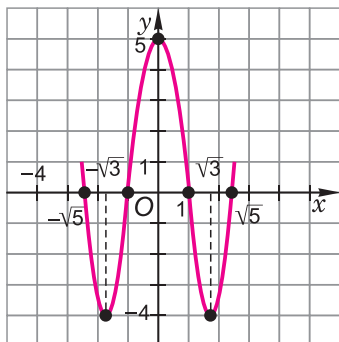
Вывторная функцыі f : $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$.

Нулі **вывторнай** $f'(x)$: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

На каардынатнай прамой адзначаны нулі **вывторнай** $f'(x)$ і яе прамежкі знакапастаянства (рыс. 50).



Рыс. 50



Рыс. 51

Ніжэй каардынатнай прамой стрэлкамі паказаны прамежкі на-растання (спадання) функцыі f .

Пункты $-\sqrt{3}$ і $\sqrt{3}$ — пункты мінімуму функцыі; $f(-\sqrt{3}) = -4$, $f(\sqrt{3}) = -4$. Пункт 0 — пункт максімуму функцыі; $f(0) = 5$.

Адзначым на каардынатнай плоскасці пункты: $(-\sqrt{3}; -4)$, $(0; 5)$, $(\sqrt{3}; -4)$. Затым знойдзем пункты перасячэння графіка з восямі ка-

ардынат (зробіце гэта самастойна) і адзначым іх на каардынатнай плоскасці (рыс. 51). Злучыўшы адзначаныя пункты плаўнай лініяй, атрымаем відарыс графіка функцыі f .

▲ Заўважым, што функцыя f — цотная. Таму спачатку яе можна было даследаваць на прамежку $[0; +\infty)$, паказаць на ім відарыс яе графіка, а затым адлюстравач гэта графік сіметрычна адносна восі ардынат. ▲



1. Як даследаваць функцыю з дапамогай вытворнай?
2. Як вынікі даследавання функцыі выкарыстоўваюць для паказу відарыса яе графіка?
3. Якія пункты звычайна выкарыстоўваюць пры паказе відарыса графіка функцыі?

Практыкаванне

Пакажыце відарыс графіка кожнай функцыі f з практыкаванняў 1.116, 1.121—1.125.

1.11. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адрэзку

Напомнім, што лікавы прамежак выгляду $[a; b]$ называецца **адрэзкам**. Пункты a і b называюцца канцамі гэтага адрэзка.

Няхай на адрэзку $[a; b]$ вызначана функцыя f , якая мае вытворную ў кожным унутраным пункце гэтага адрэзка. Рэшым задачу: *знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі f на адрэзку $[a; b]$.*

Няхай функцыя прымае найбольшае значэнне ў некаторым пункце $x_0 \in [a; b]$. Магчыма, што $x_0 = a$ або $x_0 = b$. Калі ж гэта не так, то x_0 — унутраны пункт адрэзка $[a; b]$ і, зразумела, ён з'яўляецца пунктам максімуму функцыі f (патлумачце чаму). Тады $f'(x_0) = 0$.

Такім чынам, пункт, у якім функцыя прымае найбольшае значэнне, трэба шукаць сярод пунктаў a , b і тых пунктаў інтэрвалу $(a; b)$, у якіх вытворная роўна нулю. Аналагічна і для пункта, у якім функцыя прымае найменшае значэнне.

Такім чынам, *каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі f на адрэзку $[a; b]$, робяць наступнае:*

- 1) знаходзяць значэнні функцыі ў тых пунктах інтэрвалу $(a; b)$, у якіх яе вытворная ператвараецца ў нуль;
- 2) знаходзяць значэнні функцыі на канцах адрэзка $[a; b]$;
- 3) выбіраюць са знойдзеных значэнняў функцыі найбольшае і найменшае.

Прыклад 1. Знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = x^3 + 4,5x^2 - 9$ на адрэзку $[-4; -2]$.

Рашэнне. $f'(x) = 3x^2 + 9x = 3x(x + 3)$. Выворная ператвараецца ў нуль у пунктах $x_1 = -3$, $x_2 = 0$; пункт $x_2 = 0$ не належыць адрэзку $[-4; -2]$.

Знойдем значэнні функцыі f у пункце -3 і на канцах дадзенага адрэзка (у пунктах -4 і -2):

$$f(-3) = 4,5; \quad f(-4) = -1; \quad f(-2) = 1.$$

Мы бачым, што найбольшае значэнне функцыі f на адрэзку $[-4; -2]$ роўна $4,5$, а найменшае роўна -1 . Гэта для функцыі f можна запісаць так:

$$f_{\text{наиб}}(x) = f(-3) = 4,5; \quad f_{\text{наим}}(x) = f(-4) = -1.$$

$$x \in [-4; -2] \quad x \in [-4; -2]$$

$$\text{Адказ: } f_{\text{наиб}}(x) = 4,5; \quad f_{\text{наим}}(x) = -1.$$

$$x \in [-4; -2] \quad x \in [-4; -2]$$

Прыклад 2. Знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} - 5x + 1$ на адрэзку:

- а) $[-3; 0]$; б) $[1,5; 3]$; в) $[3; 4]$.

Рашэнне. Знойдем вытворную функцыі f для ўнутраных пунктаў яе абсягу вызначэння $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x} - 5x + 1 \right)' = x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}.$$

Вытворная ператвараецца ў нуль у чатырох пунктах: $\pm 1, \pm 2$ (патлумачце, як знаходзяць гэтыя пункты).

а) Адрэзку $[-3; 0]$ належаць два пункты, у якіх вытворная ператвараецца ў нуль: -2 і -1 . Знойдзем значэнні функцыі f у гэтых пунктах, а таксама на канцах адрэзка (у пунктах -3 і 0):

$$f(-2) = 10\frac{1}{3}; \quad f(-1) = 9\frac{2}{3}; \quad f(-3) = 8\frac{1}{3}; \quad f(0) = 1.$$

Параўнаем іх і выберам найбольшае і найменшае значэнні.

б) Адрэзку $[1,5; 3]$ належыць толькі пункт $x = 2$. Знойдзем значэнні функцыі f у пункце 2 і на канцах адрэзка; з іх выберам найбольшае і найменшае:

$$f(2) = -8\frac{1}{3}; \quad f(1,5) = -8\frac{1}{24}; \quad f(3) = -6\frac{1}{3}.$$

в) Адрэзак $[3; 4]$ не змяшчае нулёў вытворнай, таму знойдзем значэнні функцыі f на яго канцах і параўнаем іх:

$$f(3) = -6\frac{1}{3}; \quad f(4) = 1\frac{1}{3}.$$

$$\text{Адказ: а) } f_{\text{наиб}}(x) = 10\frac{1}{3}; \quad f_{\text{наим}}(x) = 1;$$

$$x \in [-3; 0] \quad x \in [-3; 0]$$

$$\text{б) } f_{\text{наиб}}(x) = -6\frac{1}{3}; \quad f_{\text{наим}}(x) = -8\frac{1}{3};$$

$$x \in [1,5; 3] \quad x \in [1,5; 3]$$

$$\text{в) } f_{\text{наиб}}(x) = 1\frac{1}{3}; \quad f_{\text{наим}}(x) = -6\frac{1}{3}.$$

$$x \in [3; 4] \quad x \in [3; 4]$$

Прыклад 3. Дадзены прамавугольныя трохвугольнікі з гіпатэнузаў 8 см і катэтам x см. Знайсці сярод іх трохвугольнікі з найбольшай і найменшай плошчамі. Запісаць плошчы гэтых трохвугольнікаў, калі:

$$\text{а) } x \in [2; 4]; \quad \text{б) } x \in [2; 6].$$

Рашэнне. Па тэарэме Піфагора даўжыня другога катэта роўна $\sqrt{64 - x^2}$. Плошчу прамавугольнага трохвугольніка $S(x)$ можна знайсці па формуле

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{64 - x^2},$$

г. зн. $S(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^2(64-x^2)}$. Функцыя $S(x)$ прымае найбольшае і найменшае значэнні ў тых жа пунктах, што і функцыя $f(x) = \frac{1}{4}x^2(64-x^2)$, г. зн. $f(x) = 16x^2 - \frac{1}{4}x^4$.

Знойдзем вытворную функцыі f :

$$f'(x) = \left(16x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)' = 32x - x^3 = x(32 - x^2).$$

Знойдзем значэнні x , пры якіх вытворная роўна нулю. Гэта лікі: $x_1 = 0$; $x_2 = -4\sqrt{2}$; $x_3 = 4\sqrt{2}$.

а) Адрэзку $[2; 4]$ лікі x_1 , x_2 , x_3 не належаць, таму найбольшае (найменшае) значэнне функцыі f , а значыць і функцыі S , можа быць толькі на яго канцах:

$$S(2) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15};$$

$$S(4) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{64-16} = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}.$$

Відавочна, што $S(4) > S(2)$.

б) Адрэзку $[2; 6]$ належыць $x_3 = 4\sqrt{2}$. Параўнаем $S(2)$, $S(4\sqrt{2})$ і $S(6)$:

$$S(2) = 2\sqrt{15};$$

$$S(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \sqrt{64-32} = 2\sqrt{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{64} = 16;$$

$$S(6) = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{64-36} = 3\sqrt{28} = 6\sqrt{7} = 2\sqrt{63}.$$

Відавочна, што $S(2) < S(6) < S(4\sqrt{2})$.

Адказ: а) $S_{\text{найб}}(x) = 8\sqrt{3}$; $S_{\text{найм}}(x) = 2\sqrt{15}$;
 $x \in [2; 4]$ $x \in [2; 4]$

б) $S_{\text{найб}}(x) = 16$; $S_{\text{найм}}(x) = 2\sqrt{15}$.
 $x \in [2; 6]$ $x \in [2; 6]$



1. Як знаходзяць найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адрэзку?
2. Пакажыце відарыс графіка функцыі, вызначанай на адрэзку $[a; b]$, у якой:
 - а) найбольшае значэнне функцыі не супадае (супадае) з яе максімумам;
 - б) найменшае значэнне функцыі не супадае (супадае) з яе мінімумам.

Практыкаванні

Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі f на адрэзку I (1.126—1.130).

1.126. 1) $f(x) = 1 - 4x$, $I = [-3; 2]$;

2) $f(x) = 5x - 1$, $I = [-1; 2]$;

3) $f(x) = -2x^2$, $I = [-2; 1]$;

4) $f(x) = -x^2$, $I = [-1; 2]$;

5) $f(x) = x^2$, $I = [-3; 2]$;

6) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $I = [-2; 4]$.

1.127. 1) $f(x) = 4x - x^2$, $I = [-1; 0]$;

2) $f(x) = 2x - x^2$, $I = [-2; 0]$;

3) $f(x) = 2x^3 - 6x$, $I = [-4; 0]$;

4) $f(x) = 3x^3 + 9x$, $I = [0; 2]$.

1.128. 1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$, $I = [-1; 1]$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 9$, $I = [-3; -1]$;

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 3$, $I = [-1; 1]$;

4) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$, $I = [-1; 1]$.

1.129. 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $I = [-2; 0,5]$;

2) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $I = [1; 4]$;

3) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $I = [1; 2]$;

4) $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$, $I = [-4; -1]$.

1.130. 1) $f(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 4}{5x^2}$, $I = [0,375; 0,75]$;

2) $f(x) = \frac{-2x^2 + 18x - 3}{5x^2}$, $I = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$;

3) $f(x) = \frac{7x}{x^2 + 1}$, $I = [-2; 0,5]$;

4) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $I = [-5; 0,2]$.

- 1.131.** Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 12t^2 + 70t$ (t — час у секундах, $s(t)$ — шлях у метрах). У які момант часу скорасць руху пункта будзе найбольшай і якое значэнне гэтай скорасці, калі:
- 1) $t \in [1; 7]$; 2) $t \in [5; 9]$;
 - 3) $t \in [9; 13]$; 4) $t \in [8; 14]$?
- 1.132.** Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = 0,25t^4 + t^3 + 1$ (t — час у секундах, $s(t)$ — шлях у метрах). У які момант часу скорасць руху пункта будзе найбольшай і якое значэнне гэтай скорасці, калі:
- 1) $t \in [3; 5]$; 2) $t \in [5; 7]$;
 - 3) $t \in [7; 9]$; 4) $t \in [6; 10]$?
- 1.133.** Сярод усіх прамавугольнікаў з перыметрам P м і даўжынёй стараны x м, дзе $x \in D$, знайдзіце прамавугольнікі з найбольшай і найменшай плошчамі. Запішыце плошчы гэтых прамавугольнікаў, калі:
- 1) $P = 20$; $D = [2; 8]$; 2) $P = 36$; $D = [5; 12]$.

1.12. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адвольным прамежку

Найбольшае (найменшае) значэнне функцыі можна знаходзіць не толькі на адрэзку, але і на прамежках іншага выгляду, напрыклад на інтэрвалах.

Прыклад 1. Драцяной сеткай даўжынёй 240 м трэба агарадзіць прамавугольны ўчастак зямлі. Якія памеры павінен мець участак, каб яго плошча была найбольшай?

Рашэнне. Няхай x — даўжыня адной са старон участка (у метрах), тады даўжыня сумежнай стараны роўна $(120 - x)$, а плошчу ўчастка можна знайсці па формуле

$$S(x) = x(120 - x).$$

Па сэнсе задачы лік x задавальняе няроўнасць $0 < x < 120$, г. зн. належыць інтэрвалу $(0; 120)$.

Такім чынам, нам трэба высвেলіць, пры якім значэнні x з інтэрвалу $(0; 120)$ функцыя $S(x)$ прымае на ім найбольшае значэнне.

Падобную задачу для адрэзка рашаць мы ўмеем.

Разгледзім функцыю $S(x) = x(120 - x)$ на адрэзку $[0; 120]$. Знойдзем яе найбольшае значэнне на гэтым адрэзку (гл. п. 1.11):

$$S'(x) = 120 - 2x;$$

$$S'(x) = 0 \text{ пры } 120 - 2x = 0,$$

$$\text{г. зн. пры } x = 60;$$

$$S(0) = 0(120 - 0) = 0;$$

$$S(60) = 60(120 - 60) = 60^2 = 3600;$$

$$S(120) = 120(120 - 120) = 0.$$

Такім чынам, функцыя $S(x)$ прымае сваё найбольшае значэнне ў пункце $x = 60$. Гэты пункт ляжыць унутры інтэрвалу $(0; 120)$.

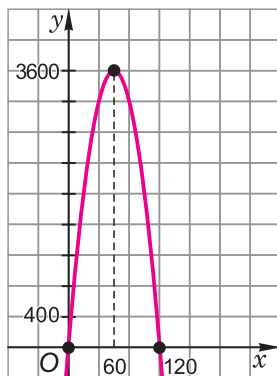
$$\text{Такім чынам, } S_{\text{наиб}}(x) = S(60) = 3600.$$

$$x \in (0; 120)$$

Адказ: 60×60 м.



Заўвага. Безумоўна, гэту задачу мы маглі б рашыць і без выкарыстання вытворнай, паколькі $S(x)$ — добра вядомая нам квадратычная функцыя. Схематычны відарыс графіка функцыі $y = S(x)$ прыведзены на рысунку 52.



Рыс. 52

Прыклад 2. Прамавугольны ўчастак зямлі плошчай 3600 м^2 трэба агарадзіць драцяной сеткай. Якія памеры павінен мець участак, каб даўжыня сеткі была найменшай?

Рашэнне. Няхай x — даўжыня адной са старон участка (у метрах), тады даўжыня сумежнай стараны роўна $\frac{3600}{x}$, а перыметр участка можна знайсці па формуле $P(x) = 2\left(x + \frac{3600}{x}\right)$.

Па сэнсе задачы лік x задавальняе няроўнасць $x > 0$, г. зн. належыць інтэрвалу $(0; +\infty)$.

Такім чынам, нам трэба знайсці значэнне x , пры якім функцыя $P(x)$ прымае найменшае значэнне на інтэрвале $(0; +\infty)$. Тут мы ўжо не можам выкарыстоўваць дзеянні для адшукання найменшага значэння функцыі на адрэзку.

Паступім наступным чынам. Знойдзем вытворную функцыі P :

$$\begin{aligned} P'(x) &= \left(2\left(x + \frac{3600}{x}\right)\right)' = 2\left((x)' + \left(\frac{3600}{x}\right)'\right) = 2\left(1 - \frac{3600}{x^2}\right) = \\ &= 2 \frac{x^2 - 3600}{x^2} = \frac{2(x - 60)(x + 60)}{x^2}. \end{aligned}$$

Вывторная $P'(x)$ ператвараецца ў нуль у пунктах $x = -60$ і $x = 60$, з іх толькі пункт $x = 60$ належыць інтэрвалу $(0; +\infty)$.

Даследуем знакі значэнняў вытворнай на гэтым інтэрвале.

Пры $0 < x < 60$ значэнні вытворнай адмоўныя і функцыя $P(x)$ спадае; пры $x > 60$ значэнні вытворнай дадатныя і функцыя $P(x)$ нарастае (рыс. 53).



Рыс. 53

Значыць, свайго найменшага значэння гэтая функцыя дасягае ў пункце $x = 60$, у якім яе вытворная ператвараецца ў нуль. Такім чынам, $P_{\text{найм}}(x) = P(60) = 2\left(60 + \frac{3600}{60}\right) = 240$.

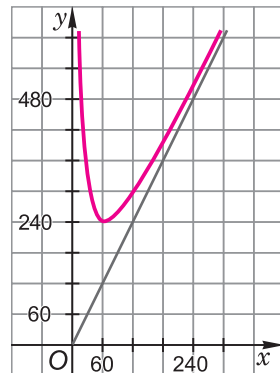
Схематычны відарыс графіка функцыі $y = P(x)$, які ілюструе рашэнне гэтай задачы, паказаны чырвонай лініяй на рысунку 54.

Заўважым, што пункт $x = 60$ з'яўляецца пунктам мінімуму функцыі $P(x)$ (патлумачце чаму).

Адказ: 60×60 м.

Пры рашэнні тэкставых задач на знаходжанне найменшага (або найбольшага) значэння розных велічынь робяць наступнае:

1) уводзяць зменную;



Рыс. 54

2) *выражаюць праз гэту зменную і вядомыя даныя тую велічыню, найменшае (або найбольшае) значэнне якой трэба знайсці, г. зн. уводзяць адпаведную функцыю;*

3) *вызначаюць найменшае (або найбольшае) значэнне ўвездзенай функцыі.*



1. Як знаходзяць найбольшае (найменшае) значэнне функцыі на інтэрвале?
2. Як паступаюць пры неабходнасці знайсці найбольшае (найменшае) значэнне некаторай велічыні пры рашэнні тэкставых задач?

Практыкаванні

- 1.134.** 1) Якімі павінны быць стораны прамавугольнага ўчастка з перыметрам 120 м, каб плошча гэтага ўчастка была найбольшай?
2) Прамавугольны ўчастак зямлі плошчай 4 га агароджваецца плотам. Якімі павінны быць памеры ўчастка, каб даўжыня плота была найменшай?
- 1.135.** 1) Лік 48 запішыце ў выглядзе сумы двух складаемых так, каб іх здабытак быў найбольшы.
2) Лік 16 запішыце ў выглядзе сумы двух складаемых так, каб сума іх квадратаў была найменшай.
- 1.136.** 1) Лік 18 запішыце ў выглядзе сумы двух складаемых так, каб сума падвоенага першага складаемага і квадрата другога складаемага была найменшай.
2) Лік 10 запішыце ў выглядзе сумы двух складаемых так, каб сума іх кубоў была найменшай.
- 1.137.** 1) З усіх прамавугольнікаў, упісаных у акружнасць радыусам 1 дм, знайдзіце прамавугольнік, які мае найбольшую плошчу. Запішыце гэту плошчу.
2) Трэба зрабіць скрыначку ў форме прамавугольнага паралелепіпеда з квадратным дном найбольшага аб'ёму без накрыўкі пры зададзенай плошчы паверхні 12 дм². Вызначыце памеры скрыначкі.
- 1.138.** 1) Сярод раўнабедраных трохвугольнікаў з асновай a знайдзіце трохвугольнік з найбольшай плошчай.

2) Даўжыні бакавых старон і меншай асновы раўнабедранай трапецыі роўны па 24 см. Якой павінна быць даўжыня большай асновы, каб плошча трапецыі была найбольшай?

1.139. У прамавугольны трохвугольнік упісаны прамавугольнік, аснова якога ляжыць на гіпатэнузе. Якімі павінны быць памеры прамавугольніка, каб яго плошча была найбольшай, калі ў трохвугольніку:

1) гіпатэнуза роўна 16 см, а вугал 60° ;

2) катэт роўны 12 см, а процілеглы яму вугал 30° ?

1.140. У трохвугольнік са стараной a і вышынёй h , праведзенай да гэтай стараны, упісаны прамавугольнік, адна са старон якога ляжыць на дадзенай старане трохвугольніка. Вызначыце найбольшую плошчу такога прамавугольніка, калі:

1) $a = 4$ см, $h = 3$ см;

2) $a = 6$ м, $h = 8$ м.

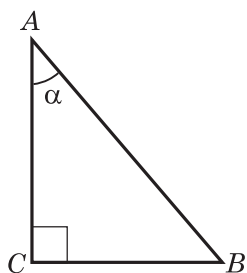
Раздзел 2

Трыганаметрычныя выразы



2.1. Градусная мера вуглоў і дуг. Суадносіны паміж старанамі і вугламі прамавугольнага трохвугольніка

Вы знаёмы з паняццямі вострага, прамога, тупога, разгорнутага вуглоў, цэнтральнага вугла, дугі акружнасці, якая адпавядае гэтаму цэнтральнаму вуглу. Вам вядома, што велічыні вуглоў і дуг акружнасці вымяраюцца ў градусах.



Рыс. 55

Напомнім, што **градусам** называецца велічыня цэнтральнага вугла, якому адпавядае $\frac{1}{360}$ частка акружнасці.

Градуснай мерай дугі акружнасці называецца градусная мера адпаведнага цэнтральнага вугла. Градусная мера ўсёй акружнасці роўна 360° , а паўакружнасці — 180° .

У геаметрыі былі дадзены азначэнні **сіноса**, **косінуса**, **тангенса** і **катангенса** для вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка. Напомнім, што ў прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$) (рыс. 55):

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{BC}.$$

Заўважым, што

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Пры рашэнні розных прыкладаў часта выкарыстоўваюць значэнні сіносаў, косінусаў, тангенсаў і катангенсаў вуглоў 30° , 45° , 60° (гл. табліцу).

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



Прыклад. Даказаць для вострага вугла α тоеснасць:

- а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; б) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
 в) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$; г) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Доказ. а) Разгледзім прамавугольны трохвугольнік ABC , у якім $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$ (гл. рыс. 55). Адпаведна, маем $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Выкарыстаўшы азначэнні сінуса і косінуса вострага вугла, атрымаем:

$$\sin \angle B = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos \angle A = \cos \alpha,$$

г. зн. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. $\square$

Доказы тоеснасцей б), в), г) аналагічны доказу тоеснасці а), выканайце іх самастойна.



Назвы «косінус» і «катангенс» уяўляюць сабой скарачэнне тэрмінаў *complementi sinus*, *complementi tangens* («сінус дапаўнення», «тангенс дапаўнення»), якія выражаюць той факт, што $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ роўны адпаведна сінусу і тангенсу вугла, які дапаўняе α да 90° , г. зн. $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$. Слова «трыганаметрыя» паходзіць ад грэчаскіх слоў *trigonon* — трохвугольнік і *metron* — мера (*metreo* — вымяраю).



1. Які вугал называецца: а) вострым; б) тупым; в) прамым; г) разгорнутым; д) поўным; е) цэнтральным?
2. У якіх адзінках вымяраюць велічыні вуглоў?
3. Што называецца градусам?
4. Што называецца сінусам (косінусам) вострага вугла?
5. Што называецца тангенсам (катангенсам) вострага вугла?

Практыкаванні

2.1°. AB — старана правільнага n -вугольніка, упісанага ў акружнасць з цэнтрам O . Знайдзіце градусную меру вугла AOB , калі:

- 1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 6$; 4) $n = 12$.

2.2°. У прамавугольным трохвугольніку адзін з катэтаў роўны палове гіпатэнузы. Для вострых вуглоў гэтага трохвугольніка запішыце:

- 1) іх градусную меру;
- 2) значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса.

2.3°. У прамавугольным трохвугольніку катэты роўныя. Для вострых вуглоў гэтага трохвугольніка запішыце:

- 1) іх градусную меру;
- 2) значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса.

2.4°. Пабудуйце вугал α і знайдзіце прыбліжана яго велічыню (у градусах), ведаючы, што:

- 1) $\sin \alpha = 0,8$;
- 2) $\sin \alpha = 0,6$;
- 3) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$;
- 4) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$;
- 5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$;
- 6) $\operatorname{tg} \alpha = 2\frac{3}{5}$;
- 7) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$;
- 8) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4}$.

2.5°. Параўнайце вострыя вуглы α і β , калі:

- 1) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ і $\sin \beta = \frac{3}{4}$;
- 2) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ і $\cos \beta = \frac{2}{5}$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ і $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$;
- 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{5}$ і $\operatorname{ctg} \beta = \frac{2}{3}$.

2.6°. Якая велічыня (у градусах) вострага вугла α , калі:

- 1) $\sin \alpha = \cos \alpha$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$?

Знайдзіце значэнне выразу (2.7—2.9).

2.7. 1) $2\sin 60^\circ + 3\sin 45^\circ + 10\cos 60^\circ - 4\cos 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$;

2) $4\operatorname{tg} 30^\circ - 5\cos 30^\circ + 6\sin 60^\circ - 3\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;

3) $6\operatorname{ctg} 60^\circ - 2\sin 60^\circ + 12\sin 60^\circ \cos 60^\circ$;

4) $2\sin 30^\circ + 6\cos 60^\circ - 4\operatorname{tg} 45^\circ + 7\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

2.8. 1) $\cos 60^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30^\circ + 4\cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$;

2) $\cos^2 30^\circ + 2\sin 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 45^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ + \cos 60^\circ$;

3) $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60^\circ$;

4) $\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ - \cos^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ$.

2.9. 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ пры α , роўным 30° ; 45° ; 60° ;

2) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$ пры α , роўным 30° ; 45° ; 60° ;

3) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$ пры α , роўным 15° ; $22,5^\circ$; 30° ;

4) $\sin^2 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \cos^2 2\alpha$ пры α , роўным 15° ; $22,5^\circ$; 30° .

2.10. Спрасціце выраз:

1) $\cos(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha + \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}$;

2) $\sin(90^\circ - \alpha) - \cos \alpha + \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$;

3) $\frac{\sin(90^\circ - \alpha) \cos(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)}$;

4) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$.

2.11. Запішыце, выкарыстаўшы значэнні толькі сінусаў (або толькі косінусаў) вострых вуглоў, дадзены выраз у выглядзе трыганаметрычнага:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{8}$;

3) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

4) $\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2.12. Запішыце, выкарыстаўшы значэнні толькі тангенсаў (або толькі катангенсаў) вострых вуглоў, дадзены выраз у выглядзе трыганаметрычнага:

1) $\frac{1}{3} - \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\frac{1}{3} - \sqrt{3} + 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $3\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{9}$;

4) $\frac{1}{9} - 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{(\sqrt{3})^3}$.

2.13*. Знайдзіце значэнне выразу A , калі:

1) $A = 1 - \sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ - \sin^3 30^\circ + \dots + \sin^{100} 30^\circ$;

2) $A = 1 - \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^3 30^\circ + \dots + \operatorname{tg}^{200} 30^\circ$.

2.2. Паняцце вугла

Няхай дадзена плоскасць і на ёй прамень з пачаткам у пункце O , які верціцца вакол гэтага пункта ад пачатковага месцазнаходжання — праменя OA — да канечнага месцазнаходжання — праменя OB . Тады велічыню павароту, зробленага гэтым праменем, натуральна вымяраць велічынёй вугла, які ўтвараюць прамені OA і OB у канцы вярчэння. Патлумачым гэта на некалькіх прыкладах.

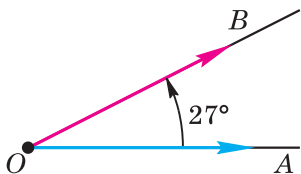


Рис. 56

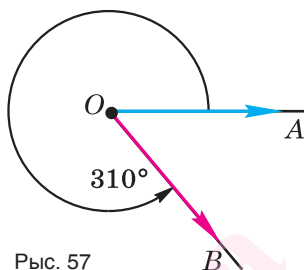


Рис. 57

На рысунку 56 паказаны паварот праменя супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі на вугал 27° (пачатковае месцазнаходжанне праменя, які верціцца, на рысунках паказана стрэлкай сіняга колеру, а канечнае — чырвонага).

На рысунку 57 паказаны паварот праменя супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі на вугал 310° .

На рысунку 58 паказаны такі паварот праменя супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі, што яго канечнае месцазнаходжанне — прамень OB — упершыню супадае з пачатковым месцазнаходжаннем — праменем OA . Гэты паварот называюць **поўным абаротам** (паваротам на вугал 360°).

На рысунку 59 паказаны паварот праменя супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі на вугал $1097^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 17^\circ$. У гэтым выпадку прамень, выконваючы паварот ад пачатковага месцазнаходжання — праменя OA — да канечнага месцазнаходжання — праменя OB , выконвае 3 поўныя абароты і яшчэ паварот на 17° .

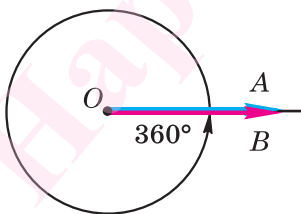


Рис. 58

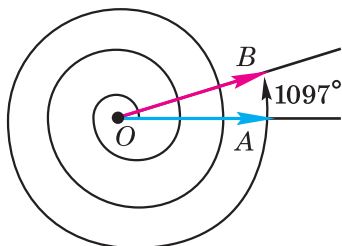


Рис. 59

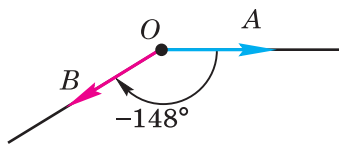


Любы паварот праменя складаецца з цэлага ліку поўных абаротаў і павароту, які з'яўляецца часткай поўнага абароту. Такім чынам, *любы паварот праменя задае некаторы вугал, які адпавядае гэтай павароту.*

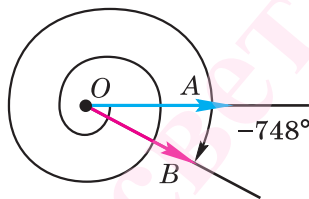
Калі паварот праменя выконваецца *супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі*, то вугал павароту лічаць *дадатным* (як ва ўсіх папярэдніх прыкладах).

Калі паварот праменя выконваецца *па ходу гадзіннікавай стрэлкі*, то вугал павароту лічаць *адмоўным*.

Напрыклад, на рысунку 60 паказаны паварот праменя на вугал -148° , а на рысунку 61 — паварот на вугал -748° .



Рыс. 60



Рыс. 61

Пры павароце праменя вакол пункта O яго пачатковае месцазнаходжанне — прамень OA — называюць *пачаткам адліку*, а пра прамень OB гавораць, што ён *вызначае вугал павароту*.

Любы вугал павароту α можна запісаць у выглядзе

$$\alpha = 360^\circ \cdot n + \varphi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z} \text{ і } 0 \leq \varphi < 360^\circ. \quad (1)$$

Каб запісаць вугал α у выглядзе (1), трэба падзяліць α на 360° з астачай. Напрыклад, для вугла α , роўнага 5378° , атрымваем:

$$5378^\circ = 360^\circ \cdot 14 + 338^\circ \text{ (рыс. 62).}$$

Тут $n = 14$, $\varphi = 338^\circ$.

Для вугла α , роўнага -5378° , атрымваем:

$$\alpha = -5378^\circ = 360^\circ(-14) - 338^\circ =$$

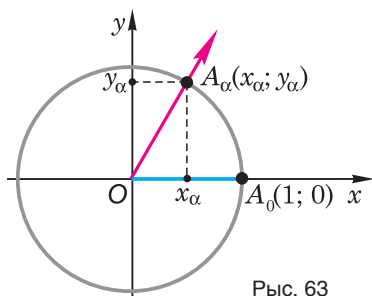
↓ дададзім да атрыманага выразу 360° , а затым аднімем 360° : ↓

$$\begin{aligned} &= 360^\circ(-14) - 338^\circ + 360^\circ - 360^\circ = \\ &= 360^\circ(-15) + 22^\circ, \text{ тут } n = -15, \varphi = 22^\circ. \end{aligned}$$

5378		360
360		14
1778		
1440		
338		

Рыс. 62

Няхай на плоскасці ўведзена прамавугольная сістэма каардынат Oxy . Разгледзім акружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным адзінцы. Такую акружнасць



Рыс. 63

называюць *адзінкавай* або *трыганаметрычнай акружнасцю*, а круг, які яна абмяжоўвае, — *трыганаметрычным кругам*.

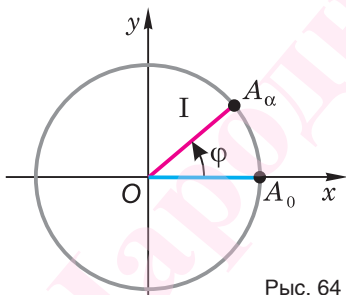
У далейшым мы будзем разглядаць толькі вуглы з вяршынямі ў пачатку каардынат. Дадатную паўвось абсцыс прымаюць за *пачатак адліку для лю-*

бога вугла α . Пункт яе перасячэння з адзінкавай акружнасцю прынята абазначаць A_0 (рыс. 63). Пункт перасячэння з адзінкавай акружнасцю праменя, які вызначае вугал α , называюць *адпаведным вуглу α* і абазначаюць A_α (чытаецца «*A са значком α* »), а яго каардынаты — x_α і y_α (гл. рыс. 63).

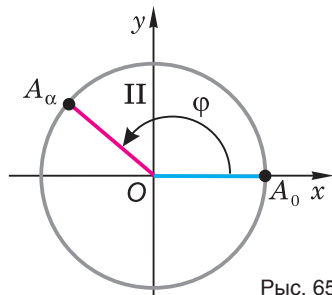
Пункт акружнасці A_α можа аказацца ў адной з чатырох каардынатных чвэрцяў. Каб вызначыць месцазнаходжанне пункта A_α на акружнасці, вугал α запісваюць у выглядзе (1).

Калі $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, то гавораць, што вугал φ *належыць* I чвэрці, а вугал α *заканчваецца ў* I чвэрці (рыс. 64).

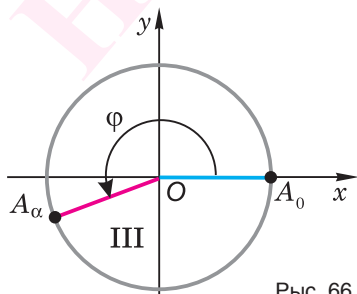
Аналагічна для II, III і IV чвэрцяў (рыс. 65, 66, 67).



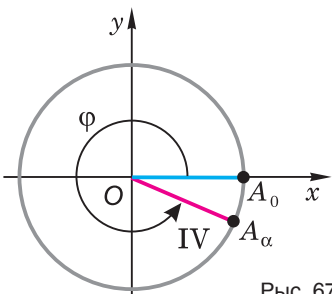
Рыс. 64



Рыс. 65



Рыс. 66



Рыс. 67

Калі вугал $\varphi = 90^\circ \cdot n$, дзе $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, то вугал α заканчваецца на адной з паўвосьей сістэмы каардынат Oxy , г. зн. на мяжы дзвюх чвэрцяў.

Напрыклад, калі $\varphi = 180^\circ$, то гавораць, што вугал α заканчваецца на мяжы II і III чвэрцяў.

Прыклад 1. Адзначыць на адзінкавай акружнасці пункт A_α , які адпавядае вуглу α , калі:

а) $\alpha = 1935^\circ$;

б) $\alpha = -3630^\circ$.

Рашэнне. а) $\alpha = 1935^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 135^\circ$, тут $n = 5$, $\varphi = 135^\circ$. Адзначаем пункт A_φ на адзінкавай акружнасці (рыс. 68). Ён супадае з пунктам A_α .

б) $\alpha = -3630^\circ = 360^\circ(-10) - 30^\circ + 360^\circ - 360^\circ = 360^\circ(-11) + 330^\circ$, тут $n = -11$, $\varphi = 330^\circ$. Адзначаем пункт A_φ на адзінкавай акружнасці (рыс. 69). Ён супадае з пунктам A_α .

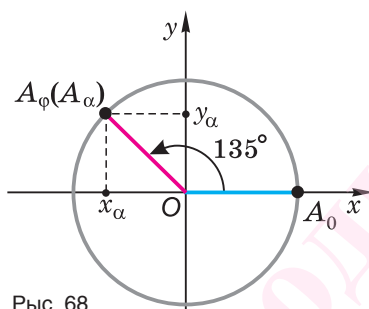


Рис. 68

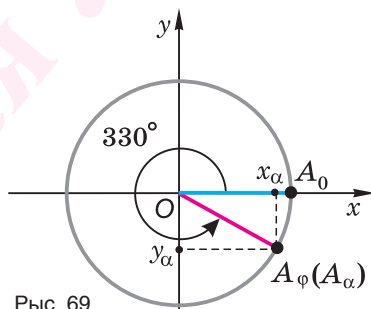


Рис. 69

Прыклад 2. Запісаць па чатыры значэнні велічыні вугла павароту α , калі пункт A_α , які яму адпавядае, супадае з пунктам:

а) B ; б) C ; в) M (рыс. 70).

Рашэнне.

а) $\alpha_1 = 90^\circ$; $\alpha_2 = 450^\circ$;

$\alpha_3 = -270^\circ$; $\alpha_4 = -630^\circ$;

б) $\alpha_1 = -90^\circ$; $\alpha_2 = 270^\circ$;

$\alpha_3 = -450^\circ$; $\alpha_4 = -810^\circ$;

в) $\alpha_1 = -45^\circ$; $\alpha_2 = 315^\circ$;

$\alpha_3 = -405^\circ$; $\alpha_4 = 675^\circ$.

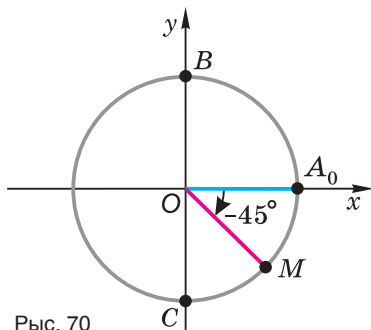


Рис. 70



1. Які паварот праменя называецца поўным?
2. Які вугал павароту праменя прынята лічыць:
 - а) дадатным; б) адмоўным?
3. У якім выглядзе трэба запісаць α — вугал павароту праменя, каб вызначыць месцазнаходжанне пункта A_α , які яму адпавядае, на адзінкавай акружнасці?
4. У якім выпадку гавораць, што:
 - а) вугал φ належыць I (II, III, IV) чвэрці;
 - б) вугал α заканчваецца ў I (II, III, IV) чвэрці;
 - в) вугал α заканчваецца на мяжы III і IV чвэрцяў?

Практыкаванні

2.14°. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт A_α і запішыце формулай усе вуглы, якія могуць заканчвацца ў гэтым пункце для кожнага з наступных значэнняў α :

- 1) $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$; 2) $-180^\circ, -90^\circ, -360^\circ, -270^\circ$.

2.15°. На адзінкавай акружнасці адзначце тры пункты A_α , якія адпавядаюць розным значэнням вугла α , атрыманым па формуле:

- 1) $\alpha = 30^\circ + 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\alpha = 45^\circ + 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$;
 3) $\alpha = 60^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\alpha = 15^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$.

На адзінкавай акружнасці адзначце пункты A_α , якія адпавядаюць дадзеным значэнням вугла α (**2.16—2.17**).

2.16°. 1) $-210^\circ, -240^\circ, -225^\circ, -255^\circ, -300^\circ, -330^\circ$;
 2) $-60^\circ, -120^\circ, -150^\circ, -315^\circ, -210^\circ, -165^\circ$.

2.17°. 1) $930^\circ, 1320^\circ, 1485^\circ, 840^\circ, 3720^\circ, 945^\circ$;
 2) $2460^\circ, 4350^\circ, 855^\circ, 1290^\circ, 1500^\circ, 2640^\circ$.

2.18°. У якой чвэрці заканчваецца вугал α , роўны:

- 1) $292^\circ, 186^\circ, 306^\circ, 2184^\circ, 1748^\circ$;
 2) $-172^\circ, -206^\circ, -291^\circ, -341^\circ, -268^\circ$;
 3) $-1201^\circ, -2189^\circ, -2617^\circ, -1854^\circ$;
 4) $3521^\circ, 2849^\circ, 1853^\circ, 1792^\circ, 2171^\circ$

2.19°. Запішыце вугал β у выглядзе $360^\circ \cdot n + \varphi$, дзе $n \in \mathbb{Z}$ і φ — вугал, які задавальняе ўмову $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, калі вугал β роўны:

- 1) 426° ; 2) 693° ; 3) -849° ; 4) -784° ;

- 5) 3524° ; 6) 2461° ; 7) -1341° ; 8) -2889° .

2.20°. Запішыце мноства значэнняў вугла α , калі вядома, што $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

- 1) $\alpha = 360^\circ \cdot n + 50^\circ$; 2) $\alpha = 360^\circ \cdot n + 190^\circ$;
3) $\alpha = 360^\circ \cdot n + 270^\circ$; 4) $\alpha = 360^\circ \cdot n + 180^\circ$.

2.21. Вядома, што $\beta = 360^\circ \cdot n + 60^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$. Запішыце такое значэнне n (калі яно існуе), пры якім вугал β роўны:

- 1) 60° ; 2) 3660° ; 3) -1020° ;
4) -3900° ; 5) -300° ; 6) -780° .

2.22. Дадзена адзінкавая акружнасць. Вызначыце, у якой чвэрці заканчваецца вугал $\frac{\beta}{2}$, калі вядома, што вугал β вымяраецца цэлым лікам градусаў і гэта найменшы з усіх выражаных натуральнымі лікамі вуглоў, якія заканчваюцца ў:

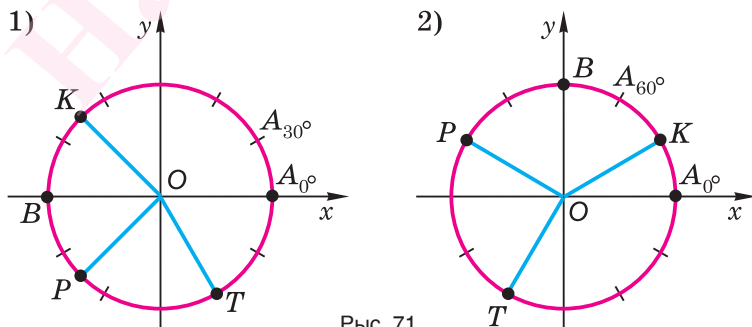
- 1) II чвэрці; 2) III чвэрці; 3) IV чвэрці.

2.23. Дадзена адзінкавая акружнасць. Вядома, што $\angle A_0 O A_\alpha = \varphi$. Якому вуглу павароту α можа адпавядаць пункт адзінкавай акружнасці A_α (запішыце тры значэнні α), калі вугал φ (гл. формулу (1)) роўны:

- 1) 280° ; 2) 75° ; 3) 345° ; 4) 136° ?

2.24°. Запішыце па тры значэнні вугла α , пры якіх пункт A_α адзінкавай акружнасці, што яму адпавядае (рыс. 71), супадае з пунктам:

- а) B ; б) P ; в) K ; г) T .



Рыс. 71

- 2.25.** Запішыце па тры магчымыя значэнні вугла α , пры якіх пункт A_α , што яму адпавядае, супадае з пунктам:
1) A_{215° ; 2) A_{735° ; 3) A_{1625° ; 4) A_{2095° .
- 2.26.** Параўнайце з нулём абсцысу і ардынату пункта A_α , які адпавядае вуглу α , калі ён роўны:
1) 172° ; 2) 247° ; 3) -1241° ; 4) -2819° .
- 2.27.** Параўнайце з нулём абсцысу і ардынату пункта A_α , калі вугал α , якому ён адпавядае, заканчваецца на:
1) восі Ox ; 2) восі Oy .
- 2.28.** Запішыце тры значэнні градуснай меры вугла α , пры якіх ардыната пункта A_α , што яму адпавядае, роўна:
1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 1.
- 2.29.** Запішыце тры значэнні градуснай меры вугла α , пры якіх абсцыса пункта A_α , што яму адпавядае, роўна:
1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) -1 ; 6) 1.

2.3. Радыянная мера вуглоў і дуг

Вуглы і дугі акружнасці можна вымяраць не толькі ў градусах. Разгледзім яшчэ адну адзінку вымярэння вуглоў і дуг — *радыян* (абазначаецца 1 рад).

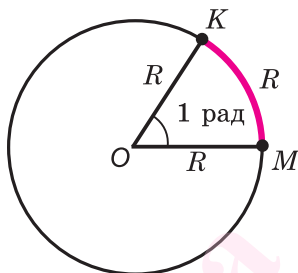
Азначэнне. *Радыйнам* называецца велічыня цэнтральнага вугла, які адпавядае дузе акружнасці даўжынёй у адзін радыус.

Адпаведна, дуга велічынёй адзін радыян — гэта дуга, даўжыня якой роўна радыусу.

На рысунку 72 пабудавана акружнасць з цэнтрам O і радыусам 17 мм. На ёй чырвонай лініяй вылучана дуга MK , даўжыня якой роўна радыусу, г. зн. 17 мм. Велічыня вугла $МОК$ роўна аднаму радыяну, г. зн. $\angle МОК = 1$ рад; адпаведна і велічыня дугі MK роўна аднаму радыяну, г. зн. $\text{дуга } MK = 1$ рад. Гэты вугал (дугу), як і любы іншы, можна вымяраць у градусах.

Будзем разважаць так: дуге даўжынёй R адпавядае цэнтральны вугал 1 рад. Такім чынам, дуге даўжынёй πR адпавядае цэнтральны вугал π рад. Дуга даўжынёй πR — гэта паўакружнасць, а на паўакружнасць абавіраецца цэнтральны вугал 180° . Значыць,

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ,$$



Рыс. 72

адкуль і атрымліваем суадносіны паміж адзінкамі вымярэння вуглоў:

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi};$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.} \quad (1)$$

Калі ў формулы (1) замест ліку π падставіць яго прыбліжанае значэнне $3,14$, то атрымаецца:

$$1 \text{ рад} \approx 57^\circ 19';$$

$$1^\circ \approx 0,02 \text{ рад.}$$

Прыклад 1. Выразіць у радыянах вуглы: 35° ; -135° .

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулу (1), атрымаем:

$$35^\circ = 1^\circ \cdot 35 = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36} \text{ рад};$$

$$-135^\circ = -1^\circ \cdot 135 = -\frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 135 = -\frac{3\pi}{4} \text{ рад.}$$

$$\text{Адказ: } 35^\circ = \frac{7\pi}{36} \text{ рад}; \quad -135^\circ = -\frac{3\pi}{4} \text{ рад.}$$

Прыклад 2. Выкарыстаўшы прыбліжанае значэнне $\pi \approx 3,14$, выразіць (прыбліжана) у градусах вуглы: -2 рад; $\frac{\pi}{12}$ рад.

Рашэнне. Па формуле (1) маем:

$$-2 \text{ рад} = -2 \cdot 1 \text{ рад} = -2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{-360^\circ}{3,14} \approx -115^\circ;$$

$$\frac{\pi}{12} \text{ рад} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

$$\text{Адказ: } -2 \text{ рад} \approx -115^\circ; \quad \frac{\pi}{12} \text{ рад} = 15^\circ.$$



Заўважым, што пры абазначэнні меры вугла ў радыянах слова «радыян», як правіла, прпускаяць (не пішуць).

Напрыклад, пад вуглом π разумеюць вугал, роўны π рад;
пад вуглом $\frac{4}{15}$ разумеюць вугал, роўны $\frac{4}{15}$ рад.

Звярніце ўвагу, што абазначэнне градуса ў запісе меры вугла прапускаць нельга.

Выкарыстаўшы роўнасць (1) з п. 2.2, любы вугал павароту α , выражаны ў радыянах, можна запісаць у выглядзе

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z} \text{ і } 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Прыклад 3. Выкарыстаўшы формулу (2), знайсці n і φ для вугла павароту α , роўнага:

а) $3,5\pi$; б) $-0,4\pi$.

Рашэнне. а) $\alpha = 3,5\pi = 2\pi + 1,5\pi = 2\pi \cdot 1 + 1,5\pi$;

тут $n = 1$, $\varphi = 1,5\pi$;

б) $\alpha = -0,4\pi = -0,4\pi + 2\pi - 2\pi = 2\pi(-1) + 1,6\pi$;

тут $n = -1$, $\varphi = 1,6\pi$.

Адказ: а) $n = 1$, $\varphi = 1,5\pi$;

б) $n = -1$, $\varphi = 1,6\pi$.



1. Які цэнтральны вугал мае велічыню 1 рад?
2. Колькі радыян змяшчае:
 - а) поўны вугал; б) разгорнуты вугал; в) прамы вугал?
3. Запішыце формулу для выражэння:
 - а) градуса ў радыянах;
 - б) радыяна ў градусах.
4. У якім выглядзе трэба запісаць вугал павароту α , выражаны ў радыянах, каб даведацца, у якой чвэрці ён заканчваецца?

Практыкаванні

Выразіце ў градусах вугал (2.30—2.31).

2.30°. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{5\pi}{9}$;
5) $\frac{7\pi}{12}$; 6) $-\frac{21\pi}{20}$; 7) $1,2\pi$; 8) $-2,4\pi$.

2.31°. 1) 0,2; 2) 3,1; 3) 5;
4) 2,7; 5) 9,2; 6) 10.

2.32. Выразіце ў радыянах вугал:

- 1) 2° ; 2) 10° ; 3) 40° ; 4) 50° ;
5) -135° ; 6) -270° ; 7) 1021° ; 8) 905° .

2.33. Выразіце ў градусах і радыянах велічыні вуглоў:

- 1) роўнастаронняга трохвугольніка;
2) прамавугольнага раўнабедранага трохвугольніка;
3) правільнага шасцівугольніка;
4) правільнага дванаццацівугольніка;
5) правільнага дзесяцівугольніка;
6) правільнага пяцівугольніка.

2.34. Выразіце ў градусах і радыянах велічыню вугла, пад якім бачна старана правільнага n -вугольніка з яго цэнт-ра, калі:

- 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$;
4) $n = 8$; 5) $n = 12$; 6) $n = 6$.

2.35°. Запішыце каардынаты x_α і y_α пункта A_α , што адпавядае вуглу α , і запішыце формулай мноства ўсіх вуглоў, якія заканчваюцца ў гэтым пункце, калі вугал α роўны:

- 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) π ; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 2π .

2.36°. Для кожнага з дадзеных значэнняў вугла α адзначце на адзінкавай акружнасці пункт A_α , які яму адпавядае, і параўнайце з нулём яго каардынаты x_α і y_α :

- 1) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$;
3) $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$; 4) $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{9\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$.

2.37°. Адзначце на адзінкавай акружнасці пункт A_α , які адпавядае вуглу α , і параўнайце яго каардынаты x_α і y_α , калі радыянная мера вугла α роўна:

- 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$;
5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 8) $\frac{3\pi}{8}$.

2.38. Па дадзенай радыяннай меры вугла α адзначце на адзінкавай акружнасці пункт A_α , які яму адпавядае, параў-

найце яго каардынаты x_α і y_α з нулём і запішыце формулай усе вуглы, што заканчваюцца ў гэтым пункце:

- 1) 2; 2) 3; 3) -4; 4) -5;
5) 10; 6) 11; 7) -8; 8) -7.

2.39. Запішыце вугал β у выглядзе рознасці (сумы) вугла $\frac{\pi}{2}$ і некаторага вострага вугла α , калі радыянная мера вугла β роўна:

- 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{12}$;
4) $\frac{4\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{7\pi}{12}$.

2.40. Выкарыстаўшы формулу (2), знайдзіце значэнні n і φ і вызначыце, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , калі яго радыянная мера роўна:

- 1) $10,6\pi$; 2) $-7,9\pi$; 3) $-\frac{19\pi}{3}$;
4) $\frac{46\pi}{3}$; 5) $-\frac{24\pi}{5}$; 6) $-\frac{51\pi}{7}$;
7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) $\frac{7\pi}{8}$.

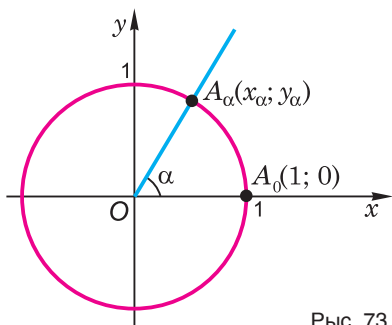
2.41. Вядома, што $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Знайдзіце такое значэнне k (калі яно існуе), пры якім вугал β роўны:

- 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$;
4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) $-\frac{5\pi}{4}$; 6) $\frac{19\pi}{4}$.

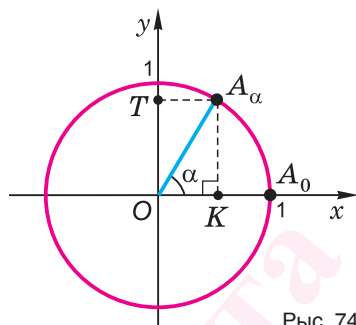
2.4. Сінус і косінус адвольнага вугла

У курсе геаметрыі вы пазнаёміліся з паняццямі *сінуса*, *косінуса*, *тангенса* і *катангенса* вуглоў ад 0° да 180° . У трыганаметрыі гэтыя паняцці вызначаюцца для адвольных вуглоў.

Разгледзім адзінкавую акружнасць. Возьмем на ёй два пункты: пункт $A_0(1; 0)$ і пункт $A_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$, што адпавядае вуглу α , атрыманаму пры перасячэнні гэтай акружнасці і праменя, які вызначае вугал α (рыс. 73).



Рыс. 73



Рыс. 74

Няхай α — востры вугал. З пункта A_α апусцім перпендыкуляры $A_\alpha K$ і $A_\alpha T$ адпаведна на восі Ox і Oy (рыс. 74). З прававугольнага трохвугольніка $OA_\alpha K$ ($\angle K = 90^\circ$) маем:

$$\sin \alpha = \frac{A_\alpha K}{OA_\alpha}$$

і

$$\cos \alpha = \frac{OK}{OA_\alpha}.$$

Паколькі $A_\alpha K = OT = y_\alpha$, $OK = x_\alpha$ і $OA_\alpha = 1$, то атрымліваем:

$$\sin \alpha = y_\alpha$$

і

$$\cos \alpha = x_\alpha,$$

г. зн. сінус вугла α роўны ардынаце пункта A_α , а косінус вугла α роўны абсцысе пункта A_α .

Няхай цяпер α — адвольны вугал.

Азначэнне. *Сінусам вугла α называецца ардыната пункта A_α адзінкавай акружнасці, які адпавядае вуглу α ,*
г. зн.

$$\sin \alpha = y_\alpha.$$

Азначэнне. *Косінусам вугла α называецца абсцыса пункта A_α адзінкавай акружнасці, які адпавядае вуглу α ,*
г. зн.

$$\cos \alpha = x_\alpha.$$

Прыклад 1. Знайсці прыбліжаныя значэнні (з дакладнасцю да 0,1) сінуса і косінуса вугла α , калі α роўны:

- а) 30° ; б) 155° .

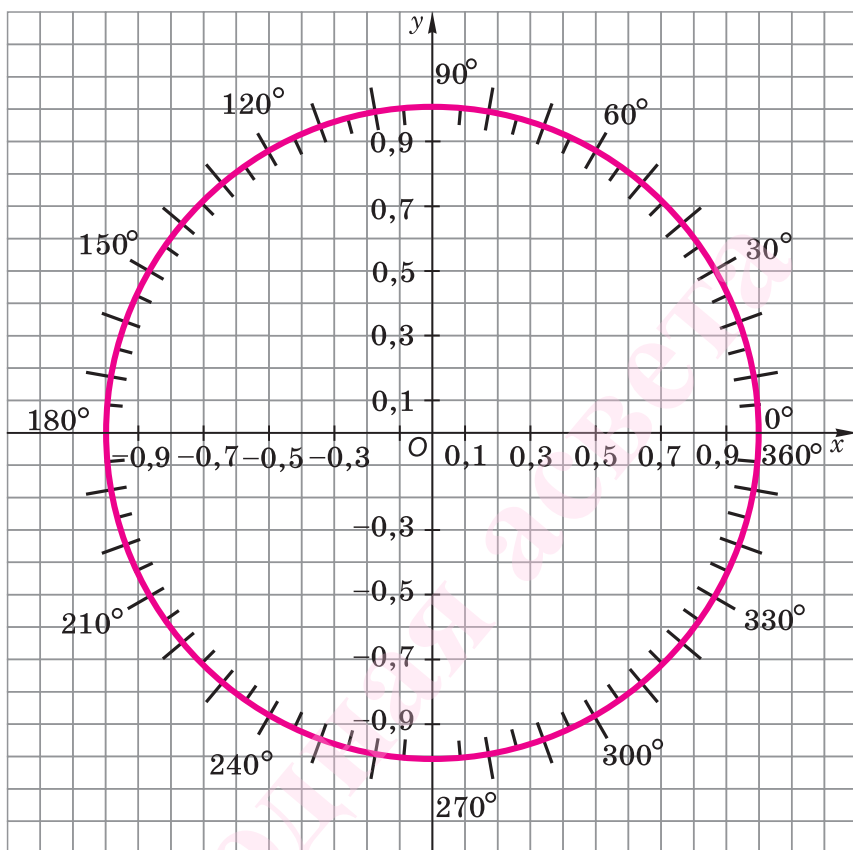


Рис. 75

Рашэнне. а) $\alpha = 30^\circ$; для пункта адзінкавай акружнасці, які адпавядае гэтаму вуглу (рыс. 75), знойдзем прыбліжаныя значэнні яго каардынат:

$$\sin 30^\circ = y_\alpha = 0,5 \text{ і } \cos 30^\circ = x_\alpha \approx 0,9;$$

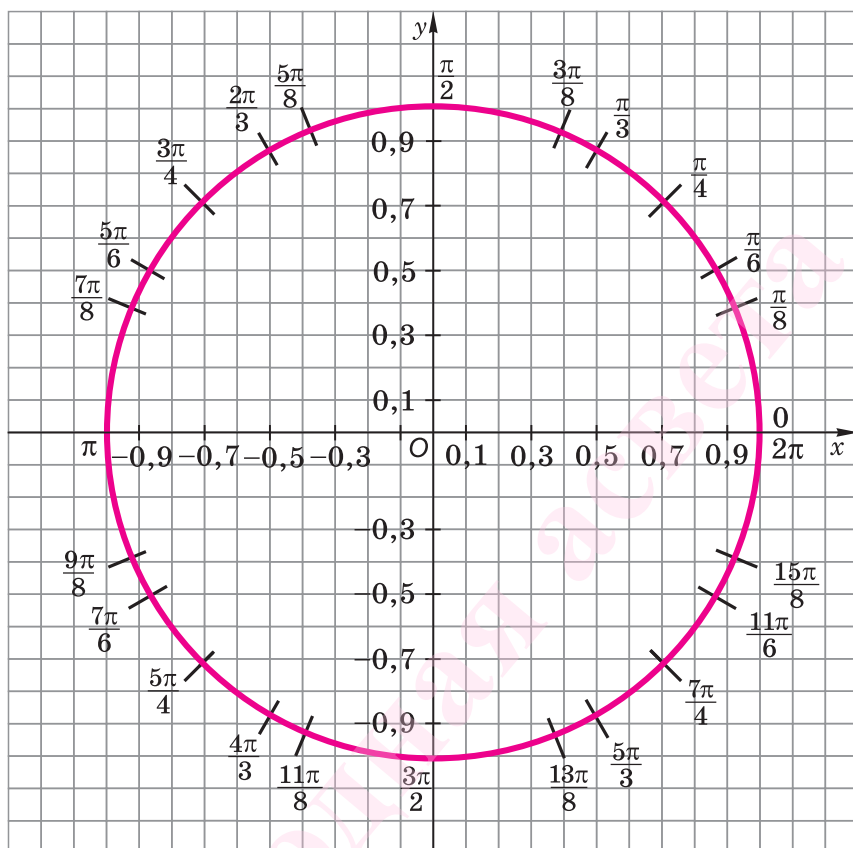
$$\text{б) } \sin 155^\circ = y_\alpha \approx 0,4 \text{ і } \cos 155^\circ = x_\alpha \approx -0,9.$$

Адказ: а) $\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 30^\circ \approx 0,9$;

$$\text{б) } \sin 155^\circ \approx 0,4; \cos 155^\circ \approx -0,9.$$

Прыклад 2. Знайсці прыбліжаныя значэнні (з дакладнасцю да 0,1) $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ пры α , роўным:

$$\text{а) } \frac{3\pi}{4}; \quad \text{б) } 3,8.$$



Рыс. 76

Рашэнне. а) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ належыць II чвэрці; для пункта адзінкавай акружнасці, які адпавядае гэтаму вуглу (рыс. 76), знойдзем прыбліжаныя значэнні яго каардынат:

$$\sin \frac{3\pi}{4} = y_{\alpha} \approx 0,7; \quad \cos \frac{3\pi}{4} = x_{\alpha} \approx -0,7;$$

б) $\alpha = 3,8$ належыць III чвэрці; для пункта адзінкавай акружнасці, які адпавядае гэтаму вуглу (рыс. 77), знойдзем прыбліжаныя значэнні яго каардынат:

$$\sin 3,8 = y_{\alpha} \approx -0,6; \quad \cos 3,8 = x_{\alpha} \approx -0,8.$$

Адказ: а) $\sin \frac{3\pi}{4} \approx 0,7$; $\cos \frac{3\pi}{4} \approx -0,7$;

б) $\sin 3,8 \approx -0,6$; $\cos 3,8 \approx -0,8$.

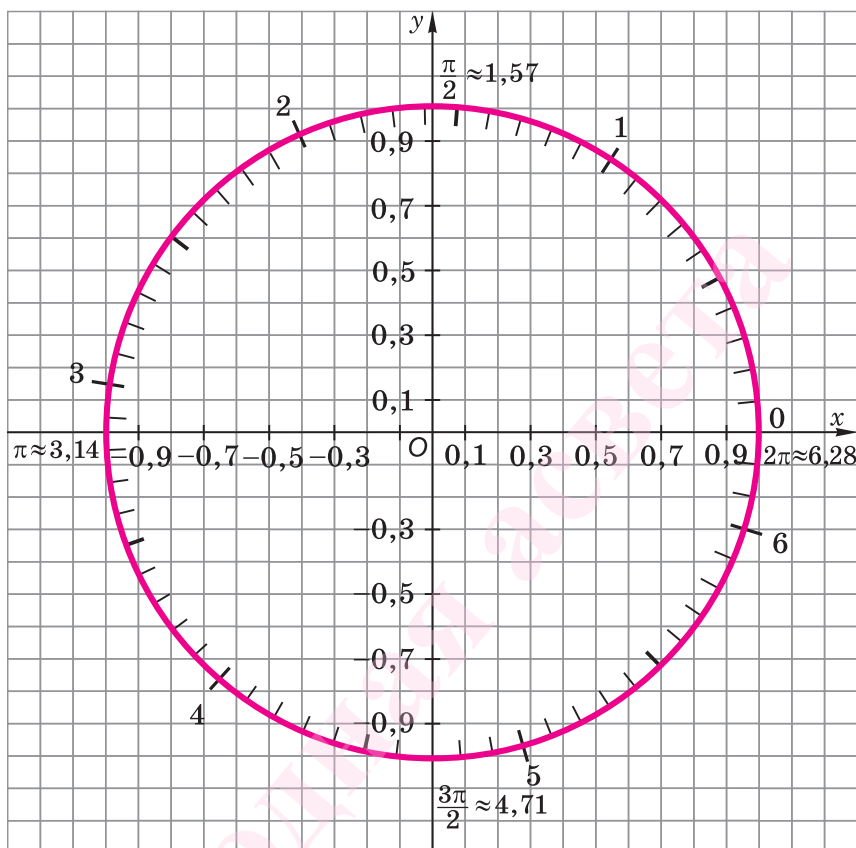


Рис. 77

Для знаходження значення синуса і косинуса вуглою можна використовувати не тільки адзінкаву акружнасць, але і таблиці, калькулятори і т. д.

Кожний вугал α можна записати у вигляді

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ де } n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ (гл. п. 2.3).}$$

Паколькі вугли α і φ адрозніваються на цілий лік повних абаротаў, то пункти A_α і A_φ на адзінкавай акружнасці супадають. Таму правильна рівність:

$$\sin \alpha = \sin \varphi, \quad \cos \alpha = \cos \varphi.$$

Таким чином,

$$\sin(2\pi n + \varphi) = \sin \varphi, \quad \cos(2\pi n + \varphi) = \cos \varphi, \text{ де } n \in \mathbb{Z}.$$

Прыклад 3. Знайсці прыбліжаныя значэнні (з дакладнасцю да 0,1) $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ пры α , роўным:

- а) $3,25\pi$; б) $-17\frac{5}{6}\pi$; в) $-10,1$.

Рашэнне. а) Выкарыстаўшы формулу $\alpha = 2\pi n + \varphi$, дзе $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, атрымаем:

$$\alpha = 3,25\pi = 2\pi \cdot 1 + 1,25\pi \quad \left(\text{тут } n = 1; \varphi = \frac{5\pi}{4} \right).$$

Паколькі пункты A_α і A_φ супадаюць, то, выкарыстаўшы рысунак 76, знойдзем:

$$\sin \alpha = \sin \varphi = \sin \frac{5\pi}{4} = y_\varphi \approx -0,7;$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi = \cos \frac{5\pi}{4} = x_\varphi \approx -0,7;$$

б) $\alpha = -17\frac{5}{6}\pi = 2\pi \cdot (-9) + \frac{\pi}{6}$ (тут $n = -9$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$), выкарыстаўшы рысунак 76, знойдзем:

$$\sin \alpha = \sin \varphi = \sin \frac{\pi}{6} = y_\varphi = 0,5;$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi = \cos \frac{\pi}{6} = x_\varphi \approx 0,9;$$

в) $\alpha = -10,1 = 2\pi \cdot (-2) + \varphi \approx 6,28 \cdot (-2) + \varphi = -12,56 + 2,46$ (тут $n = -2$; $\varphi \approx 2,5$), выкарыстаўшы рысунак 77, знойдзем:

$$\sin \alpha = \sin \varphi = y_\varphi \approx \sin 2,5 \approx 0,6;$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi = x_\varphi \approx \cos 2,5 \approx -0,8.$$

Адказ: а) $\sin 3,25\pi \approx -0,7$; $\cos 3,25\pi \approx -0,7$;

$$\text{б) } \sin\left(-17\frac{5}{6}\pi\right) = 0,5; \quad \cos\left(-17\frac{5}{6}\pi\right) \approx 0,9;$$

$$\text{в) } \sin(-10,1) \approx 0,6; \quad \cos(-10,1) \approx -0,8.$$

Напомнім, выгляд ураўнення адзінкавай акружнасці:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Паколькі каардынаты любога пункта $A_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$ адзінкавай акружнасці задавальняюць яе ўраўненне, то пры любым значэнні α будзе правільнай роўнасць

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Даказаная роўнасць называецца **асноўнай трыганаметрычнай тоеснасцю**.

(Напомнім азначэнне тоеснасці. Роўнасць двух выказаў $A = B$ называецца **тоеснасцю**, калі яна ператвараецца ў пра-

вільную лікавую роўнасць пры любых значэннях зменных, для якіх абодва выразы A і B маюць сэнс.)

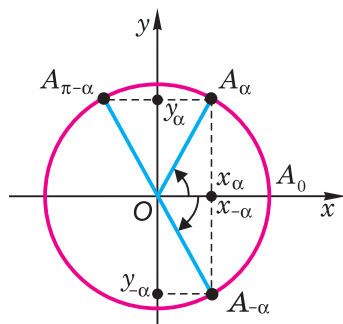
Заўвага. Калі $a^2 + b^2 = 1$, то існуе вугал α такі, што $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$.

Прыклад 4. Даказаць тоеснасць:



- | | |
|---|--|
| а) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; | б) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; |
| в) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$; | г) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. |

Доказ. а), б) Пры любым значэнні α пункты A_α і $A_{-\alpha}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі Ox , значыць, іх ардынаты — процілеглыя лікі, а абсцысы — роўныя лікі (рыс. 78):



Рыс. 78

$$y_{-\alpha} = -y_\alpha \text{ і } x_{-\alpha} = x_\alpha.$$

Па азначэннях сінуса і косінуса атрымліваюцца тоеснасці а) і б).

в), г) Пры любым значэнні α пункты $A_{-\alpha}$ і $A_{\pi-\alpha}$ сіметрычныя адносна пачатку каардынат (гл. рыс. 78), значыць,

$$y_{\pi-\alpha} = -y_{-\alpha} \text{ і } x_{\pi-\alpha} = -x_{-\alpha}.$$

Па азначэннях сінуса і косінуса маем:

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) \text{ і } \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha).$$

Выкарыстаўшы тоеснасці а) і б), атрымліваем тоеснасці в) і г). ☒



Назва «сінус» паходзіць ад лацінскага слова *sinus* — «перагіб», «пазуха», уяўляе сабой пераклад арабскага слова «джыва» («цецыва лука»), якім абазначалі сінус індыйскія матэматыкі.

Да ідэі разглядання трыганаметрычнага круга з радыусам, роўным адзінцы, прыйшлі ў XI ст.



1. Якую акружнасць называюць адзінкавай?
2. Што называецца трыганаметрычным кругам?
3. Запішыце ўраўненне адзінкавай акружнасці.
4. Дакажыце асноўную трыганаметрычную тоеснасць.

5. Што называецца сінусам (косінусам) вугла α ?
6. Ці могуць сінус і косінус аднаго і таго ж вугла α быць роўнымі нулю?
7. Ці правільна, што $\sin(-\alpha)\cos(-\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$?

Практыкаванні

2.42°. Ці правільная для ўсіх значэнняў α роўнасць:

- 1) $\sin\alpha + \sin(-\alpha) = 0$;
- 2) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha = 0$;
- 3) $\sin(\pi - \alpha) + \sin\alpha = 0$;
- 4) $\cos(\pi - \alpha) + \cos\alpha = 0$?

2.43°. Спрасціце выраз:

- 1) $\sin\alpha - \sin(-\alpha) - 2\sin(\pi - \alpha)$;
- 2) $\cos\alpha - \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$;
- 3) $(\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha))^2 - 2\cos(\pi - \alpha)\sin\alpha$;
- 4) $(\cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha))^2 - 2\sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$.

2.44°. Выкарыстаўшы рысунак 75, знайдзіце прыбліжаныя значэнні $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ пры α , роўным:

- 1) 65° , 160° , 335° ;
- 2) -40° , -125° , -340° ;
- 3) 410° , 1705° , 3360° ;
- 4) -775° , -470° , -1988° .

2.45°. Выкарыстаўшы рысунак 76, знайдзіце прыбліжаныя значэнні $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ пры α , роўным:

- 1) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{4}$;
- 2) $-\frac{\pi}{10}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{14\pi}{3}$, $-\frac{22\pi}{5}$, $-\frac{13\pi}{6}$;
- 3) $\frac{44\pi}{3}$, $\frac{51\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{62\pi}{3}$, $-\frac{74\pi}{3}$, $-\frac{87\pi}{4}$.

2.46°. Выкарыстаўшы рысунак 77, знайдзіце прыбліжаныя значэнні $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ пры α , роўным:

- 1) 1; 1,5; 2; 2,5; 3;
- 2) 4; 4,5; 5; 5,5; 6;
- 3) -4; -4,5; -5; -5,5; -6;
- 4) -1; -1,5; -2; -2,5; -3.

Знайдзіце значэнне выразу (2.47—2.48).

- 2.47. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
- 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

$$5) 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$6) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

2.48. 1) $\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4};$

2) $\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{6};$

3) $\sin\frac{2\pi}{3} - 1;$

4) $\cos\frac{2\pi}{3} + 1;$

5) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right);$

6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$

2.49. Запішыце тры значэнні радыяннай меры вугла α , пры якіх $\sin \alpha$ роўны:

1) $\frac{1}{2};$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2};$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2};$

4) $-\frac{1}{2};$ 5) 0; 6) -1.

2.50. Запішыце тры значэнні радыяннай меры вугла α , пры якіх $\cos \alpha$ роўны:

1) $-\frac{1}{2};$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2};$ 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2};$

4) $\frac{1}{2};$ 5) -1; 6) 1.

2.51°. Запішыце такі вугал α (калі ён існуе), для якога правільныя роўнасці:

1) $\sin \alpha = 0$ і $\cos \alpha = 1;$

2) $\sin \alpha = 1$ і $\cos \alpha = 0;$

3) $\sin \alpha = -1$ і $\cos \alpha = 1;$

4) $\sin \alpha = 0$ і $\cos \alpha = 0;$

5) $\sin \alpha = 0$ і $\cos \alpha = -1;$

6) $\sin \alpha = -1$ і $\cos \alpha = 0.$

2.52°. Запішыце такі вугал α (калі ён існуе), для якога правільныя роўнасці:

1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ і $\cos \alpha = \frac{4}{5};$

2) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ і $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

3) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ і $\cos \alpha = -\frac{4}{5};$

4) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

5) $\sin \alpha = -0,6$ і $\cos \alpha = 0,8;$

6) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2.53. Якія значэнні вугла α задавальняюць роўнасць:

1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

калі:

а) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;

б) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{2}$;

в) $-\frac{7\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;

г) $-\pi \leq \alpha \leq 2\pi$?

2.54. Якія значэнні вугла α задавальняюць роўнасць:

1) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$,

калі:

а) $0 \leq \alpha \leq \pi$;

б) $0 \leq \alpha \leq 4\pi$;

в) $-7\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;

г) $-\frac{7\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$?

2.55*. 1) Знайдзіце значэнне выразу $2\sin \alpha \cos \alpha$, ведаючы, што правільная роўнасць $\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha) = 0,2$.

2) Знайдзіце значэнне выразу $\sin \alpha + \cos \alpha$, ведаючы, што правільная роўнасць $2\sin(-\alpha)\cos(\pi - \alpha) = 0,44$.

2.5. Уласцівасці выразы $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$

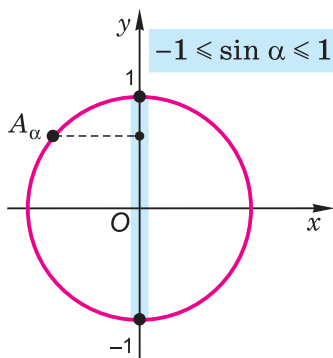
1. Мноства значэнняў сінуса і косінуса

З азначэння сінуса і косінуса вынікае, што для любога вугла α існуе, і прытым адзінае, значэнне $\sin \alpha$ (ардыната пункта A_α) і існуе, і прытым адзінае, значэнне $\cos \alpha$ (абсцыса пункта A_α).

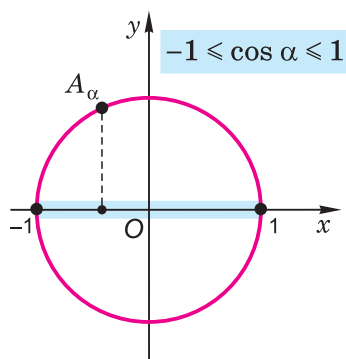
Пункт A_α ляжыць на адзінкавай акружнасці, таму ён можа мець любую ардынату ў межах ад -1 да $+1$ і ніякай іншай ардынаты мець не можа. А яго ардыната — гэта $\sin \alpha$. Значыць, $\sin \alpha$ можа прымаць любое значэнне ад -1 да $+1$ і ніякіх іншых значэнняў прымаць не можа (рыс. 79).

У прыватнасці, адсюль вынікае

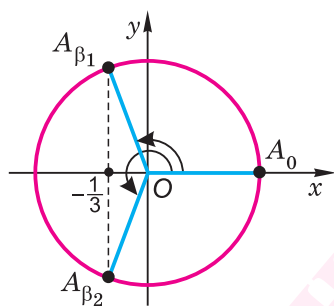
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$



Рыс. 79



Рыс. 80



Рыс. 81

Аналагічна даказваецца, што $\cos \alpha$ можа прымаць любое значэнне ад -1 да $+1$ і ніякіх іншых значэнняў прымаць не можа (рыс. 80).

У прыватнасці, адсюль вынікае $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Такім чынам, **мноствам значэнняў як сінуса, так і косінуса з'яўляецца адрэзак $[-1; 1]$.**

Прыклад 1. Ці можна пабудаваць вуглы, што заканчваюцца ў розных чвэрцях, косінус якіх роўны:

- а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{2}$?

Рашэнне. а) Можна. Пабудаванне вуглоў β_1 і β_2 , для якіх

$$\cos \beta_1 = -\frac{1}{3} \text{ і } \cos \beta_2 = -\frac{1}{3},$$

паказана на рысунку 81.

б) Пабудаваць вугал па гэтай умове немагчыма (патлумачце чаму).

Прыклад 2. Ці існуе вугал, сінус якога роўны:

- а) $-0,7$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$?

Рашэнне. а), б) Існуе, паколькі дадзеныя значэнні належаць адрэзку $[-1; 1]$ — мноству значэнняў сінуса.

в) Не існуе, паколькі $\frac{\pi}{2} \approx 1,57 \notin [-1; 1]$.

Адказ: а), б) існуе; в) не існуе.

2. Найменшае і найбольшае значэнні сінуса і косінуса

З пунктаў, што ляжаць на адзінкавай акружнасці (рыс. 82), найменшую ардынату, роўную -1 , мае пункт $A_{-\frac{\pi}{2}}(0; -1)$. Значыць, $\sin \alpha$ прымае найменшае значэнне пры

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

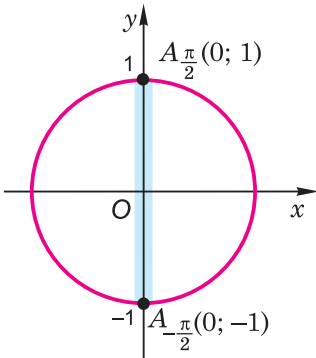


Рис. 82

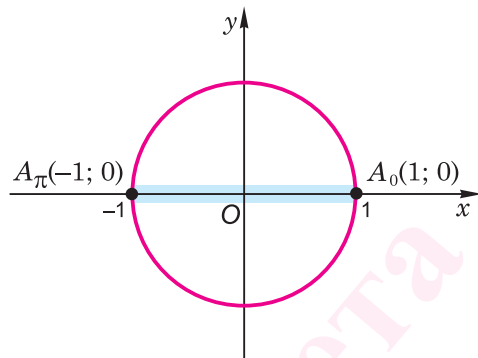


Рис. 83

Найбільшу ординату, рівну 1, має пункт $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$. Значить, $\sin \alpha$ *ймає найбільше значення при*

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

З пункту, що лежить на адзінковій окружності (рис. 83), найменшу абсцису, рівну -1 , має пункт $A_{\pi}(-1; 0)$. Значить, $\cos \alpha$ *ймає найменше значення при*

$$\alpha = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Найбільшу абсцису, рівну 1, має пункт $A_0(1; 0)$. Значить, $\cos \alpha$ *ймає найбільше значення при*

$$\alpha = 0 + 2\pi n = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заувага. Зрозуміла, уласцівасці синуса і косінуса, сформульовані в цьому пункті, можна записати, викаристуючи не тільки радіанну, але і градусну міру кута.

Наприклад, $\cos \alpha = -1$ при $\alpha = 180^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 3. Знайти найменше і найбільше значення виразу:

а) $\cos x + 5$; б) $\sin^2 x + 5$.

Решення. а) Паколькі найменшим значенням виразу $\cos x$ з'являється лік -1 , то найменшим значенням виразу $\cos x + 5$ з'являється лік $-1 + 5 = 4$; аналогічно найбільшим значенням виразу $\cos x + 5$ з'являється лік $1 + 5 = 6$.

б) Найменшим значенням виразу $\sin^2 x$ з'являється лік 0, а найбільшим значенням — лік 1, адже для виразу

$\sin^2 x + 5$ найменшае значэнне роўна 5, а найбольшае значэнне роўна 6.

Адказ: а) 4 і 6; б) 5 і 6.

3. Нулі сіноса і косінуса

Ардынаты, роўныя нулю, маюць тыя пункты адзінкавай акружнасці, што ляжаць на восі Ox , г. зн. пункты $A_0(1; 0)$ і $A_\pi(-1; 0)$ (рыс. 84). Такім чынам, $\sin \alpha = 0$ пры

$$\alpha = 0 + 2\pi k = \pi \cdot 2k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

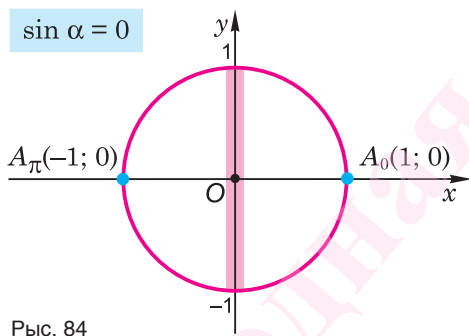
і пры

$$\alpha = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

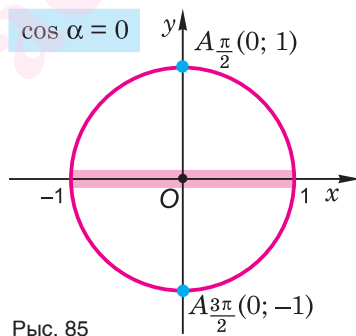
Абедзве групы значэнняў α можна запісаць адной формулай:

$$\alpha = \pi t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Гэтыя значэнні α называюць **нулямі сіноса**.



Рыс. 84



Рыс. 85

Абсцысы, роўныя нулю, маюць тыя пункты адзінкавай акружнасці, што ляжаць на восі Oy , г. зн. пункты $A_{\pi/2}(0; 1)$ і $A_{3\pi/2}(0; -1)$ (рыс. 85). Такім чынам, $\cos \alpha = 0$ пры

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і пры

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Абедзве групы значэнняў α можна запісаць адной формулай:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Гэтыя значэнні α называюць **нулямі косінуса**.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне:

- а) $\sin x = 0$; б) $\sin(x + 3) = 0$; в) $\cos 7x = 0$.

Рашэнне. а) Рашыць ураўненне $\sin x = 0$ — тое ж самае, што знайсці нулі сінуса. Значыць, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Паколькі $\sin(x + 3) = 0$, то:

$$x + 3 = \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

адкуль

$$x = \pi n - 3, n \in \mathbb{Z}.$$

в) Паколькі $\cos 7x = 0$, то

$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

адкуль

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: а) πn , $n \in \mathbb{Z}$; б) $\pi n - 3$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Прамежкі знакапастаянства сінуса і косінуса

Знакі, якія могуць мець значэнні $\sin \alpha$, г. зн. знакі ардынаты пунктаў A_α , у залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , паказаны на рысунку 86.

Менавіта:

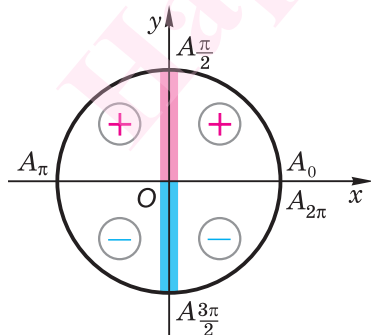


калі вугал α заканчваецца ў I або II чвэрці, г. зн. $0 + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin \alpha > 0$;

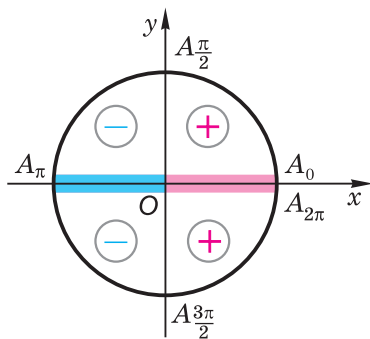
калі вугал α заканчваецца ў III або IV чвэрці, г. зн. $\pi + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin \alpha < 0$.

Такім чынам, мы знайшлі **прамежкі знакапастаянства сінуса**.

Знакі, якія могуць мець значэнні $\cos \alpha$, г. зн. знакі абсцысы пунктаў A_α , у залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , паказаны на рысунку 87.



Рыс. 86



Рыс. 87

Менавіта:



калі вугал α заканчваецца ў I або IV чвэрці, г. зн.

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то } \cos \alpha > 0;$$

калі вугал α заканчваецца ў II або III чвэрці, г. зн.

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то } \cos \alpha < 0.$$

Такім чынам, мы знайшлі **прамежкі знакапастаянства косінуса**.

Прыклад 5. Для якіх значэнняў α , што задавальняюць умову $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{4\pi}{3}$, правільная няроўнасць:

а) $\sin \alpha > 0$; б) $\sin \alpha < 0$; в) $\cos \alpha > 0$; г) $\cos \alpha < 0$?

Рашэнне. а), б) Паколькі $\sin \alpha > 0$ пры $0 < \alpha < \pi$ і $\sin \alpha < 0$ пры $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то з улікам умовы маем $\sin \alpha > 0$ пры $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$ і $\sin \alpha < 0$ пры $\pi < \alpha \leq \frac{4\pi}{3}$.

в), г) Патлумачце рашэнне самастойна (гл. адказ).

Адказ: а) $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$; б) $\pi < \alpha \leq \frac{4\pi}{3}$;

в) $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{4\pi}{3}$.



1. Пры якіх значэннях α выраз $\sin \alpha$ (выраз $\cos \alpha$) прымае найменшае значэнне?
2. Пры якіх значэннях α выраз $\sin \alpha$ (выраз $\cos \alpha$) прымае найбольшае значэнне?
3. Назавіце нулі сінуса (косінуса).
4. Назавіце прамежкі знакапастаянства для сінуса (косінуса).

Практыкаванні

2.56°. У якой чвэрці заканчваецца вугал α , калі:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$; | 2) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$; |
| 3) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$; | 4) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$; |
| 5) $\sin \alpha \cos \alpha > 0$; | 6) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$; |
| 7) $\sin \alpha = \sin \alpha $; | 8) $ \cos \alpha = \cos \alpha$? |

2.57°. Параўнайце з нулём значэнні $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ для кожнага з дадзеных значэнняў вугла α :

1) 49° , -250° , 333° , -1324° ;

2) -38° , 189° , -297° , 1585° ;

3) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{18}$, $-\frac{17\pi}{9}$, $\frac{279\pi}{20}$;

4) $\frac{\pi}{14}$, $-\frac{23\pi}{17}$, $\frac{38\pi}{21}$, $-\frac{371\pi}{40}$;

5) 3,5; -4; 5,5; -8;

6) -2,5; 4,5; -6; 9.

2.58°. Ці можа пры некаторым значэнні α быць правільнай роўнасць:

1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$;

3) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\sin \alpha = -\frac{\pi}{2}$;

5) $\sin \alpha = \sqrt{3} - 2$;

6) $\cos \alpha = 1 - \sqrt{2}$;

7) $\sin \alpha = \sqrt{11} - \sqrt{29}$;

8) $\cos \alpha = \sqrt{15} - \sqrt{12}$?

2.59°. Пры якіх значэннях t правільная роўнасць:

1) $\sin t = 1$;

2) $\sin t = 0$;

3) $\sin t = -1$;

4) $\sin t = \pi$;

5) $\cos t = 1$;

6) $\cos t = 0$;

7) $\cos t = -1$;

8) $\cos t = -\frac{\pi}{2}$?

2.60°. Рашыце ўраўненне:

1) $\cos 2t = 0$;

2) $\sin 3t = 0$;

3) $\sin \frac{t}{4} = -1$;

4) $\cos \frac{t}{3} = -1$;

5) $\sin(6t - 5) = 0$;

6) $\cos(4 - 2t) = 0$;

7) $\cos(10t + 88\pi) = 1$;

8) $\sin(6\pi - 3t) = 1$.

2.61. Параўнайце з нулём:

1) $\sin 1276^\circ$, $\sin(-3461^\circ)$, $\cos 2078^\circ$, $\cos(-3065^\circ)$;

2) $\sin(-1288^\circ)$, $\sin 2039^\circ$, $\cos 4742^\circ$, $\cos(-2105^\circ)$;

3) $\sin \frac{18\pi}{13}$, $\sin(-\frac{31\pi}{16})$, $\cos(-\frac{25\pi}{13})$, $\cos \frac{133\pi}{8}$;

4) $\sin \frac{37\pi}{9}$, $\sin(-\frac{17\pi}{13})$, $\cos \frac{14\pi}{11}$, $\cos(-\frac{12\pi}{5})$;

5) $\sin 3,14$, $\sin(-25)$, $\cos(-6,1)$, $\cos 99$;

6) $\sin(-2,5)$, $\sin 41$, $\cos 4,7$, $\cos(-81)$.

Вызначыце знак значэння выразу (2.62—2.63).

2.62. 1) $\cos(\pi + 2)$; 2) $\sin(\pi + 1)$; 3) $\sin(\pi - 2)$;
4) $\cos(\pi - 1)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)$;
7) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$.

2.63. 1) $\cos(-1250^\circ) \sin(-3390^\circ)$;
2) $\cos(-5431^\circ) \sin(-679^\circ)$;
3) $\sin 10 \cos 16 \cos 21$; 4) $\sin 11 \cos 22 \sin 33$;
5) $\frac{\sin 4 \cos 5}{\sin(-2)}$; 6) $\frac{\cos 4,1 \sin(-5,9)}{\cos 3,5}$.

2.64. Размясціце ў парадку спадання:

1) $\cos 3\pi$, $\cos 4\pi$, $\sin 3\pi$;
2) $\sin \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{2}$, $\cos \pi$;
3) $\cos \frac{33\pi}{2}$, $\cos 29\pi$, $\sin \frac{73\pi}{2}$;
4) $\sin 101\pi$, $\cos 223\pi$, $\sin \frac{33\pi}{2}$.

2.65. Пабудуйце вуглы α і β , што заканчваюцца ў розных чвэрцях, для кожнага з якіх:

1) косінус роўны $-\frac{2}{5}$; 2) косінус роўны $\frac{2}{3}$;
3) сінус роўны $\frac{3}{5}$; 4) сінус роўны $-\frac{3}{4}$.

2.66. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

1) $5 \sin \alpha$; 2) $-7 \cos \alpha$;
3) $-\cos \alpha + 2$; 4) $3 + \sin \alpha$;
5) $-\cos^2 \alpha - 8$; 6) $\sin^2 \alpha - 1$;
7) $-|\cos \alpha|$; 8) $|\sin \alpha|$;
9) $\frac{1}{4 + \sin \alpha}$; 10) $\frac{1}{5 - \cos \alpha}$.

2.67. Для якіх значэнняў α , што задавальняюць умову $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$, правільная няроўнасць:

- 1) $\sin \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha < 0$; 3) $\cos \alpha > 0$; 4) $\cos \alpha < 0$?

2.68. Для якіх значэнняў α , што задавальняюць умову $-\frac{13\pi}{6} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$, правільная няроўнасць:

- 1) $\sin \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha < 0$; 3) $\cos \alpha > 0$; 4) $\cos \alpha < 0$?

2.69. Ведаючы, што вугал α заканчваецца ў IV чвэрці, спрасціце выраз:

- 1) $|\cos \alpha| - \cos \alpha$; 2) $|\sin \alpha| + \sin \alpha$;
 3) $|\cos \alpha| + |\sin \alpha|$; 4) $|\cos \alpha| - |\sin \alpha|$;
 5) $(\sqrt{\cos^2 \alpha} - \sqrt{\sin^2 \alpha})(\cos \alpha + \sin \alpha)$;
 6) $(\sqrt{\cos^2 \alpha} + \sqrt{\sin^2 \alpha})(\cos \alpha - \sin \alpha)$.

2.6. Паняцце арксіноса і арккосінуса

Прыклад 1. Няхай

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Ці правільна, што:

а) калі $\sin \alpha = \sin \beta$, то $\alpha = \beta$;

б) калі $\cos \alpha = \cos \beta$, то $\alpha = \beta$?

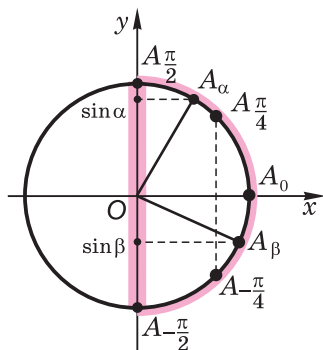
Рашэнне. а) Разгледзім вуглы α і β , што задавальняюць умову (1). Тады, калі $\alpha \neq \beta$, то $y_\alpha \neq y_\beta$ (рыс. 88), г. зн. калі $\alpha \neq \beta$, то $\sin \alpha \neq \sin \beta$. Значыць, калі $\sin \alpha = \sin \beta$, то $\alpha = \beta$.

б) Вуглы $-\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{4}$ задавальняюць умову (1). Пры гэтым

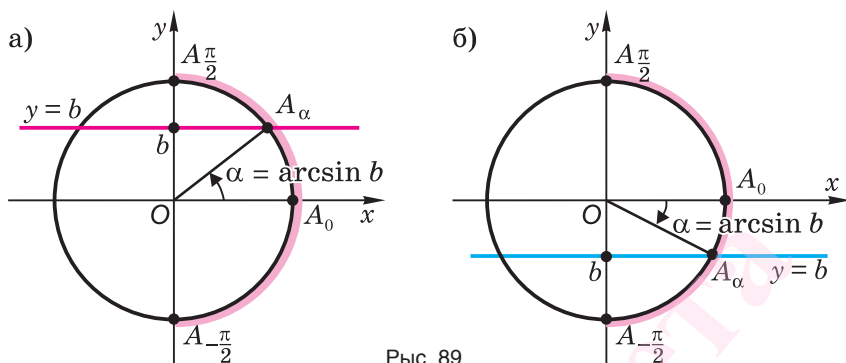
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}, \text{ а } -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}.$$

Адказ: а) Правільна; б) не.

Разгледзім выраз $\sin \alpha$. Мы ведаем, што ён можа прымаць кожнае значэнне b з адрэзка $[-1; 1]$, прычым такіх вуглоў α , што $\sin \alpha = b$, бяс-



Рыс. 88



Рыс. 89

конца многа. Аднак існуе адзіны вугал α такі, што $\sin \alpha = b$ і $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (рыс. 89; гл. таксама прыклад 1). Гэты вугал называецца **арксінусам ліку b** .

Азначэнне. Няхай $b \in [-1; 1]$. **Арксінусам ліку b** называецца вугал α такі, што

$$\sin \alpha = b \quad \text{і} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Арксінус ліку b абазначаецца $\arcsin b$. Такім чынам, $\arcsin b$ — гэта вугал, які задавальняе дзве ўмовы:

$$\sin(\arcsin b) = b \quad \text{і} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin b \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

А

Арк — гэта частка лацінскага слова *arcus*, якое ў перакладзе азначае «дуга», г. зн. $\arcsin 0,8$ — скачаны запіс фразы «дуга, сінус якой роўны 0,8».

Абзначэнне арксінуса — $\arcsin \alpha$, якое выкарыстоўваецца і сёння, увёў у 1772 г. французскі астраном, матэматык і механік Жазеф Луі Лагранж (1736—1813).

Прыклад 2. Ці правільна, што $\arcsin \frac{1}{2}$ роўны:

- а) $-\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$?

Рашэнне. Згодна з азначэннем арксінус ліку b — гэта вугал, які задавальняе ўмовы (2). А гэтыя ўмовы задавальняе толькі варыянт г), г. зн. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Адказ: а), б), в) не; г) правільна.

Прыклад 3. Няхай

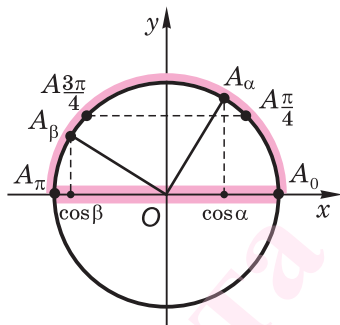
$$0 \leq \alpha \leq \pi \text{ і } 0 \leq \beta \leq \pi. \quad (3)$$

Ці правільна, што:

а) калі $\cos \alpha = \cos \beta$, то $\alpha = \beta$;

б) калі $\sin \alpha = \sin \beta$, то $\alpha = \beta$?

Рашэнне. Будзем разважаць, як у прыкладзе 1, і, выкарыстаўшы рысунак 90, атрымаем адказ: а) правільна; б) не.



Рыс. 90

Разгледзім выраз $\cos \alpha$. Мы ведаем, што ён можа прымаць кожнае значэнне b з адрэзка $[-1; 1]$, прычым такіх вуглоў α , што $\cos \alpha = b$, бясконца многа. Аднак існуе адзіны вугал α такі, што $\cos \alpha = b$ і $0 \leq \alpha \leq \pi$ (рыс. 91; гл. таксама прыклад 3). Гэты вугал называецца **арккосінусам ліку b** .

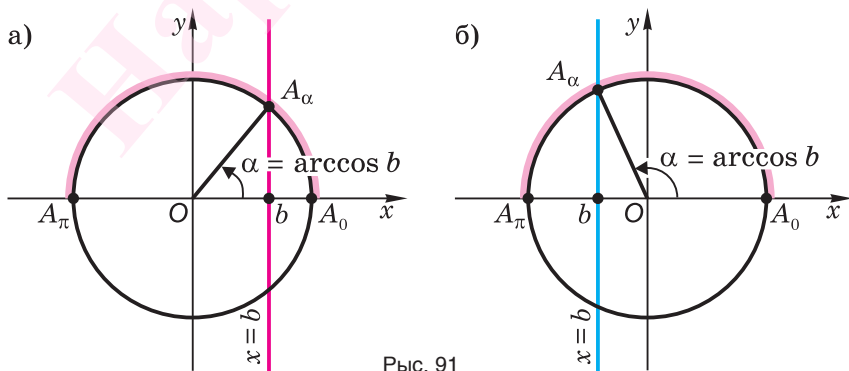
Азначэнне. Няхай $b \in [-1; 1]$. **Арккосінусам ліку b** называецца вугал α такі, што

$$\cos \alpha = b \quad \text{і} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Арккосінус ліку b абазначаецца $\arccos b$. Такім чынам, $\arccos b$ — гэта вугал, які задавальняе дзве ўмовы:

$$\cos(\arccos b) = b \quad \text{і} \quad 0 \leq \arccos b \leq \pi. \quad (4)$$

Заўвага. Для запісу значэнняў арксінуса і арккосінуса, як правіла, выкарыстоўваецца радыянная мера вугла. Але



Рыс. 91

можна, зразумела, умовы $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin b \leq \frac{\pi}{2}$ і $0 \leq \arccos b \leq \pi$ запісаць і так: $-90^\circ \leq \arcsin b \leq 90^\circ$ і $0^\circ \leq \arccos b \leq 180^\circ$.

Прыклад 4. Ці правільна, што $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ роўны:

- а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}$?

Рашэнне. Згодна з азначэннем арккосінуса ліку b — гэта вугал, які задавальняе ўмовы (4). Гэтыя ўмовы задавальняе толькі варыянт в), г. зн. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Адказ: а), б), г) не; в) правільна.

Прыклад 5. Даказаць тоеснасць:



- а) $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$;
б) $\arcsin(-b) = -\arcsin b$.

Доказ. а) Разгледзім вуглы ў левай і ў правай частках дадзенай роўнасці. Па-першае, гэтыя вуглы задавальняюць умову (3):

$$0 \leq \arccos(-b) \leq \pi; \quad 0 \leq \pi - \arccos b \leq \pi$$

(патлумачце чаму). Па-другое, косінусы гэтых вуглоў роўныя:

$$\cos(\arccos(-b)) = -b;$$

$$\cos(\pi - \arccos b) = -\cos(\arccos b) = -b.$$

Значыць, гэтыя вуглы роўныя (гл. прыклад 3, а). $\square$

б) Даказваецца аналагічна.

Прыклад 6. Знайсці значэнне выразу A , калі

$$A = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Рашэнне. Выкарыстаўшы тоеснасці з прыкладу 5, атрымаем: $A = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Адказ: $A = \frac{\pi}{2}$.

Прыклад 7. Знайсці значэнне выразу A , калі

$$A = \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Рашэнне. Няхай $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тады $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

Знойдзем $A = \sin \alpha$. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці маем: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Адкуль атрымліваем:

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Паколькі $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, то $\sin \alpha \geq 0$, значыць, $|\sin \alpha| = \sin \alpha$, г. зн. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Адказ: $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Прыклад 8. Знайсці значэнне выразу:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right)$; б) $\arcsin(\sin 4)$.

Рашэнне. а) $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$
 $= \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, паколькі $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$;

б) $\arcsin(\sin 4) = \arcsin(\sin(\pi - 4)) = \pi - 4$, паколькі $\pi - 4 \approx$
 $\approx 3,14 - 4 = -0,86$, г. зн. $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - 4 \leq \frac{\pi}{2}$ і $\sin(\pi - 4) = \sin 4$.

Адказ: а) $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin(\sin 4) = \pi - 4$.



1. Сфармулюйце азначэнне:

а) арксіноса ліку b ; б) арккосіноса ліку b .

2. Назавіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\arcsin x$; б) $\arccos x$.

3. Чаму:

а) $\arcsin(\sin 4) \neq 4$; б) $\arcsin(\sin(-1,3)) = -1,3$;

в) $\arccos(\cos 3) = 3$; г) $\arccos(\cos(-1,2)) \neq -1,2$?

Практыкаванні

2.70°. Запішыце роўнасць, раўназначную дадзенай, па ўзоры:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ раўназначна } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;

4) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$;

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\cos \pi = -1$;

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

2.71°. Запішыце роўнасць, раўназначную дадзенай, па ўзоры:

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ раўназначна $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
--

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

5) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$;

6) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

7) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

8) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2.72°. Пры якіх значэннях t мае сэнс выраз:

1) $\arcsin(t+1)$;

2) $\arccos(t+3)$;

3) $\arccos t^2$;

4) $\arcsin t^4$;

5) $\arcsin \sqrt{t+1}$;

6) $\arccos \sqrt{t-3}$?

Знайдзіце значэнне выразу (2.73—2.74).

2.73°. 1) $\arccos 0 + \frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin(-1) + \frac{5\pi}{2}$;

3) $\arcsin 1 + \frac{7\pi}{2}$;

4) $\arccos(-1) + \frac{3\pi}{4}$.

2.74°. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin(-1)$;

2) $\arccos(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arccos 0 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;

5) $3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos 1$;

6) $\arcsin(-1) + 2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \arccos(-1)$.

2.75°. Ці правільна, што:

- 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) = -\arcsin\frac{1}{4}$; 2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}$;
 3) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \arccos\frac{4}{5}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{4}{7}\right) = \arcsin\frac{4}{7}$?

2.76. Няхай $|b| \leq 1$. Спрасціце выраз:

- 1) $\arcsin(-b) + \arcsin b$; 2) $\arcsin(-b) - \arcsin b$;
 3) $\arccos(-b) - \arccos b$; 4) $\arccos b - \arccos(-b)$.

2.77. Параўнайце:

- 1) $\arcsin 1$ і $\arccos 1$;
 2) $\arcsin(-1)$ і $\arccos(-1)$;
 3) $\arccos 0$ і $\arcsin 1$;
 4) $\arccos(-1)$ і $\arcsin 0$;
 5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.78. Знайдзіце значэнне выразу $\arccos t + 2\pi - 3\arcsin t$ пры t , роўным:

- 1) -1 ; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$;
 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0 ; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знайдзіце значэнне выразу A (2.79—2.82).

- 2.79. 1) $A = \sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $A = \cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
 3) $A = \cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 4) $A = \sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;
 5) $A = \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $A = \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

- 2.80*. 1) $A = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $A = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $A = \arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $A = \arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;
 5) $A = \arccos(\cos 8\pi)$; 6) $A = \arccos(\cos 9\pi)$;
 7) $A = \arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; 8) $A = \arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$.

- 2.81*. 1) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)$; 2) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$;
 3) $A = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$; 4) $A = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$;
 5) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$; 6) $A = \arccos\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right)\right)$.
- 2.82*. 1) $A = \arcsin(\sin(-3))$; 2) $A = \arcsin(\sin 2)$;
 3) $A = \arcsin(\sin 12)$; 4) $A = \arcsin(\sin 11)$;
 5) $A = \arccos(\cos(-4,5))$; 6) $A = \arccos(\cos(-7,6))$.

2.7. Тангенс і катангенс адвольнага вугла

Азначэнне. Няхай $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса вугла α да косінуса таго ж вугла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

(Запіс $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, азначае, што радыянная мера вугла α не роўна $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ні пры якім цэлым n .)

Азначэнне. Няхай $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Катангенсам вугла α называецца адносіна косінуса вугла α да сінуса таго ж вугла α :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Для знаходжання значэнняў тангенсаў і катангенсаў вуглоў можна выкарыстоўваць адзінкавую акружнасць, табліцы, калькулятары і г. д.

Кожны вугал α можна запісаць у выглядзе

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ (гл. п. 2.3).}$$

Паколькі пункты A_α і A_φ на адзінкавай акружнасці супадаюць (патлумачце чаму), то правільныя роўнасці:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Такім чынам,

$$\operatorname{tg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{ctg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{ctg} \varphi,$$

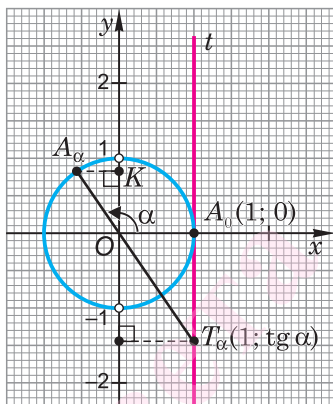
дзе $n \in \mathbb{Z}$.

Для ўсіх значэнняў α , для якіх вызначаны выразы $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, г. зн. для $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, правільная роўнасць

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Такім чынам, гэта роўнасць з'яўляецца тоеснасцю.

Правядзём праз пункт $A_0(1; 0)$ прамую t перпендыкулярна восі Ox . Яна будзе датычнай да адзінкавай акружнасці (рыс. 92). Гэта прамая t называецца *лініяй тангенсаў*. Калі $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то прамая OA_α перасякае лінію тангенсаў t у пункце T_α . Ардыната пункта T_α роўна $\operatorname{tg} \alpha$.



Рыс. 92

▲ Дакажыце, што ардыната пункта T_α роўна $\operatorname{tg} \alpha$ (выкарыстайце рысунак 92). ▲

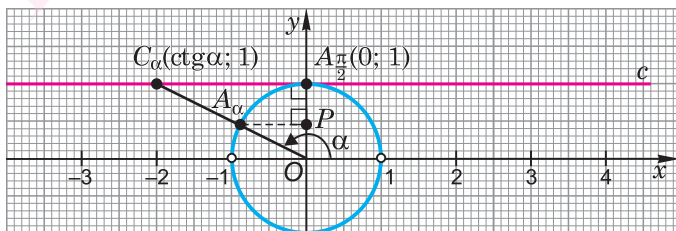
Пабудуем цяпер *лінію катангенсаў*. Праз пункт $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ правядзём прамую c перпендыкулярна восі Oy . Яна будзе датычнай да адзінкавай акружнасці (рыс. 93). Гэта прамая c і называецца *лініяй катангенсаў*. Калі $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то прамая OA_α перасякае лінію катангенсаў c у пункце C_α . Абсцыса пункта C_α роўна $\operatorname{ctg} \alpha$ (гл. рыс. 93).

▲ Дакажыце, што абсцыса пункта C_α роўна $\operatorname{ctg} \alpha$ (выкарыстайце рысунак 93). ▲

Разгледзім цяпер *уласцівасці тангенса і катангенса*.

1. Мноства значэнняў тангенса і катангенса

Выраз $\operatorname{tg} \alpha$ можа прымаць любыя значэнні з мноства $\mathbb{R}$. Сапраўды, для любога рэчаіснага ліку p існуе такі вугал α , што



Рыс. 93

$\operatorname{tg} \alpha = p$. Гэта можна паказаць, выкарыстаўшы лінію тангенсаў (пераканайцеся ў гэтым самастойна).

Такім чынам, мы высветлілі, што *мноствам значэнняў выразу $\operatorname{tg} \alpha$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў R* .

Значыць, *выраз $\operatorname{tg} \alpha$ не мае ні найбольшага, ні найменшага значэнняў*.

Аналагічныя сцверджанні правільныя для выразу $\operatorname{ctg} \alpha$ (правядзіце разважанні самастойна).

2. Нулі тангенса і катангенса

Відавочна, што $\operatorname{tg} \alpha = 0$, калі $\sin \alpha = 0$, г. зн. пры $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значэнні $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, з'яўляюцца нулямі тангенса.

Аналагічна высвятляецца, што *значэнні $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, — нулі катангенса* (патлумачце чаму).

3. Прамежкі знакапастаянства тангенса і катангенса

Выкарыстаўшы азначэнне тангенса і знакі значэнняў выразу $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, можна вызначыць знакі значэнняў выразу $\operatorname{tg} \alpha$. Напрыклад, калі $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$, значыць, $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Можна вызначыць знакі значэнняў выразу $\operatorname{tg} \alpha$ і пры дапамозе лініі тангенса (пераканайцеся ў гэтым).

Аналагічнымі спосабамі вызначаюць і знакі значэнняў выразу $\operatorname{ctg} \alpha$. На рысунку 94 паказаны знакі значэнняў тангенса і катангенса α у залежнасці ад таго, у якой чвэрці заканчваецца вугал α .

Такім чынам,



калі вугал α заканчваецца ў I або III чвэрці, г. зн.

$\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{tg} \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$;

калі вугал α заканчваецца ў II або IV чвэрці, г. зн.

$\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha < 0$.

Такім чынам, мы вызначылі *прамежкі знакапастаянства тангенса і катангенса*.

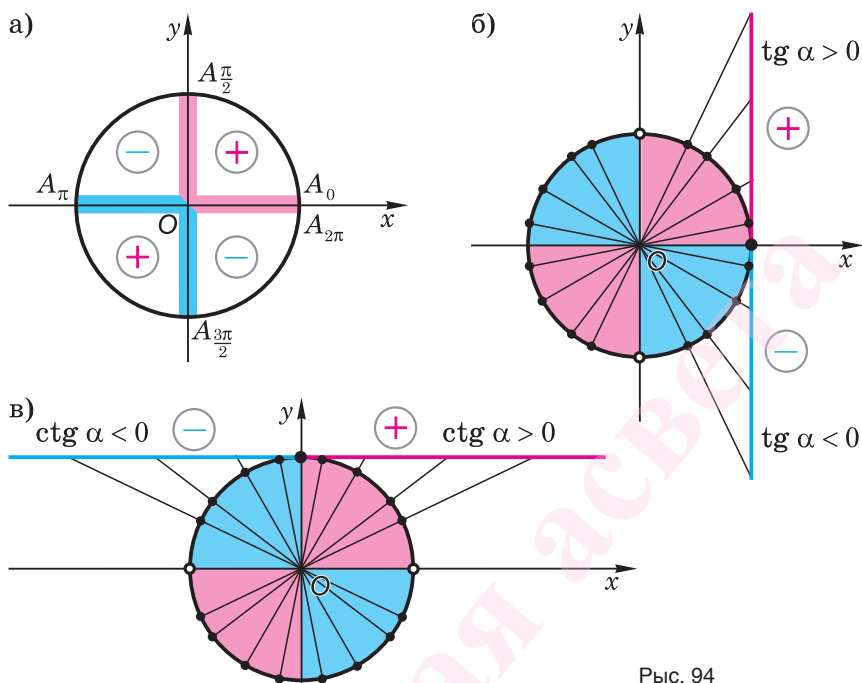


Рис. 94

Прыклад 1. Даказаць тоеснасць:

- а) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;
 в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; г) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;
 д) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$; е) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$.

Доказ. а) Па азначэнні тангенса

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha. \quad \square$$

б)–е) Доказы аналагічны доказу для выпадку а), выканайце іх самастойна.

Прыклад 2. Параўнаць з нулём значэнне выразу:

- а) $\operatorname{tg}(-3986^\circ)$; б) $\operatorname{ctg} 10$.

Рашэнне. а) $\operatorname{tg}(-3986^\circ) = \operatorname{tg}(360^\circ \cdot (-12) + 334^\circ) = \operatorname{tg} 334^\circ < 0$.

б) Паколькі $10 = 2\pi + \varphi$, адкуль $\varphi = 10 - 2\pi \approx 10 - 6,28 = 3,72$, то вугал φ належыць III чвэрці.

Такім чынам, $\operatorname{ctg} 10 = \operatorname{ctg}(2\pi + \varphi) = \operatorname{ctg} \varphi \approx \operatorname{ctg} 3,72 > 0$.

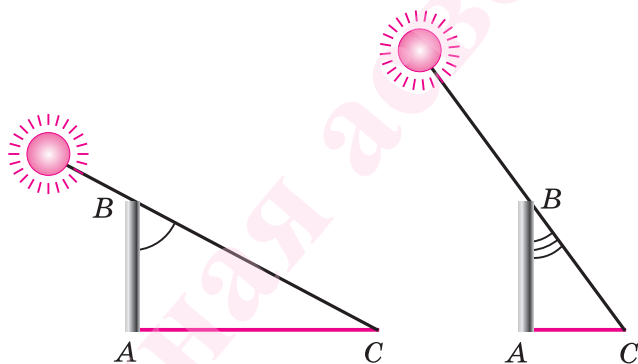
Адказ: а) $\operatorname{tg}(-3986^\circ) < 0$; б) $\operatorname{ctg} 10 > 0$.

Прыклад 3. Даказаць, што значэнні выказаў $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ не могуць быць адначасова большымі за адзінку.

Доказ. Калі $\operatorname{tg} \alpha > 1$, то $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} < 1$. $\square$

А

У IX ст. арабскі астраном і матэматык аль-Батані ўвёў новую трыганаметрычную велічыню, якую назваў «ценем». Ён разглядаў велічыню адносіны вышыні прадмета да даўжыні ценю ад гэтага прадмета пры рознай вышыні сонца (рыс. 95). Такім чынам, аль-Батані, па сутнасці, увёў у трыганаметрыю паняцце «тангенс».



Рыс. 95

Сучаснае азначэнне тангенса і яго абазначэнне $\operatorname{tg} \alpha$ у 1753 г. увёў Леанард Эйлер.

Лацінскае слова *tangens* азначае «датычная».

?

1. Дакажыце тоеснасць $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
2. Назавіце прамежкі знакапастаянства тангенса (катангенса). Адказ абгрунтуйце.
3. Чаму пры любым значэнні $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, знакі $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ аднолькавыя?
4. Назавіце нулі тангенса (катангенса).
5. Ці правільна, што $\operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg}(-\alpha) = -1$?
6. Запішыце тоеснасці в) — е) з прыкладу 1, выкарыстаўшы градусную меру вугла.
- 7*. Дакажыце, што значэнне тангенса (катангенса) можа быць любым рэчаісным лікам.

Практыкаванні

2.83°. Ці могуць сінус, косінус і тангенс аднаго і таго ж вугла α мець наступныя значэнні:

1) $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$;

2) $\sin \alpha = \frac{7}{11}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5\sqrt{3}}$;

3) $\sin \alpha = \frac{8}{9}$, $\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}}$;

4) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$?

2.84°. Ці правільна, што:

1) $\operatorname{ctg}(-\alpha) : (-\operatorname{ctg} \alpha) = 1$;

2) $\operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg} \alpha = 0$;

3) $\operatorname{tg}(-\alpha) - \operatorname{tg} \alpha = 0$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha) : (-\operatorname{tg} \alpha) = -1$?

2.85°. Выкарыстаўшы тоеснасці выгляду $\operatorname{tg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{tg} \varphi$, дзе $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ і рысункі 92, 93, знайдзіце прыбліжаныя значэнні $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ пры α , роўным:

1) 230° , -220° , -1040° ;

2) 210° , -295° , -1030° ;

3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{74\pi}{3}$;

4) $\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{44\pi}{3}$, $-\frac{19\pi}{8}$.

2.86°. У якой чвэрці заканчваецца вугал α , калі:

1) $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha < 0$;

2) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha > 0$;

3) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha < 0$;

4) $\cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha > 0$;

5) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha > 0$;

6) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha < 0$?

2.87°. Вызначыце знак значэння выразу, калі $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.88°. Ці правільна, што:

1) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$?

Вызначыце знак значэння выразу (**2.89—2.90**).

2.89. 1) $\operatorname{tg}(-340^\circ) \operatorname{ctg} 156^\circ$;

2) $\operatorname{ctg} 103^\circ \operatorname{ctg}(-304^\circ)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right) \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$;

4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{15\pi}{7}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$;

5) $\operatorname{ctg}(-1) \operatorname{tg}(-2) \operatorname{ctg} 3$;

6) $\operatorname{tg}(-4) \operatorname{ctg} 2 \operatorname{tg}(-5)$.

2.90. 1) $-\operatorname{tg} 189^\circ - \operatorname{tg} 269^\circ$;

2) $-\operatorname{ctg} 85^\circ - \operatorname{ctg} 295^\circ$;

3) $\operatorname{tg} 5 - \operatorname{ctg} 5$;

4) $\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 3$;

5) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} - \operatorname{tg} \frac{25\pi}{18}$;

6) $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{15} - \operatorname{tg} \frac{49\pi}{45}$.

2.91°. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

2.92. Ведаючы, што $\operatorname{tg} \beta = m$ і $m \neq 0$, знайдзіце значэнне выразу:

1) $1 - \operatorname{ctg}(-\beta)$;

2) $1 - \operatorname{tg}(-\beta)$;

3) $1 - \operatorname{tg}(2\pi - \beta)$;

4) $1 - \operatorname{ctg}(\beta - 2\pi)$.

2.93. Вядома, што $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Спрасціце выраз:

1) $|\operatorname{tg} \alpha| + \operatorname{tg} \alpha$;

2) $|\operatorname{ctg} \alpha| + \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| + \operatorname{ctg}(-\alpha)$;

4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| + \operatorname{tg}(-\alpha)$;

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1$;

6) $\operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - 1$.

2.94. Рашыце ўраўненне:

1) $\operatorname{tg} t = 0$;

2) $\operatorname{ctg} t = 0$;

3) $\operatorname{tg}(4t - 2) = 0$;

4) $\operatorname{tg}(3t + 4) = 0$;

5) $\operatorname{ctg}(0,1t + 6) = 0$;

6) $\operatorname{ctg}(2t - 5) = 0$.

2.95. Пры якіх значэннях t не мае сэнсу выраз:

1) $\operatorname{tg}\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} 5t}$;

4) $\frac{\sqrt{6}}{\operatorname{ctg}(-t)}$;

5) $\frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{3t}{4} + 3\right)}$;

6) $\frac{2\pi + 6}{\operatorname{ctg}\left(6t - \frac{5\pi}{6}\right)}$?

2.96. Спрасціце выраз:

1) $\sin \alpha \operatorname{ctg}(-\alpha) - \cos(-\alpha)$;

2) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - \sin(-\alpha)$;

3) $\cos^2(-\alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2(-\alpha)$;

4) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg}(-\alpha)$;

5) $(\operatorname{tg}(-\alpha) + \operatorname{tg}(-\beta)) : (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$;

6) $(1 + \operatorname{tg}^4(-\alpha)) : (\operatorname{tg}^2(-\alpha) + \operatorname{ctg}^2(-\alpha))$.

2.97. Няхай $b \in \mathbf{R}$. Пабудуйце вугал α такі, што $\operatorname{tg} \alpha = b$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, калі b роўна:

1) 0,2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-2\frac{1}{2}$; 4) 5,5.

2.98. Няхай $b \in \mathbf{R}$. Пабудуйце вугал α такі, што $\operatorname{ctg} \alpha = b$, $0 < \alpha < \pi$, калі b роўна:

1) 0,4; 2) $-\frac{5}{6}$; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) 4,3.

2.99*. Дакажыце, што значэнне выразу $\operatorname{tg} \alpha$ можа быць:

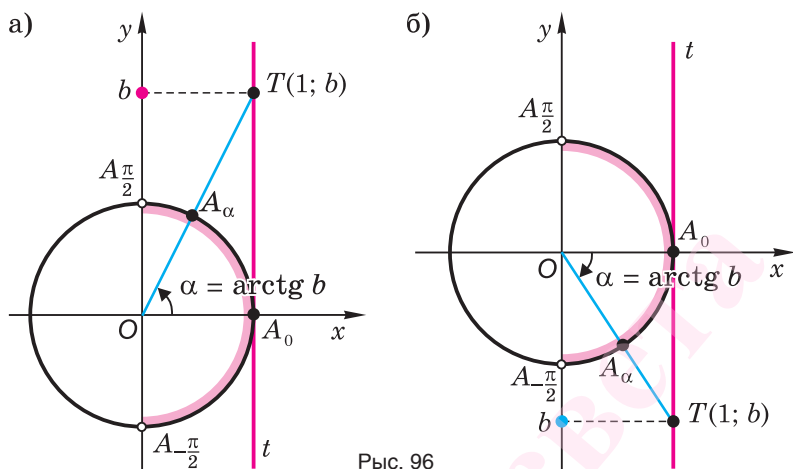
1) большым за 7; 2) меншым за -4;
3) меншым за -10; 4) большым за 11.

2.8. Паняцце арктангенса і арккатангенса

Разгледзім выраз $\operatorname{tg} \alpha$. Мы ведаем, што ён можа прымаць любое рэчаіснае значэнне b , прычым такіх вуглоў α , што $\operatorname{tg} \alpha = b$, бясконца многа. Аднак існуе адзіны вугал α такі, што $\operatorname{tg} \alpha = b$ і $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($b > 0$ на рысунку 96, а; $b < 0$ на рысунку 96, б). Гэты вугал называецца *арктангенсам ліку b* .

Азначэнне. Няхай $b \in \mathbf{R}$. *Арктангенсам ліку b называецца вугал α такі, што*

$$\operatorname{tg} \alpha = b \quad \text{і} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$



Рыс. 96

Арктангенс ліку b абазначаецца $\arctg b$. Такім чынам, $\arctg b$ — гэта вугал, які задавальняе дзве ўмовы:

$$\operatorname{tg}(\arctg b) = b \quad \text{і} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg b < \frac{\pi}{2}.$$

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу A , калі:

а) $A = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $A = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arctg 1 + \arctg \sqrt{3}$.

Рашэнне. а) $A = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, паколькі $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

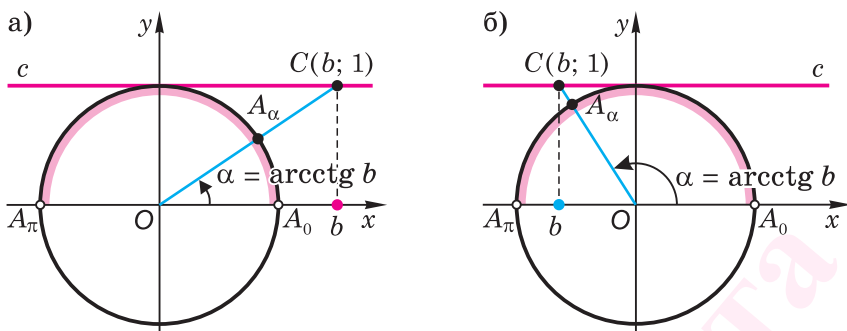
б) $A = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi + 3\pi + 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ (патлумачце чаму).

Адказ: а) $A = -\frac{\pi}{6}$; б) $A = \frac{5\pi}{12}$.

Разгледзім выраз $\operatorname{ctg} \alpha$. Мы ведаем, што ён можа прымаць любое рэчаіснае значэнне b , прычым такіх вуглоў α , што $\operatorname{ctg} \alpha = b$, бясконца многа. Аднак існуе адзіны вугал α такі, што $\operatorname{ctg} \alpha = b$ і $0 < \alpha < \pi$ ($b > 0$ на рысунку 97, а; $b < 0$ на рысунку 97, б). Гэты вугал называецца **арккатангенсам ліку b** .

Азначэнне. Няхай $b \in \mathbb{R}$. **Арккатангенсам ліку b** называецца вугал α такі, што

$$\operatorname{ctg} \alpha = b \quad \text{і} \quad 0 < \alpha < \pi.$$



Рыс. 97

Арккатангенс ліку b абазначаецца $\text{arcctg } b$. Такім чынам, $\text{arcctg } b$ — гэта вугал, які задавальняе дзве ўмовы:

$$\text{ctg}(\text{arcctg } b) = b \quad \text{і} \quad 0 < \text{arcctg } b < \pi.$$

Прыклад 2. Знайсці значэнне выразу A , калі:

$$\text{а) } A = \text{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \quad \text{б) } A = \text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

Рашэнне. а) $A = \frac{2\pi}{3}$, паколькі $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$ і $\text{ctg } \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{б) } A = \frac{5\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi - 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ (патлумачце чаму).}$$

$$\text{Адказ: а) } A = \frac{2\pi}{3}; \quad \text{б) } A = \frac{\pi}{2}.$$

Прыклад 3. Знайсці значэнне выразу A , калі:

$$\text{а) } A = \text{ctg}(\text{arctg } 3); \quad \text{б) } A = \text{tg}(\text{arcctg } 7) + \text{ctg}\left(\text{arcctg } \frac{6}{7}\right).$$

Рашэнне. а) Няхай $\text{arctg } 3 = \alpha$, тады $\text{tg } \alpha = 3$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Знойдзем значэнне A :

$$A = \text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{1}{3}.$$

б) Няхай $\text{arcctg } 7 = \alpha$, $\text{arcctg } \frac{6}{7} = \beta$, тады $\text{ctg } \alpha = 7$, $\text{ctg } \beta = \frac{6}{7}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ (патлумачце гэтыя няроўнасці). Знойдзем значэнне A :

$$A = \text{tg } \alpha + \text{ctg } \beta = \frac{1}{\text{ctg } \alpha} + \text{ctg } \beta = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1.$$

$$\text{Адказ: а) } A = \frac{1}{3}; \quad \text{б) } A = 1.$$

Прыклад 4. Даказаць тоеснасць:



- а) $\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$;
 б) $\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$.

Доказ. а) Разгледзім вуглы, што стаяць у левай і ў правай частках дадзенай роўнасці. Па-першае, гэтыя вуглы задавальняюць умову:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-b) < \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}$$

(патлумачце чаму). Па-другое, тангенсы гэтых вуглоў роўныя:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-b)) &= -b; \\ \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} b) &= -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = -b. \end{aligned}$$

Значыць, гэтыя вуглы роўныя (гл. рыс. 96). $\square$

б) Доказ аналагічны доказу выпадку а).



1. Сфармулюйце азначэнне:
 - а) арктангенса ліку b ;
 - б) арккатангенса ліку b .
2. Назавіце абсяг вызначэння выразу:
 - а) $\operatorname{arctg} x$;
 - б) $\operatorname{arcctg} x$.
3. Чаму:
 - а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10) \neq 10$;
 - б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-0,7)) = -0,7$;
 - в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 2) = 2$;
 - г) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4)) \neq -4$?

Практыкаванні

2.100°. Запішыце роўнасць, раўназначную дадзенай, па ўзоры:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \text{ раўназначна } \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

- 1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;
- 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 3) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$;
- 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;
- 5) $\operatorname{tg} 0 = 0$;
- 6) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- 7) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$;
- 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.101°. Запішыце роўнасць, раўназначную дадзенай, па ўзоры:

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \text{ раўназначна } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1.$$

- 1) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$;
 5) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

2.102°. Ці правільна, што:

- 1) $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{2}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$;
 3) $\operatorname{arctg}(-7) = \operatorname{arctg} 7$; 4) $\operatorname{arctg}(-10) = \operatorname{arctg} 10$?

2.103°. Знайдзіце значэнне выразу A , калі:

- 1) $A = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 + 3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 2) $A = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
 3) $A = \operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-1)$;
 4) $A = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg} 0$;
 5) $A = \operatorname{tg}\left(\arccos 1 - 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;
 6) $A = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 1 + 3\operatorname{arctg} 0 + \arcsin(-1))$.

2.104. Параўнайце значэнні выразаў:

- 1) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ і $\operatorname{arctg} 1$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;
 3) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\operatorname{arctg}(-1)$;
 4) $\operatorname{arctg} 0$ і $\operatorname{arctg}(-1)$;
 5) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ і $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;
 6) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ і $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.105. Знайдзіце значэнне выразу A , калі:

- 1) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3, 7)$; 2) $A = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 9, 2)$;
 3) $A = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{5}\right)\right)$; 4) $A = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{8}\right)\right)$;
 5) $A = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$; 6) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-5))$.

2.106. Знайдзіце значэнне выразу A , калі:

- 1) $A = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2)) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-3))$;
 2) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-5)) - \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$.

2.107*. Знайдзіце значэнне выразу A , калі:

- | | |
|--|--|
| 1) $A = \arctg\left(\tg \frac{13\pi}{8}\right);$ | 2) $A = \arctg\left(\tg \frac{15\pi}{7}\right);$ |
| 3) $A = \arctg\left(\tg\left(-\frac{9\pi}{5}\right)\right);$ | 4) $A = \arctg\left(\tg\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right);$ |
| 5) $A = \text{arcctg}\left(\ctg \frac{13\pi}{8}\right);$ | 6) $A = \text{arcctg}\left(\ctg \frac{12\pi}{5}\right).$ |

2.9. Суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катангенсам аднаго і таго ж вугла

Разгледзім асноўную трыганаметрычную тоеснасць

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Ведаючы, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , і ведаючы значэнне $\sin \alpha$, з гэтай тоеснасці можна знайсці значэнне $\cos \alpha$, паколькі $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. І наадварот, ведаючы значэнне $\cos \alpha$, можна знайсці значэнне $\sin \alpha$, паколькі $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Напрыклад, калі вугал α заканчваецца ў IV чвэрці, то атрымаем:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

(патлумачце чаму).

Калі $\cos \alpha \neq 0$, то, падзяліўшы абедзве часткі тоеснасці (1) на $\cos^2 \alpha$, атрымаем $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, г. зн. новую тоеснасць

$$1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

якая выяўляе сувязь паміж косінусам і тангенсам аднаго і таго ж вугла. Калі вядома, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , то гэтая тоеснасць дазваляе па значэнні $\tg \alpha$ знаходзіць значэнне $\cos \alpha$ і наадварот.

Калі $\sin \alpha \neq 0$, то, падзяліўшы абедзве часткі тоеснасці (1) на $\sin^2 \alpha$, атрымаем $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, г. зн. тоеснасць

$$1 + \ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

якая выяўляе сувязь паміж сінусам і катангенсам аднаго і таго ж вугла.

Ведаючы значэнні $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, можна знайсці значэнні $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

З тоеснасці $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ маем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Такім чынам, калі вядома, у якой чвэрці заканчваецца вугал α , то, выкарыстоўваючы атрыманыя тоеснасці, можна па значэнні аднаго з выказаў $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ або $\operatorname{ctg} \alpha$ знаходзіць значэнні трох астатніх.

Прыклад 1. Знайсці $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$, калі $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Рашэнне. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці маем $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Адсюль атрымаем $|\cos \alpha| = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Паколькі $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (вугал α належыць II чвэрці), то $\cos \alpha < 0$, значыць, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Па азначэннях тангенса і катангенса маем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Адказ: $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -2\sqrt{2}$.

Прыклад 2. Знайсці $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, калі $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Рашэнне. Маем: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 7$;

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{49} = \frac{50}{49}.$$

Такім чынам, $\cos^2 \alpha = \frac{49}{50}$, адкуль $|\cos \alpha| = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Паколькі вугал α належыць III чвэрці, то $\cos \alpha < 0$, значыць, $\cos \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Знаходзім $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{49}{50} = \frac{1}{50}$, адкуль атрымліваем $|\sin \alpha| = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Паколькі вугал α належыць III чвэрці, то $\sin \alpha < 0$, значыць, $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Адказ: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\cos \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{ctg} \alpha = 7$.

▲ **Прыклад 3.** Знайсці значэнне выразу A , калі:

а) $A = \cos\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; б) $A = \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; в) $A = \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$.

Рашэнне. Няхай $\arcsin \frac{1}{3} = \alpha$, тады $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, значыць, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$. Такім чынам:

а) $A = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

б) $A = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

в) $A = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{2}$.

Адказ: а) $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $A = 2\sqrt{2}$.

Прыклад 4. Знайсці значэнне выразу A , калі:

а) $A = \sin(\operatorname{arctg} 7)$; б) $A = \cos(\operatorname{arctg} 7)$; в) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7)$.

Рашэнне. Няхай $\operatorname{arctg} 7 = \alpha$, тады $\operatorname{ctg} \alpha = 7$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, значыць, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ і $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Такім чынам:

а) $A = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$;

б) $A = \cos \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$;

в) $A = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{7}$.

Адказ: а) $A = \frac{\sqrt{2}}{10}$; б) $A = \frac{7\sqrt{2}}{10}$; в) $A = \frac{1}{7}$. ▲



1. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$;

б) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

в) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

2. Як выразіць $|\sin \alpha|$ праз: а) $\cos \alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$; в) $\operatorname{ctg} \alpha$?

3. Як выразіць $|\cos \alpha|$ праз: а) $\sin \alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$; в) $\operatorname{ctg} \alpha$?

4. Што трэба ведаць, каб з асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці выразіць $\sin \alpha$ праз $\cos \alpha$?

Практыкаванні

2.108°. Па дадзеным значэнні аднаго з выказаў $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{ctg} \beta$ знайдзіце значэнні трох астатніх, калі $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$:

- 1) $\sin \beta = 0,8$; 2) $\sin \beta = \frac{1}{3}$; 3) $\cos \beta = -\frac{1}{4}$;
 4) $\cos \beta = -\frac{40}{41}$; 5) $\operatorname{tg} \beta = -3$; 6) $\operatorname{tg} \beta = -2$;
 7) $\operatorname{ctg} \beta = -2,4$; 8) $\operatorname{ctg} \beta = -0,5$.

2.109°. Па дадзеным значэнні аднаго з выказаў $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ знайдзіце значэнні трох астатніх:

- 1) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
 3) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\cos \alpha = -\frac{84}{85}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 5) $\operatorname{ctg} \alpha = -0,4$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
 6) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{8}{15}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Спрасціце выраз (2.110—2.111).

- 2.110°.** 1) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \alpha - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
 3) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos \alpha$; 4) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha$;
 5) $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \cos \alpha$; 6) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + \sin \alpha$;
 7) $\cos^2 \alpha - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha$;
 8) $(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

- 2.111°.** 1) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha}$; 2) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha - 1}$;
 3) $\frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$; 4) $\frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$;
 5) $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha}$; 6) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}$;
 7) $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha}$; 8) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

2.112. Знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\frac{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ пры $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

- 2) $\frac{2\sin\alpha \cos\alpha + 1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ пры $\alpha = \frac{\pi}{6}$;
 3) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$ пры $\alpha = \frac{\pi}{4}$;
 4) $\operatorname{ctg}^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha$ пры $\alpha = \frac{\pi}{3}$;
 5) $\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ пры $\alpha = -\frac{\pi}{3}$;
 6) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$ пры $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Спрасціце выраз (2.113—2.114).

2.113. 1) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$; 2) $\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

3) $\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \sin\alpha \cos\alpha - \cos^2\alpha$;

4) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \sin\alpha \cos\alpha - \sin^2\alpha$;

5)* $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha$;

6)* $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \sin\alpha + 1$.

2.114. 1) $\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, калі $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, калі $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

3) $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, калі $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

4) $\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$, калі $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2.115. Дакажыце тоеснасць:

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cos^2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

5) $\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} : \frac{1 + \frac{1}{\cos\alpha}}{1 + \frac{1}{\sin\alpha}} = \operatorname{ctg}^3\alpha$;

6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2.116. Знайдзіце (калі магчыма) найбольшае і найменшае значэнні выразу:

- | | |
|---|---|
| 1) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$; | 2) $\sin^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; |
| 3) $1 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$; | 4) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1$; |
| 5) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} + 3 \cos \alpha \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; | |
| 6) $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} - 5 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$. | |

Рашыце ўраўненне (2.117—2.118).

- 2.117.**
- | | |
|---|---|
| 1) $\cos 3x \cos(-2x) = 0$; | 2) $\sin 4x \sin(-5x) = 0$; |
| 3) $\sin(-3x) \cos(-6x) = 0$; | 4) $\sin(-2x) \cos(-5x) = 0$; |
| 5) $\sin^2 x - \sin x = 0$; | 6) $\cos^2 x + \cos x = 0$; |
| 7) $\operatorname{tg}(-3x) \operatorname{ctg} 2x = 0$; | 8) $\operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg}(-8x) = 0$. |
- 2.118.**
- 1) $\sin^2 x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \cos 2x = 0$;
 - 2) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin 4x = 0$;
 - 3) $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - \sin \frac{x}{2} = 1$;
 - 4) $\cos \frac{3x}{4} + \frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x = 1$.

2.10. Формулы прывядзення

Тэарэма. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad (1)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad (2)$$

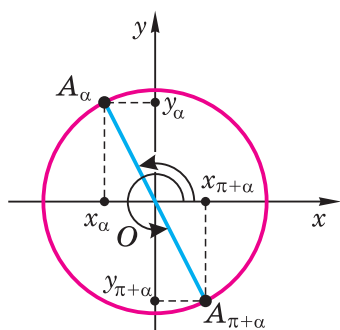
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (4)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (5)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad (6)$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha. \quad (7)$$



Рыс. 98

Тоеснасці (1)—(7) называюць **формуламі прывядзення**.

Доказ. Трэба даказаць, што кожная з роўнасцей (1)—(7) з'яўляецца тоеснасцю.

Для роўнасцей (1) і (7) гэта было даказана ў прыкладзе 4 пункта 2.4, паколькі $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha)$ і $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$. Тое, што роўнасці (2) з'яўляюцца тоеснасцямі, даказваецца аналагічна.

Сапраўды, пункты адзінкавай акружнасці A_α і $A_{\pi+\alpha}$ (рыс. 98) пры любым α сіметрычныя адносна пачатку каардынат. Значыць,

$$y_{\pi+\alpha} = -y_\alpha \quad \text{і} \quad x_{\pi+\alpha} = -x_\alpha.$$

Па азначэнні сінуса і косінуса маем:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{і} \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Формулы (3) былі даказаны ў п. 2.1 для вострага вугла α . Лічачы іх правільнымі для любых значэнняў α (гэта будзе даказана ў п. 2.11), выкарыстаўшы формулы (1), (2) і (7), можна абгрунтаваць і формулы (4)—(6).

Напрыклад,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) =$$

$$\downarrow \text{ па формуле прывядзення (7) для сінуса маем } \downarrow$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\downarrow \text{ па формуле прывядзення (3) для сінуса атрымаем } \downarrow$$

$$= -\cos \alpha. \quad \square$$

Правядзіце доказ астатніх формул самастойна.

У п. 2.4 было паказана, што вылічэнне значэння трыганаметрычнага выразу для любога вугла можна звесці (*прывесці*) да вылічэння яго значэння для вугла ў межах ад 0 да 2π . **Формулы прывядзення** (1)—(7) дазваляюць абмежавацца пры вылічэннях нават вугламі α з I чвэрці.

Заўвага. Любая з формул прывядзення можа быць запісана і для градуснай меры вугла. Напрыклад, формулы (5) можна запісаць у выглядзе

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{і} \quad \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha.$$

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу $A = \cos \frac{183\pi}{4}$.

Рашэнне.

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{183\pi}{4} = \cos \left(45\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \left(2\pi \cdot 22 + \pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \\ &= \cos \left(\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \\ \downarrow \text{ па формуле прывядзення (2) для косінуса атрымаем } \downarrow \\ &= -\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ \downarrow \text{ па формуле прывядзення (4) для косінуса маем } \downarrow \\ &= -(-\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Адказ: $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Формулы прывядзення для тангенса і катангенса з'яўляюцца вынікамі формул прывядзення (1)–(7). Напрыклад,

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Калі запісаць усе формулы прывядзення для чатырох трыганаметрычных выказаў (сінуса, косінуса, тангенса і катангенса), то атрымаецца 28 формул (гл. форзац II).

Звярніце ўвагу, што ў адной формуле прывядзення прысутнічаюць *або аднолькавыя трыганаметрычныя выразы, або падобныя па гучанні выразы*: сінус і косінус, тангенс і катангенс.

Каб выкарыстоўваць формулы прывядзення без іх завучвання, карысна ведаць два *мнеманічныя правілы*¹ (у далейшым будзем называць іх *правіламі формул прывядзення*).

1) **Правіла знака:** у правай частцы формулы ставіцца той знак, які мае значэнне выразу ў левай частцы пры ўмове, што вугал α належыць I чвэрці.

¹ Правілы, якія палягчаюць запамінанне, называюцца *мнеманічнымі*. Мнемазіна — багіня памяці ў грэчаскай міфалогіі.

2) Правіла назвай:

калі ў левай частцы формулы вугал роўны $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то назва «сінус» змяняецца на «косінус», «тангенс» — на «катангенс» і наадварот;

калі вугал роўны $\pi \pm \alpha$ або $2\pi - \alpha$, то назва выразу захоўваецца.

Напрыклад, запісваючы формулу прывядзення для выразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, робяць наступнае:

1) у правай частцы формулы ставяць знак «-», паколькі значэнне выразу ў левай частцы — адмоўнае ($\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) < 0$);

2) назву выразу змяняюць на «косінус», паколькі вугал у левай частцы формулы роўны $\frac{3\pi}{2} + \alpha$.

Такім чынам, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$.

Прыклад 2. Даказаць тоеснасць

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2(\pi + \alpha)\right)}{\sin(2\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

Доказ. Няхай A — левая частка роўнасці, а B — правая. Пераўтвораем іх па чарзе, выкарыстаўшы адпаведныя формулы прывядзення:

$$A = \frac{\cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad B = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Паколькі A і B тоесна роўны аднаму і таму ж выразу, то дадзеная ва ўмове роўнасць з'яўляецца тоеснасцю. $\square$

Прыклад 3. Знайсці значэнне выразу A , калі

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Рашэнне. Няхай $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тады $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, г. зн. α належыць II чвэрці. Значыць,

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Адказ: $A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

А

У XIII ст. Насірэдзін Тусі — вучоны-энцыклапедыст з іранскага горада Тусі (тэрыторыя цяперашняга Азербайджана) — стварыў абсерваторыю. У сувязі з астранамічнымі даследаваннямі ён упершыню разгледзеў трыганаметрыю як асобы раздзел матэматыкі. У працах Тусі сустракаюцца і алгебраічныя суадносіны паміж трыганаметрычнымі выразамі.

?

1. Пры дапамозе якіх формул вылічэнне значэнняў $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ і $\operatorname{ctg} t$ для адвольнага вугла t можна замяніць вылічэннем $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$ і $\operatorname{ctg} \varphi$, дзе $0 < \varphi < 2\pi$?
2. Запішыце формулы прывядзення для **сіноса** (косінуса, тангенса, катангенса) вуглоў $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$.
3. Сфармулюйце правілы формул прывядзення.

Практыкаванні

Ці з'яўляецца роўнасць тоеснасцю (2.119—2.121)?

2.119°. 1) $\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$; 2) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$;

3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; 4) $\sin(270^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

2.120°. 1) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$; 4) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$.

2.121°. 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$.

2.122°. Замяніце выраз тоесна роўным яму (з вуглом α), выкарыстаўшы формулы прывядзення:

1) $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)$;

3) $\sin(3\pi + \alpha)$; 4) $\cos(3\pi - \alpha)$;

5) $\sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$;

9) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$.

Знайдзіце значэнне выразу (2.123—2.126).

- 2.123°.** 1) $\sin 330^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$;
 4) $\operatorname{ctg} 225^\circ$; 5) $\sin(-510^\circ)$; 6) $\cos(-570^\circ)$;
 7) $\operatorname{tg}(-480^\circ)$; 8) $\operatorname{ctg}(-585^\circ)$; 9) $\sin 3915^\circ$;
 10) $\cos 4110^\circ$; 11) $\operatorname{tg} 3570^\circ$; 12) $\operatorname{ctg} 4560^\circ$.

- 2.124°.** 1) $\sin \frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos \frac{5\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$;
 4) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$; 5) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 9) $\sin \frac{21\pi}{4}$;
 10) $\cos \frac{23\pi}{6}$; 11) $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{3}$; 12) $\operatorname{ctg} \frac{29\pi}{3}$.

- 2.125.** 1) $6\sin \frac{5\pi}{6} + 2\cos \frac{5\pi}{3}$; 2) $3\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$;
 3) $3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos \frac{14\pi}{3}$; 4) $2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - 4\sin \frac{19\pi}{3}$;
 5) $\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$;
 6) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$.

- 2.126.** 1) $\operatorname{tg} 930^\circ - \sin(-1110^\circ) + \cos(-1470^\circ)$;
 2) $\sin(-1125^\circ) + \cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1755^\circ$;
 3) $\sin^2 930^\circ - \cos^2(-675^\circ) + \operatorname{tg}^2 855^\circ$;
 4) $\cos^2(-690^\circ) + \sin^2(-900^\circ) + \operatorname{ctg}^2 495^\circ$.

2.127°. Спрасціце выраз:

- 1) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(\pi + \alpha)}$; 2) $\frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(\pi - \alpha)}$;
 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi + \alpha)$;
 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - \sin(\alpha - 5\pi)\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$;
 5) $\left(\sin(\alpha + 2\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \left(\cos(\alpha - 2\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2$;
 6) $\left(\cos(\alpha - 4\pi) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 - \left(\sin(\alpha + 6\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$.

Дакажыце тоеснасць (2.128—2.129).

2.128. 1) $\sin(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos^2(-\alpha) = -1$;

2) $\cos(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^2(-\alpha) = 1$;

3) $\frac{\sin(\alpha - \pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(2\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

4) $\frac{\cos(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)} = -\operatorname{ctg} \alpha$.

2.129. 1) $\frac{2 - 2\sin^2(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

2) $\frac{2\cos^2(\pi - \alpha) - 2}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\frac{\cos^2(2\pi - \alpha) - \sin^2(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

4) $\frac{\sin^2(\pi - \alpha) - \cos^2(2\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.130*. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;

4) $\sin\left(\pi - \arcsin \frac{3}{7}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} 8\right)$;

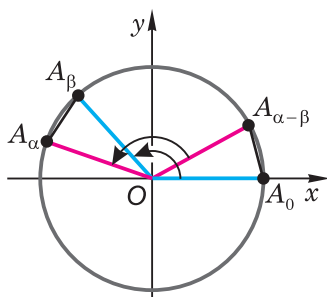
6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-6)\right)$.

2.11. Формулы складання

Тэарэма 1. Маюць месца тоеснасці:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$



Рыс. 99

Доказ тоеснасці (1). Адзначым на адзінкавай акружнасці пункты A_α , A_β , $A_{\alpha-\beta}$, A_0 (рыс. 99). Іх каардынаты:

$$A_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha), \quad A_\beta(\cos \beta; \sin \beta), \\ A_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta)), \quad A_0(1; 0).$$

Калі павярнуць кожны з праменяў OA_0 і $OA_{\alpha-\beta}$ на вугал β , то прамень OA_0 сумесціцца з праменем OA_β , а прамень $OA_{\alpha-\beta}$ сумесціцца з праменем OA_α . Пры гэтым пункт A_0 сумесціцца з

пунктам A_β , а пункт $A_{\alpha-\beta}$ — з пунктам A_α . Значыць, сумесцяцца адрэзкі $A_0A_{\alpha-\beta}$ і $A_\beta A_\alpha$, г. зн. $A_0A_{\alpha-\beta} = A_\beta A_\alpha$.

Выкарыстаўшы формулу $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, якая выражае адлегласць паміж пунктамі $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, атрымаем:

$$\begin{aligned} A_0A_{\alpha-\beta}^2 &= (x_{\alpha-\beta} - x_0)^2 + (y_{\alpha-\beta} - y_0)^2 = \\ &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 = \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta); \\ A_\beta A_\alpha^2 &= (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Значыць, мае месца роўнасць

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Адсюль атрымліваем

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad \square$$

Гэта формула чытаецца так: *косінус рознасці двух вуглоў роўны суме здабытку косінусаў гэтых вуглоў і здабытку сінусаў гэтых вуглоў*.

Доказ тоеснасці (2). Падставіўшы ва ўжо даказаную формулу (1) замест вугла β вугал $-\beta$, атрымаем

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta).$$

Па формулах $\cos(-\beta) = \cos \beta$, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ маем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad \square$$

Гэта формула чытаецца так: *косінус сумы двух вуглоў роўны рознасці паміж здабыткам косінусаў гэтых вуглоў і здабыткам сінусаў гэтых вуглоў*.

Выкарыстаўшы формулы (1) і (2), можна даказаць вядомыя нам формулы прывядзення $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ і $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ для адвольнага вугла (напомнім, што ў п. 2.1 гэтыя формулы былі абгрунтаваны толькі для вострага вугла α , а іх правільнасць для любога вугла ў п. 2.10 была прынята без доказу):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Значыць, для любога вугла α маем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Замяніўшы ў гэтай формуле вугал α на $\frac{\pi}{2} - \alpha$, атрымаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Значыць, для любога вугла α маем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Тэарэма 2. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

Доказ тоеснасці (3).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad \square \end{aligned}$$

Формула (3) чытаецца так: *сінус рознасці двух вуглоў роўны рознасці паміж здабыткам сінуса першага вугла і косінуса другога вугла і здабыткам косінуса першага вугла і сінуса другога вугла.*

Формулу (4) лёгка атрымаць, замяніўшы ў тоеснасці (3) вугал β на $-\beta$ (выканайце гэтыя выкладкі самастойна).

Тоеснасці (1)—(4) называюць яшчэ **формуламі** або **тэарэмамі складання для сінуса і косінуса**.

Дакажам цяпер тэарэмы складання для тангенса.

Напомнім, што ў тоеснасці разглядаюцца тыя значэнні зменных, пры якіх маюць сэнс абедзве яе часткі.

Тэарэма 3. Маюць месца тоеснасці:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

Доказ тоеснасці (5). Пераўтворым левую частку роўнасці (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} =$$

↓ па формулах (1) і (3) атрымаем ↓

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} =$$

↓ падзяліўшы лічнік і назоўнік дробу на здабытак $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$, атрымаем ↓

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad \square$$

Доказ тоеснасці (6) аналагічны.

Тоеснасці (5) і (6) называюць **формуламі** або **тэарэмамі складання для тангенса**.

Прыклад 1. Вылічыць

$$A = \sin 17^\circ \cos 13^\circ + \cos 17^\circ \sin 13^\circ.$$

Рашэнне. Па формуле (4) $A = \sin(17^\circ + 13^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Адказ: $\frac{1}{2}$.

Прыклад 2. Даказаць, што $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Доказ. Пераўтворым левую частку роўнасці:

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \square$$

Прыклад 3*. Знайсці значэнне выразу A , калі:

а) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7)$;

б) $A = \cos(\arccos(-0,8) - \operatorname{arctg}(-2\sqrt{2}))$.

Рашэнне. а) Няхай $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 7 = \beta$, тады $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg} \beta = 7$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Значыць,

$$A = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{3 + 7}{1 - 3 \cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

б) Няхай $\arccos(-0,8) = \alpha$, $\operatorname{arctg}(-2\sqrt{2}) = \beta$, тады $\cos \alpha = -0,8$, $\operatorname{tg} \beta = -2\sqrt{2}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Значыць,

$$A = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta =$$

↓ паколькі $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, то $\cos \beta > 0$, $\sin \alpha > 0$ ↓

$$= \cos \alpha \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} =$$

$$= -0,8 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{0,36}(-2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{-4}{15} + \frac{-2\sqrt{2}}{5} = -\frac{2}{15}(2 + 3\sqrt{2}).$$

Адказ: а) $A = -\frac{1}{2}$; б) $A = -\frac{2}{15}(2 + 3\sqrt{2})$.



1. Дакажыце формулы складання для сіноса (косінуса).
2. Дакажыце формулы складання для тангенса.
3. Пры якіх значэннях α і β маюць сэнс абедзве часткі:
 - а) роўнасці (5);
 - б) роўнасці (6)?
- 4*. Выведзіце формулы складання для катангенса.

Практыкаванні

Пераўтварыце выраз пры дапамозе формул складання (2.131—2.132).

- 2.131°. 1) $\sin(60^\circ + \alpha)$; 2) $\sin(30^\circ - \alpha)$;
 3) $\cos(\alpha - 45^\circ)$; 4) $\cos(60^\circ + \alpha)$;
 5) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$; 6) $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$;
 7) $\operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(30^\circ + \alpha)$;
 9) $\operatorname{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{6})$; 10) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{4})$.

- 2.132°.** 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$; 2) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;
 7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

2.133. Знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\sin(\alpha + \beta)$; 2) $\sin(\alpha - \beta)$;
 3) $\cos(\alpha - \beta)$; 4) $\cos(\alpha + \beta)$,

калі вядома, што:

а) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\sin \beta = \frac{11}{61}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

б) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$, $\cos \beta = -\frac{8}{17}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

2.134. Знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;
 3) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$,

калі вядома, што:

а) $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\sin \beta = \frac{7}{25}$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2.135. Знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\cos(\alpha + \beta)$; 2) $\cos(\alpha - \beta)$,

калі вядома, што:

а) $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

б) $\sin \alpha = \sin \beta = -\frac{1}{2}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Спрасціце выраз (**2.136—2.137**).

- 2.136.** 1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$; 2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}$;
 3) $\frac{\cos \alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin \alpha}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\cos \alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin \alpha}$;

$$5) \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^2 \alpha;$$

$$6) \cos^2\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) + \sin^2 \alpha.$$

$$2.137. \quad 1) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta}; \quad 2) \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta};$$

$$3) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)};$$

$$4) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)};$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)};$$

$$6) \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

2.138°. Знайдіть значення виразів $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, калі:

$$1) \alpha = 105^\circ; \quad 2) \alpha = 75^\circ; \quad 3) \alpha = -15^\circ;$$

$$4) \alpha = \frac{\pi}{12}; \quad 5) \alpha = \frac{11\pi}{12}; \quad 6) \alpha = -\frac{7\pi}{12}.$$

Спростіть вираз (2.139—2.141).

$$2.139. \quad 1) \sin 69^\circ \cos 39^\circ - \cos 69^\circ \sin 39^\circ;$$

$$2) \cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ;$$

$$3) \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4};$$

$$4) \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6};$$

$$5) \frac{\operatorname{tg} 16^\circ + \operatorname{tg} 44^\circ}{1 - \operatorname{tg} 16^\circ \operatorname{tg} 44^\circ};$$

$$6) \frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 26^\circ};$$

$$7) \frac{\operatorname{tg} \frac{9\pi}{28} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{14}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{14} \operatorname{tg} \frac{9\pi}{28}};$$

$$8) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{18}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{18}}.$$

$$2.140. \quad 1) \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right);$$

$$2) \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

- 2.141. 1) $\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ + \sin 34^\circ \cos 4^\circ - \cos 34^\circ \sin 4^\circ$;
 2) $\sin 39^\circ \cos 21^\circ + \cos 39^\circ \sin 21^\circ + \sin 78^\circ \cos 18^\circ - \cos 78^\circ \sin 18^\circ$;
 3) $\cos 70^\circ \cos 25^\circ + \sin 70^\circ \sin 25^\circ + \cos 12^\circ \cos 33^\circ - \sin 33^\circ \sin 12^\circ$;
 4) $\cos 26^\circ \cos 34^\circ - \sin 26^\circ \sin 34^\circ + \cos 83^\circ \cos 23^\circ + \sin 83^\circ \sin 23^\circ$.

2.142. Дакажыце тоеснасць:

- 1) $\cos \alpha \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = \sin(\alpha - \beta)$;
 2) $\sin \alpha \sin \beta (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \sin(\alpha + \beta)$;
 3) $\sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha \sin^2 \alpha = \sin 3\alpha \sin \alpha$;
 4) $\cos^2 3\alpha \cos^2 2\alpha - \sin^2 3\alpha \sin^2 2\alpha = \cos 5\alpha \cos \alpha$;
 5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$; 6) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

2.143*. Знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{4} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;
 2) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13}\right)$;
 3) $\sin\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13}\right)$;
 4) $\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$;
 5) $\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;
 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

2.144*. Рашыце ўраўненне:

- 1) $\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 0$;
 2) $\cos 8x \cos 3x + \sin 8x \sin 3x = 0$.

2.145*. Дакажыце, што:

- 1) $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$, калі $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;
 2) $\cos(\alpha - \beta) < \cos \alpha + \sin \beta$, калі $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

2.12. Формулы двойнога і палавіннага вуглоў

Тэарэма 1. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (4)$$

Доказ. З формулы складання для сінуса

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

пры $\beta = \alpha$ атрымаем $\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$ і пасля прывядзення падобных складаемых маем тоеснасць (1):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Тоеснасць (2) даказваецца аналагічна.

Тоеснасці (3) і (4) атрымліваюцца пры $\beta = \alpha$ адпаведна з формул

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \quad \square$$

Тоеснасці (1)–(4) называюць **формуламі двойнога вугла**.

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу $\operatorname{tg} 2p$, калі $\operatorname{tg} p = 0,7$.

$$\text{Рашэнне. } \operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = \frac{2 \cdot 0,7}{1 - 0,49} = \frac{1,4}{0,51} = \frac{140}{51} = 2 \frac{38}{51}.$$

$$\text{Адказ: } \operatorname{tg} 2p = 2 \frac{38}{51}.$$

Прыклад 2. Даказаць тоеснасць:



$$\text{а) } 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (5)$$

$$\text{б) } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Доказ. а) Разгледзім дзве тоеснасці:

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

і

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (8)$$

Склаўшы левыя часткі роўнасцей (7) і (8) і склаўшы іх правыя часткі, атрымаем тоеснасць (5):

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad \boxtimes$$

(З гэтай тоеснасці вынікае: $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, што дае яшчэ адзін спосаб вылічэння косінуса двайнога вугла.)

б) Калі ад левай часткі тоеснасці (7) адняць левую частку тоеснасці (8) і ад правай часткі тоеснасці (7) адняць правую частку тоеснасці (8), то атрымаецца тоеснасць (6):

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad \boxtimes$$

(З гэтай тоеснасці вынікае: $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, што дае яшчэ адзін спосаб вылічэння косінуса двайнога вугла.)

Тэарэма 2. Маюць месца тоеснасці:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad (9)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (12)$$

Доказ. Формулы (9), (10) вынікаюць з тоеснасцей (5) і (6). Формулы (11), (12) можна атрымаць, выкарыстаўшы азначэнні тангенса (катангенса) і формулы (9), (10). $\boxtimes$

Тоеснасці (9)–(12) называюць *формуламі палавіннага вугла*.

Прыклад 3. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні выразу A , калі:

а) $A = 16 \cos^4 3\alpha + 16 \sin^4 3\alpha$;

б)* $A = 16 \cos^6 3\alpha - 16 \sin^6 3\alpha$.

Рашэнне. а) $A = 16((\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha)^2 - 2 \cos^2 3\alpha \sin^2 3\alpha) =$
 $\downarrow$ выкарыстаўшы асноўную трыганаметрычную тоеснасць $\downarrow$
 $\downarrow$ і формулу (1), атрымаем $\downarrow$
 $= 16\left(1^2 - \frac{1}{2} \sin^2 6\alpha\right) = 16 - 8 \sin^2 6\alpha.$

Паколькі 0 з'яўляецца найменшым значэннем выразу $\sin^2 6\alpha$, а 1 — найбольшым, то пры $\sin^2 6\alpha = 0$ маем найбольшае значэнне $A = 16$, а пры $\sin^2 6\alpha = 1$ — найменшае значэнне $A = 8$.

$$\text{б) } A = 16(\cos^2 3\alpha)^3 - 16(\sin^2 3\alpha)^3 =$$

↓ выкарыстаўшы формулы (9) і (10), атрымаем ↓

$$\begin{aligned} &= 16\left(\frac{1 + \cos 6\alpha}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1 - \cos 6\alpha}{2}\right)^3 = 2((1 + \cos 6\alpha)^3 - (1 - \cos 6\alpha)^3) = \\ &= 2(1 + 3\cos 6\alpha + 3\cos^2 6\alpha + \cos^3 6\alpha - 1 + 3\cos 6\alpha - 3\cos^2 6\alpha + \\ &\quad + \cos^3 6\alpha) = 2(6\cos 6\alpha + 2\cos^3 6\alpha) = 12\cos 6\alpha + 4\cos^3 6\alpha. \end{aligned}$$

Няхай $\cos 6\alpha = t$, тады $t \in [-1; 1]$. Разгледзім функцыю $f(t) = 12t + 4t^3$, дзе $t \in [-1; 1]$.

Знойдзем найменшае і найбольшае значэнні гэтай функцыі на адрэзку $[-1; 1]$. Паколькі значэнні яе вытворнай $f'(t) = 12 + 12t^2$ дадатныя пры ўсіх $t \in [-1; 1]$, то функцыя $f(t)$ нарастае на гэтым адрэзку.

Такім чынам,

$f(-1) = -12 + 4(-1) = -16$ — найменшае значэнне функцыі,

$f(1) = 12 + 4 = 16$ — найбольшае значэнне функцыі.

Адказ: а) 8 і 16; б) -16 і 16.

Прыклад 4*. Знайсці значэнне выразу

$$A = \sin^2\left(\frac{1}{2} \arccos(-0,2)\right).$$

Рашэнне. Няхай $\arccos(-0,2) = \alpha$, тады $\cos \alpha = -0,2$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Значыць, па формуле (10) маем:

$$A = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + 0,2}{2} = \frac{3}{5}.$$

Адказ: $A = \frac{3}{5}$.

А

Арабскі астраном і матэматык з Харасана Абуль-Вефа (940—998) склаў табліцы сінусаў, вылічаных праз кожныя 10' з дакладнасцю да $\frac{1}{60^4}$, а таксама табліцы тангенсаў. Вучоны сфармуляваў тэарэмы, што адпавядаюць формулам

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$



- Запішыце і дакажыце формулу сінуса (косінуса, тангенса, катангенса) двайнога вугла.
- Запішыце і дакажыце формулу сінуса (косінуса, тангенса, катангенса) палавіннага вугла.
- Пры якіх значэннях α маюць сэнс абедзве часткі:
 - роўнасці (3);
 - роўнасці (4);
 - роўнасці (11);
 - роўнасці (12)?

Практыкаванні

2.146°. Пераўтварыце кожны з выразаў, выкарыстаўшы формулу двайнога вугла:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin 3\alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} 5\alpha$; | 2) $\sin \alpha$, $\cos 5\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$; |
| 3) $\sin 6\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 8\alpha$; | 4) $\sin 4\alpha$, $\cos 8\alpha$, $\operatorname{ctg} 6\alpha$; |
| 5) $\sin \frac{\alpha}{3}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{3\alpha}{4}$; | 6) $\sin \frac{3\alpha}{4}$, $\cos \frac{\alpha}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. |

2.147°. Пераўтварыце выраз, выкарыстаўшы формулу двайнога вугла:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; | 2) $\sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; | 3) $\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$; |
| 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{5\pi}{8}\right)$; | 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{7}\right)$; | 6) $\sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$. |

2.148°. Пераўтварыце выраз, выкарыстаўшы формулу палавіннага вугла:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin^2 4\alpha$; | 2) $\cos^2 6\alpha$; |
| 3) $\operatorname{tg}^2 5\alpha$; | 4) $\operatorname{ctg}^2 8\alpha$; |
| 5) $\sin^2\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; | 6) $\cos^2\left(7\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$; |
| 7) $\operatorname{tg}^2\left(6\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$; | 8) $\operatorname{ctg}^2\left(5\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$. |

2.149°. Знайдзіце значэнне выразу:

- | | |
|---|---|
| 1) $1 - 2\sin^2 15^\circ$; | 2) $2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$; |
| 3) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$; | 4) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$; |
| 5) $6\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; | 6) $4\sin^2 75^\circ$; |
| 7) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$; | 8) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}$. |

Спрасціце выраз (2.150—2.153).

2.150°. 1) $\cos^4 20^\circ - \sin^4 20^\circ$; 2) $\cos^4 10^\circ - \sin^4 10^\circ$;

3) $2\sin 50^\circ \sin 40^\circ$; 4) $\cos^2 50^\circ - \cos^2 40^\circ$;

5) $\frac{6\operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{ctg}^2 50^\circ}$; 6) $\frac{10\operatorname{tg} 65^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 115^\circ}$.

2.151. 1) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 2) $\cos 4\alpha - \cos^2 2\alpha$;

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; 4) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$;

5) $8\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha \sin \alpha$;

6) $16\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha$;

7) $(\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)$;

8) $(\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)$;

9) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha$;

10) $\sin^4 2\alpha + \cos^4 2\alpha - 0,25\cos 8\alpha$.

2.152*. 1) $1 - 8\sin^2 \frac{17\pi}{16} \cos^2 \frac{15\pi}{16}$; 2) $8\sin^2 \frac{23\pi}{24} \cos^2 \frac{25\pi}{24} - 1$;

3) $\sin^4 \frac{23\pi}{24} + \cos^4 \frac{25\pi}{24}$; 4) $\sin^4 \frac{17\pi}{16} + \cos^4 \frac{15\pi}{16}$;

5) $\sin^6 \frac{13\pi}{12} + \cos^6 \frac{23\pi}{12}$; 6) $\cos^6 \frac{17\pi}{8} - \sin^6 \frac{31\pi}{8}$.

2.153. 1) $\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4}}{2}}$;

3) $\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$; 4) $\sqrt{\frac{1 + \cos 6\alpha}{1 - \cos 6\alpha}}$.

2.154°. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$,

калі вядома, што:

а) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

в) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; г) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2.155. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha$,

калі вядома, што:

а) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ і $3\pi < \alpha < 4\pi$.

2.156. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin 4\alpha$; 2) $\cos 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 4\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 4\alpha$,

калі вядома, што:

а) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ і $-\frac{\pi}{4} < \alpha < -\frac{\pi}{8}$;

б) $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{8}$.

2.157. Ведаючы, што $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, знайдзіце значэнне выразу:

1) $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)$; 2) $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta)$.

2.158. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos \frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$,

калі вядома, што:

а) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$ і $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$;

б) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ і $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2.159. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 4\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^2 4\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 4\alpha$,

калі вядома, што:

а) $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$; б) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$.

2.160. Дакажыце тоеснасць:

1) $4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha = \cos^2 2\alpha - 1$;

2) $8\cos^4 \alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$;

3) $\frac{1 + \sin 2\alpha + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}{1 + \sin 2\alpha - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = \operatorname{tg} \alpha$;

$$4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)}{1 + \cos 2\alpha - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

2.161. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

- | | |
|---|---|
| 1) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - \sin 2\alpha$; | 2) $\sin 2\alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$; |
| 3) $1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$; | 4) $4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1$; |
| 5) $1 - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2}\right)$; | 6) $2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right) - 1$. |

Знайдзіце значэнне выразу (2.162—2.163).

- 2.162*.** 1) $\sin\left(2\arcsin \frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(2\arccos \frac{1}{3}\right)$;
 3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin \frac{3}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin \frac{2}{3}\right)$;
 5) $\sin\left(2\operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)$; 6) $\cos\left(2\operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right)$.

- 2.163*.** 1) $\sin\left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\arcsin \frac{1}{4}\right)$;
 2) $\cos\left(2\arcsin \frac{2}{3} + \arccos \frac{3}{4}\right)$.

2.13. Пераўтварэнне здабытку ў суму (рознасць). Пераўтварэнне сумы (рознасці) у здабытак

Тэарэма 1. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)), \quad (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)), \quad (2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)). \quad (3)$$

Доказ. Разгледзім формулы складання для сінуса:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (4)$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (5)$$

Склаўшы левыя часткі тоеснасцей (4), (5) і склаўшы іх правыя часткі, атрымаем тоеснасць $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$, адкуль і вынікае тоеснасць (1).

Аналагічна з формул складання для косінуса

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (7)$$

атрымаем:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

адкуль і вынікаюць тоеснасці (3) і (2). $\square$

Тэарэма 2. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (8)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad (9)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (10)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}. \quad (11)$$

Доказ. З формул складання для сінуса і косінуса (4), (5), (6) і (7), складаючы або аднімаючы іх адпаведныя часткі, атрымліваем тоеснасці:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta, \quad (12)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta, \quad (13)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta, \quad (14)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta. \quad (15)$$

Абазначым цяпер $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$. Аб'яднаем атрыманыя ўраўненні ў сістэму і рэшым яе адносна α і β :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ 2\alpha = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = x - \alpha, \\ \alpha = \frac{x+y}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \frac{x-y}{2}, \\ \alpha = \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

Падставіўшы гэтыя значэнні ў тоеснасці (12), (13), (14) і (15), атрымаем адпаведна тоеснасці (8), (9), (10) і (11) (пераканайцеся ў гэтым). $\square$

Тэарэма 3. Маюць месца тоеснасці:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (17)$$

Доказ. Пераўтворым левую частку формулы (16):

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Тоеснасць (17) даказваецца аналагічна. $\square$

Прыклад 1. Даказаць тоеснасць:

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$

б) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

Доказ. а) Пераўтворым левую частку роўнасці:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \\ &\downarrow \text{ па формуле (8) атрымаем } \downarrow \\ &= 2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} - x}{2} = \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad \square \end{aligned}$$

б) Даказваецца аналагічна.

Прыклад 2. Пераўтварыць суму $1 + \sin x$ у здабытак:

а) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$ б) $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2;$

в) $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

Рашэнне. а) $1 + \sin x = \sin \frac{\pi}{2} + \sin x =$

$$\downarrow \text{ па формуле (8) атрымаем } \downarrow$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

б) $1 + \sin x = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2.$

в) $1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

Прыклад 3. Даказаць, што $\sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \cos 10^\circ$.

Доказ. *Спосаб 1 (з выкарыстаннем формулы (8)).*

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ + \cos 50^\circ &= \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \\ &= 2 \sin 30^\circ \cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ. \quad \square\end{aligned}$$



Спосаб 2. Доказ з выкарыстаннем формулы (10) правядзіце самастойна.

▲ **Прыклад 4.** Рашыць ураўненне

$$2 \sin 7x \cos 3x - \sin 10x = 0.$$

Рашэнне. Пераўтворым левую частку ўраўнення:

$$\begin{aligned}2 \sin 7x \cos 3x - \sin 10x &= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 10x + \sin 4x) - \sin 10x = \\ &= \sin 10x + \sin 4x - \sin 10x = \sin 4x.\end{aligned}$$

Такім чынам, дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню

$$\sin 4x = 0.$$

Значыць, $4x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, адкуль $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Адказ: $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. ▲



1. Запішыце формулы складання для сінусаў (косінусаў).
2. Запішыце формулы пераўтварэння здабыткаў $\sin \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$, $\sin \alpha \sin \beta$ у суму або рознасць.
3. Запішыце формулы пераўтварэння сум і рознасцей $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$ у здабытак.
4. Дакажыце тоеснасці (1), (2), (3).
5. Дакажыце тоеснасці (8), (9), (10), (11).
6. Дакажыце тоеснасці (16), (17).

Практыкаванні

Запішыце ў выглядзе сумы выраз (2.164—2.166).

- 2.164°.** 1) $\sin 5^\circ \cos 85^\circ$; 2) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ$;
 3) $\sin 35^\circ \sin(-25^\circ)$; 4) $\sin(-35^\circ) \sin 65^\circ$;
 5) $2 \cos(-10^\circ) \cos 80^\circ$; 6) $2 \cos 22^\circ \cos(-23^\circ)$.
- 2.165°.** 1) $\sin(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta)$; 2) $\cos(\alpha + 3\beta) \sin(\alpha - 3\beta)$;
 3) $\cos(\alpha - 2\beta) \cos(\alpha + 2\beta)$;
 4) $2 \sin(2\alpha - 3\beta) \sin(2\alpha + 3\beta)$.

- 2.166°.** 1) $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right)$;
5) $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$; 6) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

2.167. Дакажыце тоеснасць:

- 1) $4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$;
2) $4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$;
3) $\sin^2\alpha + \cos(60^\circ + \alpha)\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}$;
4) $\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha) + \sin^2\alpha = \frac{3}{4}$.

Запішыце ў выглядзе здабытку выраз (**2.168—2.170**).

- 2.168°.** 1) $\cos(-9^\circ) - \cos 51^\circ$; 2) $\cos 9^\circ + \cos(-51^\circ)$;
3) $\sin 55^\circ + \sin(-65^\circ)$; 4) $\sin(-55^\circ) - \sin 65^\circ$;
5) $\cos 315^\circ + \cos 225^\circ$; 6) $\cos 348^\circ - \cos 288^\circ$;
7) $\sin 275^\circ - \sin 185^\circ$; 8) $\sin 395^\circ + \sin 455^\circ$.

- 2.169°.** 1) $\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{9}$;
3) $\cos\frac{7\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{9}$; 4) $\cos\frac{7\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{9}$;
5) $\sin 2\alpha + \sin 8\alpha$; 6) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$;
7) $\cos\alpha - \cos 5\alpha$; 8) $\cos\alpha + \cos 3\alpha$.

- 2.170.** 1) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{16}\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{16} - 3\alpha\right)$;
3) $\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$;
4) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$;
5) $\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{9}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{18} - 4\alpha\right)$;
6) $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{10}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{5}\right)$.

2.171. Запішыце ў выглядзе дзелі выраз:

- 1) $\operatorname{tg} 7\alpha + \operatorname{tg} 9\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 13\alpha - \operatorname{tg} 9\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + \alpha\right)$.

2.172. Знайдзіце значэнне выразу:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\sin 35^\circ + \sin 85^\circ}{\cos 25^\circ};$ | 2) $\frac{\cos 24^\circ - \cos 84^\circ}{\sin 54^\circ};$ |
| 3) $\frac{\cos 89^\circ + \cos 1^\circ}{\sin 89^\circ + \sin 1^\circ};$ | 4) $\frac{\sin 15^\circ - \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ};$ |
| 5) $\frac{\sin 37^\circ - \sin 53^\circ}{1 - 2\cos^2 41^\circ};$ | 6) $\frac{\cos 50^\circ - \cos 70^\circ}{1 - 2\sin^2 40^\circ}.$ |

Запішыце ў выглядзе здабытку або дзелі выраз (**2.173—2.179**).

2.173. 1) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha;$

2) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha;$

3) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha + \sin 22\alpha + \sin 16\alpha;$

4) $\cos 2\alpha + \cos 14\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha.$

2.174. 1) $\sin 4\alpha - 1;$ 2) $1 + \sin 4\alpha;$ 3) $\sin 6\alpha + \frac{1}{2};$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\alpha;$ 5) $\cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2};$ 6) $\cos \alpha + \frac{1}{2};$

7) $\operatorname{tg} 3\alpha + 1;$ 8) $1 - \operatorname{tg} 5\alpha.$

2.175. 1) $1 + 2\sin \alpha;$ 2) $\sqrt{3} - 2\sin \alpha;$ 3) $\sqrt{2} \cos \alpha - 1;$

4) $2\cos \alpha - \sqrt{3};$ 5) $3\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{3};$ 6) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha.$

2.176. 1) $\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha;$ 2) $0,75 - \cos^2 \alpha;$

3) $\sin^2 \alpha - 0,25;$ 4) $\cos^2 \alpha - 0,25;$

5) $3 - \operatorname{tg}^2 \alpha;$ 6) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3}.$

2.177. 1) $1 - 2\sin^2 22^\circ;$ 2) $1 - 2\cos^2 38^\circ;$ 3) $2\cos^2 18^\circ - 1;$

4) $2\sin^2 48^\circ - 1;$ 5) $3\operatorname{tg}^2 12^\circ - 1;$ 6) $\operatorname{tg}^2 14^\circ - 3.$

2.178. 1) $1 - \cos \alpha + \sin \alpha;$ 2) $1 - \sin \alpha + \cos \alpha;$

3) $\cos \alpha + \sin \alpha - 1;$ 4) $1 - \sin \alpha - \cos \alpha;$

5) $1 + \cos \alpha + \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha;$ 6) $1 - \sin \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha.$

2.179*. 1) $\sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}$ пры $0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$

2) $\sqrt{\operatorname{tg} 2\alpha + \sin 2\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg} 2\alpha - \sin 2\alpha}$ пры $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$

2.180. Дакажыце тоеснасць:

$$1) \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha);$$

$$2) \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha);$$

$$3) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha;$$

$$4) \frac{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \cos 13\alpha}{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha} = \operatorname{ctg} 7\alpha.$$

2.181. Рашыце ўраўненне:

$$1) 2\sin 4x \sin 6x + \cos 10x = 0;$$

$$2) 2\sin 8x \sin 3x - \cos 5x = 0;$$

$$3) 2\cos 4x \cos 6x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0;$$

$$4) 2\sin 5x \cos 7x + \sin(\pi - 2x) = 0;$$

$$5) \operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 4x = 0;$$

$$6) \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0.$$

▲ 2.14. Выражэнне сіноса, косінуса і тангенса вугла праз тангенс палавіннага вугла

У гэтым пункце, выкарыстаўшы формулы дваінога вугла і асноўную трыганаметрычную тоеснасць, мы атрымаем шэраг формул, якія дазваляюць $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ выражаць праз $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, г. зн. праз тангенс палавіннага вугла.

Тэарэма. Маюць месца тоеснасці:

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Гэтыя тоеснасці (формулы) прынята называць *універсальнымі падстаноўкамі*. Дакажам іх.

Доказ. Пераўтворым левую частку роўнасці (1):

$$\sin \alpha = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \text{падзяліўшы лічнік і назоўнік другога дробу} & \downarrow \\ & \text{на } \cos^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0, \text{ атрымаем} & \\ & \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. & \end{array}$$

Тоеснасць (2) даказваецца аналагічна.

Тоеснасць (3) — гэта ўжо вядомая нам формула тангенса двайнога вугла (гл. п. 2.12). $\square$

Напомнім, што ў кожнай з тоеснасцей (1), (2), (3) разглядаюць тыя значэнні α , пры якіх маюць сэнс абедзве іх часткі. Напрыклад, у тоеснасці (3) гэта $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад. Ведаючы, што $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$, знайсці значэнне выразу

$$A = 25 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha.$$

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулы (1) і (2), пераўтворым выраз A :

$$A = 25 \cdot \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{50\operatorname{tg} \alpha - 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Выразім $\operatorname{tg} \alpha$ праз $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ па формуле (3) і знойдзем яго значэнне:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}.$$

Падставіўшы $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ у выраз A , атрымаем:

$$A = \frac{50 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 1 + \frac{16}{9}}{1 + \frac{16}{9}} = -23 \frac{18}{25}.$$

Адказ: $A = -23 \frac{18}{25}$.



1. Якія формулы прынята называць універсальнымі падстаноўкамі?
2. Дакажыце тоеснасці (1), (2) і (3).
3. Пры якіх значэннях x маюць сэнс абедзве часткі:
 - а) роўнасці (1);
 - б) роўнасці (2);
 - в) роўнасці (3)?
4. Як выразіць $\operatorname{ctg} \alpha$ праз $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$?

Практыкаванні

2.182. Знайдзіце $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, калі:

- 1) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$;
- 2) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$;
- 3) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 4$;
- 4) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -5$.

2.183. Ведаючы, што $\operatorname{ctg} \alpha = 3$, знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\frac{\cos 2\alpha + 3}{2\sin 2\alpha - 1}$;
- 2) $\frac{\sin 2\alpha - 4}{3\cos 2\alpha + 1}$.

2.184. Ведаючы, што $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$, знайдзіце значэнне выразу:

- 1) $\frac{5 - 4\cos \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} - 2\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}$;
- 2) $\frac{5 - 2\sin \alpha}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + 4\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

Пераўтварыце выраз, выкарыстаўшы ўніверсальныя падстаноўкі (**2.185—2.186**).

- 2.185.**
- 1) $\sin \alpha - 2\cos \alpha$;
 - 2) $5\sin \alpha - \cos \alpha$;
 - 3) $5\sin \alpha + 12\cos \alpha$;
 - 4) $3\sin \alpha + 5\cos \alpha$.

- 2.186.**
- 1) $\frac{3 - 4\sin \alpha}{5 - 8\cos \alpha}$;
 - 2) $\frac{5 - 7\cos \alpha}{4 - 7\sin \alpha}$;
 - 3) $\frac{1 - 4\sin^2 \alpha}{1 - 4\cos^2 \alpha}$;
 - 4) $\frac{3 - 4\sin^2 \alpha}{3 - 4\cos^2 \alpha}$.

2.187. Выразіце праз $\operatorname{tg} 2\alpha$ выраз A , калі:

- 1) $A = \frac{\cos 4\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha}{\operatorname{ctg} 4\alpha} - 1$;
- 2) $A = 1 - \frac{\sin 4\alpha + \operatorname{tg} 4\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha}$;
- 3) $A = \frac{1 + \operatorname{tg} 4\alpha}{1 + \operatorname{ctg} 4\alpha}$;
- 4) $A = \frac{\operatorname{ctg} 4\alpha + 1}{\operatorname{tg} 4\alpha + 1}$.

2.188. Дакажыце тоеснасць:

- 1) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$;
- 2) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2(-\alpha) - 1}{2\operatorname{tg}(-\alpha)}$.

2.189. Знайдіть значення $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, калі:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$; 2) $\sin \alpha - \cos \alpha = -1$.

2.190. Знайдіть значення виразу A , калі:

1) $A = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$;
 2)* $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -1$;
 3) $A = a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$;
 4) $A = m \sin \alpha - n \cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$.

2.191*. Выразіце праз $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ пры $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ выраз:

1) $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$; 2) $\sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}}$;
 3) $\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}}$; 4) $\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$.

▲ 2.15. Пераўтварэнне некаторых трыганаметрычных выказаў

Разгледзім на канкрэтных прыкладах яшчэ некалькі прыёмаў пераўтварэння трыганаметрычных выказаў.

1. *Пераўтварэнне выразу $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ з выкарыстаннем дапаможнага вугла*

Няхай $a^2 + b^2 \neq 0$. Тады

$$\begin{aligned}
 & a \sin \alpha + b \cos \alpha = \\
 & \downarrow \text{вынесем за дужкі множнік } \sqrt{a^2 + b^2} \quad \downarrow \\
 & = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right) = \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{заўважым, што пры любых значэннях } a \text{ і } b \\ \text{правільная роўнасць } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1, \\ \text{значыць, існуе такі вугал } \varphi, \text{ што } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{і } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (гл. заўвагу п. 2.4)} \end{array} \right\} \downarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha) = \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi).
 \end{aligned}$$

Такім чынам, маем тоеснасць

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \quad (1)$$

дзе вугал φ вызначаецца з роўнасцей

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{г. зн. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Прыклад 1. Знайсці найбольшае і найменшае значэнні выразу $\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы тоеснасць (1), вынесем у дадзеным выразе за дужкі лік $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) = \\
 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha \right) = 2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right).
 \end{aligned}$$

Паколькі найбольшым значэннем выразу $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$ з'яўляецца лік 1, а найменшым — лік -1 , то найбольшым і найменшым значэннямі выразу $2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$, а значыць, і дадзенага ва ўмове выразу будуць адпаведна лікі 2 і -2 .

Адказ: 2; -2 .

2. Пераўтварэнне выразу выгляду

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cdot \dots \cdot \cos(2^n \alpha), \quad \text{дзе } n \in \mathbb{N}$$

Прыклад 2. Знайсці значэнне выразу

$$A = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}.$$

Рашэнне. Памножыўшы выраз A на $2^3 \sin \frac{\pi}{7}$ (паказчык ступені ліку 2 роўны 3 — ліку множнікаў у выразе A , а значэнне сінуса ўзята пры самым малым вугле — $\frac{\pi}{7}$), атрымаем:

$$2^3 \sin \frac{\pi}{7} \cdot A = 2^3 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} =$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{выкарыстаўшы некалькі разоў формулу} \\
 \text{сінуса двайнога вугла, атрымаем} \downarrow \\
 = 2^2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{8\pi}{7} = \\
 = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\sin \frac{\pi}{7}.
 \end{array}$$

Такім чынам, $2^3 \sin \frac{\pi}{7} \cdot A = -\sin \frac{\pi}{7}$, адкуль знаходзім $A = -\frac{1}{8}$.

Адказ: $A = -\frac{1}{8}$.

Заўважым, што для пераўтварэння здабытку трох множнікаў прыйшлося тройчы прымяняць формулу сінуса двайнога вугла. Аналагічнымі разважанымі можна ў агульным выглядзе пераўтварыць здабытак $n + 1$ множніка ($n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{c}
 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos(2^n \alpha) = \\
 \downarrow \text{памножыўшы і падзяліўшы дадзены выраз} \\
 \text{на } 2^{n+1} \sin \alpha \neq 0, \text{ атрымаем тое ж самае яму выраз} \downarrow \\
 = \frac{2^{n+1} \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cdot \dots \cdot \cos(2^n \alpha)}{2^{n+1} \sin \alpha} = \\
 \downarrow \text{выкарыстаўшы } n + 1 \text{ раз формулу} \\
 \text{сінуса двайнога вугла, атрымаем} \downarrow \\
 = \frac{\sin(2^{n+1} \alpha)}{2^{n+1} \sin \alpha}.
 \end{array}$$

Прыклад 3. Даказаць, што правільная роўнасць

$$\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{4}.$$

Доказ. Пераўтворым левую частку роўнасці:

$$\begin{aligned}
 \sin 18^\circ \sin 54^\circ &= \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \\
 &= \frac{2^2 \cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{2^2 \cos 18^\circ} = \\
 &= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4 \cos 18^\circ} = \frac{1}{4}. \quad \square
 \end{aligned}$$

3. Пераўтварэнне выказаў з выкарыстаннем формул двайнога і палавіннага вугла

Прыклад 4. Знайсці найбольшае і найменшае значэнні выразу $A = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Рашэнне. *Спосаб 1.* $A = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 =$

↓ выкарыстаўшы формулы палавіннага вугла, атрымаем ↓

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \\ &= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}. \end{aligned}$$

Паколькі найбольшым і найменшым значэннямі выразу $\cos^2 2x$ з'яўляюцца лікі 1 і 0, то адпаведна найбольшым і найменшым значэннямі выразу A з'яўляюцца лікі $\frac{1+1}{2} = 1$ і $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.

Адказ: 1 і 0,5.



Спосаб 2. Пакажам спосаб пераўтварэння выразу A , заснаваны на выкарыстанні тоеснасці $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$:

$$\begin{aligned} A &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Для гэтага выразу таксама лёгка знайсці найбольшае і найменшае значэнні: $A = 1$, калі $\sin^2 2x = 0$, і $A = 0,5$, калі $\sin^2 2x = 1$.

Прыклад 5*. Знайсці значэнне выразу $A = \sin^6 x + \cos^6 x$, ведаючы, што $\cos 4x = \frac{1}{3}$.

Рашэнне. $A = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 =$

↓ па формуле $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ атрымаем ↓

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \end{aligned}$$

↓ паколькі $\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$, то па ўмове маем ↓

$$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) \Big|_{\cos 4x = \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Адказ: $A = \frac{3}{4}$.

4. Пераўтварэнне выразай выгляду

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha \text{ і} \\ \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha, \text{ дзе } n \in \mathbb{N}$$

Прыклад 6. Даказаць, што правільная роўнасць

$$\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{14}. \quad (2)$$

Рашэнне. Абазначым левую частку роўнасці (2) літарай A . Памножыўшы выраз A на $2 \sin \frac{\pi}{14}$, атрымаем:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{14} \cdot A &= 2 \sin \frac{\pi}{14} \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{7} = \\ \downarrow \text{ па формуле } \sin x \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \text{ атрымаем } \downarrow \\ &= \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{7\pi}{14} = \\ &= \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{14} - 0 = \cos \frac{\pi}{14}. \end{aligned}$$

Значыць, $2 \sin \frac{\pi}{14} \cdot A = \cos \frac{\pi}{14}$, адкуль знойдзем $A = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{14}$. Такім чынам, з улікам абазначэння роўнасць (2) правільная. $\square$



1. Пераўтварыце выраз выгляду $a \sin x + b \cos x$ з дапамогай увядзення дапаможнага вугла.
2. Які прыём можна выкарыстоўваць для пераўтварэння выразу выгляду $\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha$?
3. Пераўтварыце, выкарыстаўшы формулы палавіннага вугла, выразы выгляду $\sin^{2n} x$, $\cos^{2n} x$, $\operatorname{tg}^{2n} x$ пры:
 - а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) $n = -2$.
4. Пераўтварыце выраз $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$, памножыўшы і падзяліўшы яго на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$.
5. Пераўтварыце выраз

$$\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha + \sin 12\alpha + \sin 15\alpha,$$

$$\text{памножыўшы і падзяліўшы яго на } 2 \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

Практыкаванні

2.192°. Пераўтварыце выраз A , выкарыстаўшы ўвядзены дапаможнага вугла:

- 1) $A = \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha$;
- 2) $A = \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \alpha$;
- 3) $A = \sqrt{2} \cos 5\alpha + \sqrt{2} \sin 5\alpha$;
- 4) $A = 2 \cos 4\alpha - \sqrt{2} \sin 4\alpha$;
- 5) $A = 3\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{\alpha}{2}$;
- 6) $A = 2,5\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} - 2,5 \cos \frac{\alpha}{3}$.

2.193. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу A з практыкавання 2.192.

2.194. Спрасціце выраз A :

- 1) $A = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5}$;
- 2) $A = \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15}$;
- 3) $A = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$;
- 4) $A = 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$;
- 5) $A = 8 \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;
- 6) $A = 8 \sin 85^\circ \sin 80^\circ \sin 70^\circ \sin 30^\circ$;
- 7) $A = \sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ$;
- 8) $A = \sin^2 18^\circ \sin^2 54^\circ \sin^2 72^\circ$.

2.195. Дакажыце тое, што:

- 1) $\sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha \right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$;
- 2) $\cos^2 \left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha \right) = -\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$;
- 3) $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4\alpha)$;
- 4) $\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \frac{1}{4} \cos 2\alpha (3 + \cos 4\alpha)$.

2.196. Спростіть вираз A :

$$1) A = \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}\right);$$

$$2) A = \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8} - \alpha\right);$$

$$3) A = \cos^4\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^4\left(\frac{9\pi}{4} - 2\alpha\right);$$

$$4) A = \cos^4\left(\frac{5\pi}{2} + 2\alpha\right) - \sin^4\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right).$$

2.197. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу A :

$$1) A = 4\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha;$$

$$2) A = 2\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha;$$

$$3)^* A = 4\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha;$$

$$4)^* A = \sin^4 \alpha + 2\cos^4 \alpha.$$

Перетворіть у зручний вираз A (**2.198—2.199**).

2.198. 1) $A = \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ;$

2) $A = \sin 12^\circ + \sin 24^\circ + \sin 36^\circ + \sin 48^\circ + \sin 60^\circ;$

3) $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \sin 10^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ;$

4) $A = \cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 18^\circ + \cos 24^\circ + \cos 30^\circ.$

2.199. 1) $A = \sin \frac{\pi}{17} + \sin \frac{2\pi}{17} + \sin \frac{3\pi}{17};$

2) $A = \sin \frac{\pi}{33} + \sin \frac{2\pi}{33} + \sin \frac{3\pi}{33};$

3) $A = \cos \frac{2\pi}{31} + \cos \frac{4\pi}{31} + \cos \frac{6\pi}{31};$

4) $A = \cos \frac{\pi}{25} + \cos \frac{2\pi}{25} + \cos \frac{3\pi}{25};$

5) $A = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11};$

6) $A = \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \cos \frac{7\pi}{19}.$

Раздзел 3

Трыганаметрычныя функцыі

3.1. Трыганаметрычныя функцыі. Перыядычнасць

Няхай x — рэчаісны лік. Разгледзім вугал, радыяннай меры якога з'яўляецца лік x . Для гэтага вугла вызначаны лік $\sin x$.

Такім чынам, кожнаму рэчаіснаму ліку x ставіцца ў адпаведнасць адзін пэўны лік $\sin x$, г. зн. на мностве $\mathbf{R}$ рэчаісных лікаў вызначаецца функцыя

$$y = \sin x.$$

Аналагічна вызначаецца функцыя

$$y = \cos x.$$

Няхай цяпер рэчаісны лік $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Разгледзім вугал, радыяннай меры якога з'яўляецца лік x . Для такога вугла вызначаны лік $\operatorname{tg} x$.

Такім чынам, кожнаму рэчаіснаму ліку, не роўнаму $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, ставіцца ў адпаведнасць адзін пэўны лік $\operatorname{tg} x$. Тым самым на мностве рэчаісных лікаў $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, вызначаецца функцыя

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Аналагічна на мностве рэчаісных лікаў $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, вызначаецца функцыя

$$y = \operatorname{ctg} x.$$

Функцыі сінус, косінус, тангенс і катангенс называюцца *трыганаметрычнымі*. Іх характэрнай уласцівасцю з'яўляецца перыядычнасць.

Азначэнне. Няхай $T \neq 0$. Функцыя f называецца *перыядычнай з перыядам T* , калі для любога значэння x з абсягу вызначэння функцыі лікі $x + T$ і $x - T$ таксама належаць абсягу вызначэння і пры гэтым правільная роўнасць

$$f(x + T) = f(x).$$



Для перыядычнай функцыі f правільная і роўнасць

$$f(x - T) = f(x).$$

Сапраўды, калі $x \in D(f)$, то $(x - T) \in D(f)$ і

$$f(x) = f((x - T) + T) = f(x - T).$$

Паколькі пры $T = 2\pi$ трыганаметрычныя функцыі сінус, косінус, тангенс і катангенс задавальняюць усе ўмовы гэтага азначэння (пераканайцеся ў гэтым), то ўсе яны з'яўляюцца перыядычнымі з перыядам 2π .

Прыклад 1. Ці правільна, што перыядам функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца лік:

- а) 10π ; б) π ; в) 2 ?

Рашэнне. а) Функцыя $y = \sin x$ перыядычная з перыядам 2π . Дадаўшы да аргумента x гэты перыяд некалькі разоў (у прыватнасці, 5 разоў), мы не зменім значэнне функцыі. Таму

$$\sin(x + 10\pi) = \sin(x + 2\pi \cdot 5) = \sin x,$$

значыць, лік 10π з'яўляецца перыядам функцыі $y = \sin x$.

б) Калі лік π — перыяд функцыі $y = \sin x$, то пры любых $x \in \mathbf{R}$ павінна быць правільнай роўнасць $\sin x = \sin(x + \pi)$. Але яна няправільная, напрыклад, пры $x = -\frac{\pi}{2}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)$. Значыць, лік π не з'яўляецца перыядам функцыі $y = \sin x$.

в) Калі лік 2 — перыяд функцыі $y = \sin x$, то пры любых $x \in \mathbf{R}$ павінна быць правільнай роўнасць $\sin(x + 2) = \sin x$. Але, напрыклад, пры $x = 0$ атрымаем $\sin 2 = \sin 0$ — няправільную лікавую роўнасць, значыць, лік 2 не з'яўляецца перыядам гэтай функцыі.

Адказ: а) правільна; б) не; в) не.

Для некаторых трыганаметрычных функцый можна знайсці і меншы, чым 2π , дадатны перыяд.

Прыклад 2. Даказаць, што лік π з'яўляецца перыядам функцыі:

- а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Доказ. а) Для любога значэння $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, лікі $x + \pi$ і $x - \pi$ таксама не роўны $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ні пры якіх $k \in \mathbf{Z}$, г. зн. на-

лежаць абсягу вызначэння тангенса. Застаецца спаслацца на адпаведную формулу прывядзення: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Такім чынам, лік π з'яўляецца перыядам функцыі $y = \operatorname{tg} x$. $\square$

б) Даказваецца аналагічна.

Прыклад 3. Функцыя зададзена формулай $y = \sin x$ на мностве D . Ці правільна, што гэтая функцыя перыядычная з перыядам 2π , калі:

а) $D = [-2\pi; 10\pi]$; б) $D = \mathbb{Z}$?

Рашэнне. а) Паколькі лік $10\pi \in D$, а $(10\pi + 2\pi) \notin D$, то 2π не з'яўляецца перыядам дадзенай функцыі.

б) Не, паколькі лік $0 \in D$, а лік $(0 + 2\pi) \notin D$ ($D = \mathbb{Z}$). (Замест нуля можна было б узяць любы цэлы лік.)

Адказ: а) не; б) не.



Любая функцыя з абсягам вызначэння D у выглядзе адрэзка не можа быць перыядычнай з перыядам $T \neq 0$. Сапраўды, заўсёды знойдзецца такі $x \in D$, што або $(x + T) \notin D$, або $(x - T) \notin D$.

Прыклад 4. Даказаць, што лік $\frac{\pi}{2}$ з'яўляецца перыядам функцыі $y = \cos 4x$.

Доказ. Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў $\mathbb{R}$.

Паколькі $\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x + 2\pi) = \cos 4x$, то роўнасць $\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4x$ правільная пры любым $x \in \mathbb{R}$. Такім чынам, лік $\frac{\pi}{2}$ — перыяд функцыі $y = \cos 4x$. $\square$

Тэарэма. Справядлівыя наступныя сцверджанні:

а) 2π — найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$ і функцыі $y = \cos x$;

б) π — найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} x$ і функцыі $y = \operatorname{ctg} x$.

Доказ. а) Напомнім, што 2π — дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$. Няхай існуе $0 < T \leq 2\pi$ — дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$, тады пры любым x мае месца тоеснасць $\sin(x + T) = \sin x$. Падставіўшы ў яе, напрыклад, значэнне $x = 0$, атрымаем $\sin T = 0$. Значыць, $T = \pi$ або $T = 2\pi$. Але $\sin(x + \pi) = -\sin x$, таму

π не з'яўляецца перыядам функцыі $y = \sin x$. Такім чынам, $T = 2\pi$. Значыць, 2π — найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$.

Доказ для функцыі $y = \cos x$ аналагічны. $\square$

б) Напомнім, што π — дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} x$. Няхай існуе $0 < T \leq \pi$ — дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} x$, тады пры любым x з абсягу вызначэння тангенса мае месца тоеснасць $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$. Падставіўшы ў яе, напрыклад, значэнне $x = 0$, атрымаем $\operatorname{tg} T = 0$. Такім чынам, $T = \pi$. Значыць, π — найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} x$.

Доказ для функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ аналагічны. $\square$

▲ **Прыклад 5.** Запісаць найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

Рашэнне. Знайдзем абсяг вызначэння D функцыі $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$:

$$\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{г. зн.} \quad x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Няхай T — найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$. Тады $T > 0$ — найменшы дадатны лік, які задавальняе ўмову $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \operatorname{tg} \frac{x+T}{3}$, г. зн.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{T}{3} \right).$$

Паколькі π — найменшы дадатны перыяд функцыі тангенса (гл. тэарэму), то $\frac{T}{3} = \pi$, г. зн. $T = 3\pi$.

Застаецца заўважыць, што калі $x \in D$, г. зн. $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $x + 3\pi \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, а гэта азначае, што $(x + 3\pi) \in D$. Аналагічна атрымліваем, што калі $x \in D$, то $i(x - 3\pi) \in D$.

Адказ: 3π . ▲



1. Патлумачце, чаму формулай $y = \sin x$ ($y = \cos x$) на мностве $\mathbb{R}$ задаецца функцыя.
2. Патлумачце, чаму формулай $y = \operatorname{tg} x$ на мностве рэчаісных лікаў $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, задаецца функцыя.
3. Патлумачце, чаму формулай $y = \operatorname{ctg} x$ на мностве рэчаісных лікаў $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, задаецца функцыя.

4. Сфармулюйце азначэнне перыядычнай функцыі з перыядам $T \neq 0$.
5. Дакажыце, што функцыя сінус (косінус) з'яўляецца перыядычнай з перыядам 2π .
6. Дакажыце, што функцыя тангенс (катангенс) з'яўляецца перыядычнай з перыядам π .
7. Дакажыце, што найменшым дадатным перыядам функцыі сінус (косінус) з'яўляецца 2π .
8. Дакажыце, што найменшым дадатным перыядам функцыі тангенс (катангенс) з'яўляецца π .

Практыкаванні

3.1°. Якія з лікаў 4, 5, 9, 13, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π , 2π , 3π , 4π , 5π , 6π , 7π , 10π , 11π , 12π , 16π , 21π з'яўляюцца перыядамі функцыі:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $y = \sin x$; | 2) $y = \cos x$; |
| 3) $y = \operatorname{tg} x$; | 4) $y = \operatorname{ctg} x$; |
| 5) $y = \sin \frac{x}{3}$; | 6) $y = \cos 2x$; |
| 7) $y = \operatorname{ctg} 2x$; | 8) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$? |

3.2. Для кожнай з функцый 5)–8) практыкавання 3.1 на-
завіце найменшы дадатны перыяд.

3.3. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ перыядычная з перыя-
дам T , калі:

- 1) $f(x) = 3 \sin x$, $T = 2\pi$;
- 2) $f(x) = 6 \cos x$, $T = 2\pi$;
- 3) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $T = -\pi$;
- 4) $f(x) = 2 \cos 4x$, $T = -\frac{\pi}{2}$.

3.4. Функцыя зададзена формулай $y = f(x)$ на мностве D . Ці
правільна, што гэта функцыя перыядычная, калі:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $f(x) = \cos x$; | 2) $f(x) = \sin x$; |
| 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$; | 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, |

а D — адзін з прамежкаў:

- а) $[-2\pi; \pi]$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[-4\pi; 20\pi]$; г) $[0; +\infty)$; д) $[-3\pi; 5\pi]$;
е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; ж) $[-\pi; 2\pi]$?

3.5. Для функцыі f запішыце T — яе найменшы дадатны перыяд, калі:

1) $f(x) = -4 \operatorname{ctg} x + 2$;

2) $f(x) = 6 \operatorname{tg} x - 1$;

3) $f(x) = \frac{1}{4} \cos 3x - 6$;

4) $f(x) = -2 \sin 2x + 3$;

5) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$;

6) $f(x) = 8 \cos 4x$;

7) $f(x) = \frac{3}{4} \cos \frac{x}{2}$;

8) $f(x) = \frac{5}{2} \sin \frac{x}{3}$;

9) $f(x) = \frac{1}{5} \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

10) $f(x) = 10 \operatorname{ctg} \frac{x}{6}$.

3.6. Для кожнай функцыі з практыкавання 3.5 дакажыце, што:

а) лік -12π з'яўляецца яе перыядам;

б) лік 24π з'яўляецца яе перыядам;

в) лік $\frac{\pi}{7}$ не з'яўляецца яе перыядам;

г) лік $-\frac{\pi}{5}$ не з'яўляецца яе перыядам.

Запішыце абсяг вызначэння функцыі f і яе найменшы дадатны перыяд (3.7—3.8).

3.7. 1) $f(x) = -\sin(-x)$;

2) $f(x) = -\cos(-x)$;

3) $f(x) = (-1)^{13} \operatorname{tg}(-x)$;

4) $f(x) = (-1)^{46} \operatorname{ctg}(-x)$;

5) $f(x) = \operatorname{ctg} x \sin x + \cos x$;

6) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x \cos x$;

7) $f(x) = \frac{1 - (\sin x + \cos x)^2}{\operatorname{ctg} x \sin x}$;

8) $f(x) = \frac{1 - (1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\operatorname{tg} x \cos x}$;

9)* $f(x) = 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \sin x - 1$;

10)* $f(x) = -1 + \cos x + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

3.8. 1) $f(x) = \sqrt{\sin^2(-x)}$;

2) $f(x) = \sqrt{\cos^2(-x)}$;

3) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}^2(-x)}$;

4) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg}^2(-x)}$;

5) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$;

6) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}$;

7) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$;

8) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$;

9) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$;

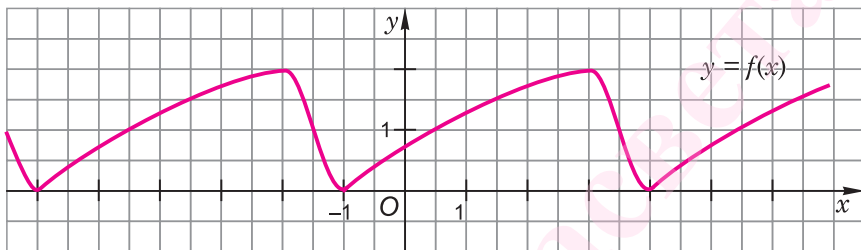
10) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$.

▲ 3.2. Перыядычныя функцыі

Прыклад 1. На рысунку 100 паказаны відарыс часткі графіка перыядычнай функцыі $y = f(x)$ з абсягам вызначэння $D(f) = \mathbb{R}$ і найменшым дадатным перыядам T , дзе $0 < T < 6$. Чаму роўна значэнне функцыі $f(x)$ пры x , роўным:

- а) T ; б) $3 + 4T$; в) 29 ?

Рашэнне. На рысунку 100 бачна, што $T = 5$.



Рыс. 100

Па азначэнні перыядычнай функцыі для любога x з абсягу вызначэння функцыі правільная роўнасць $f(x + T) = f(x)$. Выкарыстаўшы гэту роўнасць і даныя рысунка 100, знойдзем значэнні $f(x)$ для выпадкаў а)–в).

а) $f(T) = f(0 + T) = f(0) = 0,75$ (гл. рыс. 100; тут $x = 0$).

б) $f(3 + 4T) = f(3) = 2$ (гл. рыс. 100; тут $x = 3$).

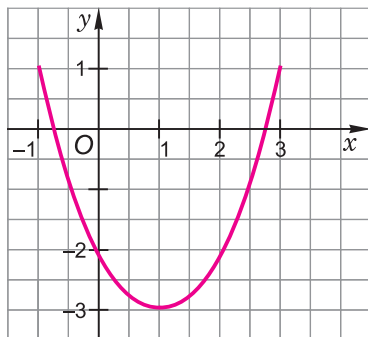
в) Паколькі $T = 5$, то, запісаўшы 29 у выглядзе $29 = -1 + 30 = -1 + 6T$, атрымліваем $f(29) = f(-1 + 6T) = f(-1) = 0$ (гл. рыс. 100; тут $x = -1$).

Адказ: а) $0,75$; б) 2 ; в) 0 .

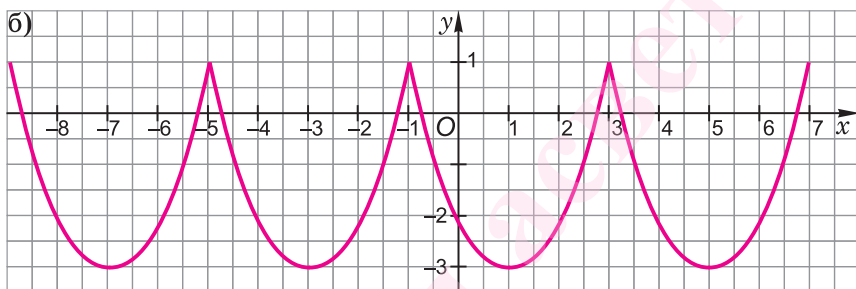
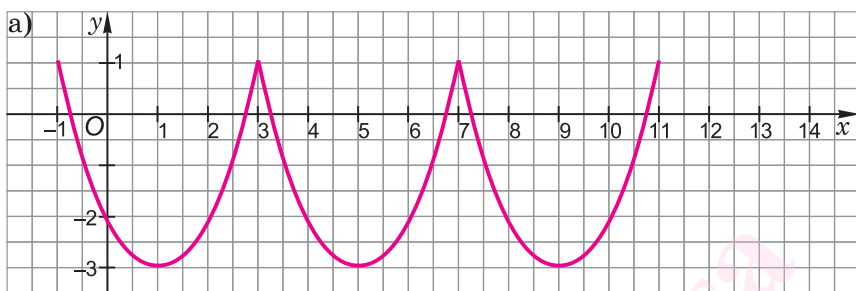
Прыклад 2. На рысунку 101 паказаны відарыс часткі графіка перыядычнай функцыі f з абсягам вызначэння $D(f) = \mathbb{R}$ і найменшым дадатным перыядам $T = 4$. Паказаць відарыс графіка функцыі $y = f(x)$ на прамежку:

- а) $[-1; 11]$; б) $[-9; 7]$.

Рашэнне. а) Даўжыня прамежку $[-1; 3]$ роўна 4, г. зн. найменшаму дадатнаму перыяду T



Рыс. 101



Рыс. 102

функцыі. Каб атрымаць відарыс графіка функцыі f на пра-
межку $[-1; 11]$, прадубліруем (двойчы) дадзены на рысун-
ку 101 відарыс, зрушваючы яго на 4 адзінкі (г. зн. на T адзі-
нак) управа ўздоўж восі Ox . На рысунку 102, а паказаны атры-
маны відарыс графіка функцыі f на адрэзку $[-1; 11]$.

б) На рысунку 102, б паказаны відарыс графіка функцыі f
на адрэзку $[-9; 7]$. Каб яго атрымаць, лінію, паказаную на ры-
сунку 101, двойчы зрушылі ўздоўж восі Ox на 4 адзінкі ўле-
ва і адзін раз управа.



Відарыс графіка перыядычнай функцыі f з наймен-
шым дадатным перыядам T можна атрымаць так: па-
казаць відарыс часткі гэтага графіка на адным з пра-
межкаў абсягу вызначэння, даўжыня якога роўна T ,
а затым паслядоўна зрушваць гэту лінію ўлева і ўпра-
ва ўздоўж восі Ox на T .

Прыклад 3. На рысунку 103 паказаны відарыс часткі гра-
фіка перыядычнай функцыі f з абсягам вызначэння, які скла-
даецца з усіх лікаў $x \neq -2 + 3n$, $n \in \mathbb{Z}$, і найменшым дадатным

перыядам $T = 3$. Паказаць відарыс графіка функцыі $y = f(x)$.

Рашэнне. Даўжыня прамежку $[-4; -1]$ роўна 3, г. зн. найменшаму дадатнаму перыяду дадзенай функцыі f . Атрымаць відарыс графіка функцыі f можна, шматразова зрушваючы дадзены на рысунку 103 відарыс часткі графіка на 3 адзінкі ўлева і ўправа ўздоўж восі Ox (рыс. 104).

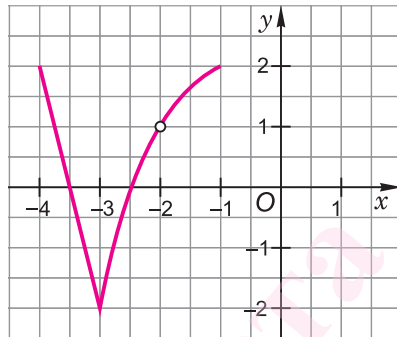


Рис. 103

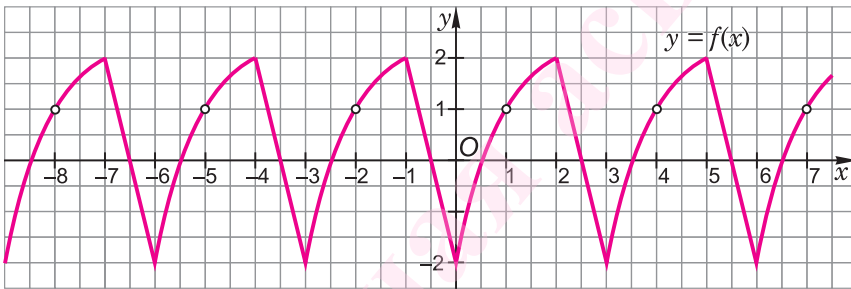


Рис. 104

Тэарэма 1. Калі лік T — перыяд функцыі f , то пры любым цэлым $n \neq 0$ лік nT — таксама перыяд гэтай функцыі.

Доказ. Няхай $x \in D(f)$ і $n = -1$. Паколькі $T \neq 0$, то і $-T \neq 0$. Па азначэнні перыядычнай функцыі маем:

$$x + (-T) = x - T \in D(f), \quad x - (-T) = x + T \in D(f),$$

а таксама $f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x)$. Гэта азначае, што $-T$ — перыяд функцыі f .

Няхай цяпер $n = 2$. Паколькі $T \neq 0$, то і $2T \neq 0$.

Па азначэнні перыядычнай функцыі $x + T \in D(f)$, значыць, $(x + T) + T = x + 2T \in D(f)$, а таксама $x - T \in D(f)$, такім чынам, $(x - T) - T = x - 2T \in D(f)$.

І нарэшце, $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$. Гэта азначае, што $2T$ — перыяд функцыі f .

Аналагічна даказваецца, што калі $2T$ — перыяд функцыі f , то $3T = 2T + T$ — яе перыяд, калі $3T$ — перыяд функцыі f , то $4T = 3T + T$ — яе перыяд і г. д.

Значыць, пры $n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, лік nT — перыяд функцыі f . $\square$

Тэарэма 2. Калі $y = f(x)$ — перыядычная функцыя з перыядам T , то $y = f(px)$ — перыядычная функцыя з перыядам $\frac{T}{p}$.

Доказ. Абсяг вызначэння функцыі $y = f(px)$ складаецца з тых лікаў x , для якіх $px \in D(f)$. Але калі $px \in D(f)$, то абсягу вызначэння $D(f)$ належыць і лік $px + T$, а гэта можна запісаць так: $p\left(x + \frac{T}{p}\right) \in D(f)$.

Такім чынам, калі лік x належыць абсягу вызначэння функцыі $y = f(px)$, то і лік $x + \frac{T}{p}$ належыць абсягу вызначэння гэтай функцыі.

Аналагічна даказваецца, што калі лік x належыць абсягу вызначэння функцыі $y = f(px)$, то і лік $x - \frac{T}{p}$ належыць абсягу вызначэння гэтай функцыі. (Правядзіце доказ самастойна.)

Застаецца заўважыць, што:

$$f\left(p\left(x + \frac{T}{p}\right)\right) = f(px + T) = f(px). \quad \square$$



Паколькі абсяг вызначэння перыядычнай функцыі неабмежаваны, то функцыі з абмежаваным абсягам вызначэння не могуць быць перыядычнымі.

Акрамя таго, калі хаця б адзін лік не належыць абсягу вызначэння перыядычнай функцыі, то яму не належыць бясконца многа лікаў.

Прыклад 4. Вядома, што функцыя f з абсягам вызначэння D — перыядычная з перыядам $T \neq 0$. Ці можа быць:

- а) $D = \mathbb{N}$; б) $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

Рашэнне. а) Не, не можа, паколькі па азначэнні перыядычнай функцыі, калі, напрыклад, лік 1 належыць мноству $D(f)$, то лікі $1 + T$ і $1 - T$ належаць гэтаму мноству. Але

паколькі $T \neq 0$, то адзін з гэтых лікаў не будзе натуральным і не будзе належаць мноству $D(f) = \mathbb{N}$.

б) Не, не можа, паколькі лік T належыць мноству $D(f)$, а лік $T - T = 0$ не належыць яму.



1. Пры якіх пераўтварэннях графік перыядычнай функцыі з перыядам T сумяшчаецца сам з сабой?
2. Назавіце асаблівасці абсягу вызначэння перыядычнай функцыі.
3. Прывядзіце прыклад лікавага мноства, якое не можа быць абсягам вызначэння перыядычнай функцыі.
4. Функцыя f перыядычная з перыядам $T \neq 0$; якія яшчэ лікі могуць быць перыядам функцыі f ?
5. Функцыя $y = f(x)$ перыядычная з перыядам $T \neq 0$. Назавіце перыяд функцыі:

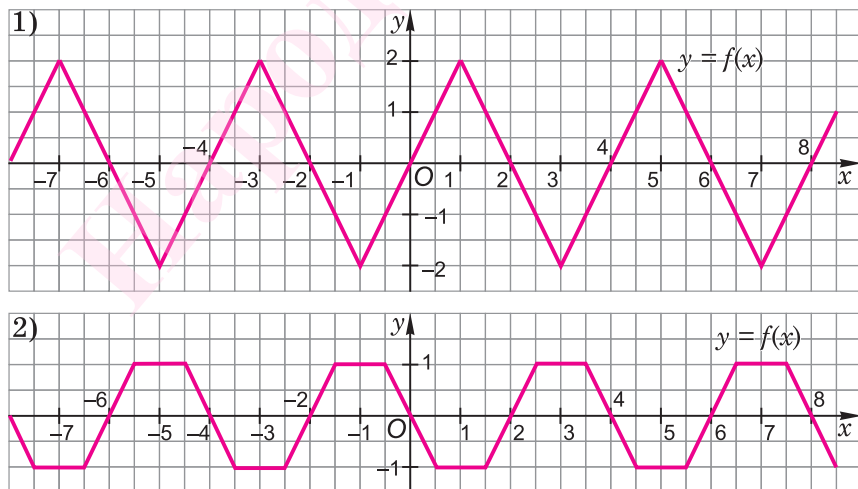
а) $y = f(3x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{5}\right)$; в) $y = f(px)$, $p > 0$.

Практыкаванні

3.9. Ці можа быць перыядычнай функцыя f , зададзеная на мностве $\mathbb{R}$, калі яна:

- 1) нарастальная на $\mathbb{R}$; 2) спадальная на $\mathbb{R}$?

3.10. На рысунку 105 паказаны відарыс часткі графіка перыядычнай функцыі f , вызначанай на мностве $\mathbb{R}$, з пе-



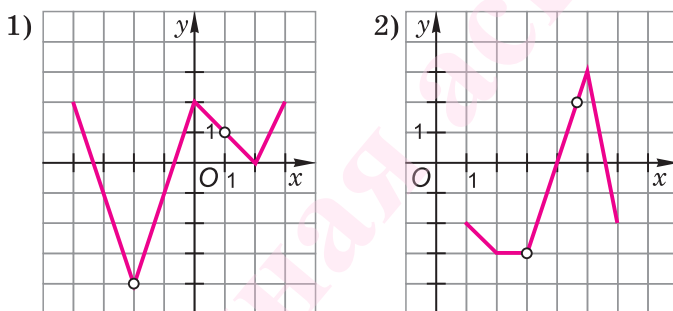
Рыс. 105

прыядам T , дзе $0 < T < 8$. Запішыце найменшае значэнне T . Чаму роўна значэнне функцыі $f(x)$ пры x , роўным:

- а) $0 + T$; б) $2 + T$; в) $12 + 6T$;
г) $8 + 3T$; д) 18 ; е) 32 ?

3.11. На рысунку 106 паказаны відарыс часткі графіка перыядычнай функцыі f на прамежку, даўжыня якога роўна яе найменшаму дадатнаму перыяду T . Вызначыце найменшы дадатны перыяд T функцыі f і пакажыце відарыс яе графіка на любым прамежку, даўжыня якога роўна:

- а) $2T$; б) $3T$; в) $5T$; г) $4T$.



Рыс. 106

3.12. Функцыя $y = f(x)$ з абсягам вызначэння $\mathbf{R}$ — перыядычная з перыядам $T = 2$. На прамежку D значэнне функцыі f супадае са значэннем функцыі $y = g(x)$. Знайдзіце значэнне функцыі $f(a)$, калі:

- 1) $D = [0; 2]$, $g(x) = 2x^2 - 4x$ і $a = 3$;
2) $D = [-1; 1]$, $g(x) = x^3 - x$ і $a = 2$;
3) $D = [-2; 0]$, $g(x) = x^4 + x^2$ і $a = 5$;
4) $D = [3; 5]$, $g(x) = 3x^3 + 3x^2$ і $a = -8$.

3.13. Дакажыце, што функцыя f не з'яўляецца перыядычнай, калі:

- 1) $f(x) = 2x - 5$; 2) $f(x) = 4x + 8$; 3) $f(x) = \frac{1}{x+5}$;
4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$; 6) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$;
7) $f(x) = x \sin x$; 8) $f(x) = x \cos x$;
9) $f(x) = 2x + \cos x$; 10) $f(x) = \sin x - 4x$.

3.14. Вядома, што функцыя f перыядычная з перыядам $T \neq 0$. Ці можа абсягам вызначэння $D(f)$ гэтай функцыі быць мноства:

- 1) $\mathbb{Z}$; 2) N ; 3) $[-1; 2]$;
 4) $[-8; 8]$; 5) $(-\infty; 0)$; 6) $(0; +\infty)$;
 7) $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$;
 8) $(-\infty; -6) \cup (-6; 1) \cup (1; +\infty)$?

3.15. Ці можа абсягам вызначэння перыядычнай функцыі f з перыядам $T \neq 0$ быць мноства ўсіх рэчаісных лікаў x такіх, што:

- 1) $|x| \neq -5$; 2) $x \neq \pm 13$;
 3) $x \neq \pm 9, x \neq \pm 2$; 4) $|x| \neq 4, |x| \neq 7$;
 5) $x \neq 3p - 2, p \in \mathbb{Z}$; 6) $x \neq 2p - 1, p \in \mathbb{Z}$;
 7) $x \neq \frac{3\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 8) $x \neq \pi + \frac{\pi k}{2}, k \in N$?

Запішыце найменшы дадатны перыяд функцыі f (**3.16—3.17**).

- 3.16.** 1) $f(x) = 4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \frac{2}{5} \cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)$;
 3) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} - 0,2x\right)$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{24} - 1,5x\right)$;
 5) $f(x) = \cos x + \cos 3x$; 6) $f(x) = \sin 2x - \sin 4x$;
 7) $f(x) = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x$; 8) $f(x) = 5 \sin 7x - 12 \cos 7x$.

- 3.17*.** 1) $f(x) = \sin \pi x$; 2) $f(x) = \cos \pi x$;
 3) $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x + 1)$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg}(2 - \pi x)$;
 5) $f(x) = \sin^2 3x$; 6) $f(x) = \cos^2 \frac{2x}{3}$;
 7) $f(x) = |\cos 1,5x|$; 8) $f(x) = |\sin 0,5x|$.

3.18. Запішыце перыядычную функцыю f , у якой:

- 1) няма найменшага дадатнага перыяду;
 2) перыядам з'яўляецца любы рэчаісны лік.

3.19. Задайце формулай перыядычную функцыю f з найменшым дадатным перыядам T , роўным:

- 1) 2; 2) 5; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$.

3.20*. Функцыя $y = f(x)$ з абсягам вызначэння R — перыядычная з найменшым дадатным перыядам $T = 3$. На прамежку $[-1; 2)$ яе значэнні супадаюць са значэннямі функцыі $y = g(x)$. Пакажыце відарыс графіка функцыі f , калі:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1) $g(x) = x - 1$; | 2) $g(x) = 1 - x$; |
| 3) $g(x) = -x^2$; | 4) $g(x) = x^2$; |
| 5)* $g(x) = x $; | 6)* $g(x) = - x $; |
| 7) $g(x) = -x^3$; | 8) $g(x) = x^3$. |

3.3. Функцыя $y = \sin x$

Разгледзім *функцыю сінус*, зададзеную формулай $y = \sin x$, з абсягам вызначэння — мноствам R .

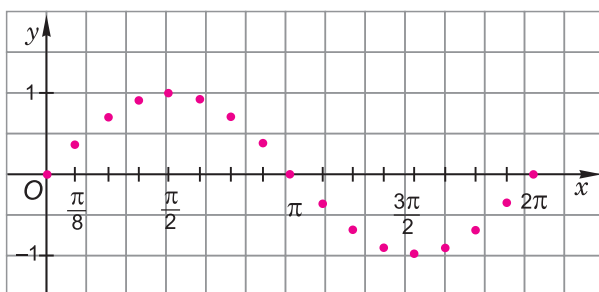
Пакажам відарыс графіка функцыі $y = \sin x$. Зробім гэта спачатку на прамежку даўжынёй, роўнай перыяду сінуса. Для гэтага запоўнім табліцу значэнняў функцыі сінус для значэнняў аргумента на прамежку $[0; 2\pi]$, узятых праз $\frac{\pi}{8}$, з дакладнасцю да 0,1 (прыбліжаныя значэнні сінуса можна знайсці, выкарыстаўшы адзінкавую акружнасць (гл. рыс. 76), калькулятар або табліцы).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin x$	0	0,4	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,4	0

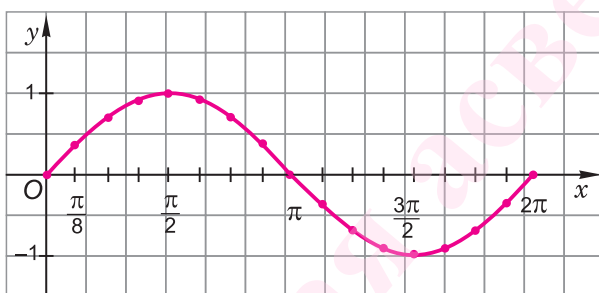
x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\sin x$	0	-0,4	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,4	0

Адзначыўшы гэтыя пункты на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 107) і злучыўшы іх плаўнай лініяй (рыс. 108), атрымаем відарыс графіка функцыі $y = \sin x$ на прамежку $[0; 2\pi]$.

Паколькі, як было паказана ў п. 3.1, функцыя сінус перыядычная з найменшым дадатным перыядам, роўным 2π , то яе значэнні паўтараюцца праз 2π . Намі атрыманы відарыс



Рыс. 107

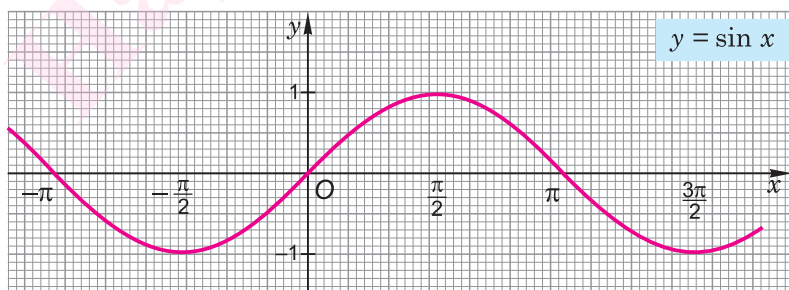


Рыс. 108

графіка на прамежку, даўжыня якога роўна 2π . Зрушваючы гэту лінію шматразова ўправа і ўлева ўздоўж восі Ox на 2π , атрымліваем відарыс графіка функцыі $y = \sin x$ (рыс. 109).

Графік функцыі $y = \sin x$ называецца **сінусоідай**.

Відарыс сінусоіды дае нагляднае ўяўленне аб усіх уласцівасцях функцыі сінус.



Рыс. 109

Тэарэма (аб уласцівасцях функцыі $y = \sin x$).

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \sin x$ — мноства $\mathbf{R}$.

2. Мноства значэнняў функцыі $y = \sin x$ — прамежак $[-1; 1]$.

3. Функцыя $y = \sin x$ перыядычная з перыядам 2π .

4. Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя $y = \sin x$ прымае ў пунктах $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя $y = \sin x$ прымае ў пунктах $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

5. Графік функцыі праходзіць праз пункт $(0; 0)$ — пачатак каардынат; з воссю Oy ён перасякаецца толькі ў пункце $(0; 0)$, а з воссю Ox — у пунктах $(\pi k; 0), k \in \mathbf{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \sin x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

7. Функцыя $y = \sin x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$.

8. Функцыя $y = \sin x$ няцотная.

9. Функцыя $y = \sin x$ нарастае на кожным з прамежкаў $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$, і спадае на кожным з прамежкаў $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbf{Z}$.

Доказ. Уласцівасці 1 і 3 былі ўстаноўлены ў п. 3.1.

Уласцівасці 2, 4—8 можна ўбачыць на відарысе графіка функцыі $y = \sin x$ на рысунку 109 (яшчэ гавораць: «*прачытаць уласцівасці па графіку*»). Яны фактычна былі абгрунтаваны ў п. 2.4 і 2.5.

▲ Правядзём доказ уласцівасці 9. Разгледзім функцыю $y = \sin x$ на прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Няхай $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $x_1 < x_2$. Тады $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.

Сапраўды, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (дакажыце гэта самастойна). Зна-

чыць, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. А паколькі $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (дакажыце гэта), то $\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Значыць, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Такім чынам, на прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі, адкуль па азначэнні вынікае, што функцыя $y = \sin x$ на гэтым прамежку нарастае. З прычыны перыядычнасці яна нарастае на кожным з прамежкаў $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналагічна даказваецца, што функцыя $y = \sin x$ спадае на прамежку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а значыць, і на кожным з прамежкаў $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. $\boxtimes \blacktriangle$

Напомнім, што па азначэнні на прамежку нарастання (спадання) функцыі f , калі $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). Правільнае і адваротнае сцверджанне, якое мы часта будзем выкарыстоўваць у далейшым:

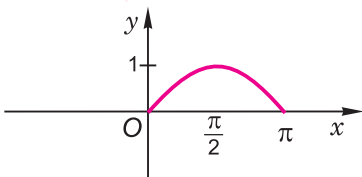


на прамежку нарастання функцыі f , калі $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, а на прамежку спадання функцыі f , калі $f(x_2) < f(x_1)$, то $x_2 > x_1$.

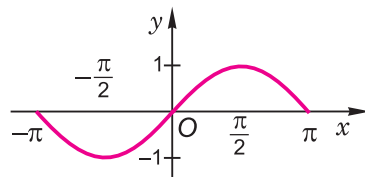
Дакажыце гэта сцверджанне метадам ад процілеглага.



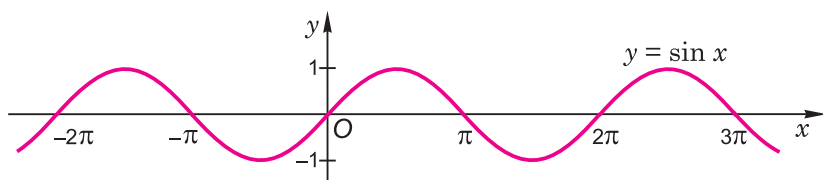
▲ Відарыс графіка функцыі сінус можна атрымаць некалькі інакш: прымаючы пад увагу не толькі перыядычнасць функцыі, але і яе няцотнасць. Для гэтага дастаткова спачатку атрымаць відарыс графіка на прамежку $[0; \pi]$, а затым выкарыстаць сіметрыю графіка няцотнай функцыі адносна пачатку каардынат і перыядычнасць функцыі сінус (рыс. 110, 111, 112). ▲



Рыс. 110



Рыс. 111



Рыс. 112

Прыклад 1. Параўнаць значэнні выразаў

$$\sin 7, \sin 1, \sin 4.$$

Рашэнне. Маём $\sin 7 = \sin(7 - 2\pi) \approx \sin 0,72 < \sin 1$, паколькі $0,72$ і 1 належаць прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а на гэтым прамежку функцыя $y = \sin x$ нарастае і яе значэнні неадмоўныя.

Паколькі вугал, радыянная мера якога роўна 4 , заканчваецца ў III чвэрці, то $\sin 4 < 0$.

Адказ: $\sin 4 < \sin 7 < \sin 1$.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\sin(3x - 1) = -1$.

Рашэнне. Рашэннямі ўраўнення $\sin u = -1$ з'яўляюцца значэнні $u = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, пры якіх функцыя $y = \sin u$ прымае найменшыя значэнні, роўныя -1 . Пры $u = 3x - 1$ маем:

$$3x - 1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 3*. Рашыць няроўнасць:

$$\text{а) } \sin \frac{x}{4} > 0; \quad \text{б) } \sin(5x + 8) < 1.$$

Рашэнне: а) Рашэнне няроўнасці $\sin u > 0$ супадае з прамежкамі, на якіх функцыя $y = \sin u$ прымае дадатныя значэнні, г. зн. $2\pi k < u < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (уласціvasць 7 функцыі $y = \sin x$).

Пры $u = \frac{x}{4}$ маем:

$$2\pi k < \frac{x}{4} < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$8\pi k < x < 4\pi + 8\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Паколькі мноствам значэнняў функцыі $y = \sin u$ з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$, то няроўнасць $\sin u < 1$ правільная пры ўсіх значэннях u , акрамя тых, дзе $\sin u = 1$. Такім чынам, $u \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Пры $u = 5x + 8$ маем:

$$5x + 8 \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

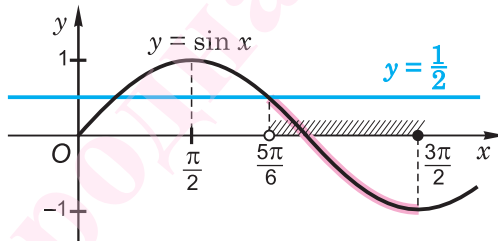
Адказ: а) $(8\pi k; 4\pi + 8\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 4*. Рашыць няроўнасць $\sin x < \frac{1}{2}$ на прамежку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Рашэнне. На прамежку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функцыя $y = \sin x$ спадае ад 1 да -1 і прымае значэнне $\frac{1}{2}$ у пункце $x = \frac{5\pi}{6}$.

Паколькі $\sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin x < \sin \frac{5\pi}{6}$, то $\frac{5\pi}{6} < x \leq \frac{3\pi}{2}$ (рыс. 113).

Адказ: $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.



Рыс. 113



- Назавіце асноўныя ўласцівасці функцыі $y = \sin x$.
- Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = \sin x$. Як яго называюць?
- Як на відарысе графіка функцыі $y = \sin x$ адлюстроўваецца яе ўласцівасць:
 - перыядычнасць;
 - няцотнасць?
- Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \sin x$, назавіце для яе:
 - найменшае (найбольшае) значэнне;
 - прамежкі знакапастаянства і нулі;
 - прамежкі спадання (нарастання).

5. Чому роўны найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$?

6*. Дакажыце, што функцыя $y = \sin x$ нарастае на кожным з прамежкаў выгляду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

7*. Дакажыце, што функцыя $y = \sin x$ спадае на кожным з прамежкаў выгляду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Практыкаванні

3.21°. Для функцыі f запішыце $D(f)$ — яе абсяг вызначэння і $E(f)$ — яе мноства значэнняў:

1) $f(x) = \sin x + 1$;

2) $f(x) = \sin x - 2$;

3) $f(x) = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3}$;

4) $f(x) = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 3$;

5) $f(x) = |\sin x|$;

6) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

3.22. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння з восямі Ox і Oy графіка функцыі $y = f(x)$, калі:

1) $f(x) = \sin x - 2,5$;

2) $f(x) = \sin x + 1,5$;

3) $f(x) = \sin x - 1$;

4) $f(x) = \sin x + 1$.

3.23. Размясціце ў парадку спадання лікі:

1) $\sin \frac{9\pi}{10}$; $\sin \frac{6\pi}{5}$; $\sin \frac{7\pi}{15}$; $\sin \frac{12\pi}{5}$;

2) $\sin\left(-\frac{25\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$; $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

3) $\sin(-0,3)$; $\sin(-2)$; $\sin(-1,5)$; $\sin(-4,5)$;

4) $\sin 5,4$; $\sin 3,1$; $\sin 1,2$; $\sin 1,6$.

3.24°. Параўнайце:

1) $\sin \frac{3\pi}{7}$ і $\sin \frac{2\pi}{9}$;

2) $\sin \frac{5\pi}{12}$ і $\sin \frac{7\pi}{8}$;

3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ і $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$;

4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$ і $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$;

5) $\sin(-3,14)$ і $\sin(-3,2)$;

6) $\sin(-4,78)$ і $\sin(-5)$.

3.25°. Вызначыце, цотнай або няцотнай з'яўляецца функцыя f :

1) $f(x) = \sin^2 x$;

2) $f(x) = x^7 \sin x$;

3) $f(x) = x^5 + \sin^3 x$;

4) $f(x) = x^3 - \sin^9 x$;

5) $f(x) = \frac{4^3 \sin^2 x}{x^2}$;

6) $f(x) = \frac{3^4 \sin \frac{x}{2}}{x^5}$;

7) $f(x) = x \sin^2 x$;

8) $f(x) = x^4 \sin x$.

3.26°. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \sin x$ (гл. рыс. 109), параўнайце з нулём значэнне выразу:

1) $\sin \frac{4\pi}{15}$;

2) $\sin \frac{13\pi}{8}$;

3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$;

4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;

5) $\sin 2,3$;

6) $\sin 5,1$;

7) $\sin(-1,7)$;

8) $\sin(-4,9)$.

3.27°. Функцыя f зададзена формулай $y = \sin x$ на мностве D . Запішыце для функцыі f :

а) найменшае значэнне; б) найбольшае значэнне; в) прамежкі нарастання; г) прамежкі спадання; д) прамежкі, на якіх $f(x) < 0$; е) прамежкі, на якіх $f(x) > 0$; ж) нулі, калі:

1) $D = [0; 3\pi]$;

2) $D = [-\pi; 2\pi]$;

3) $D = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$;

4) $D = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$;

5) $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$;

6) $D = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$;

7) $D = [-1; 0]$;

8) $D = [0; 1]$.

3.28. Выкарыстаўшы відарыс сінусоіды (гл. рыс. 109), знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу (з дакладнасцю да 0,1):

1) $\sin 2$;

2) $\sin 1$;

3) $\sin(-4)$;

4) $\sin(-2)$;

5) $\sin 5,5$;

6) $\sin 3,8$.

3.29. Рашыце ўраўненне:

1) $\sin 6x = 0$;

2) $\sin \frac{x}{3} = 0$;

3) $\sin(2x + 3) = 1$;

4) $\sin(0,1x - 5) = 1$;

5) $\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

6) $\sin\left(\frac{5x}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) = -1$;

7) $\sin^2\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$;

8) $\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)\right| - 1 = 0$.

3.30. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі сінус:

- 1) $\sin \frac{x}{6} \leq 0$;
- 2) $\sin 3x > 0$;
- 3) $\sin(2x - 2) > -1$;
- 4) $\sin(3x + 1) \leq -1$;
- 5) $\sin(\pi - 4x) \leq 1$;
- 6) $\sin(2x - \pi) > -1$.

3.31. Вызначыце, у якіх пунктах прамежку $[-2\pi; 2\pi]$ вызначана функцыя $y = f(x)$, і пакажыце на ім відарыс графіка функцыі, калі:

- 1) $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;
- 2) $f(x) = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;
- 3) $f(x) = \operatorname{tg} x \cos x$;
- 4) $f(x) = 1 : \frac{1}{\sin x}$;
- 5) $f(x) = (\sqrt{\sin x})^2$;
- 6) $f(x) = (\sqrt{\sin x + 1})^2 - 1$.

3.32. Пры якіх значэннях m існуюць такія значэнні x , пры якіх будзе правільнай роўнасць:

- 1) $2\sin x = m + 1$;
- 2) $3\sin x = m - 2$;
- 3) $\sin^2 x = m$;
- 4) $\sin^2 x - 1 = m$?

3.33. Рашыце ўраўненне $\sin x = a$ пры $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, калі a роўна:

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 4) $-\frac{1}{2}$;
- 5) $0,13$;
- 6) $\frac{5}{7}$;
- 7) -1 ;
- 8) 1 ;
- 9) $\sqrt{3}$;
- 10) $-\sqrt{2}$.

3.34. Пры якіх значэннях x з прамежку D функцыя $y = \sin x$ прымае:

а) дадатныя значэнні; б) адмоўныя значэнні, калі:

- 1) $D = \left[-2\frac{5}{6}\pi; -\frac{\pi}{10}\right]$;
- 2) $D = \left[8\frac{2}{3}\pi; 10\frac{3}{8}\pi\right]$;
- 3) $D = (-0,9\pi; 4,1\pi]$;
- 4) $D = [-1,3\pi; 1,6\pi)$?

3.35*. Рашыце на прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ няроўнасць:

- а) $\sin x < a$;
- б) $\sin x > a$;
- в) $\sin x \leq a$;
- г) $\sin x \geq a$, калі a роўна:
- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 4) $-\frac{1}{2}$;
- 5) -1 ;
- 6) 1 ;
- 7) $\frac{5}{7}$;
- 8) $0,43$;
- 9) $\frac{\pi}{3}$;
- 10) $-\sqrt{\pi}$.

3.36*. Знайдзіце на прамежку $[-\pi; \pi]$ рашэнні ўраўнення:

- 1) $\sin x = 0,3$; 2) $\sin x = 0,6$;
 3) $\sin x = -0,7$; 4) $\sin x = -0,2$.

3.37*. Знайдзіце на прамежку $[-\pi; \pi]$ рашэнні няроўнасці:

- 1) $\sin x < 0,7$; 2) $\sin x > 0,4$;
 3) $\sin x \leq -0,4$; 4) $\sin x \geq -0,3$.

3.4. Функцыя $y = \cos x$

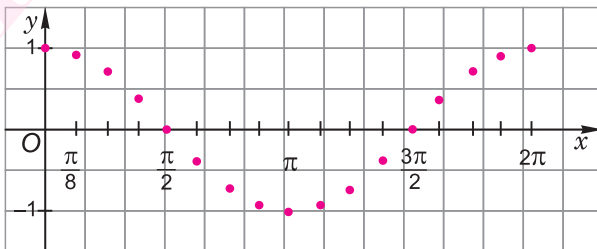
Разгледзім *функцыю косінус*, зададзеную формулай $y = \cos x$, з абсягам вызначэння — мноствам $\mathbf{R}$.

Пакажам відарыс графіка функцыі $y = \cos x$. Зробім гэта спачатку на прамежку даўжынёй, роўнай перыяду косінуса. Для гэтага запойнім табліцу значэнняў функцыі косінус для значэнняў аргумента на прамежку $[0; 2\pi]$, узятых праз $\frac{\pi}{8}$, з дакладнасцю да 0,1 (прыбліжаныя значэнні косінуса можна знайсці, выкарыстаўшы адзінкавую акружнасць (гл. рыс. 76), калькулятар або табліцы).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\cos x$	1	0,9	0,7	0,4	0	-0,4	-0,7	-0,9	-1

x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\cos x$	-1	-0,9	-0,7	-0,4	0	0,4	0,7	0,9	1

Адзначыўшы гэтыя пункты на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 114) і злучыўшы іх плаўнай лініяй (рыс. 115), атрымаем відарыс графіка функцыі $y = \cos x$ на прамежку $[0; 2\pi]$.



Рыс. 114

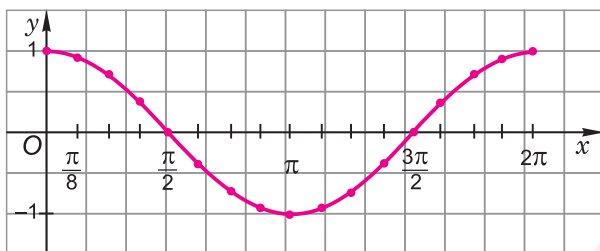


Рис. 115

Паколькі, як было паказана ў п. 3.1, функцыя косінус перыядычная з найменшым дадатным перыядам, роўным 2π , то яе значэнні паўтараюцца праз 2π . Намі атрыманы відарыс графіка на адрэзку, даўжыня якога роўна перыяду 2π . Зрушваючы гэту лінію шматразова ўздоўж восі Ox управа і ўлева на 2π , атрымліваем відарыс графіка функцыі $y = \cos x$ (рис. 116).

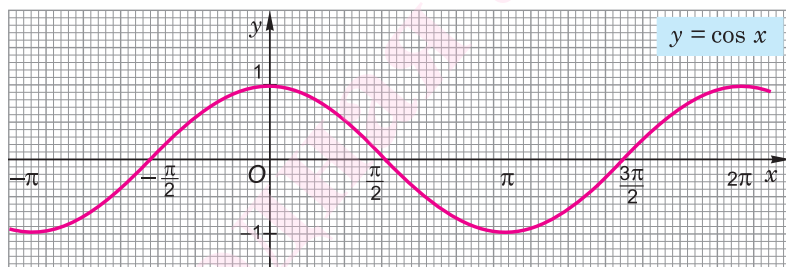


Рис. 116

Графік функцыі $y = \cos x$ называецца **косінусоідай**.

Відарыс косінусоіды дае нагляднае ўяўленне аб усіх уласцівасцях функцыі косінус.

Тэарэма (аб уласцівасцях функцыі $y = \cos x$).

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \cos x$ — мноства $\mathbf{R}$.
2. Мноства значэнняў функцыі $y = \cos x$ — прамежак $[-1; 1]$.
3. Функцыя $y = \cos x$ перыядычная з перыядам 2π .
4. Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя $y = \cos x$ прымае ў пунктах $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя $y = \cos x$ прымае ў пунктах $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Графік функцыі перасякае вось Oy у адзіным пункце $(0; 1)$, а з воссю Ox перасякаецца ў пунктах $(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \cos x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Функцыя $y = \cos x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. Функцыя $y = \cos x$ цотная.

9. Функцыя $y = \cos x$ нарастае на кожным з прамежкаў $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$, і спадае на кожным з прамежкаў $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказ. Уласцівасці 1 і 3 былі ўстаноўлены ў п. 3.1.

Уласцівасці 2, 4—8 можна ўбачыць на відарысе графіка функцыі $y = \cos x$. Заўважым, што яны фактычна былі абгрунтаваны ў п. 2.4 і 2.5. Уласцівасць 9 таксама можна прачытаць па графіку. Прамежкі нарастання і спадання можна таксама атрымаць, выкарыстаўшы адзінкавую акружнасць.

Дакажыце ўласцівасць 9 самастойна (гл. п. 3.3).



Пры паказе відарыса графіка $y = \cos x$ можна выкарыстоўваць не толькі ўласцівасць перыядычнасці, але і ўласцівасць цотнасці косінуса (патлумачце як).

Прыклад 1. Функцыя зададзена формулай $f(x) = \cos x$ на мностве D . Ці з'яўляецца гэта функцыя цотнай, калі:

- а) $D = (-2\pi; 2\pi]$; б) $D = \mathbb{Z}$?

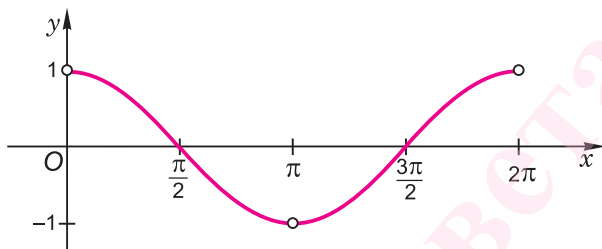
Рашэнне. а) Функцыя не з'яўляецца цотнай, паколькі прамежак D — яе абсяг вызначэння — не сіметрычны адносна пачатку каардынат: $2\pi \in D$, $-2\pi \notin D$.

б) Функцыя цотная, паколькі яе абсяг вызначэння $D = \mathbb{Z}$ — мноства, сіметрычнае адносна нуля, і для любога $x \in \mathbb{Z}$ маем $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Адказ: а) не; б) з'яўляецца.

Прыклад 2. Паказаць відарыс графіка функцыі f , заданай формулай $y = \cos x$ на мностве $D = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, і назваць па графіку ўласцівасці гэтай функцыі.

Рашэнне. Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 117 (патлумачце, як ён атрыманы).



Рыс. 117

Уласцівасці гэтай функцыі наступныя:

1. $D(f) = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.
2. $E(f) = (-1; 1)$ (патлумачце чаму).
3. Функцыя f неперывыдная (патлумачце чаму).
4. Функцыя f не мае ні найменшага, ні найбольшага значэнняў (патлумачце чаму).
5. Графік функцыі пунктаў перасячэння з воссю Oy не мае, а з воссю Ox перасякаецца ў двух пунктах: $(\frac{\pi}{2}; 0)$ і $(\frac{3\pi}{2}; 0)$.
6. Нулямі функцыі f з'яўляюцца $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
7. Функцыя f прымае адмоўныя значэнні на прамежках $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ і $(\pi; \frac{3\pi}{2})$. Функцыя f прымае дадатныя значэнні на прамежках $(0; \frac{\pi}{2})$ і $(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.
8. Функцыя f не з'яўляецца цотнай (патлумачце чаму).
9. Функцыя f спадае на прамежку $(0; \pi)$ і нарастае на прамежку $(\pi; 2\pi)$.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $\cos(\frac{x}{3} - 1) = -1$.

Рашэнне. Функцыя $y = \cos u$ прымае найменшае значэнне $y = -1$ у пунктах $u = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; пры $u = \frac{x}{3} - 1$ маем:

$$\frac{x}{3} - 1 = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{адкуль} \quad x = 3 + 3\pi + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $3(1 + \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 4*. Рашыць няроўнасць:

а) $\cos\left(\frac{x}{2} - 3\right) < 0$; б) $\cos 3x < 2$.

Рашэнне. а) Функцыя $y = \cos u$ прымае адмоўныя значэнні пры $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < u < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (уласціvasць 7 функцыі $y = \cos x$). Калі $u = \frac{x}{2} - 3$, маем:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \frac{x}{2} - 3 < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\pi + 6 + 4\pi n < x < 3\pi + 6 + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Няроўнасць $\cos 3x < 2$ правільная пры любых значэннях x (патлумачце чаму).

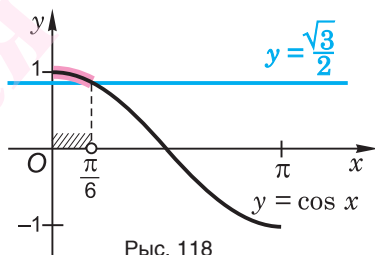
Адказ: а) $(\pi + 6 + 4\pi n; 3\pi + 6 + 4\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) x — любы лік.

Прыклад 5*. Рашыць няроўнасць $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ на прамежку $[0; \pi]$.

Рашэнне. На прамежку $[0; \pi]$ функцыя $y = \cos x$ спадае і па ўмове $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, г. зн. $\cos x > \cos \frac{\pi}{6}$. Значыць, $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ (рыс. 118).

Адказ: $\left[0; \frac{\pi}{6}\right)$.



Рыс. 118



1. Назавіце асноўныя ўласцівасці функцыі $y = \cos x$.
2. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = \cos x$. Як яго называюць?
3. Як на відарысе графіка функцыі $y = \cos x$ адлюстроўваецца яе ўласцівасць:
 - а) перыядычнасць;
 - б) цотнасць?
4. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \cos x$, назавіце для яе:
 - а) найменшае (найбольшае) значэнне;
 - б) прамежкі знакапастаянства і нулі;
 - в) прамежкі спадання (нарастання).
5. Чаму роўны найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \cos x$?

6*. Докажіть, що функція $y = \cos x$ нарастає на кожному з проміжків вигляду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

7*. Докажіть, що функція $y = \cos x$ спадає на кожному з проміжків вигляду $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Практиканні

3.38°. Для функції f запишіть $E(f)$ — яє мноства значення:

1) $f(x) = \cos x + 2$;

2) $f(x) = \cos x - 1$;

3) $f(x) = 1 - 4\cos(3\pi + x)$;

4) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4,5$;

5) $f(x) = |\cos x|$;

6) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

3.39. Знайдіть координати пункту пересічення з осями Ox і Oy графіка функції $y = f(x)$, калі:

1) $f(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$;

2) $f(x) = \cos(10\pi - x)$;

3) $f(x) = \cos x - 4,7$;

4) $f(x) = \cos x + 1,2$.

3.40. Розмістіть у парадку наростання лікі:

1) $\cos \frac{\pi}{18}$; $\cos \frac{7\pi}{36}$; $\cos \frac{2\pi}{9}$; $\cos \frac{\pi}{36}$;

2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;

3) $\cos(-0,4)$; $\cos(-1,5)$; $\cos(-0,8)$; $\cos 4,9$;

4) $\cos 0,6$; $\cos 1,4$; $\cos(-1,7)$; $\cos 0,2$.

3.41. Параўнайце:

1) $\cos \frac{5\pi}{7}$ і $\cos \frac{7\pi}{9}$;

2) $\cos \frac{3\pi}{14}$ і $\cos \frac{2\pi}{5}$;

3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ і $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$;

4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$ і $\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;

5) $\cos(-1,7)$ і $\cos(-3,14)$;

6) $\cos(-1,57)$ і $\cos(-6)$;

7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$ і $\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$;

8) $\cos\left(-\frac{11\pi}{16}\right)$ і $\sin\left(-\frac{15\pi}{14}\right)$;

9) $\sin(-18,1)$ і $\cos(-6,28)$;

10) $\cos(-4,58)$ і $\sin(-8)$.

3.42°. Визначте, цотнай або няцотнай з'яўляецца функцыя f :

1) $f(x) = x^3 \cos x$;

2) $f(x) = \cos x \sin x$;

3) $f(x) = \frac{\cos 8x}{\sin x^3}$;

4) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x \cos x}$;

5) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

6) $f(x) = \frac{\cos x^3}{4x^2 - 25}$;

7) $f(x) = x \sin x \cos x$;

8) $f(x) = 2|\sin x| \cos x$.

3.43. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \cos x$ (гл. рыс. 116), параўнайце з нулём значэнне выразу:

1) $\cos \frac{6\pi}{5}$;

2) $\cos \frac{5\pi}{3}$;

3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;

4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

5) $\cos 2$;

6) $\cos 5,2$;

7) $\cos(-4)$;

8) $\cos(-2,1)$.

3.44°. Функцыя f зададзена формулай $y = \cos x$ на мностве D . Запішыце для функцыі f :

а) найменшае значэнне; б) найбольшае значэнне; в) прамежкі нарастання; г) прамежкі спадання; д) прамежкі, на якіх $f(x) < 0$; е) прамежкі, на якіх $f(x) > 0$; ж) нулі, калі:

1) $D = [-2\pi; \pi]$;

2) $D = [0; 3\pi]$;

3) $D = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

4) $D = \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$;

5) $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$;

6) $D = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$;

7) $D = [0; 1]$;

8) $D = [-1; 0]$.

3.45. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \cos x$ (гл. рыс. 116), знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу (з дакладнасцю да 0,1):

1) $\cos 2$;

2) $\cos(-1)$;

3) $\cos 1$;

4) $\cos 4$;

5) $\cos(-3,5)$;

6) $\cos 5,5$.

3.46. Рашыце ўраўненне:

1) $\cos 4x = 0$;

2) $\cos \frac{x}{5} = 0$;

3) $\cos(3x - 1) = 1$;

4) $\cos\left(\frac{x}{6} + 3\right) = 1$;

5) $\cos\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = -1$;

6) $\cos\left(\frac{4x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

7) $\cos^2\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$;

8) $\left|\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 6x\right)\right| - 1 = 0$.

3.47. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі косінус:

1) $\cos \frac{5x}{4} \geq 0$;

2) $\cos \frac{x}{6} > 0$;

- 3) $\cos(3x+1) > -1$; 4) $\cos(4x-3) \leq -1$;
 5) $\cos(2\pi-2x) < 1$; 6) $\cos(5x-\pi) \geq 1$.

3.48. Вызначыце, у якіх пунктах прамежку $[-2\pi; 2\pi]$ вызначана функцыя $y = f(x)$, і пакажыце на ім відарыс графіка функцыі, калі:

- 1) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$; 2) $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;
 3) $f(x) = \operatorname{ctg} x \sin x$; 4) $f(x) = 1 : \frac{1}{\cos x}$;
 5) $f(x) = (\sqrt{\cos x})^2$; 6) $f(x) = (\sqrt{\cos x - 1})^2 + 1$.

3.49. Пры якіх значэннях n існуюць такія значэнні x , пры якіх будзе правільнай роўнасць:

- 1) $5 \cos x = n + 1$; 2) $4 \cos x = 2 - n$;
 3) $\cos^2 x = n$; 4) $1 - \cos^2 x = n$?

3.50. Рашыце ўраўненне $\cos x = a$ пры $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, калі a роўна:

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-0,23$;
 6) $-\frac{7}{9}$; 7) -1 ; 8) 1 ; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\sqrt{2}$.

3.51. Пры якіх значэннях x з прамежку D функцыя $y = \cos x$ прымае:

- а) дадатныя значэнні;
 б) адмоўныя значэнні, калі:

- 1) $D = \left[-4\frac{2}{9}\pi; -1\frac{5}{8}\pi\right]$; 2) $D = \left[5\frac{3}{7}\pi; 7\frac{9}{11}\pi\right]$;
 3) $D = (-1, 2\pi; 2, 9\pi]$; 4) $D = [-2, 3\pi; 1, 4\pi)$?

3.52*. Рашыце на прамежку $[0; \pi]$ няроўнасць:

- а) $\cos x < a$; б) $\cos x > a$;
 в) $\cos x \leq a$; г) $\cos x \geq a$, калі a роўна:

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\frac{3}{7}$;
 6) $-0,58$; 7) 1 ; 8) -1 ; 9) $-\sqrt{3}$; 10) $\sqrt{\pi}$.

3.53*. Знайдзіце на прамежку $[0; 2\pi]$ рашэнні ўраўнення:

- 1) $\cos x = 0,4$; 2) $\cos x = 0,2$;
 3) $\cos x = -0,1$; 4) $\cos x = -0,9$.

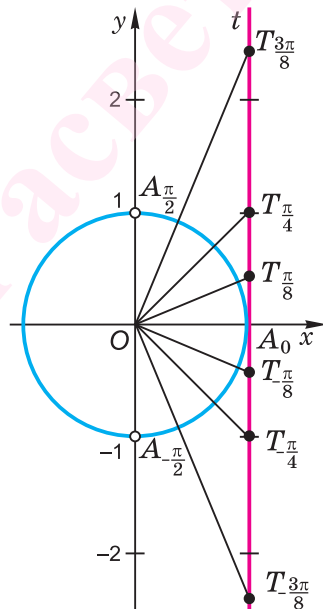
3.54*. Знайдзіце на прамежку $[0; 2\pi]$ рашэнні няроўнасці:

- 1) $\cos x > 0,2$; 2) $\cos x < 0,3$;
 3) $\cos x \leq -0,6$; 4) $\cos x \geq -0,8$.

3.5. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$

Разгледзім *функцыю тангенс*, зададзеную формулай $y = \operatorname{tg} x$, з абсягам вызначэння — мноствам рэчаісных лікаў $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пакажам спачатку відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ на прамежку даўжынёй, роўнай перыяду тангенса. Для гэтага запойнім табліцу значэнняў функцыі тангенс для значэнняў аргумента на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, узятых праз $\frac{\pi}{8}$ з дакладнасцю да 0,1 (прыбліжаныя значэнні тангенса можна знайсці, выкарыстаўшы адзінкавую акружнасць і лінію тангенсаў (рыс. 119), калькулятар або табліцы).



Рыс. 119

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	—	-2,4	-1	-0,4	0	0,4	1	2,4	—

Адзначыўшы гэтыя пункты на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 120) і злучыўшы іх плаўнай лініяй (рыс. 121), атрымаем відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Праз пункты $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ правядзём вертыкальныя прамыя $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$

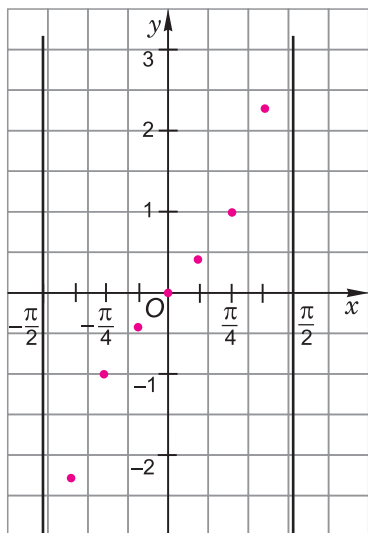


Рис. 120

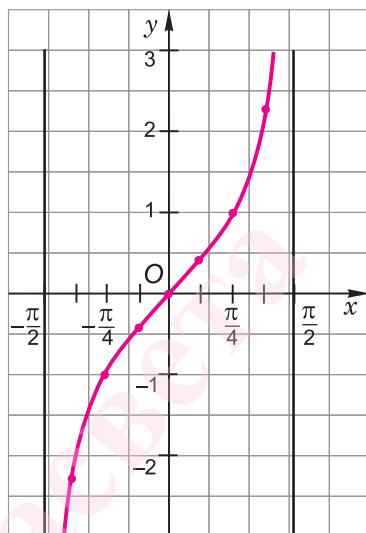


Рис. 121

(яны не маюць агульных пунктаў з графікам функцыі тангенс, паколькі гэта функцыя ў пунктах $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не вызначана) (гл. рис. 121). Намі атрыманы відарыс графіка на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, даўжыня якога роўна π — перыяду тангенсa. Зрушваючы гэту лінію шматразова ўздоўж восі Ox управа і ўлева на π , атрымліваем відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 122).

Графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ называецца **тангенсоідай**.

Частку тангенсоіды на кожным з прамежкаў выгляду $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, называюць **галіною тангенсоіды**. Тангенсоіда складаецца з бясконцага мноства аднолькавых галін.

Відарыс графіка функцыі тангенс (гл. рис. 122) падказвае ўласцівасці гэтай функцыі.

Тэарэма (аб уласцівасцях функцыі $y = \operatorname{tg} x$).

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \operatorname{tg} x$ — мноства рэчаісных лікаў $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Мноства значэнняў функцыі $y = \operatorname{tg} x$ — усе рэчаісныя лікі, г. зн. мноства $\mathbb{R}$.

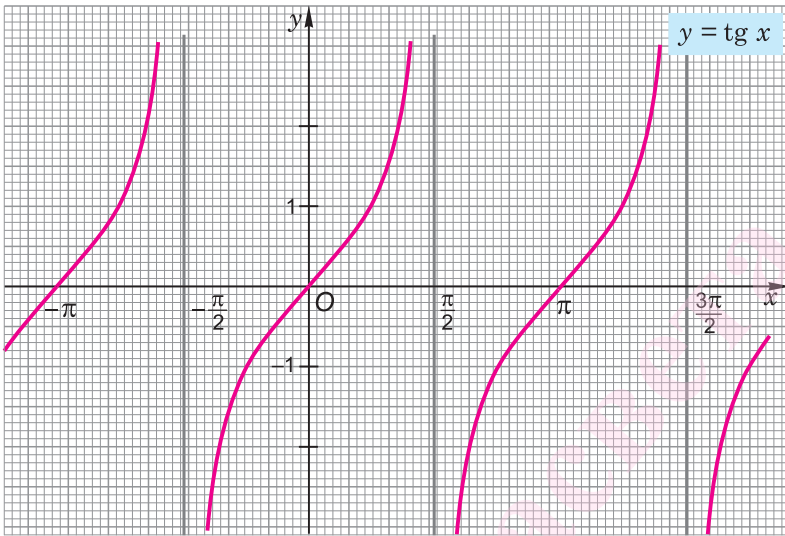


Рис. 122

3. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ перыядычная з перыядам π .
4. Найбольшага і найменшага значэнняў функцыя $y = \operatorname{tg} x$ не мае.
5. Графік функцыі праходзіць праз пункт $(0; 0)$ — пачатак каардынат; з воссю Oy ён перасякаецца толькі ў пункце $(0; 0)$, а з воссю Ox — у пунктах $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Нулямі функцыі $y = \operatorname{tg} x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ няцотная.
9. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ нарастае на кожным з прамежкаў $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказ. Уласцівасці 1 і 3 былі ўстаноўлены ў п. 3.1.

Уласцівасці 2, 4—8 можна ўбачыць на відарысе графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (гл. рис. 122). Яны фактычна былі абгрун-

таваны ў п. 2.7. Уласцівасць 9 таксама можна прачытаць па графіку гэтай функцыі.

▲ Дакажам уласцівасць 9. Разгледзім функцыю $y = \operatorname{tg} x$ на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Няхай $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ і $x_1 < x_2$. Тады

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 &= \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0 \end{aligned}$$

(патлумачце апошнюю няроўнасць).

Значыць, $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, г. зн. функцыя $y = \operatorname{tg} x$ нарастае на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, а яе нарастанне на кожным з прамежкаў $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, вынікае з перыядычнасці. ☒ ▲



Заўвага. Функцыя $f(x) = \operatorname{tg} x$ мае толькі прамежкі нарастання, але яна не з'яўляецца нарастальнай на ўсім абсягу вызначэння $D(f)$ (патлумачце чаму).



Відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ можна атрымаць некалькі інакш, чым было паказана, з улікам няцотнасці функцыі тангенс (патлумачце як).

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць:

а) $\operatorname{tg}(5x - 2) < 0$; б) $\operatorname{tg}(\frac{x}{4} + 3) \geq 0$.

Рашэнне. а) Адмоўныя значэнні функцыя $y = \operatorname{tg} u$ прымае пры $-\frac{\pi}{2} + \pi k < u < \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (уласцівасць 7 функцыі $y = \operatorname{tg} x$). Для $u = 5x - 2$ атрымліваем:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + \pi k < 5x - 2 < \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} < x < \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) Маем: $\pi k \leq \frac{x}{4} + 3 < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (патлумачце, чаму справа знак строгай няроўнасці). Адсюль атрымаем:

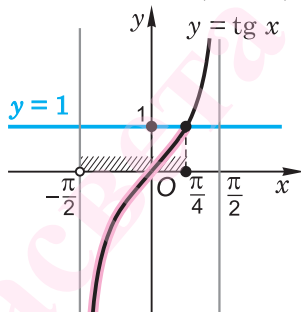
$$-12 + 4\pi k \leq x < -12 + 2\pi + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: а) $\left(\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}; \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5}\right), \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $[-12 + 4\pi k; -12 + 2\pi + 4\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць $\operatorname{tg} x \leq 1$ пры $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рашэнне. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ нарастае на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, і па ўмове $\operatorname{tg} x \leq 1$, г. зн. $\operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, значыць, $x \leq \frac{\pi}{4}$, але $x > -\frac{\pi}{2}$. Такім чынам, $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{4}$ (рыс. 123).



Рыс. 123

Адказ: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.



1. Назавіце асноўныя ўласцівасці функцыі $y = \operatorname{tg} x$.
2. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$. Як яго называюць?
3. Ці можна функцыю тангенс назваць нарастальнай на ўсім абсягу вызначэння? Чаму?
4. Як на відарысе графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ адлюстроўваецца яе ўласцівасць:
 - а) няцотнасць;
 - б) перыядычнасць?
5. Чаму роўны найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} x$?
- 6*. Дакажыце, што функцыя $y = \operatorname{tg} x$ нарастальная на кожным з прамежкаў выгляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Практыкаванні

3.55°. Для функцыі f запішыце $D(f)$ — яе абсяг вызначэння і $E(f)$ — яе мноства значэнняў:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1;$

2) $f(x) = 4\operatorname{tg} x - 3;$

3) $f(x) = (\operatorname{tg} x - 4)^2;$

4) $f(x) = (\operatorname{tg} x + 2)^4;$

5) $f(x) = |\operatorname{tg} x|;$

6) $f(x) = \sqrt{16\operatorname{tg}^2 x};$

7) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x};$

8) $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

3.56. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння з восьмі каардынат графіка функцыі $y = f(x)$, калі:

$$1) f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$2) f(x) = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1};$$

$$3) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg}(-3x)}{1 + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg}(-3x)};$$

$$4) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}(-4x)}{1 - \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg}(-4x)}.$$

3.57. Размясціце ў парадку спадання лікі:

$$1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}; \operatorname{tg} \frac{17\pi}{36}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{9};$$

$$2) \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right); \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{16}\right); \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$3) \operatorname{tg}(-5); \operatorname{tg}(-3); \operatorname{tg} 3; \operatorname{tg}(-1);$$

$$4) \operatorname{tg} 6,4; \operatorname{tg} 4,1; \operatorname{tg} 2,2; \operatorname{tg} 3,6.$$

3.58. Параўнайце:

$$1) \operatorname{tg}(-2,6\pi) \text{ і } \operatorname{tg}(-2,61\pi);$$

$$2) \operatorname{tg}(-4,75\pi) \text{ і } \operatorname{tg}(-5,6\pi);$$

$$3) \operatorname{tg} 2 \text{ і } \operatorname{tg} 3;$$

$$4) \operatorname{tg} 4 \text{ і } \operatorname{tg} 6;$$

$$5) \operatorname{tg}(-3,14) \text{ і } \operatorname{tg}(-3,2);$$

$$6) \operatorname{tg}(-4,78) \text{ і } \operatorname{tg}(-7).$$

3.59°. Цотнай або няцотнай з'яўляецца функцыя f , калі:

$$1) f(x) = x \operatorname{tg}^2 x;$$

$$2) f(x) = x^7 \operatorname{tg} x;$$

$$3) f(x) = 2 \sin x^5 + \operatorname{tg}^3 x;$$

$$4) f(x) = \operatorname{tg} x^3 - \sin x^{11};$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x^3};$$

$$6) f(x) = (2 \sin x)^3 + \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x^5};$$

$$7) f(x) = x^3 \operatorname{tg} x^3;$$

$$8) f(x) = \operatorname{tg} x^5 \sin x?$$

3.60. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (гл. рыс. 122), параўнайце з нулём значэнне выразу:

$$1) \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{13\pi}{8};$$

$$3) \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right);$$

$$4) \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right);$$

$$5) \operatorname{tg} 2,3;$$

$$6) \operatorname{tg} 5,1;$$

$$7) \operatorname{tg}(-1,8);$$

$$8) \operatorname{tg}(-4,3).$$

3.61°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{tg} x$ на мностве D . Запішыце для функцыі f :

а) найменшае значэнне; б) найбольшае значэнне; в) прамежкі нарастання; г) прамежкі спадання; д) прамежкі, на якіх $f(x) < 0$; е) прамежкі, на якіх $f(x) > 0$; ж) нулі, калі:

- 1) $D = \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 2) $D = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
 3) $D = \left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$; 4) $D = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{15}\right]$;
 5) $D = [0; 1]$; 6) $D = [-1; 0]$.

3.62°. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (гл. рыс. 122), знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу (з дакладнасцю да 0,1):

- 1) $\operatorname{tg} 1$; 2) $\operatorname{tg} 4$; 3) $\operatorname{tg}(-2)$;
 4) $\operatorname{tg}(-4)$; 5) $\operatorname{tg} 5,2$; 6) $\operatorname{tg}(-4,3)$.

3.63°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{tg} x$ на мностве D . Ці мае функцыя f найбольшае значэнне, калі:

- 1) $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$;
 3) $D = \left[6\pi; \frac{13\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-4\pi; -\frac{15\pi}{4}\right]$;
 5) $D = (14; 15)$; 6) $D = [5; 7]$?

3.64°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{tg} x$ на мностве D . Вызначыце прамежкі, на якіх функцыя f прымае:

а) дадатныя значэнні; б) адмоўныя значэнні, калі:

- 1) $D = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$;
 3) $D = \left[4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-\frac{9\pi}{4}; -2\pi\right]$;
 5) $D = (5; 7)$; 6)* $D = [14; 17]$.

3.65. Рашыце ўраўненне:

- 1) $\operatorname{tg}(2x + 3) = 0$; 2) $\operatorname{tg}(4x - 5) = 0$;
 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) = 0$.

3.66. Рашыце на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ураўненне $\operatorname{tg} x = a$, калі a роўна:

- 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 5) -7; 6) -5; 7) 15; 8) 21.

3.67. Рашыце няроўнасць:

- 1) $\operatorname{tg} \frac{x}{6} \leq 0$; 2) $\operatorname{tg} 3x \leq 0$;
 3) $\operatorname{tg}(2x-2) \geq 0$; 4) $\operatorname{tg}(3x+1) \leq 0$.

3.68*. Рашыце на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ няроўнасць:

- а) $\operatorname{tg} x < a$; б) $\operatorname{tg} x > a$;
 в) $\operatorname{tg} x \leq a$; г) $\operatorname{tg} x \geq a$, калі a роўна:
 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) -1 ;
 5) 6 ; 6) π ; 7) $-\frac{3}{7}$; 8) $-\frac{2}{9}$.

Ці з'яўляецца функцыя перыядычнай? Калі з'яўляецца, то вызначыце яе найменшы дадатны перыяд (3.69—3.71):

- 3.69. 1) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{tg} 3x$;
 3) $y = \operatorname{tg} 4x - 2$; 4) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3$;
 5) $y = \operatorname{tg}(x+1)$; 6) $y = \operatorname{tg}(x-2)$;
 7) $y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; 8) $y = 3\operatorname{tg}(2x+4)$;
 9) $y = 2\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) + 3$; 10) $y = 3\operatorname{tg}(2x+4) - 1$.

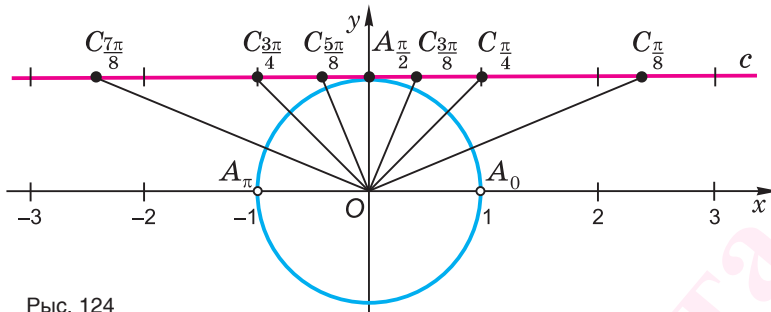
- 3.70*. 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = -|\operatorname{tg} x|$.

- 3.71*. 1) $y = \frac{|x|}{x} \operatorname{tg} x$; 2) $y = \frac{x}{|x|} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;
 3) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
 5) $y = \operatorname{tg}(-2x) \operatorname{ctg} 2x$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

3.6. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$

Разгледзім *функцыю катангенс*, зададзеную формулай $y = \operatorname{ctg} x$, з абсягам вызначэння — мноствам рэчаісных лікаў $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пакажам відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$. Зробім гэта спачатку на прамежку даўжынёй, роўнай перыяду катангенса. Для гэтага запоўнім табліцу значэнняў функцыі катангенс для

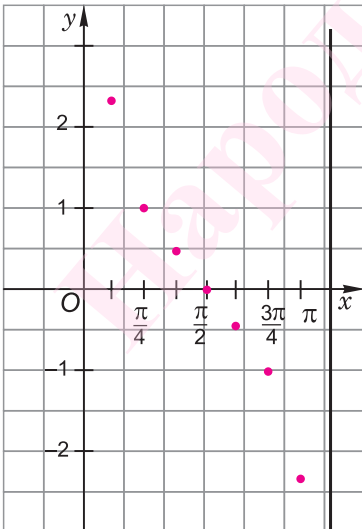


Рыс. 124

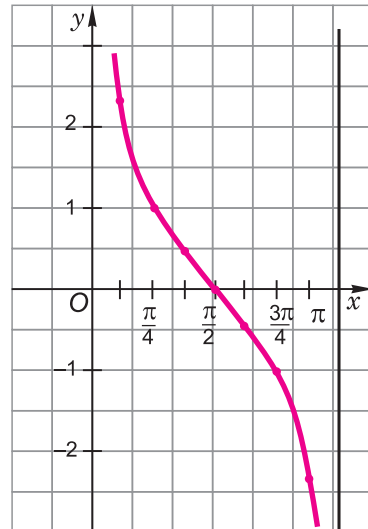
значэнняў аргумента на прамежку $(0; \pi)$, узятых праз $\frac{\pi}{8}$ з дакладнасцю да 0,1. Прыбліжаныя значэнні катангенса можна знайсці, выкарыстаўшы адзінкавую акружнасць і лінію катангенсаў (рыс. 124).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\text{ctg } x$	—	2,4	1	0,4	0	-0,4	-1	-2,4	—

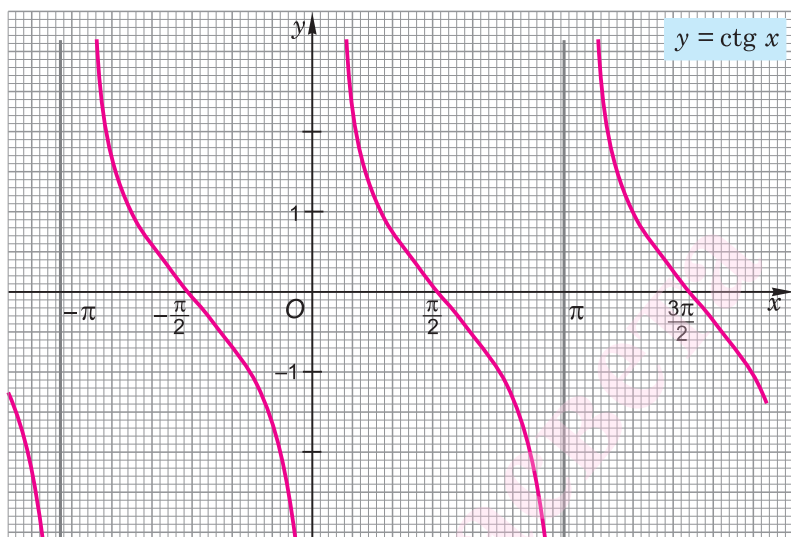
Адзначыўшы гэтыя пункты на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 125) і злучыўшы іх плаўнай лініяй (рыс. 126), атры-



Рыс. 125



Рыс. 126



Рыс. 127

маем відарыс графіка функцыі $y = \text{ctg } x$ на прамежку $(0; \pi)$. Праз пункты 0 і π правядзём вертыкальныя прамыя $x = 0$ і $x = \pi$ (яны не маюць агульных пунктаў з графікам функцыі катангенс, паколькі гэтая функцыя не вызначана ў пунктах 0 і π) (гл. рыс. 126).

Намi атрыманы відарыс графіка на прамежку $(0; \pi)$, даўжыня якога роўна π — перыяду катангенса. Зрушваючы гэту лінію шматразова ўздоўж восі Ox управа і ўлева на π , атрымліваем відарыс графіка функцыі $y = \text{ctg } x$ (рыс. 127).

Графік функцыі $y = \text{ctg } x$ называюць **катангенсоідай**.

Частку катангенсоіды на кожным з прамежкаў $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называюць **галіною катангенсоіды** — такіх галін бясконца многа. Катангенсоіда складаецца з бясконцага мноства аднолькавых галін.

Відарыс графіка функцыі катангенс падказвае ўсе ўласцівасці гэтай функцыі (гл. рыс. 127).

Тэарэма (аб уласцівасцях функцыі $y = \text{ctg } x$).

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \text{ctg } x$ — мноства рэчаісных лікаў $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Мноства значэнняў функцыі $y = \text{ctg } x$ — усе рэчаісныя лікі, г. зн. мноства $\mathbb{R}$.

3. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ перыядычная з перыядам π .
4. Найбольшага і найменшага значэнняў функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ не мае.
5. Графік функцыі не мае агульных пунктаў з воссю Oy , а з воссю Ox перасякаецца ў пунктах $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Нулямі функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
8. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ няцотная.
9. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ спадае на кожным з прамежкаў $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказ аналагічны доказу тэарэмы аб уласцівасцях функцыі $y = \operatorname{tg} x$.



Заўвага. Функцыю катангенс нельга назваць спадальнай на ўсім абсягу вызначэння, хоць у гэтай функцыі ёсць толькі прамежкі спадання (патлумачце чаму).

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + 1\right) \leq 0.$$

Рашэнне. Недадатныя значэнні функцыя $y = \operatorname{ctg} u$ прымае пры $\frac{\pi}{2} + \pi k \leq u < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (уласцівасць 7 функцыі $y = \operatorname{ctg} x$). Для $u = \frac{x}{5} + 1$ атрымліваем:

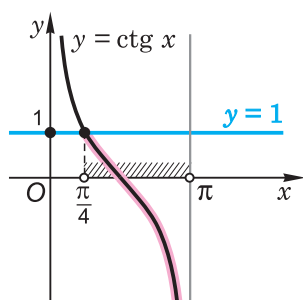
$$\frac{\pi}{2} + \pi k \leq \frac{x}{5} + 1 < \pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(патлумачце, чаму справа знак строгай няроўнасці);

$$-5 + \frac{5}{2}\pi + 5\pi k \leq x < -5 + 5\pi + 5\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\left[-5 + \frac{5}{2}\pi + 5\pi k; -5 + 5\pi + 5\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць $\operatorname{ctg} x < 1$ пры $x \in (0; \pi)$.



Рыс. 128

Рашэнне. Функцыя $y = \text{ctg } x$ спадае на прамежку $(0; \pi)$.

Па ўмове $\text{ctg } x < 1$, г. зн.

$$\text{ctg } x < \text{ctg } \frac{\pi}{4},$$

значыць, $x > \frac{\pi}{4}$, але $x < \pi$.

Такім чынам, $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ (рыс. 128).

Адказ: $(\frac{\pi}{4}; \pi)$.



1. Назавіце асноўныя ўласцівасці функцыі катангенс.
2. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = \text{ctg } x$. Як яго называюць?
3. Ці можна функцыю $y = \text{ctg } x$ назваць спадальнай на ўсім абсягу вызначэння? Чаму?
4. Як на графіку функцыі $y = \text{ctg } x$ адлюстроўваецца яе ўласцівасць:
 - а) няцотнасць;
 - б) перыядычнасць?
5. Дакажыце ўласцівасці 2—9 функцыі катангенс.
6. Чаму роўны найменшы дадатны перыяд функцыі катангенс?

Практыкаванні

3.72°. Для функцыі f запішыце $D(f)$ — яе абсяг вызначэння і $E(f)$ — яе мноства значэнняў:

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = \text{ctg } x + 4$; | 2) $f(x) = 9 - \text{ctg } x$; |
| 3) $f(x) = (\text{ctg } x - 4)^2$; | 4) $f(x) = (\text{ctg } x + 9)^2$; |
| 5) $f(x) = \text{ctg } x - 2$; | 6) $f(x) = 5 - \sqrt{3\text{ctg}^2 x}$; |
| 7) $f(x) = \frac{1}{\text{ctg}^2 x}$; | 8) $f(x) = \frac{1}{\text{ctg}^2 x} - 4$. |

3.73. Вызначыце каардынаты пунктаў перасячэння з восьмі каардынат графіка функцыі $y = f(x)$, калі:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \frac{\text{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \text{ctg} \frac{x}{2}}$; | 2) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$; |
| 3) $f(x) = \frac{\text{ctg} 8x \text{ctg}(-7x) + 1}{\text{ctg} 8x - \text{ctg}(-7x)}$; | 4)* $f(x) = \frac{1 + \text{ctg} 6x \text{ctg}(-5x)}{\text{ctg} 6x + \text{ctg}(-5x)}$. |

3.74. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

- 1) $\operatorname{ctg} \frac{12\pi}{5}$; $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{7}$; $\operatorname{ctg} \frac{37\pi}{35}$;
- 2) $\operatorname{ctg}(-\frac{8\pi}{11})$; $\operatorname{ctg}(-\frac{7\pi}{4})$; $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{7})$; $\operatorname{ctg}(-\frac{37\pi}{14})$;
- 3) $\operatorname{ctg}(-6)$; $\operatorname{ctg}(-3)$; $\operatorname{ctg} 4$; $\operatorname{ctg}(-4)$;
- 4) $\operatorname{ctg} 4$; $\operatorname{ctg} 8,1$; $\operatorname{ctg} 3,1$; $\operatorname{ctg} 5,9$.

3.75. Параўнайце:

- 1) $\operatorname{ctg}(-1,5\pi)$ і $\operatorname{ctg}(-1,6\pi)$;
- 2) $\operatorname{ctg}(-5,2\pi)$ і $\operatorname{ctg}(-4,9\pi)$;
- 3) $\operatorname{ctg} 2$ і $\operatorname{ctg} 3$;
- 4) $\operatorname{ctg} 6$ і $\operatorname{ctg} 5$;
- 5) $\operatorname{ctg}(-5,1)$ і $\operatorname{ctg}(-4,2)$;
- 6) $\operatorname{ctg}(-7,6)$ і $\operatorname{ctg}(-6,2)$.

3.76°. Вызначыце, цотнай або няцотнай з'яўляецца функцыя f :

- 1) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x + 4$;
- 2) $f(x) = x \sin x \operatorname{ctg} x$;
- 3) $f(x) = 2 \sin^4 x \operatorname{ctg}^5 x^3$;
- 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x^3 - \operatorname{tg}^{11} x^5$;
- 5) $f(x) = \frac{3x^7}{\operatorname{ctg} x^3}$;
- 6) $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^3 + \frac{1}{\sin x^3}$;
- 7) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \sin^2 x} + \cos x$;
- 8) $f(x) = \frac{\sin^2 x \sin \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$.

3.77. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ (гл. рыс. 127), параўнайце з нулём значэнне выразу:

- 1) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$;
- 2) $\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{7}$;
- 3) $\operatorname{ctg}(-\frac{9\pi}{11})$;
- 4) $\operatorname{ctg}(-\frac{3\pi}{8})$;
- 5) $\operatorname{ctg} 5,1$;
- 6) $\operatorname{ctg} 4,9$;
- 7) $\operatorname{ctg}(-2,5)$;
- 8) $\operatorname{ctg}(-4,3)$.

3.78°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{ctg} x$ на мностве D . Вызначыце для функцыі f :

а) найменшае значэнне; б) найбольшае значэнне; в) прамежкі нарастання; г) прамежкі спадання; д) прамежкі, на якіх $f(x) < 0$; е) прамежкі, на якіх $f(x) > 0$; ж) нулі, калі:

- 1) $D = (-\frac{3\pi}{2}; -\pi)$;
- 2) $D = [\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$;
- 3) $D = [-\frac{7\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}]$;
- 4) $D = [\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}]$;
- 5) $D = [1; 2]$;
- 6) $D = [4; 6]$.

3.79. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ (гл. рыс. 127), знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу (з дакладнасцю да 0,1):

- 1) $\operatorname{ctg} 4$; 2) $\operatorname{ctg} 5$; 3) $\operatorname{ctg}(-1)$; 4) $\operatorname{ctg}(-0,5)$.

3.80°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{ctg} x$ на мностве D . Ці мае функцыя f найбольшае значэнне, калі:

- 1) $D = \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $D = \left[\frac{13\pi}{2}; \frac{41\pi}{6}\right)$; 4) $D = \left[-4,5\pi; -\frac{17\pi}{4}\right]$;
5) $D = (7; 8)$; 6) $D = [20; 22]$?

3.81°. Функцыя f зададзена формулай $y = \operatorname{ctg} x$ на мностве D . Запішыце прамежкі, на якіх функцыя f прымае:

а) дадатныя значэнні; б) адмоўныя значэнні, калі:

- 1) $D = \left(-2\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-2\pi; \frac{11\pi}{6}\right]$;
3) $D = \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$;
5) $D = (1; 5)$; 6) $D = [4; 12]$.

3.82. Рашыце ўраўненне:

- 1) $\operatorname{ctg}(3x-2)=0$; 2) $\operatorname{ctg}(0,5x+3)=0$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)=0$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{8} - \frac{\pi}{12}\right)=0$.

3.83. Рашыце ўраўненне $\operatorname{ctg} x = a$ на прамежку $(0; \pi)$, калі a роўна:

- 1) 1; 2) -1; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) -9; 6) -8; 7) 37; 8) 43.

3.84. Рашыце няроўнасць:

- 1) $\operatorname{ctg} \frac{x}{6} \leq 0$; 2) $\operatorname{ctg} 3x < 0$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{4x}{3} > 0$;
4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \geq 0$; 5) $\operatorname{ctg}(2x-2) > 0$; 6) $\operatorname{ctg}(3x+1) \leq 0$.

3.85*. Рашыце на прамежку $(0; \pi)$ няроўнасць:

- а) $\operatorname{ctg} x < a$; б) $\operatorname{ctg} x > a$;
в) $\operatorname{ctg} x \leq a$; г) $\operatorname{ctg} x \geq a$, калі a роўна:

- 1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1;
 5) $-\sqrt{17}$; 6) $-\pi$; 7) $\frac{2}{9}$; 8) $\frac{3}{7}$.

Ці з'яўляецца функцыя перыядычнай? Калі з'яўляецца, то вызначыце яе найменшы дадатны перыяд (**3.86—3.88**):

- 3.86*.** 1) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} 3x$;
 3) $y = \operatorname{ctg} 2x - 1$; 4) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2$;
 5) $y = \operatorname{ctg}(x+1) - 2$; 6) $y = \operatorname{ctg}(x-2) + 3$;
 7) $y = 2 \operatorname{ctg}(\frac{x}{2} - 1) + 4$; 8) $y = 3 \operatorname{ctg}(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}) - 2$.
- 3.87*.** 1) $y = -|\operatorname{ctg} x|$; 2) $y = \operatorname{ctg}|x|$.
- 3.88*.** 1) $y = (\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;
 3) $y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$; 4) $y = \operatorname{tg}(-0,5x) \operatorname{ctg} 0,5x$.

3.7. Рашэнне ўраўненняў выгляду $\sin x = a$, $\cos x = a$

Пры рашэнні найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў $\sin x = a$ і $\cos x = a$ разглядаюць тры выпадкі.

Выпадак 1. $|a| > 1$, г. зн. $a < -1$ або $a > 1$.

Пры такіх значэннях a ўраўненні $\sin x = a$ і $\cos x = a$ не маюць рашэнняў (патлумачце чаму).

Выпадак 2. $a = 0$; $|a| = 1$.

Пры такіх значэннях a атрымаем ураўненні, рашэнні якіх лёгка знаходзіць, ведаючы ўласцівасці сінуса і косінуса, — яны дадзены ў табліцы.

Значэнне a Ураўненне	$a = 0$	$a = -1$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Выпадак 3. $0 < |a| < 1$, г. зн. $-1 < a < 0$ або $0 < a < 1$.

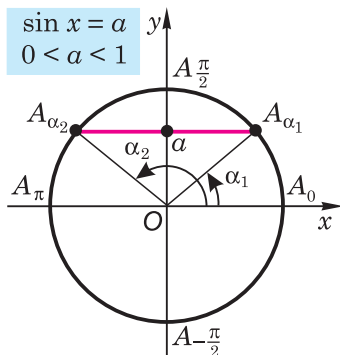
Няхай для пэўнасці $0 < a < 1$. Рашэнні ўраўнення $\sin x = a$ можна знаходзіць двума спосабамі.

Способ 1 (з выкарыстаннем адзінкавай акружнасці).

На адзінкавай акружнасці (рыс. 129) ёсць два пункты A_{α_1} і A_{α_2} , ардынаты якіх роўны a — значэнню $\sin x$. Гэтыя пункты сіметрычныя адносна восі Oy . Усе рашэнні ўраўнення $\sin x = a$ можна запісаць у выглядзе:

$$\sin x = a$$

$$0 < a < 1$$



Рыс. 129

$$x = \alpha_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

або

$$x = \alpha_2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Няхай } \alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

Паколькі $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \alpha_1 = a$, то $\alpha_1 = \arcsin a$ (па азначэнні арксіноуса).

Паколькі пункт A_{α_2} сіметрычны пункту A_{α_1} адносна восі Oy , то $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \pi - \arcsin a$.

Такім чынам, рашэннямі ўраўнення $\sin x = a$ з'яўляюцца дзве групы лікаў:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

або

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Можна было б на гэтым і спыніцца, але часцей за ўсё гэтыя дзве групы рашэнняў ураўнення $\sin x = a$ запісваюць пры дапамозе адной агульнай формулы

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Па формуле (3) пры $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$, атрымаем

$$x = (-1)^{2k} \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$

г. зн. рашэнні ўраўнення $\sin x = a$ з групы (1).

Пры $n = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$, атрымаем

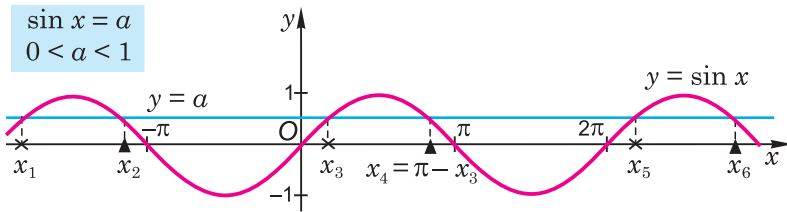
$$x = (-1)^{2m+1} \arcsin a + \pi(2m + 1),$$

г. зн. рашэнні ўраўнення $\sin x = a$ з групы (2).



Способ 2 (з выкарыстаннем графікаў функцый).

У адной сістэме каардынат пакажам відарысы графікаў функцый $y = \sin x$ і $y = a$ (рыс. 130). Рашэннямі ўраўнення



Рыс. 130

$\sin x = a$ ($0 < a < 1$) будуць абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \sin x$ і $y = a$. Некаторыя з іх адзначаны на рысунку 130 (гэта пункты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$).

Рашэнні, вылучаныя на рысунку крыжыкамі, можна запісаць формулай (1) (патлумачце чаму):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рашэнні, вылучаныя на рысунку трохвугольнікамі, можна запісаць формулай (2) (патлумачце чаму):

$$x = x_4 + 2\pi t = \pi - \arcsin a + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Рашэнні ўраўнення $\sin x = a$, запісаныя гэтымі дзвюма формуламі, аб'ядноўваюць у адну формулу (3) (гл. спосаб 1).

Запіс формулы рашэнняў ураўнення $\sin x = a$ для выпадку $-1 < a < 0$ застаецца такім жа — формуламі (1) і (2) або формулай (3).

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рашэнне. Па формуле (3) атрымліваем:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рашэнне. Па формуле (3) атрымліваем:

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тут запіс адказу будзе выглядаць больш проста, калі рашэнне запісаць дзвюма формуламі:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \text{ пры } n = 2k, k \in \mathbb{Z},$$

і

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ пры } n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

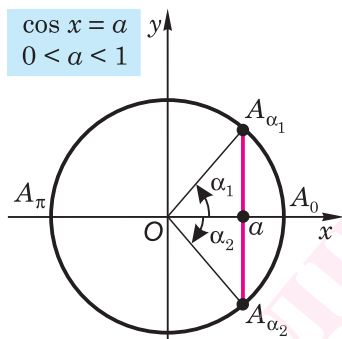
Адказ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Ураўненне $\cos x = a$ пры $0 < a < 1$ таксама можна рашаць двума спосабамі.

Спосаб 1 (з выкарыстаннем адзінкавай акружнасці).

На адзінкавай акружнасці (рыс. 131) ёсць два пункты A_{α_1} і A_{α_2} , абсцысы якіх роўны a — значэнню $\cos x$. Гэтыя пункты сіметрычныя адносна восі Ox . Усе рашэнні ўраўнення $\cos x = a$ можна запісаць у выглядзе:

$$\cos x = a \\ 0 < a < 1$$



Рыс. 131

$$x = \alpha_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

або

$$x = \alpha_2 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Няхай $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [-\pi; 0]$.

Паколькі $\alpha_1 \in [0; \pi]$ і $\cos \alpha_1 = a$, то $\alpha_1 = \arccos a$ (па азначэнні арк-косінуса).

Паколькі пункт A_{α_2} сіметрычны пункту A_{α_1} адносна восі Ox , то $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\arccos a$.

Такім чынам, рашэннямі ўраўнення $\cos x = a$ з'яўляюцца дзве групы лікаў:

$$x = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

або

$$x = -\arccos a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

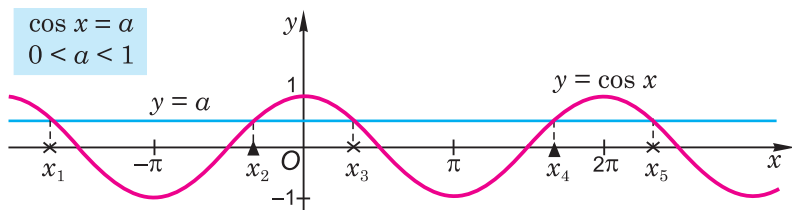
Гэтыя дзве групы рашэнняў звычайна запісваюць адной формулай:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$



Спосаб 2 (з выкарыстаннем графікаў функцый).

У адной сістэме каардынат пакажам відарысы графікаў функцый $y = \cos x$ і $y = a$ (рыс. 132). Рашэннямі ўраў-



Рыс. 132

нення $\cos x = a$ ($0 < a < 1$) будуць абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \cos x$ і $y = a$. Некаторыя з іх адзначаны на рысунку 132 (гэта пункты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

Рашэнні, вылучаныя на рысунку крыжыкамі, можна запісаць формулай (4) (патлумачце чаму):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рашэнні, вылучаныя на рысунку трохвугольнікамі, можна запісаць формулай (5) (патлумачце чаму):

$$x = x_2 + 2\pi m = -\arccos a + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Рашэнні ўраўнення $\cos x = a$, запісаныя гэтымі дзвюма формуламі, аб'ядноўваюць у адну формулу (6) (гл. спосаб 1).

Запіс формулы рашэнняў ураўнення $\cos x = a$ для выпадку $-1 < a < 0$ застаецца такім жа — формуламі (4) і (5) або формулай (6).

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на прамежку $[-3\pi; 2\pi]$.

Рашэнне. Па формуле (6) атрымаем:

$$\begin{aligned} x &= \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x &= \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пры $n \in \{-1; 0; 1\}$ атрымаем рашэнні, якія належаць прамежку $[-3\pi; 2\pi]$:

$$\pm \frac{\pi}{6} - 2\pi; \quad \pm \frac{\pi}{6}; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi.$$

$$\text{Адказ: } -\frac{13\pi}{6}; \quad -\frac{11\pi}{6}; \quad -\frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{11\pi}{6}.$$

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$.

Рашэнне. Па формуле (6) атрымаем:

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{20} \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\frac{\pi}{20} \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$



1. При яких значеннях a рівняння $\sin x = a$ ($\cos x = a$) не має розв'язків? Чому?
2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = a$ ($\cos x = a$) при:
 - а) $a = -1$; б) $a = 0$; в) $a = 1$.
3. Проілюструйте розв'язок рівняння вигляду $\sin x = a$ ($\cos x = a$) на адзінкавій акружності, калі:
 - а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0,7$;
 - г) $a = 1,3$; д) $a = -\frac{\pi}{2}$.
4. Проілюструйте розв'язок рівняння вигляду $\sin x = a$ ($\cos x = a$) з використанням графіка функцій, калі:
 - а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0,3$;
 - г) $a = 1,7$; д) $a = -\frac{\pi}{3}$.

Практикуваннi

3.89. Адзначте на адзінкавій акружності пункти, што адпавядаюць лікам:

1) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

2) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad n \in \mathbb{Z};$

3) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

4) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Розв'яжіть рівняння (3.90—3.92).

3.90°. 1) $\sin x (\sin x - 1) (\cos x + 1) = 0;$

2) $(\sin^2 x - 1) \cos^2 x = 0;$

3) $\cos x (\sin x + 1) (\cos x - 1) = 0;$

4) $(\cos^2 x - 1) \sin^2 x = 0.$

3.91°. 1) $\sin x = \frac{1}{2};$

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$

3) $\sin 3x = -\frac{1}{2};$

4) $\sin \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

5) $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

6) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3.92. 1) $\sin 5x = -\frac{1}{7}$;

2) $\sin \frac{x}{5} = \frac{5}{8}$;

3) $5\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 9$;

4) $3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -7$.

3.93. Рашыце ўраўненне з практыкавання 3.92 на прамежку:

а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $[-\pi; 0]$.

3.94°. Рашыце ўраўненне:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;

4) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.95. Рашыце ўраўненне з практыкавання 3.94 на прамежку:

а) $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $[-2\pi; 3\pi]$.

3.96. Рашыце ўраўненне:

1) $\cos 7x = -\frac{1}{9}$;

2) $\cos \frac{2x}{7} = \frac{1}{8}$;

3) $5\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 13$;

4) $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\pi$.

3.97. Знайдзіце найбольшы адмоўны і найменшы дадатны карані ўраўнення:

1) $2\sin(5x - 2) = 1$;

2) $2\cos(4x + 1) = -1$;

3) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{2}$;

4) $2\sin(3x - 1) = -1$;

5) $\sqrt{2}\sin(4x + 1) = -1$;

6) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{3}$;

7) $\sqrt{2}\cos(2x - 1) = -1$;

8) $2\sin(2x + 3) = -\sqrt{3}$.

3.98. Знайдзіце карані ўраўнення, якія задавальняюць умову $a < x < b$:

1) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$, калі $a = 1$, $b = 4$;

2) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$, калі $a = -3$, $b = 1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, калі $a = 2$, $b = 4$;

4) $2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$, калі $a = -1$, $b = 2$.

3.99. Рашыце на прамежку I ўраўненне:

1) $4\sin x \cos x + \sqrt{3} = 0$, калі $I = \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$$2) \sin^2 \frac{2x}{3} - \cos^2 \frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ калі } I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right];$$

$$3) \cos 6x \cos 4x + \sin 6x \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ калі } I = \left(-\frac{\pi}{4}; \pi\right];$$

$$4) \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = -\frac{1}{2}, \text{ калі } I = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right);$$

$$5) \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ калі } I = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right];$$

$$6) \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ калі } I = \left[-\frac{9\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right).$$

3.100. Запішыце два прамежкі значэнняў зменнай x , на якіх кожнае з ураўненняў $\sin x = \frac{1}{7}$ і $\cos x = \frac{2}{7}$ мае роўна па t каранёў, калі:

$$1) t = 3; \quad 2) t = 2; \quad 3) t = 1; \quad 4) t = 4.$$

3.101. На кожным з прамежкаў:

$$\text{а) } \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]; \quad \text{б) } \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]; \quad \text{в) } \left[-\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right];$$

$$\text{г) } [-\pi; 2\pi]; \quad \text{д) } [-2; 3]; \quad \text{е) } [1; 5]$$

вызначыце лік каранёў ураўнення:

$$1) \sin x = -0,76; \quad 2) \cos x = -0,23.$$

Рашыце ўраўненне (3.102—3.104).

3.102. 1) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0;$

2) $3\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0;$

3) $2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0;$

4) $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0;$

5) $4\sin^2\left(2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})\cos(2x - \pi) = 4 - \sqrt{15};$

6) $2\cos^2\left(\frac{x}{2} - 3\pi\right) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})\sin\left(\frac{1}{2}(6\pi + x)\right) = 2 - 0,5\sqrt{10}.$

3.103*. 1) $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0;$

2) $\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0;$

3) $\sin 2x\sqrt{4 - x^2} = 0;$

4) $(1 - \sin 3x)\sqrt{9 - x^2} = 0;$

$$5) \left(\sin \frac{x}{2} + 0,5 \right) \sqrt{6+5x-x^2} = 0;$$

$$6) \left(2\sin \frac{x}{3} + \sqrt{3} \right) \sqrt{8+7x-x^2} = 0.$$

$$3.104*. 1) (2\sin x - \sqrt{3})\sqrt{-\cos x} = 0;$$

$$2) (2\sin x + 1)\sqrt{-\cos x} = 0;$$

$$3) (2\cos x + \sqrt{2})\sqrt{-\sin x} = 0;$$

$$4) (2\cos x - \sqrt{3})\sqrt{-\sin x} = 0.$$

3.105*. 1) Пры якіх значэннях a ўраўненне $\sin x = a$ мае найбольшую колькасць каранёў на прамежку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6} \right]$?

2) Пры якіх значэннях a ўраўненне $\cos x = a$ мае найбольшую колькасць каранёў на прамежку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3} \right]$?

3.106*. Рашыце ўраўненне адносна x :

$$1) \sin x = \frac{1}{a};$$

$$2) \cos x = \frac{1}{a} - 1;$$

$$3) \cos x = a^2 - 1;$$

$$4) \sin x = a^2 + 1;$$

$$5) a \sin^2 x - \cos x = 0;$$

$$6) a \cos^2 x + \sin x = 0;$$

$$7) \sin(\arcsin x) = a^2 - 1;$$

$$8) \cos(\arccos x) = a^2 + 1.$$

3.8. Рашэнне ўраўненняў выгляду

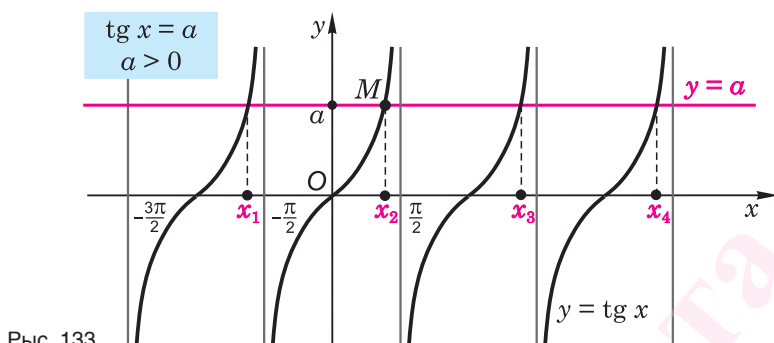
$$\operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$$

Разгледзім рашэнне найпрасцейшых триганаметрычных ураўненняў $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$.

Гэтыя ўраўненні маюць рашэнні пры любым значэнні a , паколькі мноствам значэнняў функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляецца $\mathbb{R}$.

Мноства рашэнняў названых ураўненняў пры $a = 0$ супадае з мноствам нулёў адпаведных функцый (гл. п. 3.5, 3.6). Рашэннямі ўраўнення $\operatorname{tg} x = 0$ з'яўляюцца $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а ўраўнення $\operatorname{ctg} x = 0$ — $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Разгледзім цяпер рашэнне ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$ пры $a \neq 0$ з выкарыстаннем графікаў функцый.



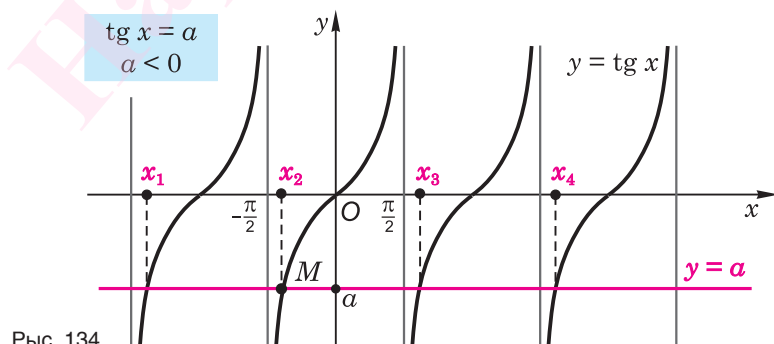
Рыс. 133

Няхай для пэўнасці $a > 0$. Паказаўшы ў адной сістэме каардынат тангенсоіду $y = \operatorname{tg} x$ і прамую $y = a$, адзначым на восі Ox рашэнні ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$, яны з'яўляюцца абсцысамі пунктаў перасячэння тангенсоіды і прамой $y = a$ (рыс. 133). На рысунку адзначаны некаторыя з іх — x_1, x_2, x_3, x_4 .

Адлегласці паміж суседнімі пунктамі, абсцысы якіх з'яўляюцца рашэннямі ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$, аднолькавыя і роўны π — найменшаму дадатнаму перыяду функцыі тангенс. Абсцыса пункта M — лік x_2 — роўна $\operatorname{arctg} a$ (патлумачце чаму, выкарыстаўшы рысунак 133). З улікам перыядычнасці функцыі тангенс запішам усе рашэнні разглядаемага ўраўнення ў выглядзе

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Рашэнне ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$ пры $a < 0$ гэтым жа спосабам праілюстравана на рысунку 134. Формула (1) мае месца пры любым значэнні a .



Рыс. 134

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Рашэнне. Па формуле (1) атрымліваем:

$$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Разгледзім рашэнне ўраўнення $\operatorname{ctg} x = a$ пры $a \neq 0$.

Способ 1. Пры $a \neq 0$ ураўненне $\operatorname{ctg} x = a$ раўназначна ўраўненню $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = a$, якое можна запісаць у выглядзе $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Па формуле (1) маем

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Способ 2. Рашэнне ўраўнення $\operatorname{ctg} x = a$ з выкарыстаннем графікаў функцый прыводзіць да формулы

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

(Правядзіце неабходныя разважанні самастойна.)

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Рашэнне. *Способ 1.* Дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Па формуле (1) атрымліваем

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.



Способ 2. Па формуле (2) атрымліваем:

$$x = \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi - \operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Патлумачце, чаму формулы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, і $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, вызначаюць адно і тое ж мноства рашэнняў ураўнення $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Рашэнне. З улікам перыядычнасці функцыі катангенс атрымліваем:

$$\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3};$$

↓ паколькі $\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$, то маем: ↓

$$-\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3};$$

$$3x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.



1. Пры якіх значэннях a ўраўненне $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) не мае рашэнняў?
2. Рашыце ўраўненне $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) і праілюструйце яго рашэнне, выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі, пры:

а) $a > 0$;	б) $a < 0$;	в) $a = 0$;
г) $a = 7$;	д) $a = -5$.	
- 3*. Рашыце ўраўненне $\operatorname{tg} x = a$ ($\operatorname{ctg} x = a$) і праілюструйце яго рашэнне з выкарыстаннем адзінкавай акружнасці і лініі тангенсаў (катангенсаў) пры розных значэннях a (гл. заданне 2).
4. Як можна рашаць ураўненне $\operatorname{ctg} x = a$?

Практыкаванні

3.107°. Адзначце на адзінкавай акружнасці пункты, якія адпавядаюць лікам:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; | 2) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$; |
| 3) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; | 4) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. |

Рашыце ўраўненне (3.108—3.109).

3.108°. 1) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(5x-1) \operatorname{tg}(x+1) = 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}(x-1) \operatorname{tg}(2+x) = 0$;

3) $\operatorname{ctg}^2(4-8x) \operatorname{tg}^2(3-x) = 0$;

4) $\operatorname{ctg}^2(6x-1) \operatorname{ctg}^2 x = 0$;

5) $\operatorname{ctg} 2x(2+\sin 3x) = 0$;

6) $\operatorname{ctg} 3x(3+\cos 5x) = 0$;

7) $\operatorname{tg} 4x(-2-\cos 3x) = 0$;

8) $\operatorname{tg} \frac{x}{3}(-4-\sin 2x) = 0$.

3.109°. 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} 3x = -1$;

4) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\operatorname{tg} 4x = -1$; 6) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -\sqrt{3}$;

7) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$; 8) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

3.110. Рашыце ўраўненне з практыкавання 3.109 на прамежку:

а) $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$; б) $(-\pi; 4\pi)$.

3.111. Знайдзіце найбольшы адмоўны і найменшы дадатны карані ўраўнення:

1) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(5x-2) = 3$; 2) $3 \operatorname{ctg}(3x-1) = -\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg}(4x+1) = -1$; 4) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(2x+3) = -1$.

3.112. Знайдзіце карані ўраўнення, якія задавальняюць умову $a < x < b$:

1) $3 \operatorname{tg}\left(2\pi x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$, калі $a = 1$, $b = 4$;

2) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$, калі $a = -2$, $b = 1$;

3) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$, калі $a = -2$, $b = 3$;

4) $3 \operatorname{ctg}\left(3\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$, калі $a = -1$, $b = 1$.

3.113. Рашыце ўраўненне на прамежку I :

1) $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \sqrt{3} = 0$, калі $I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

- 2) $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 x}{2 \operatorname{ctg} x} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$, калі $I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
 3) $\frac{\operatorname{ctg} 5x \operatorname{ctg} 8x + 1}{\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} 8x} + 1 = 0$, калі $I = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$;
 4) $\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x} = 1$, калі $I = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$;
 5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, калі $I = \left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$;
 6) $\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)} = -\sqrt{3}$, калі $I = \left[-\frac{17\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right)$.

3.114. Запішыце па два прамежкі значэнняў зменнай x , на якіх кожнае з ураўненняў $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{5}$ і $\operatorname{ctg} x = -4$ мае роўна m каранёў, калі:

- 1) $m = 4$; 2) $m = 1$; 3) $m = 2$; 4) $m = 3$.

3.115. На кожным з прамежкаў:

- а) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
 г) $[\pi; 2\pi]$; д) $[-2; 3]$; е) $[1; 5]$

вызначыце лік каранёў ураўнення:

- 1) $\operatorname{tg} x = 13,2$; 2) $\operatorname{ctg} x = 8,3$.

Рашыце ўраўненне (3.116—3.117).

3.116. 1) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{10\,000} = 10\,000$;

2) $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{1\,000\,000} = 1\,000\,000$;

3) $\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{1\,000\,000} = 1\,000\,000$;

4) $\operatorname{tg}^3 \frac{x}{1000} = 1000$;

5) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$;

6) $1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x = 0$;

7) $2 \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{ctg} x - 2 = 0$;

8) $2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$.

3.117. 1) $\frac{\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1} = 0$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1} = 0$;

$$3) \frac{2\operatorname{ctg} x - 2}{4\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x} - \operatorname{tg} x = 1 + \frac{2}{4 - 3\operatorname{tg} x};$$

$$4) \frac{12\operatorname{tg} x - 2}{6\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x} - \operatorname{ctg} x = 1 + \frac{6}{6 - \operatorname{ctg} x}.$$

3.118*. Пры якіх значэннях a мае рашэнне ўраўненне:

$$1) \operatorname{ctg}^4 x - (a+2)\operatorname{ctg}^2 x - (a+3) = 0;$$

$$2) \operatorname{tg}^4 x - (a+1)\operatorname{tg}^2 x - (a+2) = 0?$$

3.119*. Рашыце адносна x ураўненне:

$$1) \frac{\operatorname{tg} x - a}{a} = \frac{2a}{\operatorname{tg} x - a};$$

$$2) \frac{a}{\operatorname{tg} x} + \frac{a-1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2;$$

$$3) \left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 3 \right| = a - 3;$$

$$4) \left| \operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 2 \right| = a - 1.$$

3.9. Трыганаметрычныя ўраўненні

Трыганаметрычныя ўраўненні рознымі спосабамі ў канчатковым выніку прыводзяцца да найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў.

Разгледзім некалькі спосабаў рашэння трыганаметрычных ураўненняў.

1. Раскладанне на множнікі

Прыклад 1. Рашыць ураўненне:

$$a) (3 \cos x + 6)(2 \sin 3x - 2) = 0; \quad б) \sin 6x = \sin 3x.$$

Рашэнне. а) Здабытак роўны нулю тады і толькі тады, калі хаця б адзін з множнікаў роўны нулю, а астатнія пры гэтым маюць сэнс. Дадзенае ўраўненне раўназначна сукупнасці двух ураўненняў:

$$3 \cos x + 6 = 0 \quad (1)$$

або

$$2 \sin 3x - 2 = 0. \quad (2)$$

Ураўненне (1) рашэнняў не мае (патлумачце чаму).

З ураўнення (2) атрымаем:

$$\sin 3x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Ураўненне $\sin 6x - \sin 3x = 0$, выкарыстаўшы формулу сінуса двойнога аргумента¹, прывядзём да выгляду

$$2 \sin 3x \cos 3x - \sin 3x = 0.$$

Рашыўшы яго, атрымаем:

$$\sin 3x (2 \cos 3x - 1) = 0;$$

$$\sin 3x = 0 \text{ або } \cos 3x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ або } x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. Звяззенне да квадратнага ўраўнення

Прыклад 2. Рашыць ураўненне

$$\cos 6x - 4 \cos 7x \cos 4x = 3 - 2 \cos 11x.$$

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулы

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad \text{і} \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

атрымліваем:

$$2 \cos^2 3x - 2(\cos 11x + \cos 3x) = 4 - 2 \cos 11x;$$

$$\cos^2 3x - \cos 3x - 2 = 0.$$

Няхай $\cos 3x = y$, тады $y^2 - y - 2 = 0$, адкуль $y_1 = -1, y_2 = 2$.

Такім чынам, $\cos 3x = -1$ або $\cos 3x = 2$.

Другое ўраўненне рашэнняў не мае, а з першага ўраўнення атрымаем $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Адказ: $\frac{\pi}{3}(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $2 - \cos x = 3 \sin \frac{x}{2}.$

Рашэнне. Рэшым ураўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$1 - \cos x - 3 \sin \frac{x}{2} + 1 = 0;$$

$$\downarrow \text{ выкарыстаем формулу } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \downarrow$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

¹ У раздзеле 2 намі былі атрыманы розныя трыганаметрычныя формулы (двойнога вугла, палавіннага вугла). У раздзеле 3, дзе разглядаюцца трыганаметрычныя функцыі лікавага аргумента, у назвах ужо знаёмых формул натуральна выкарыстоўваць замест слова «вугал» слова «аргумент».

Няхай $\sin \frac{x}{2} = y$, тады $2y^2 - 3y + 1 = 0$, адкуль $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 1$.

Такім чынам, дадзенае ўраўненне раўназначна сукупнасці двух ураўненняў:

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

або

$$\sin \frac{x}{2} = 1. \quad (4)$$

Рашыўшы ўраўненне (3), атрымаем

$$\frac{x}{2} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ адкуль } x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Рашыўшы ўраўненне (4), атрымаем

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ адкуль } x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 3$.

Рашэнне. З умовы вынікае, што $x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$ (патлумачце чаму). Таму, памножыўшы дадзенае ўраўненне на $\operatorname{tg} x$, атрымаем (пры $x \neq \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$) раўназначнае яму ўраўненне

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 2 = 3 \operatorname{tg} x.$$

Рашыўшы апошняе ўраўненне, атрымаем:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} x = 2;$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad \text{або} \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Звяззенне да аднароднага ўраўнення

Прыклад 5. Рашыць ураўненне

$$7 \sin x - 5 \cos x = 0. \quad (5)$$

Рашэнне. Калі x — рашэнне гэтага ўраўнення, то $\sin x \neq 0$ і $\cos x \neq 0$ (патлумачце чаму). Таму, падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на $\cos x$, атрымаем раўназначнае яму ўраўненне $7 \operatorname{tg} x - 5 = 0$, адкуль $\operatorname{tg} x = \frac{5}{7}$, г. зн. $x = \operatorname{arctg} \frac{5}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Адказ: $\operatorname{arctg} \frac{5}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 6. Рашыць ураўненне

$$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0. \quad (6)$$

Рашэнне. Калі x — рашэнне гэтага ўраўнення, то $\cos x \neq 0$ (патлумачце чаму).

Падзяліўшы абедзве часткі ўраўнення (6) на $\cos^2 x$, атрымаем раўназначнае яму ўраўненне $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{6 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$, г. зн.
 $\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

Адкуль

$$x = 2 \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} x = 3;$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{або} \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 7. Рашыць ураўненне $7 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 6$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы асноўную трыганаметрычную тоеснасць, атрымаем:

$$7 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 6(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0.$$

Атрыманае ўраўненне рашаецца аналагічна ўраўненню з прыкладу 6 (пераканайцеся ў гэтым самастойна).

Адказ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

▲ Ураўненні выгляду (5) і (6) называюцца *аднароднымі ўраўненнямі першай і другой ступені* адпаведна адносна выказаў $\sin x$ і $\cos x$.

Прывядзём прыклады аднародных трыганаметрычных ураўненняў іншых ступеней. Так, ураўненне

$$\sin^4 x - 3 \sin^3 x \cos x + 5 \sin^2 x \cos^2 x + 13 \cos^4 x = 0$$

з'яўляецца аднародным ураўненнем чацвёртай ступені адносна $\sin x$ і $\cos x$, а ураўненне

$$\sin^5 5x \cos^2 5x + 9 \sin 5x \cos^6 5x - \sin^7 5x + 3 \cos^7 5x = 0$$

з'яўляецца аднародным ураўненнем сёмай ступені адносна $\sin 5x$ і $\cos 5x$.

Аднародныя ўраўненні бываюць не толькі трыганаметрычнымі. Напрыклад, ураўненне $2x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 5y^3 = 0$ — аднароднае ўраўненне трэцяй ступені адносна зменных x і y . ▲



1. Патлумачце, як рашаць ураўненне:

а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x = 0;$ б) $\sin 7x + \sin 3x = 0.$

2. Патлумачце, як рашаць ураўненне:

а) $a \cos^2 5x + b \cos 5x + c = 0$;

б) $a \sin x + b \cos x = 0$;

в) $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$.

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (3.120—3.125).

3.120°. 1) $\sin 2x - \cos x = 0$;

2) $\cos 4x + \sin 8x = 0$;

3) $2\sin \frac{x}{2} = 3\sin^2 \frac{x}{2}$;

4) $5\sin \frac{7x}{2} = 8\sin^2 \frac{7x}{2}$;

5) $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$;

6) $\cos^2 \frac{5x}{5} - \cos \frac{5x}{3} \cos \frac{4x}{3} = 0$;

7) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 2x$;

8) $\sqrt{3}\cos^2 4x - \sqrt{3}\sin^2 4x = 2\cos^2 8x$.

3.121. 1) $6\cos(2x+6) + 16\sqrt{3}\sin(x+3) - 21 = 0$;

2) $\cos(6x-8) - 3\sqrt{2}\cos(3x-4) + 3 = 0$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2x}{3}\right) = 3 + 7\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{3}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{4\pi}{5} - x\right) = 11\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{2}\right) - 5$.

3.122. 1) $3\cos \frac{x}{2} + 20\cos \frac{x}{4} + 9 = 0$;

2) $\cos \frac{x}{3} - 10\sin \frac{x}{6} = 9$;

3) $\cos \frac{4x}{3} - 5\sin \frac{2x}{3} - 3 = 0$;

4) $\cos \frac{8x}{5} - 3\cos \frac{4x}{5} + 2 = 0$.

3.123. 1) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg} 2(x+\pi) + 4 = 5\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi-x}{2} + 2\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$.

3.124. 1) $3 + 2\operatorname{tg}^2 5x - \frac{3}{\cos 5x} = 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 2x - \frac{1}{\cos 2x} = 5$;

3) $2 - 4\operatorname{tg} 0,1x + \frac{1}{\cos^2 0,1x} = 0$;

4) $4 - 6\operatorname{tg} 0,5x + \frac{1}{\cos^2 0,5x} = 0$.

3.125. 1) $\sin 2x = \operatorname{tg} 2x$;

2) $\operatorname{ctg} 1,5x = \cos 1,5x$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{3} + x\right)}{\cos \frac{\pi}{3} \cos x}$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4} - x\right)}{\sin \frac{\pi}{6} \sin x}$.

3.126. Колькі каранёў на прамежку $[-4; -2]$ мае ўраўненне:

1) $\sin x = 2 \sin^3 x - \cos 2x$;

2) $2 \cos^3 2x = \cos 2x + \cos 4x$;

3) $\sin 2x + 2 \sin x = 1 + \cos x$;

4) $\sin x - 2 \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} - 1$?

3.127. Знайдзіце найменшы дадатны карань ураўнення:

1) $2 \cos 2x + 8 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 3$;

2) $6 \cos 2x - 8 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 = 0$.

Рашыце ўраўненне (3.128—3.131).

3.128°. 1) $\sin x + \cos x = 0$;

2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$;

3) $2 \sin x - 3 \cos x = 0$;

4) $\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$;

5) $3 \sin x + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$;

6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5 \cos x = 0$.

3.129. 1) $\sin^2 x + 14 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0$;

2) $\cos^2 x - 12 \sin x \cos x - 13 \sin^2 x = 0$;

3) $2 \cos^2 x - \sin 2x + 4 \sin^2 x = 2$;

4) $6 - 10 \cos^2 x + 4 \cos 2x = \sin 2x$;

5) $4 \sin 2x = 3 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 4 \sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$;

6) $1,5 \sin 2x = 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 9 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

3.130*. 1) $\sqrt{1 + 2 \sin 4x \cos x} - \sqrt{\sin 3x} = 0$;

2) $\sqrt{1 - 2 \sin 3x \sin 7x} - \sqrt{\cos 10x} = 0$;

3) $3\sqrt{\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)} - \sqrt{1 + \cos \frac{x}{2}} = \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{1 - \cos \frac{x}{2}} + \sqrt{\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$.

3.131*. 1) $|\cos x - \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

2) $|\cos x + \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

3) $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$;

4) $1 - 2|\cos x| = 2\cos 2x - \sqrt{3}$;

5) $\left|\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$;

6) $\left|1 - 5\sin \frac{x}{4}\right| = 3 - \cos \frac{x}{2}$.

3.132*. Рашыце ўраўненне адносна x :

1) $a\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $a\cos^2 x + \cos x = 0$;

3) $a\sin^2 x - \cos x = 0$; 4) $a\cos^2 x + \sin x = 0$.

Рашыце ўраўненне (3.133—3.137).

3.133. 1) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$; 2) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;

3) $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x - \sin 7x = 0$;

4) $\cos 6x - \cos 4x + \cos 7x - \cos 3x = 0$.

3.134. 1) $\frac{\sin 4x + \sin 8x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \frac{\sin 6x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2}$;

2) $\frac{\cos 5x + \cos 7x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2} = \frac{\cos 10x + \cos 2x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2}$.

3.135. 1) $\sin^3 4x - \sin^2 4x = \sin^2 4x \cos^2 4x$;

2) $6\sin^2 5x \cos^2 5x - 5\sin^3 5x + 5\sin^2 5x = 0$;

3) $\sin 2x \cos 2x - \sin x \cos x = 0$;

4) $\sin 4x \cos 8x - \sqrt{2} \sin 2x \cos 2x = 0$.

3.136. 1) $\sin x \cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$;

2) $\sin 4x \cos 2x + 1 + \cos 2x + \sin 4x = 0$;

3) $\cos 8x \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 4x + \cos 8x + \frac{1}{2} = 0$;

4) $\sin 6x \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 3x - \sin 6x = -\frac{1}{2}$;

5) $10\sin 9x \sin 5x - 3\cos 8x + 5\cos 14x = 4$;

6) $8\sin 2x \sin 5x - 5\cos 6x + 4\cos 7x = -1$.

3.137. 1) $(\cos 2x + 2)(\sin 2x + 1)\sqrt{\sin x} = 0$;

2) $(\cos 3x - 2)(\sin 3x - 1)\sqrt{\cos x} = 0$;

$$3) \sqrt{\sin x}(\sin 4x - 2)(\cos 4x + 1) = 0;$$

$$4) \sqrt{\cos x}(\sin 2x + 2)(\cos 2x - 1) = 0;$$

$$5) \sqrt{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} 4x + 1)(\operatorname{ctg} 4x + 1) = 0;$$

$$6) (\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{ctg} 2x + 1)\sqrt{\operatorname{ctg} 2x} = 0.$$

▲ 3.10. Трыганаметрычныя ўраўненні (працяг)

Існуе шмат прыёмаў рашэння трыганаметрычных ураўненняў. Пакажам некаторыя з іх.

1. Раскладанне на множнікі

Прыклад 1. Рашыць ураўненне:

$$а) \cos 15x = -2 \cos 5x; \quad б) \sqrt{\cos x}(\sin x - 2)(\cos x + 1) = 0.$$

Рашэнне. а) Дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню $\cos 15x + \cos 5x + \cos 5x = 0$, рашаючы якое атрымліваем:

$$2 \cos 10x \cos 5x + \cos 5x = 0, \quad \text{г. зн.} \quad 2 \cos 5x \left(\cos 10x + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\cos 5x = 0 \text{ або } \cos 10x = -\frac{1}{2}, \text{ адкуль маем:}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ або } 10x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ або } x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Дадзенае ўраўненне раўназначна таму, што:

$$\sqrt{\cos x} = 0 \tag{1}$$

або

$$\sin x - 2 = 0 \text{ і } \cos x \geq 0 \tag{2}$$

або

$$\cos x + 1 = 0 \text{ і } \cos x \geq 0. \tag{3}$$

У выпадках (2) і (3) рашэнняў няма (патлумачце чаму), а з ураўнення (1) атрымаем:

$$\cos x = 0, \text{ адкуль знаходзім } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Адказ: а) } \frac{\pi(1+2k)}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{\pi(1+3n)}{15}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad б) \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

Рашэнне. З формулы $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ вынікае, што $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$. Выкарыстаўшы гэты вынік для дадзенага ўраўнення, атрымліваем раўназначнае яму:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x + 2x)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) &= \operatorname{tg} 3x; \\ \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x &= 0.\end{aligned}$$

Функцыя $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$ перыядычная з перыядам π (пераканайцеся ў гэтым). Яе нулі на прамежку $[0; \pi]$ — гэта тыя значэнні x , пры якіх адзін з множнікаў роўны нулю, а астатнія маюць сэнс. Значэнні x , пры якіх адзін з множнікаў роўны нулю, гэта: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ (патлумачце чаму). Пры ўсіх гэтых значэннях x , акрамя $\frac{\pi}{2}$, усе множнікі маюць сэнс (патлумачце чаму). Значыць, $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ — нулі функцыі f на прамежку $[0; \pi]$. З улікам перыядычнасці атрымліваем $x = \frac{\pi}{3} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$.

Адказ: $\frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

2. Выкарыстанне формул дваінога і палавіннага аргумента

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $2 \sin x - 3 \cos x = 3$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулы дваінога аргумента і асноўную трыганаметрычную тоеснасць, атрымваем:

$$2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2};$$

$$3 \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Адкуль маем

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \quad (4)$$

або

$$3 \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0. \quad (5)$$

Рашэннямі ўраўнення (4) з'яўляюцца лікі $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Рашэннямі ўраўнення (5) — аднароднага ўраўнення першай ступені адносна $\sin x$ і $\cos x$, раўназначнага ўраўненню

$3 - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$, — з'яўляюцца лікі $x = 2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (пераканайцеся ў гэтым).

Адказ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $\cos^2 x + 3\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{5}{2}$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу палавіннага аргумента (яшчэ гавораць «формулу паніжэння ступені»):

$$\cos^2 x + 3\frac{1+\cos x}{2} = \frac{5}{2}, \text{ г. зн. } 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0, \text{ адкуль}$$

$$\cos x = -2 \quad \text{або} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Першае ўраўненне не мае рашэнняў, а рашэннямі другога з'яўляюцца значэнні $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Адказ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне $\sin^2 x - \cos 2x = 1,5 - \sin 2x$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулы двайнога аргумента і асноўную трыганаметрычную тоеснасць, атрымаем ураўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$\sin^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1,5(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x \cos x.$$

Гэта аднароднае ўраўненне другой ступені адносна $\sin x$ і $\cos x$. Рашыўшы яго, атрымаем:

$$x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \text{або} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Адказ: $-\operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Выкарыстанне ўніверсальнай падстаноўкі

Прыклад 6. Рашыць ураўненне

$$\cos 4x + \operatorname{tg} 2x = 1. \quad (6)$$

Рашэнне. Па ўмове $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ (абсяг вызначэння функцыі $y = \operatorname{tg} 2x$). Выкарыстаўшы формулу $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, атрымаем ураўненне, раўназначнае ўраўненню (6) (патлумачце чаму):

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} 2x = 1.$$

Няхай $\operatorname{tg} 2x = u$, тады маем:

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} + u - 1 = 0, \text{ г. зн. } (1-u) \frac{u(1-u)}{1+u^2} = 0, \text{ адкуль } u_1 = 1, u_2 = 0.$$

Улічыўшы абазначэнне, атрымліваем:

$$\operatorname{tg} 2x = 1 \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} 2x = 0,$$

$$\text{адкуль знаходзім: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ або } x = \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Адказ: } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4. Увядзенне дапаможнага аргумента

Прыклад 7. Рашыць ураўненне:

$$\text{а) } \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2; \quad \text{б) } 2 \sin x - 3 \cos x = 3.$$

Рашэнне. а) Пераўтворым левую частку ўраўнення, выкарыстаўшы ўвядзенне дапаможнага аргумента (гл. п. 2.15):

$$\begin{aligned} \sin x - \sqrt{3} \cos x &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Зыходнае ўраўненне раўназначна ўраўненню $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 2$. Рашыўшы яго, атрымаем $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

б) *Спосаб 1.* Пераўтворым левую частку дадзенага ўраўнення, выкарыстаўшы ўвядзенне дапаможнага аргумента. Атрымаем:

$$\begin{aligned} 2 \sin x - 3 \cos x &= \sqrt{2^2 + 3^2} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{13} (\cos \varphi \sin x - \sin \varphi \cos x) = \sqrt{13} \sin (x - \varphi), \text{ дзе } \varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Такім чынам, зыходнае ўраўненне раўназначна ўраўненню $\sqrt{13} \sin (x - \varphi) = 3$, дзе $\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Рашыўшы яго, атрымліваем ураўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$\sin (x - \varphi) = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Рашыўшы яго, знайдзем } x = (1 + (-1)^k) \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Адказ: а) } \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } (1 + (-1)^k) \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Способ 2. Калі рашаць ураўненне б) з выкарыстаннем універсальных падстаноўак, то, замяніўшы ў дадзеным ураўненні выразы $\sin x$ і $\cos x$ універсальнымі падстаноўкамі пры $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, атрымаем ураўненне

$$2 \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 3.$$

Рашыўшы яго, атрымаем ураўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{2}, \text{ адкуль } x = 2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Падставім у зыходнае ўраўненне выключаныя пры выкарыстанні ўніверсальных падстаноўак значэнні $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$2 \sin(\pi + 2\pi k) - 3 \cos(\pi + 2\pi k) = 3.$$

Атрымаем $2 \cdot 0 - 3(-1) = 3$, г. зн. $3 = 3$ — правільную лікавую роўнасць.

Такім чынам, значэнні $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, таксама з'яўляюцца рашэннямі ўраўнення б).

Адказ: $2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Выкарыстанне ўласцівасцей функцый

Прыклад 8. Рашыць ураўненне

$$1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x = \cos 8x. \quad (7)$$

Рашэнне. Паколькі пры любых значэннях x з абсягу вызначэння ўраўнення (7) правільныя няроўнасці $1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x \geq 1$ і $\cos 8x \leq 1$, то роўнасць (7) магчыма, толькі калі

$$\begin{cases} 1 + 2 \operatorname{ctg}^2 x = 1, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Рашыўшы першае ўраўненне сістэмы, атрымаем $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Падставіўшы атрыманае рашэнне ў другое ўраўненне сістэмы, маем $\cos\left(8\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = 1$ — правільную лікавую роўнасць.

Такім чынам, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, — рашэнне сістэмы і, значыць, зыходнага ўраўнення.

Адказ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 9. Рашыць ураўненне $7 \sin^4 x + 3 \cos^{12} 2x = 10$.

Рашэнне. Ураўненне раўназначна сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases} \sin^4 x = 1, \\ \cos^{12} 2x = 1. \end{cases}$$

Рашыўшы першае ўраўненне гэтай сістэмы, атрымаем:

$$\sin x = -1 \text{ або } \sin x = 1,$$

адкуль $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (патлумачце чаму).

Падставіўшы гэтыя значэнні x у другое ўраўненне сістэмы, атрымаем $\cos^{12} 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, г. зн. $\cos^{12}(\pi + 2\pi) = 1$ — правільную лікавую роўнасць.

Адказ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 10. Рашыць ураўненне $\operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = 0$ на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рашэнне. Няхай $f(x) = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16}$ — функцыя з абсягам вызначэння $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Трэба знайсці яе нулі.

Функцыя $f(x)$ з'яўляецца цотнай, паколькі

$$f(-x) = \operatorname{tg}^8(-x) + \sin^8(-x) - \frac{17}{16} = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = f(x).$$

На прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функцыі $y = \operatorname{tg}^8 x$ і $y = \sin^8 x$ з'яўляюцца нарастальнымі (патлумачце чаму). Значыць, з'яўляецца нарастальнай і функцыя $y = f(x)$.

Значэнне $x = \frac{\pi}{4}$ з'яўляецца нулём функцыі f :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^8\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^8\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{17}{16} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 - \frac{17}{16} = \frac{2^4}{2^8} - \frac{1}{16} = 0,$$

і іншых нулёў на прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функцыя f не мае. А паколькі f — цотная функцыя, то $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Адказ: $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$.

Прыклад 11. Рашыць ураўненне $7 \operatorname{ctg}^{47} x - 3 = 4 \operatorname{tg}^{13} x$ на прамежку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рашэнне. Лёгка пераканацца, што $x = \frac{\pi}{4}$ з'яўляецца рашэннем дадзенага ўраўнення на прамежку $(0; \frac{\pi}{2})$. На гэтым прамежку функцыя $f(x) = 7 \operatorname{ctg}^{47} x - 3$ спадальная (гэта вынікае са спадання на прамежку $(0; \frac{\pi}{2})$ функцый $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = \operatorname{ctg}^{47} x$), а функцыя $g(x) = 4 \operatorname{tg}^{13} x$ — нарастальная (гэта вынікае з нарастання на прамежку $(0; \frac{\pi}{2})$ функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{tg}^{13} x$).

Такім чынам, на прамежку $(0; \frac{\pi}{2})$ рашэнне $x = \frac{\pi}{4}$ — адзінае.

Адказ: $\frac{\pi}{4}$.

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (3.138—3.151).

3.138. 1) $\sin 18x - 2 \sin 6x = 0$; 2) $\sin 21x + 2 \sin 7x = 0$;
3) $2 \cos 3x + \cos 9x = 0$; 4) $2 \cos 4x - \cos 12x = 0$.

3.139. 1) $\sin \frac{3x}{2} + 2 \cos x = 2$; 2) $\cos \frac{9x}{2} + 2 \cos 3x = -2$;
3) $0,5(\sin 3x - \sin x) = \sin 2x \cos x - 4 \sin^3 x$;
4) $0,5(\cos 3x - \cos x) = 2 \sin^2 x \cos x + 4 \cos^3 x$;
5) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$;
6) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = -\frac{3}{8}$;
7)* $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$;
8)* $4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 2x$.

3.140. 1) $5 \sin x - 12 \cos x = 13$; 2) $8 \sin x - 15 \cos x = 17$;
3) $\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos 2x = 1$; 4) $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = -1$;
5) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}$;
7) $2 \sin \frac{x}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = \sqrt{6}$; 8) $\sin \frac{x}{4} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{4} = -\sqrt{3}$.

3.141. 1) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
2) $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$;
3) $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;

4) $4 \sin 5x \cos 5x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x$;

5) $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2} \cos 15x$;

6) $\sqrt{2} \sin 18x - \sin 12x + \cos 12x = 0$;

7) $2 \sin^4 2x - 3 + 3 \sin 4x = 2 \cos^4 2x$;

8) $2 \cos^4 \frac{x}{2} + \sqrt{15} - 4 \sin x = 2 \sin^4 \frac{x}{2}$.

3.142. 1) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = 0$; 2) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 5x = 0$;

3) $\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} x = 0$; 4) $\operatorname{ctg} 7x + \operatorname{ctg} x = 0$;

5) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{tg} 3x = 0$;

6) $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x - 2 \operatorname{tg} 2x = 0$;

7) $\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(1 - x) = 0$;

8) $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2 \sin 2x = 0$.

3.143. 1) $\frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = 3$; 2) $\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{3}$.

3.144. 1) $\cos 2x \operatorname{ctg} 3x - \sin 2x - \sqrt{2} \cos 5x = 0$;

2) $\cos 3x \operatorname{tg} 2x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$;

3) $\cos 2x \operatorname{tg} 6x - \sin 2x - 2 \sin 4x = 0$;

4) $\cos 3x \operatorname{ctg} 6x - \sin 3x + 2 \cos 9x = 0$.

3.145. 1) $\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$; 2) $4 \sin 4x \sin 12x = \frac{5}{4}$;

3) $\cos 2x \cos 6x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x \cos 9x = -\frac{5}{16}$.

3.146. 1) $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$; 2) $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$;

3) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1,5$;

4) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

5) $\sin^2 3x + \sin^2 4x - \sin^2 5x - \sin^2 6x = 0$;

6) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

3.147. 1) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$;

2) $3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + \cos 2x = 0$;

3) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,25$;

$$4) \sin^4 \frac{x}{6} + \cos^4 \frac{x}{6} = \frac{5}{8}; \quad 5) \sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x;$$

$$6) \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x;$$

$$7)^* \cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8} \cos^2 2x;$$

$$8)^* \cos^6 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sin^6 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

- 3.148.** 1) $3 \cos 4x - 2 \sin^2 2x - \sin 4x = 0;$
 2) $5 \sin^2 2x + 0,5 \sin 4x - \cos 4x = 0;$
 3) $\sin 4x + 3 \cos 4x = 2 \sin^2 2x;$
 4) $4 \sin^2 2x + \sin 4x = 3;$
 5) $5 \sin^2 2x + 3 \cos 4x = 2,5 \sin 4x;$
 6) $4 \cos 4x + 0,5 \sin 4x = \sin^2 2x;$
 7) $2 \cos 6x + 3 \sin^2 3x = 1,5 \sin 6x;$
 8) $5 \sin^2 \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{2x}{3} - 3,5 \sin \frac{2x}{3} = 0.$

- 3.149.** 1) $\sin x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0;$ 2) $1 + \cos x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$
 3) $2 \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2;$ 4) $3 \operatorname{ctg}^2 x + 2 \cos^2 x = 6;$
 5) $\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2};$ 6) $\sin 4x + 3 \sin 2x = \operatorname{tg} x.$

- 3.150*.** 1) $\sin 5x + \cos 4x = 2;$ 2) $\cos 4x - \sin 5x = 2;$
 3) $5 \sin 3x + 3 \cos 4x = 8;$ 4) $3 \cos 4x - 5 \sin 3x = 8;$
 5) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right);$
 6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$
 7) $\frac{5}{\sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right)} = 3 \sin x + 4 \cos x;$
 8) $\frac{13}{\cos \left(x + \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2,4 \right)} = 5 \sin x + 12 \cos x.$

- 3.151*.** 1) $5 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x;$
 2) $3 \cos 2x + 2 \sin^2 x + 4 \sin |x| = 0;$
 3) $2 \cos x - 3 \sin x - |\sin x| = 0;$
 4) $2 \cos x - 3 \sin x - |\cos x| = 0;$
 5) $3 \cos |x| + 4 \sin x - \sin |x| = 0;$
 6) $4 \cos |x| - 3 \sin x - \sin |x| = 0;$

- 7) $3\sin^2 2x - 2 - 0,5|\sin 4x| = 0$;
 8) $5\cos^2 2x - 2,5|\sin 4x| - 3 = 0$;
 9) $\cos 2x + \cos 6x = |\cos 4x|$;
 10) $|\sqrt{3}\cos 8x| = \sin 12x - \sin 4x$.

3.152*. Пры якіх значэннях a мае рашэнне ўраўненне:

- 1) $5\sin 2x - 6\cos 2x = a$; 2) $7\cos 4x - 3\sin 4x = a$;
 3) $5\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) + a\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 6$;
 4) $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - a\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 4$?

3.153*. Рашыце адносна x ураўненне:

- 1) $\sin^4 \frac{4x}{5} + \cos^4 \frac{4x}{5} = a$;
 2) $\sin^4 x + \cos^4 x - a\sin(4x + \pi) = 0$;
 3) $a - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0$;
 4) $\sin^4 2x + \cos^4 2x + \sin 4x = a$.

▲ 3.11. Сістэмы трыганаметрычных ураўненняў

Разгледзім некалькі сістэм, што змяшчаюць трыганаметрычныя ўраўненні.

Прыклад 1. Рашыць сістэму ўраўненняў
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Рашэнне. *Спосаб 1.* Выразім y праз x з першага ўраўнення дадзенай сістэмы і падставім у другое ўраўненне. Атрымаем

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{10}{3}. & (2) \end{cases}$$

Пераўтворым ураўненне (2), выкарыстаўшы формулу тангенса рознасці, і рэшым раўназначнае яму ўраўненне адносна $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} = -\frac{10}{3}, \text{ адкуль } 3\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 10 = 0, \text{ значыць,}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \text{ або } \operatorname{tg} x = 5.$$

З улікам ураўнення (1) атрымліваем раўназначную зыходнай сістэме сукупнасць:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = 5. \end{cases}$$

Рашыўшы кожную з гэтых сістэм, знойдем рашэнні зыходнай сістэмы ўраўненняў.

$$\text{Адказ: } x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, \quad y = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, \quad y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заўвага. Адказ да сістэмы ўраўненняў можа быць запісаны і ў выглядзе мноства пар:

$$\left(-\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\left(\operatorname{arctg} 5 + \pi k, \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Способ 2. Напомнім формулу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. З яе дапамогай, улічыўшы ўмову, атрымаем яшчэ адну суадносіну паміж зменнымі x і y (патлумачце як):

$$1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \frac{10}{3}}, \quad \text{адкуль маем } \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{13}{3}, \quad \text{г. зн. } \operatorname{tg} y = \frac{13}{3} - \operatorname{tg} x.$$

$$\text{Паколькі па ўмове } \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{10}{3}, \quad \text{то } \operatorname{tg} x \left(\frac{13}{3} - \operatorname{tg} x\right) = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{Адкуль атрымліваем ураўненне } 3 \operatorname{tg}^2 x - 13 \operatorname{tg} x - 10 = 0.$$

Далейшае рашэнне супадае з рашэннем спосабам 1.

Прыклад 2. Рашыць сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Рашэнне. Складаючы і аднімаючы пачленна ўраўненні гэтай сістэмы, прыходзім да раўназначнай ёй сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Адсюль атрымаем

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Гэта сістэма раўназначна сукупнасці дзвюх сістэм:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рашыўшы іх, атрымаем:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi(k+n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y = -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

або

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi(k+n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{3} + \pi(k-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Адказ: } \left(-\frac{\pi}{3} + \pi(k+n); -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right); \\ \left(\frac{\pi}{3} + \pi(k+n); \frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



1. Што называецца рашэннем сістэмы ўраўненняў з дзвюма зменнымі (дзвума невядомымі)?
2. Прывядзіце прыклады сістэм трыганаметрычных ураўненняў.

Практыкаванні

Рашыце сістэму ўраўненняў (3.154—3.164).

3.154. 1) $\begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2 \sin x = 19; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y + 2 \operatorname{tg} x = 4, \\ 2y + 3 \operatorname{tg} x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12} \operatorname{ctg} x = 2, \\ 2\sqrt{2}y + \sqrt{27} \operatorname{ctg} x = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4y + \sqrt{3} \cos x = -0,5, \\ 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1. \end{cases}$

3.155. 1) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x - \cos y = -0,5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

- 3.156. 1) $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y)=0,5, \\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} \sin(x+y)=\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}(x-y)=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=0,5. \end{cases}$
- 3.157. 1) $\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{3}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x+y=\frac{9\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=\frac{13\pi}{2}, \\ 3\cos^2 x - 12\cos y = 15. \end{cases}$
- 3.158. 1) $\begin{cases} x+y=0,75\pi, \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = 0,5; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = -\frac{1}{3}. \end{cases}$
- 3.159. 1) $\begin{cases} x-y=195^\circ, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -\frac{\sqrt{6}}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=15^\circ, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x-y=-30^\circ, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=30^\circ, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3. \end{cases}$
- 3.160. 1) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \sin x + \cos y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x - \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 6\cos x + 8\cos y = 3\sqrt{2} - 4, \\ 10\cos x - 14\cos y = 5\sqrt{2} + 7; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 4\sin x + 10\cos 2y = 5\sqrt{3} - 2, \\ 6\sin x + 4\cos 2y = 2\sqrt{3} - 3. \end{cases}$
- 3.161. 1) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0,25, \\ \cos x \cos y = 0,75; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

$$3) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

3.162. 1) $\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 + 2 \cos 2x = 0, \\ \sqrt{6} \cos y - 4 \sin x = 2\sqrt{3}(1 + \sin^2 y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7, \\ 2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(5 + 2\sqrt{6}) \sin x + 2 \cos y = 2\sqrt{2} \cos 2x - 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}, \\ 2(3 + \sqrt{6}) \sin x - 2 \cos y + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 0. \end{cases}$

3.163*. 1) $\begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + 0,25 \operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0,25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4 \cos^2 x = 1 - \operatorname{tg} y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3 \cos 2x - \operatorname{ctg} y + 2,25}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ 18 \sin^2 x - 2 \operatorname{ctg} y - 12 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\frac{11}{9} - \cos^2 x + \operatorname{ctg} y}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}} = 0, \\ 4 \sin^2 x = 2 \operatorname{tg} y + 9. \end{cases}$

3.164*. 1) $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(-4x) + \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \operatorname{tg}(-2y) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \frac{\sqrt{26} - 2}{2} \cos(-4x) = \frac{\sqrt{26} - 1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin^2 3x + (4 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0,75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + (4 - \sqrt{3}) \sin 3x = 2\sqrt{3} - 0,75; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos^2(-6x) + (\sqrt{5} - 1) \operatorname{ctg}(-9y) = \frac{2\sqrt{5} - 1}{4}, \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5} - 1) \cos(-6x) = \frac{2\sqrt{5} - 1}{4}. \end{cases}$

АДКАЗЫ

Раздел 1. Вытворная і яе прымяненне

- 1.1. б), в), д).
1.2. Рыс. 10. а) $D(f) = [-4; 3]$; б) $E(f) = [-4; 4]$; в) -2 ; г) $(0; -3)$; рыс. 12. а) $D(f) = [-3; 3]$; б) $E(f) = [0; 3]$; в) 0 ; г) $(0; 0)$.
1.3. Рыс. 13. а) $[-2; 0]$; б) $[0; 2]$; в) $\approx 1,5$; г) 0 ; д) -2 ; е) $(-2; 2)$; ж) $(0; \approx 1,5)$; з) $(-2; 0)$, $(2; 0)$; рыс. 15. а) $[0; 2]$; б) $[-2; 0]$; в) 4 ; г) -2 ; д) -1 ; 1; е) $[-2; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 2]$; ж) $(0; -2)$; з) $(-1; 0)$, $(1; 0)$.
1.4. 2) $(-\infty; 0,25]$; 4) $(-8; 5)$; 6) $[-7; -2) \cup (-2; 0) \cup [7; 13) \cup (13; +\infty)$.
1.5. 1) 4 ; 6; 3) -4 ; 1; 5) 1 ; 3; 6.
1.6. 2) Спадае на ўсёй лікавай прамой; 4) нарастае на прамежках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; 6) нарастае на ўсёй лікавай прамой.
1.7. 1) $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1,64)$, $(1,64; 2]$.
1.8. 2) б), е). 1.10. 2) $f(5) = -2$, $f(-16) = -1$, $f(1) = -2,5$, $f(3) = 4$.
1.13. 1) $f(5) > f(-2)$; $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right)$; 5) $f(2\sqrt{2}) < f(\sqrt{11})$.
1.14. 2) $f(-100) > f(200)$; 4) $f\left(\frac{5}{7}\right) > f\left(\frac{17}{21}\right)$.
1.15. 1) 3; 3) $-1,5$; 5) $\frac{1}{6}$. 1.16. 2) -1 ; 4) 2 ; 6) $-0,5$.
1.17. 1) $y = 4x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$.
1.18. 2) $y = \frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$; 4) $y = -10x - 39$. 1.19. 1) $y = -x - 1$; 3) $y = x - 1$.
1.20. $y = 4x - 9$ і $y = 3 + 4x$; $y = 5x - 1$ і $y = \sqrt{25}x + 1$; $y = 4 - x$ і $y = (-1)^{15}x + 3$.
1.21. 1) $y = -x - 1$; 3) $y = -x + 3$. 1.22. 2) $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$; 4) $y = 0,1x + 2,5$.
1.23. 1) $y = \frac{1}{8}x + 5\frac{5}{8}$; 3) $y = \frac{1}{8}x + 13\frac{7}{8}$.
1.24. 2) $y = \sqrt{3}x + 1 - 3\sqrt{3}$; 4) $y = -\sqrt{3}x + 1 + 3\sqrt{3}$.
1.25. 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$; 3) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
1.26. 2) -7 . 1.27. 1) 45° . 1.28. 2) $(0; 1)$; 4) $(-10; +\infty)$.
1.29. Напрыклад: 1) $(-1; 3)$, $(0; 4)$, $(1; 5)$; 3) $(-15; 0)$, $(-14; 0)$, $(-13; 0)$.
1.30. Напрыклад: 2) $-12,1$; $-12,2$; $-12,3$; 4) 40 ; 50 ; 60 .
1.31. 1) $\Delta x = 8$; $\Delta f = -2$.
1.32. 2) $-3\Delta x$; 4) $-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2$; 6) $-\frac{3\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.
1.33. 1) $-1,2$; 3) $0,48$; 5) $2,25$.
1.34. 2) $\Delta x = 3,6$; $\Delta y = -1,8$; 4) $\Delta x = 2,2$; $\Delta y = -2\frac{107}{150}$.
1.35. 1) $\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$; 3) $\sqrt{4x_0 + 4\Delta x - 1} - \sqrt{4x_0 - 1}$.
1.36. 2) $\Delta f > \Delta g$. 1.37. 1) $y = -3x + 1$. 1.38. 2) -3 ; 4) $14,4$.
1.39. 1) 3; 3) 4 . 1.40. 2) 0 ; 4) 0 . 1.41. 1) 4 ; 3) $-2,5$; 5) $-0,5$.
1.42. 2) -7 ; 4) -1 . 1.43. 1) $3,5$; 3) $0,8$; 5) -9 .
1.44. 2) -11 ; 4) -2 ; 6) -2 . 1.45. 1) -500 ; 3) 1 ; 5) $9,88$.
1.46. 2) 5 ; 4) $1,5$. 1.47. 1) $y = 1$; 3) $y = 2x$; 5) $y = -2x$.

- 1.48. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) 2. 1.49. 1) $x \leq -0,1$; 3) $x \neq -1$; 5) няма рашэнняў.
- 1.50. 2) 6; 4) -1 .
- 1.51. Напрыклад: 1) $y = 2x + 5$; 3) $y = x^2 - 3$; 5) $y = \frac{x^2}{2} + x - 9$;
7) $y = \sqrt{x} + 2x + 8$.
- 1.52. 2) $v_{\text{сярэдн}} \approx 40 \frac{\text{км}}{\text{г}}$; 4) $v_{\text{сярэдн}} \approx 110 \frac{\text{км}}{\text{г}}$. 1.53. 1) 12; 3) $2t_0 + \Delta t$.
- 1.54. 2) $40 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. 1.55. 1) 1 с; 3) 4 с. 1.56. 2) $5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 1.57. 1) $2t \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; 3) $16 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. 1.58. $8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. 1.59. 1) 3,5 с.
- 1.60. 2) 10 с. 1.61. 1) $3 \frac{\text{град}}{\text{с}}$; 3) $0,6 \frac{\text{град}}{\text{с}}$. 1.62. 2) $13 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 1.63. 1) 5 с. 1.64. $71 \frac{\text{А}}{\text{с}}$. 1.65. 1728 Дж.
- 1.66. 2) $6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 18 Дж; 4 Н. 1.67. 1) $(4\sqrt{2} - 4) \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 1.68. 2) «Мінус». 1.69. 1) «Мінус».
- 1.70. 2) $k(x_1) < 0$, $k(x_2) > 0$, $k(x_3) = 0$; 4) $k(x_1) < 0$, $k(x_2) = 0$, $k(x_3) < 0$.
- 1.71. 1) -2 ; 3) 0,42. 1.72. 2) 4; 4) 19.
- 1.73. 1) У пункце $x = 0$ — тупы вугал, у пункце $x = 8$ — востры вугал, у пункце $x = -5$ — тупы вугал.
- 1.74. 2) $y = 6x - 10$; 4) $y = x + 2$. 1.75. 1) $y = 5x + 3$; 3) $y = 2$.
- 1.76. 2) $y = -4x - 7$; 4) $y = 2x - 11$; 6) $y = -4x - 6$.
- 1.77. 1) $(-1,5; -0,75)$; 3) $(0; 1)$; 5) $\left(\frac{1}{12}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.
- 1.78. 2) $y = -4$. 1.79. 1) $(1; 4)$. 1.80. 2) $(2; 1)$.
- 1.81. 1) $y = 0$, $y = -4x + 4$. 1.82. 2) $(-1; 18)$. 1.83. 1) $(0; -7)$.
- 1.84. 2) -7 . 1.85. 1) $f'(x) = 4$; 3) $f'(x) = 1\frac{3}{11}$; 5) $f'(x) = -6x - 8$.
- 1.86. 2) $f'(x) = -1,5$; 4) $f'(x) = -2x + 1$.
- 1.87. 1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; 3) $f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$.
- 1.88. 2) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$; 4) $f'(x) = \frac{2x^2 + 8x - 5}{(x+2)^2}$.
- 1.89. 1) $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2)^2}$; 3) $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 4}{(x-2)^2}$; 5) $f'(x) = \frac{x^2 + 8x - 13}{(x^2 - 2x + 5)^2}$.
- 1.90. 2) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 20$; 4) $f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 7x^2 - 8x$.
- 1.91. 1) $f'(x) = -24x + 26$; 3) $f'(x) = -3x^2 - 20x - 3$;
5) $f'(x) = \pi(10x^3 - 87x^2 + 216x - 112)$.
- 1.92. 2) $f'(x) = \frac{-16(26x^2 + 33x + 130)}{(x^2 - 5)^2}$;
4) $f'(x) = \frac{4x^4 - 72x^3 + 449x^2 - 606x - 1467}{(x-6)^2(x-3)^2}$;

$$6) f'(x) = \frac{-6(2x^4 - 45x^3 + 199x^2 - 195x - 153)}{(x-7)^2(2x+1)^4}.$$

- 1.93. 1) Правільна. 1.94. 2) $f'(-1) < g'(-1)$; 4) $f'(0) < g'(0)$.
 1.95. 1) ± 1 ; 3) ± 2 ; 5) 0; 0,8; 2. 1.96. 2) -3 ; 0; 4) 1. 1.97. 1) $x > 1$.
 1.98. 2) $x > -0,5$; $x \neq 0$. 1.99. 1) $\left(-2; \frac{13\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(2; -\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$.
 1.101. 1) а) $[x_1; b]$; б) $[a; x_1]$; в) $(x_1; b]$; г) $[a; x_1]$; 3) а) $[x_1; x_2]$; б) $[a; x_1]$, $[x_2; b]$; в) $(x_1; x_2)$; г) $[a; x_1]$, $(x_2; b]$.
 1.102. 2) Нарастае на прамежках $(-\infty; 1]$, $[2; +\infty)$, спадае на прамежку $[1; 2]$; 4) нарастае на прамежках $(-\infty; -6]$, $[-2; 2]$, спадае на прамежках $[-6; -2]$, $[2; +\infty)$.
 1.103. 1) Дадатныя на прамежку $(a; b)$, адмоўныя на прамежках $[m; a)$, $(b; n]$; 3) дадатныя на прамежках $(b; c)$, $(e; h]$, адмоўныя на прамежках $[a; b)$, $(c; e)$.
 1.104. 2) Прамежак спадання $[-4; 3]$, прамежкі нарастання $(-\infty; -4]$, $[3; +\infty)$; 4) прамежкі спадання $(-\infty; -41]$, $[-6; 7]$, прамежкі нарастання $[-41; -6]$, $[7; +\infty)$; 6) прамежкі спадання $[-6; -5]$, $[-2; 2]$, $[5; 6]$, прамежкі нарастання $(-\infty; -6]$, $[-5; -2]$, $[2; 5]$, $[6; +\infty)$.
 1.105. 1) Прамежкаў спадання няма, нарастае на R ; 3) R — прамежак спадання, прамежкаў нарастання няма; 5) прамежкі спадання $[-7; 0]$, $[5; +\infty)$, прамежкі нарастання $(-\infty; -7]$, $[0; 5]$.
 1.107. 1) Прамежак нарастання $[0,25; +\infty)$, прамежак спадання $(-\infty; 0,25]$.
 1.108. 2) Прамежак нарастання $[-1; 1]$, прамежкі спадання $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$; 4) прамежкі нарастання $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, $[1; +\infty)$, прамежак спадання $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; 6) прамежак нарастання $[-2; +\infty)$, прамежак спадання $(-\infty; -2]$; 8) прамежкі нарастання $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$, $[2; +\infty)$, прамежкі спадання $[-1; 0]$, $[1; 2]$.
 1.109. 1) Прамежкі нарастання $(-\infty; -0,25)$, $(-0,25; +\infty)$, прамежкаў спадання няма; 3) прамежак нарастання $(-\infty; 3)$, прамежак спадання $(3; +\infty)$.
 1.110. 2) Прамежкі нарастання $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$, прамежкаў спадання няма; 4) прамежкі нарастання $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, прамежкаў спадання няма; 6) прамежак нарастання $(-1,5; 9,5]$, прамежкі спадання $(-\infty; -1,5)$, $[9,5; +\infty)$.
 1.111. 1) $a > 0$; 3) $0 \leq a \leq 28$.
 1.112. 2) З'яўляецца, нарастальная; 4) з'яўляецца, спадальная.
 1.113. 1) Прамежак нарастання R ; прамежкаў спадання няма; лік нулёў функцыі роўны 1.
 1.114. 2) x_1 — пункт максімуму, $f(x_1) = 6$; x_2 — пункт мінімуму, $f(x_2) = 1$; 4) x_1 — пункт мінімуму, $f(x_1) = -2$, x_2 — пункт максімуму, $f(x_2) = 1,5$.
 1.115. 1) a, b ; 3) b, c, e .
 1.116. 2) $-\frac{1}{2}$ — пункт экстрэмуму; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$; 4) $\frac{2}{5}$ і 3 — пункты экстрэмуму; $f\left(\frac{2}{5}\right) = -3,88$; $f(3) = 84$; 6) 1 — пункт экстрэмуму; $f(1) = -6$.

- 1.117. 1) 2,5 — пункт мінімуму; $f(2,5) = -6,25$; 3) 3,75 — пункт максімуму, $f(3,75) = -65\frac{235}{256}$.
- 1.118. 2) -1 — пункт мінімуму, $f(-1) = 3$; 4) -4 — пункт максімуму, 4 — пункт мінімуму, $f(-4) = -4$; $f(4) = 4$; 6) -4 — пункт мінімуму, -2 — пункт максімуму, $f(-4) = 8$, $f(-2) = 4$.
- 1.119. 1) -1 — пункт максімуму; $f(-1) = 2$; 1 — пункт мінімуму, $f(1) = -2$; 3) 3 — пункт мінімуму; $f(3) = 12$; -3 — пункт максімуму; $f(-3) = -12$.
- 1.120. 2) $-4\frac{1}{3}$ — пункт мінімуму, $f\left(-4\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{7}$; 4) 2 — пункт максімуму, $f(2) = \frac{3}{8}$.
- 1.121. 1) а) R ; б) $[-2; 2]$ — прамежак нарастання; $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$ — прамежкі спадання; в) -2 і 2 — пункты экстрэмуму, $f(-2) = -31$, $f(2) = 1$; 3) а) R ; б) $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$ — прамежкі нарастання; $[-1; 1]$ — прамежак спадання; в) -1 і 1 — пункты экстрэмуму, $f(-1) = 4$, $f(1) = -4$.
- 1.122. 1) -1,2 — пункт экстрэмуму, $f(-1,2) = 0,072$; 2) -1,2.
- 1.123. 1) 4,5 — пункт экстрэмуму, $f(4,5) = \frac{21}{32}$; 2) 4,5.
- 1.124. 1) -2 — пункт экстрэмуму, $f(-2) = 24 + \sqrt{21}$; 2) -2.
- 1.125. 1) 2 — пункт экстрэмуму, $f(2) = 48 - \sqrt{5}$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- 1.126. 2) $f_{\text{найб}}(x) = 9$; $f_{\text{найм}}(x) = -6$; 4) $f_{\text{найб}}(x) = 0$; $f_{\text{найм}}(x) = -4$;
 $x \in [-1; 2]$ $x \in [-1; 2]$ $x \in [-1; 2]$ $x \in [-1; 2]$
- 6) $f_{\text{найб}}(x) = 8$; $f_{\text{найм}}(x) = 0$.
 $x \in [-2; 4]$ $x \in [-2; 4]$
- 1.127. 1) $f_{\text{найб}}(x) = 0$; $f_{\text{найм}}(x) = -5$; 3) $f_{\text{найб}}(x) = 4$; $f_{\text{найм}}(x) = -104$.
 $x \in [-1; 0]$ $x \in [-1; 0]$ $x \in [-4; 0]$ $x \in [-4; 0]$
- 1.128. 2) $f_{\text{найб}}(x) = 10\frac{1}{3}$; $f_{\text{найм}}(x) = 9$; 4) $f_{\text{найб}}(x) = 7\frac{13}{27}$; $f_{\text{найм}}(x) = 1$.
 $x \in [-3; -1]$ $x \in [-3; -1]$ $x \in [-1; 1]$ $x \in [-1; 1]$
- 1.129. 1) $f_{\text{найб}}(x) = 2,5$; $f_{\text{найм}}(x) = -2,5$; 3) $f_{\text{найб}}(x) = 4,25$; $f_{\text{найм}}(x) = 2$.
 $x \in [-2; 0,5]$ $x \in [-2; 0,5]$ $x \in [1; 2]$ $x \in [1; 2]$
- 1.130. 2) $f_{\text{найб}}(x) = 5$; $f_{\text{найм}}(x) = 3,65$; 4) $f_{\text{найб}}(x) = \frac{10}{13}$; $f_{\text{найм}}(x) = -2$.
 $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ $x \in [-2; 0,5]$ $x \in [-2; 0,5]$
- 1.131. 1) 6 с, $142 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 9 с, $124 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 1.132. 2) 7 с, $196 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) 10 с, $700 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 1.133. 1) Стораны прамавугольнага з найбольшай плошчай роўны 5 м, яго плошча 25 м^2 ; стораны прамавугольнага з найменшай плошчай 2 м і 8 м, яго плошча 16 м^2 .
- 1.134. 2) $200 \text{ м} \times 200 \text{ м}$. 1.135. 1) $48 = 24 + 24$. 1.136. 2) $10 = 5 + 5$.
- 1.137. 1) Стораны $\sqrt{2}$ дм і $\sqrt{2}$ дм, плошча 2 дм^2 . 1.138. 2) 48 см.
- 1.139. 1) $2\sqrt{3}$ см $\times$ 8 см. 1.140. 2) 12 м^2 .

Раздел 2. Трыганаметрычныя выразы

- 2.1. 1) 120° ; 3) 60° .
- 2.2. 2) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 2.3. 1) 45° ; 45° . 2.4. 2) $\approx 37^\circ$; 4) $\approx 71^\circ$; 6) $\approx 69^\circ$; 8) $\approx 76^\circ$.
- 2.5. 1) $\alpha < \beta$; 3) $\alpha < \beta$. 2.6. 2) 45° . 2.7. 1) $5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $4\sqrt{3}$.
- 2.8. 2) $4\frac{1}{4}$; 4) $\frac{12\sqrt{3}-17}{12}$. 2.9. 1) 1; 1; 1; 3) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$; 2; $1+\sqrt{3}$.
- 2.10. 2) 1; 4) $\sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$.
- 2.11. Напрыклад: 1) $\sin^3 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ + \sin 60^\circ$;
3) $\cos 60^\circ \cos^2 30^\circ - \cos 45^\circ + \cos^3 30^\circ$.
- 2.12. Напрыклад: 2) $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$;
4) $\operatorname{ctg}^4 60^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg}^3 60^\circ$.
- 2.13. 1) $\frac{1+2^{101}}{3 \cdot 2^{100}}$.
- 2.14. 2) $-180^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-90^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; $360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-270^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.15. 1) A_{30° , A_{120° , A_{210° ; 3) A_{-120° , A_{60° , A_{240° .
- 2.18. 2) III, II, I, I, II; 4) IV, IV, I, IV, I.
- 2.19. 1) $360^\circ \cdot 1 + 66^\circ$; 3) $360^\circ \cdot (-3) + 231^\circ$; 5) $360^\circ \cdot 9 + 284^\circ$;
7) $360^\circ \cdot (-4) + 99^\circ$.
- 2.20. 2) -530° ; -170° ; 190° ; 550° ; 910° ; 4) -540° ; -180° ; 180° ; 540° ; 900° .
- 2.21. 1) 0; 3) -3; 5) -1.
- 2.22. 2) II.
- 2.23. Напрыклад: 1) -440° , -80° , 640° ; 3) -375° , -15° , 705° .
- 2.24. Напрыклад: 2) а) 90° ; 450° ; 810° ; б) -210° ; 150° ; 510° ; в) -330° ; 30° ; 390° ; г) -120° ; 240° ; 600° .
- 2.25. Напрыклад: 1) -865° , -505° , -145° ; 3) 185° , 545° , 905° .
- 2.26. 2) Значэнні абсцысы і ардынаты меншыя за нуль; 4) значэнні абсцысы і ардынаты большыя за нуль.
- 2.27. 1) Значэнне абсцысы меншае або большае за нуль, значэнне ардынаты роўна нулю.
- 2.28. Напрыклад: 2) 45° ; 135° ; 495° ; 4) -150° ; -30° ; 210° ; 6) -270° ; 90° ; 450° .
- 2.29. Напрыклад: 1) -120° , 120° , 240° ; 3) -135° , 135° , 225° ; 5) -180° , 180° , 540° .
- 2.30. 2) -150° ; 4) 100° ; 6) -189° ; 8) -432° .
- 2.31. 1) $\approx 11^\circ$; 3) $\approx 286^\circ$; 5) $\approx 527^\circ$. 2.32. 2) $\frac{\pi}{18}$; 4) $\frac{5\pi}{18}$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) $\frac{181\pi}{36}$.
- 2.33. 1) 60° , $\frac{\pi}{3}$; 3) 120° , $\frac{2\pi}{3}$; 5) 144° , $\frac{4\pi}{5}$.
- 2.34. 2) 90° , $\frac{\pi}{2}$; 4) 45° , $\frac{\pi}{4}$; 6) 60° , $\frac{\pi}{3}$.
- 2.35. 1) (1; 0), $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) (-1; 0), $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) (1; 0), $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 2.36. 2) $x_{\frac{7\pi}{8}} < 0$, $y_{\frac{7\pi}{8}} > 0$; $x_{\frac{3\pi}{8}} > 0$, $y_{\frac{3\pi}{8}} > 0$; $x_{\frac{\pi}{8}} > 0$, $y_{\frac{\pi}{8}} > 0$; 4) $x_{-\frac{11\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{11\pi}{8}} > 0$; $x_{-\frac{9\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{9\pi}{8}} > 0$; $x_{-\frac{5\pi}{8}} < 0$, $y_{-\frac{5\pi}{8}} < 0$.
- 2.37. 1) $x_{\frac{\pi}{4}} = y_{\frac{\pi}{4}}$; 3) $x_{\frac{2\pi}{3}} < y_{\frac{2\pi}{3}}$; 5) $x_{\frac{5\pi}{6}} < y_{\frac{5\pi}{6}}$; 7) $x_{\frac{\pi}{8}} > y_{\frac{\pi}{8}}$.
- 2.38. 2) $x_3 < 0$, $y_3 > 0$; $3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $x_{-5} > 0$, $y_{-5} > 0$; $-5 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $x_{11} > 0$, $y_{11} < 0$; $11 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $x_{-7} > 0$, $y_{-7} < 0$; $-7 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.39. 1) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$.
- 2.40. 2) $n = -4$; $\varphi = 0, 1\pi$; I; 4) $n = 7$; $\varphi = \frac{4\pi}{3}$; III; 6) $n = -4$; $\varphi = \frac{5\pi}{7}$; II; 8) $n = 0$; $\varphi = \frac{7\pi}{8}$; II.
- 2.41. 1) Няма; 3) няма; 5) -1. 2.42. 2) Не; 4) правільна.
- 2.43. 1) 0; 3) $1 + 4\sin\alpha \cos\alpha$.
- 2.44. 2) $\sin(-40^\circ) \approx -0,6$; $\cos(-40^\circ) \approx 0,8$; $\sin(-125^\circ) \approx -0,8$; $\cos(-125^\circ) \approx -0,6$; $\sin(-340^\circ) \approx 0,3$; $\cos(-340^\circ) \approx 0,9$; 4) $\sin(-775^\circ) \approx -0,8$; $\cos(-775^\circ) \approx 0,6$; $\sin(-470^\circ) \approx -0,9$; $\cos(-470^\circ) \approx -0,3$; $\sin(-1988^\circ) \approx 0,1$; $\cos(-1988^\circ) \approx -1$.
- 2.45. 1) $\sin \frac{\pi}{12} \approx 0,3$; $\cos \frac{\pi}{12} \approx 1$; $\sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,9$; $\cos \frac{3\pi}{8} \approx 0,4$; $\sin \frac{5\pi}{6} = 0,5$; $\cos \frac{5\pi}{6} \approx -0,9$; $\sin \frac{4\pi}{3} \approx -0,9$; $\cos \frac{4\pi}{3} = -0,5$; $\sin \frac{8\pi}{3} \approx 0,9$; $\cos \frac{8\pi}{3} = -0,5$; $\sin \frac{11\pi}{4} \approx 0,7$; $\cos \frac{11\pi}{4} \approx -0,7$; 3) $\sin \frac{44\pi}{3} \approx 0,9$; $\cos \frac{44\pi}{3} = -0,5$; $\sin \frac{51\pi}{5} \approx 0,6$; $\cos \frac{51\pi}{5} \approx 0,8$; $\sin \frac{17\pi}{4} \approx 0,7$; $\cos \frac{17\pi}{4} \approx 0,7$; $\sin\left(-\frac{62\pi}{3}\right) \approx -0,9$; $\cos\left(-\frac{62\pi}{3}\right) = -0,5$; $\sin\left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx -0,9$; $\cos\left(-\frac{74\pi}{3}\right) = -0,5$; $\sin\left(-\frac{87\pi}{4}\right) \approx 0,7$; $\cos\left(-\frac{87\pi}{4}\right) \approx 0,7$.
- 2.46. 2) $\sin 4 \approx -0,8$; $\cos 4 \approx -0,7$; $\sin 4,5 \approx -1$; $\cos 4,5 \approx -0,2$; $\sin 5 \approx -1$; $\cos 5 \approx 0,3$; $\sin 5,5 \approx -0,7$; $\cos 5,5 \approx 0,7$; $\sin 6 \approx -0,3$; $\cos 6 \approx 1$; 4) $\sin(-1) \approx -0,8$; $\cos(-1) \approx 0,5$; $\sin(-1,5) \approx 1$; $\cos(-1,5) \approx 0,1$; $\sin(-2) \approx -0,9$; $\cos(-2) \approx -0,4$; $\sin(-2,5) \approx -0,6$; $\cos(-2,5) \approx -0,8$; $\sin(-3) \approx -0,1$; $\cos(-3) \approx -1$.
- 2.47. 1) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) -3,5.
- 2.48. 2) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 4) 0,5; 6) $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$.
- 2.49. Напрыклад: 1) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$; 5) $-\pi$; 0; π .
- 2.50. Напрыклад: 2) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; 6) -2π ; 0; 2π .
- 2.51. Напрыклад: 1) 0; 3) няма; 5) π .
- 2.52. Напрыклад: 2) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 6) няма.

- 2.53. 1) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; в) $-\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.
- 2.54. 2) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$; в) $-\frac{19\pi}{3}$, $-\frac{17\pi}{3}$, $-\frac{13\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.
- 2.55. 1) $-0,96$. 2.56. 2) III; 4) IV; 6) II або IV; 8) I або IV.
- 2.57. 1) $\sin 49^\circ > 0$; $\sin(-250^\circ) > 0$; $\sin 333^\circ < 0$; $\sin(-1324^\circ) > 0$; $\cos 49^\circ > 0$; $\cos(-250^\circ) < 0$; $\cos 333^\circ > 0$; $\cos(-1324^\circ) < 0$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) < 0$; $\sin\frac{19\pi}{18} < 0$; $\sin\left(-\frac{17\pi}{9}\right) > 0$; $\sin\frac{279\pi}{20} < 0$; $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) > 0$; $\cos\frac{19\pi}{18} < 0$; $\cos\left(-\frac{17\pi}{9}\right) > 0$; $\cos\frac{279\pi}{20} > 0$; 5) $\sin 3,5 < 0$; $\sin(-4) > 0$; $\sin 5,5 < 0$; $\sin(-8) < 0$; $\cos 3,5 < 0$; $\cos(-4) < 0$; $\cos 5,5 > 0$; $\cos(-8) < 0$.
- 2.58. 2) Можа; 4) не; 6) можа; 8) можа.
- 2.59. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.60. 2) $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $3\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.61. 1) $\sin 1276^\circ < 0$, $\sin(-3461^\circ) > 0$, $\cos 2078^\circ > 0$, $\cos(-3065^\circ) < 0$; 3) $\sin\frac{18\pi}{13} < 0$, $\sin\left(-\frac{31\pi}{16}\right) > 0$, $\cos\left(-\frac{25\pi}{13}\right) > 0$, $\cos\frac{133\pi}{8} < 0$; 5) $\sin 3,14 > 0$, $\sin(-25) > 0$, $\cos(-6,1) > 0$, $\cos 99 > 0$.
- 2.62. 2) «Мінус»; 4) «мінус»; 6) «плюс»; 8) «мінус».
- 2.63. 1) «Плюс»; 3) «мінус»; 5) «плюс».
- 2.64. 2) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\cos\pi$; 4) $\sin\frac{33\pi}{2}$, $\sin 101\pi$, $\cos 223\pi$.
- 2.66. 2) $7 \text{ i } -7$; 4) $4 \text{ i } 2$; 6) $0 \text{ i } -1$; 8) $1 \text{ i } 0$; 10) $\frac{1}{4} \text{ i } \frac{1}{6}$.
- 2.67. 1) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$, $2\pi < \alpha < \frac{11\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{2}$.
- 2.68. 2) $-2\pi < \alpha < -\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.
- 2.69. 1) 0; 3) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 5) $1 + 2\sin\alpha \cos\alpha$.
- 2.72. 2) $-4 \leq t \leq -2$; 4) $-1 \leq t \leq 1$; 6) $3 \leq t \leq 4$. 2.73. 1) $\frac{3\pi}{4}$; 4) 4π .
- 2.74. 2) $\frac{17\pi}{12}$; 4) 0; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. 2.75. 1) Правільна; 3) не.
- 2.76. 2) $-2\arcsin b$; 4) $2\arccos b - \pi$.
- 2.77. 1) $\arcsin 1 > \arccos 1$; 3) $\arccos 0 = \arcsin 1$; 5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 2.78. 2) $\frac{23\pi}{6}$; 4) $\frac{19\pi}{6}$; 6) $\frac{5\pi}{2}$; 8) $\frac{7\pi}{6}$.
- 2.79. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2.80. 2) $\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{5}$; 6) π ; 8) $\frac{7\pi}{9}$.

- 2.81. 1) $\frac{7\pi}{12}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$. 2.82. 2) $\pi - 2$; 4) $11 - 4\pi$; 6) $7,6 - 2\pi$.
- 2.83. 1) не; 3) не. 2.84. 2) Правільна; 4) не.
- 2.85. 1) $\operatorname{tg} 230^\circ \approx 1,2$; $\operatorname{tg}(-220^\circ) \approx -0,8$; $\operatorname{tg}(-1040^\circ) \approx 0,8$; $\operatorname{ctg} 230^\circ \approx 0,8$;
 $\operatorname{ctg}(-220^\circ) \approx -1,2$; $\operatorname{ctg}(-1040^\circ) \approx 1,2$; 3) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \approx 0,4$; $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} \approx -1,7$;
 $\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{8}\right) \approx -2,4$; $\operatorname{tg} \left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx 1,7$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \approx 2,4$; $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} \approx -0,6$;
 $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{8}\right) \approx -0,4$; $\operatorname{ctg} \left(-\frac{74\pi}{3}\right) \approx 0,6$.
- 2.86. 2) I або IV; 4) I або II; 6) II або III.
- 2.87. 1) «Мінус»; 3) «мінус»; 5) «плюс». 2.88. 2) Правільна; 4) не.
- 2.89. 1) «Мінус»; 3) «плюс»; 5) «плюс».
- 2.90. 2) «Плюс»; 4) «плюс»; 6) «мінус». 2.91. 1) -3 ; 3) $\frac{1}{3}$.
- 2.92. 2) $m + 1$; 4) $\frac{m-1}{m}$. 2.93. 1) 0; 3) $-2\operatorname{ctg} \alpha$; 5) -2 .
- 2.94. 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.95. 1) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $-4 + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.96. 2) $2\sin \alpha$; 4) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$; 6) $\operatorname{tg}^2 \alpha$.
- 2.100. 2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$;
 8) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
- 2.101. 1) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.
- 2.102. 2) Правільна; 4) не. 2.103. 1) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\sqrt{3}$.
- 2.104. 2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg}(-1)$;
 6) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
- 2.105. 1) 3,7; 3) $-1,4$; 5) $-0,25$. 2.106. 2) 0,05.
- 2.107. 1) $-\frac{3\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{8}$.
- 2.108. 2) $\cos \beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} \beta = -2\sqrt{2}$; 4) $\sin \beta = \frac{9}{41}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{9}{40}$,
 $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{40}{9}$; 6) $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg} \beta = -\frac{1}{2}$; 8) $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -2$.
- 2.109. 1) $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$; 3) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 5) $\sin \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$.

2.110. 2) $-\cos^2 \alpha$; 4) $2\sin \alpha$; 6) $2\sin \alpha$; 8) $\cos^2 \alpha$.

2.111. 1) $1 - \sin \alpha$; 3) $\sin \alpha + \cos \alpha$; 5) $\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; 7) $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

2.112. 2) $2 + \sqrt{3}$; 4) 0; 6) $\sqrt{2}$. 2.113. 1) $\sin^2 \alpha$; 3) $\sin^2 \alpha$; 5) 0.

2.114. 2) $\cos \alpha$; 4) $-\frac{1}{\sin \alpha}$. 2.116. 2) Няма; 4) 0 і -2 ; 6) няма.

2.117. 1) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$;

5) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2.118. 2) $\frac{\pi(2n+1)}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \neq \frac{3k-2}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.119. 1) Не; 3) з'яўляецца.

2.120. 2) Не; 4) з'яўляецца.

2.121. 1) З'яўляецца; 3) не.

2.122. 2) $\operatorname{ctg} \alpha$; 4) $-\cos \alpha$; 6) $\sin \alpha$; 8) $-\operatorname{ctg} \alpha$; 10) $-\operatorname{tg} \alpha$.

2.123. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) -1 ; 5) $-\frac{1}{2}$; 7) $\sqrt{3}$; 9) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.124. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) 1; 10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.125. 1) 4; 3) $-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 2.126. 2) $-\sqrt{2}-1$; 4) 1,75.

2.127. 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha$; 3) $2\sin \alpha \cos \alpha$; 5) 2. 2.130. 2) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; 4) $\frac{3}{7}$; 6) 6.

2.131. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$;

7) $\frac{1+\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} \alpha}$; 9) $\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} \alpha}{1+\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}$.

2.132. 2) $\sqrt{2} \sin \alpha$; 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cos \alpha$; 6) $\frac{8 \operatorname{tg} \alpha}{1-3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$; 8) $\frac{2+2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

2.133. 1) а) $\frac{156}{1525}$; б) $-\frac{468}{493}$; 3) а) $-\frac{1363}{1525}$; б) $-\frac{475}{493}$.

2.134. 2) а) 1; б) 5,5; 4) а) $\frac{7}{23}$; б) $\frac{38}{41}$. 2.135. 1) а) $-0,5$; б) $0,5$.

2.136. 2) $-\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$; 4) $\operatorname{tg} \alpha$; 6) 1,5. 2.137. 1) $-\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 5) 2.

2.138. 2) $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 75^\circ =$

$= 2-\sqrt{3}$; 4) $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$,

$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$; 6) $\sin \left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos \left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$,

$\operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.

2.139. 1) $0,5$; 3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 5) $\sqrt{3}$; 7) 1. 2.140. 2) $-\cos 2\alpha$.

2.141. 1) 1; 3) $\sqrt{2}$. 2.143. 1) $-\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$; 3) $-\frac{55\sqrt{26}}{338}$; 5) $-\frac{33}{65}$.

2.144. 2) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$

2.146. 2) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \cos 5\alpha = \cos^2 \frac{5\alpha}{2} - \sin^2 \frac{5\alpha}{2}, \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\alpha}{2}};$

4) $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha, \cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha, \operatorname{ctg} 6\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 3\alpha}{2 \operatorname{tg} 3\alpha};$

6) $\sin \frac{3\alpha}{4} = 2 \sin \frac{3\alpha}{8} \cos \frac{3\alpha}{8}, \cos \frac{\alpha}{5} = \cos^2 \frac{\alpha}{10} - \sin^2 \frac{\alpha}{10}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}.$

2.147. 1) $2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right);$ 3) $\cos^2 \left(2\alpha - \frac{\pi}{16} \right) - \sin^2 \left(2\alpha - \frac{\pi}{16} \right);$

5) $\frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{14} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{14} \right)}.$

2.148. 2) $\frac{1 + \cos 12\alpha}{2};$ 4) $\frac{1 + \cos 16\alpha}{1 - \cos 16\alpha};$ 6) $\frac{1 + \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 14\alpha \right)}{2};$

8) $\frac{1 + \cos \left(\frac{7\pi}{2} + 10\alpha \right)}{1 - \cos \left(\frac{7\pi}{2} + 10\alpha \right)}.$

2.149. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2};$ 3) $\frac{1}{4};$ 5) $\frac{3}{2};$ 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

2.150. 2) $\cos 20^\circ;$ 4) $-\sin 10^\circ;$ 6) $-5 \operatorname{tg} 50^\circ.$

2.151. 1) $\cos^2 2\alpha;$ 3) $\operatorname{tg}^2 \alpha;$ 5) $\sin 8\alpha;$ 7) $\cos 2\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha;$ 9) 0,75.

2.152. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2};$ 4) $\frac{6 + \sqrt{2}}{8};$ 6) $\frac{7\sqrt{2}}{16}.$

2.153. 1) $\left| \sin \frac{\alpha}{4} \right|;$ 3) $|\operatorname{ctg} \alpha|.$

2.154. 2) а) $-\frac{7}{25};$ б) $-\frac{119}{169};$ в) $-\frac{7}{25};$ г) $\frac{119}{169};$ 4) а) $-\frac{7}{24};$ б) $-\frac{119}{120};$ в) $\frac{7}{24};$ г) $-\frac{119}{120}.$

2.155. 1) а) $-\frac{120}{169};$ б) $-\frac{24}{25};$ 3) а) $\frac{120}{119};$ б) $\frac{24}{7}.$

2.156. 2) а) $-\frac{7}{25};$ б) $-\frac{119}{169};$ 4) а) $\frac{7}{24};$ б) $\frac{119}{120}.$

2.157. 1) 3.

2.158. 2) а) $\frac{\sqrt{2}}{10};$ б) $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}};$ 4) а) $\frac{1}{7};$ б) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$

2.159. 1) а) $\frac{96}{625};$ б) $\frac{96}{625};$ 3) а) $\frac{96}{529};$ б) $\frac{96}{529}.$

2.161. 1) $2i - 2;$ 3) $i - 1;$ 5) $i - 1.$

2.162. 2) $-\frac{7}{9};$ 4) $\frac{\sqrt{5}}{20};$ 6) $-\frac{9}{41}.$

2.163. 1) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{16}.$

- 2.164. 2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 70^\circ$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 80^\circ$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 1^\circ$.
- 2.165. 1) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\beta$; 3) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 4\beta$.
- 2.166. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$; 6) $\cos 2\alpha - \cos \frac{\pi}{2}$.
- 2.168. 2) $\sqrt{3}\cos 21^\circ$; 4) $-\sqrt{3}\cos 5^\circ$; 6) $2\sin 30^\circ \sin 42^\circ$; 8) $\sqrt{3}\sin 65^\circ$.
- 2.169. 1) $\sqrt{2}\sin \frac{5\pi}{36}$; 3) $\sqrt{2}\cos \frac{5\pi}{36}$; 5) $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha$; 7) $2\sin 2\alpha \sin 3\alpha$.
- 2.170. 2) $-\sqrt{2}\sin\left(3\alpha - \frac{5\pi}{16}\right)$; 4) $\sqrt{3}\sin \alpha$; 6) $-2\sin \frac{7\pi}{20}\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 2.171. 1) $\frac{\sin 16\alpha}{\cos 7\alpha \cos 9\alpha}$; 3) $\frac{2}{\operatorname{ctg} 2\alpha}$. 2.172. 2) 1; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sqrt{3}$.
- 2.173. 1) $4\cos \frac{\alpha}{2}\cos \alpha \cos \frac{5\alpha}{2}$; 3) $4\sin 13\alpha \cos 3\alpha \cos 6\alpha$.
- 2.174. 2) $2\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$;
6) $2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5\alpha\right)}{\cos 5\alpha}$.
- 2.175. 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$;
5) $\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha}$.
- 2.176. 2) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
6) $\frac{3\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos^2 \alpha}$.
- 2.177. 1) $2\sin 23^\circ \cos 23^\circ$; 3) $2\sin 27^\circ \cos 27^\circ$; 5) $-\frac{4\sin 18^\circ \sin 42^\circ}{\cos^2 12^\circ}$.
- 2.178. 2) $2\sqrt{2}\cos \frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $2\sqrt{2}\sin \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;
6) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2 \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos \alpha}$.
- 2.179. 1) $2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 2.181. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) πn , $n \in \mathbb{Z}$.
- 2.182. 2) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$; 4) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$; $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,
 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}$.

2.183. 1) 19. 2.184. 2) $\frac{33}{49}$.

2.185. 1) $\frac{2\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 3) $\frac{12 + 10\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 12\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

2.186. 2) $\frac{6\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 7\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2}$; 4) $\frac{3 - 10\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 3\operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}}{14\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}}$.

2.187. 1) $\frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}$; 3) $\frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}$. 2.189. 1) $-\frac{1}{3}$ або 2.

2.190. 2) 1; 4) $\frac{3m^2n - n^3}{m^2 + n^2}$. 2.191. 1) $\frac{2 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

2.192. 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\sqrt{6} \cos\left(4\alpha + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $5\sin\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

2.193. 1) 2; -2; 3) 2; -2; 5) 6; -6.

2.194. 2) $-\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 5^\circ}$; 8) $\frac{1}{16} \sin^2 72^\circ$.

2.196. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$; 4) $-\cos 4\alpha$. 2.197. 1) 5 і 4; 3) 4 і 0,8.

2.198. 2) $\frac{\sin 36^\circ}{2\sin 6^\circ}$; 4) $\frac{\sin 15^\circ \cos 18^\circ}{\sin 3^\circ}$.

2.199. 1) $4 \sin \frac{2\pi}{17} \cos \frac{7\pi}{51} \cos \frac{10\pi}{51}$; 3) $4 \cos \frac{4\pi}{31} \cos \frac{25\pi}{186} \cos \frac{37\pi}{186}$;
5) $4 \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{66} \cos \frac{17\pi}{66}$.

Розділ 3. Тригонометричні функції

3.1. 1) $2\pi, 4\pi, 6\pi, 10\pi, 12\pi, 16\pi$; 3) $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 10\pi, 11\pi, 12\pi, 16\pi, 21\pi$; 5) $6\pi, 12\pi$; 7) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 10\pi, 11\pi, 12\pi, 16\pi, 21\pi$.

3.2. 6) π ; 8) 2π . 3.4. 2) а) — ж) Не; 4) а) — ж) не.

3.5. 1) π ; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 5) π ; 7) 4π ; 9) 3π .

3.7. 1) $\mathbb{R}, 2\pi$; 3) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pi$; 5) $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, 2\pi$; 7) $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, 2\pi$; 9) $\mathbb{R}, 2\pi$.

3.8. 2) $\mathbb{R}, \pi$; 4) $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pi$; 6) $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pi$; 8) $\mathbb{R}, \pi$; 10) $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pi$.

3.9. 1) Не.

3.10. 2) 4; а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 0.

3.11. 1) 7.

3.12. 2) 0; 4) 240. 3.14. 2) Не; 4) не; 6) не; 8) не.

- 3.15. 1) Не; 3) не; 5) можа; 7) можа. 3.16. 2) $\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 6) π ; 8) $\frac{2\pi}{7}$.
- 3.17. 1) 2; 3) 1; 5) $\frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{2\pi}{3}$. 3.18. 2) Напрыклад, $y = 10$.
- 3.19. Напрыклад: 1) $y = \sin \pi x$; 3) $y = \cos 4\pi x$.
- 3.21. 1) $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [0; 2]$; 3) $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [-0,5; -0,25]$;
5) $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = [0; 1]$.
- 3.22. 2) $(0; 1,5)$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $(0; 1)$.
- 3.23. 1) $\sin \frac{7\pi}{15}$, $\sin \frac{12\pi}{15}$, $\sin \frac{9\pi}{10}$, $\sin \frac{6\pi}{5}$; 3) $\sin(-4,5)$, $\sin(-0,3)$, $\sin(-2)$,
 $\sin(-1,5)$.
- 3.24. 2) $\sin \frac{5\pi}{12} > \sin \frac{7\pi}{8}$; 4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$; 6) $\sin(-4,78) > \sin(-5)$.
- 3.25. 1) Цотная; 3) няцотная; 5) цотная; 7) няцотная.
- 3.26. 2) $\sin \frac{13\pi}{8} < 0$; 4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$; 6) $\sin 5,1 < 0$; 8) $\sin(-4,9) > 0$.
- 3.27. 1) а) -1 ; б) 1 ; в) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$; д) $(\pi; 2\pi)$;
е) $(0; \pi)$, $(2\pi; 3\pi)$; ж) $0; \pi; 2\pi; 3\pi$; 3) а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; г) няма;
д) $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right)$; е) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$; ж) 0 ; 5) а) -1 ; б) 1 ; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$;
д) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{6}\right]$; е) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$; ж) $-\pi$; 7) а) $\sin(-1) \approx -0,8$; б) 0 ; в) $[-1; 0]$;
г) няма; д) $[-1; 0]$; е) няма; ж) 0 .
- 3.28. 2) $0,8$; 4) $-0,9$; 6) $-0,6$.
- 3.29. 1) $\frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 7) $\pi + 3\pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.30. 2) $\left(\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 6) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.31. 1) $[-2\pi; 2\pi]$; 3) $[-2\pi; -1,5\pi) \cup (-1,5\pi; -0,5\pi) \cup (-0,5\pi; 0,5\pi) \cup (0,5\pi; 1,5\pi) \cup$
 $\cup (1,5\pi; 2\pi]$; 5) $[-2\pi; -\pi] \cup [0; \pi]$.
- 3.32. 2) $-1 \leq m \leq 5$; 4) $-1 \leq m \leq 0$.
- 3.33. 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $\arcsin 0,13 \approx 0,13$; 7) $-\frac{\pi}{2}$; 9) няма каранёў.
- 3.34. 2) а) $\left[8\frac{2}{3}\pi; 9\pi\right)$, $\left(10\pi; 10\frac{3}{8}\pi\right]$; б) $(9\pi; 10\pi)$; 4) а) $[-1,3\pi; -\pi)$, $(0; \pi)$;
б) $(-\pi; 0)$, $(\pi; 1,6\pi)$.
- 3.35. 1) а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) а) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$;
б) $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$; 5) а) няма рашэнняў; б) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 7) а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \arcsin \frac{5}{7}\right)$; б) $\left(\arcsin \frac{5}{7}; \frac{\pi}{2}\right]$;

- в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \arcsin \frac{5}{7}\right]$; г) $\left[\arcsin \frac{5}{7}; \frac{\pi}{2}\right]$; 9) а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) няма рашэнняў;
 в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) няма рашэнняў.

3.36. 2) $\arcsin 0,6$; $\pi - \arcsin 0,6$; 4) $-\arcsin 0,2$; $-\pi + \arcsin 0,2$.

3.37. 1) $[-\pi; \arcsin 0,7] \cup (\pi - \arcsin 0,7; \pi]$; 3) $[-\pi + \arcsin 0,4; -\arcsin 0,4]$.

3.38. 2) $E(f) = [-2; 0]$; 4) $E(f) = [-6,5; -2,5]$; 6) $E(f) = [0; 1]$.

3.39. 1) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, (0; 1); 3) (0; -3,7).

3.40. 2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$; 4) $\cos(-1,7)$, $\cos 1,4$,
 $\cos 0,6$, $\cos 0,2$.

3.41. 1) $\cos \frac{5\pi}{7} > \cos \frac{7\pi}{9}$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 5) $\cos(-1,7) > \cos(-3,14)$;
 7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right) < \cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$; 9) $\sin(-18,1) < \cos(-6,28)$.

3.42. 2) Няцотная; 4) няцотная; 6) цотная; 8) цотная.

3.43. 1) $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$; 3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) < 0$; 5) $\cos 2 < 0$; 7) $\cos(-4) < 0$.

3.44. 2) а) -1; б) 1; в) $[\pi; 2\pi]$; г) $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$; д) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$;
 е) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; ж) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; 4) а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$;
 г) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; д) няма; е) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; ж) няма; 6) а) -1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right]$;
 г) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; д) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right]$; е) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$; 8) а) $\cos(-1) \approx 0,54$; б) 1;
 в) $[-1; 0]$; г) няма; д) няма; е) $[-1; 0]$; ж) няма.

3.45. 1) -0,4; 3) 0,5; 5) -0,9.

3.46. 2) $\frac{5\pi}{2} + 5\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-18 + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{15\pi}{16} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi n}{6}$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

3.47. 1) $\left[-\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}; \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $x \neq \frac{\pi-1}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $x \neq \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

3.48. 2) $[-2\pi; -\pi] \cup (-\pi; \pi) \cup (\pi; 2\pi]$;

4) $[-2\pi; -1,5\pi) \cup (-1,5\pi; -0,5\pi) \cup (-0,5\pi; 0,5\pi) \cup (0,5\pi; 1,5\pi) \cup (1,5\pi; 2\pi]$;
 6) $\{-2\pi; 0; 2\pi\}$.

3.49. 1) $-6 \leq n \leq 4$; 3) $0 \leq n \leq 1$.

3.50. 2) $\pm \frac{\pi}{4}$; 4) няма каранёў; 6) няма каранёў; 8) 0; 10) няма каранёў.

3.51. 1) а) $\left[-4\frac{2}{9}\pi; -3\frac{1}{2}\pi\right) \cup \left(-2\frac{1}{2}\pi; -1\frac{5}{8}\pi\right]$; б) $\left(-3\frac{1}{2}\pi; -2\frac{1}{2}\pi\right)$;

3) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{2}\pi; 2\frac{1}{2}\pi\right)$;

б) $(-1,2\pi; -0,5\pi) \cup (0,5\pi; 1,5\pi) \cup (2,5\pi; 2,9\pi]$.

- 3.52. 2) а) $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; б) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$; 4) а) $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$; б) $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$; г) $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$; 6) а) $(\pi - \arccos 0,58; \pi]$; б) $[0; \pi - \arccos 0,58)$; в) $[\pi - \arccos 0,58; \pi]$; г) $[0; \pi - \arccos 0,58]$; 8) а) няма рашэнняў; б) $x \neq \pi$; в) $x = \pi$; г) $[0; \pi]$; 10) а) $[0; \pi]$; б) няма рашэнняў; в) $[0; \pi]$; г) няма рашэнняў.
- 3.53. 1) $\arccos 0,4$; $2\pi - \arccos 0,4$; 3) $\pi - \arccos 0,1$; $\pi + \arccos 0,1$.
- 3.54. 2) $(\arccos 0,3; 2\pi - \arccos 0,3)$; 4) $[0; \pi - \arccos 0,8] \cup [\pi + \arccos 0,8; 2\pi]$.
- 3.55. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; \mathbf{R}$; 3) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, [0; +\infty)$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, [0; +\infty)$; 7) $x \neq \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}, (0; +\infty)$.
- 3.56. 2) $(\pi n; 0), n \in \mathbf{Z}$; 4) $(\pi n; 0), n \in \mathbf{Z}$.
- 3.57. 1) $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg}(-5), \operatorname{tg}(-3), \operatorname{tg} 3, \operatorname{tg}(-1)$.
- 3.58. 2) $\operatorname{tg}(-4,75\pi) < \operatorname{tg}(-5,6\pi)$; 4) $\operatorname{tg} 4 > \operatorname{tg} 6$; 6) $\operatorname{tg}(-4,78) > \operatorname{tg}(-7)$.
- 3.59. 1) Няцотная; 3) няцотная; 5) няцотная; 7) цотная.
- 3.60. 2) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8} < 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$; 6) $\operatorname{tg} 5,1 < 0$; 8) $\operatorname{tg}(-4,3) < 0$.
- 3.61. 1) а) Няма; б) 0; в) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; г) няма; д) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; е) няма; ж) 2π ;
3) а) $-\operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} \approx -5,7$; б) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \approx -0,6$; в) $\left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$; г) няма;
д) $\left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$; е) няма; ж) няма; 5) а) 0; б) $\operatorname{tg} 1 \approx 1,6$; в) $[0; 1]$; г) няма;
д) няма; е) $(0; 1]$; ж) 0.
- 3.62. 2) 1,2; 4) -1,2; 6) -2,3.
- 3.63. 1) Мае; 3) не; 5) не.
- 3.64. 2) а) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right), \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right), \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$; 4) а) няма; б) $\left[-\frac{9\pi}{4}; 2\pi\right)$; 6) а) $[14; 4,5\pi), (5\pi; 17]$; б) $(4,5\pi; 5\pi)$.
- 3.65. 1) $-1,5 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.66. 2) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 6) $-\operatorname{arctg} 5$; 8) $-\operatorname{arctg} 21$.
- 3.67. 1) $(-3\pi + 6\pi n; 6\pi n], n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left[1 + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi + 4}{4} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbf{Z}$.
- 3.68. 2) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; 4) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$;

- б) $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; 6) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \arctg \pi\right)$; б) $\left(\arctg \pi; \frac{\pi}{2}\right)$;
 в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \arctg \pi\right]$; г) $\left[\arctg \pi; \frac{\pi}{2}\right)$; 8) а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\arctg \frac{2}{9}\right)$; б) $\left(-\arctg \frac{2}{9}; \frac{\pi}{2}\right)$;
 в) $\left(-\frac{\pi}{2}; -\arctg \frac{2}{9}\right]$; г) $\left[-\arctg \frac{2}{9}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- 3.69. 1) З'яўляецца, 2π ; 3) з'яўляецца, $\frac{\pi}{4}$; 5) з'яўляецца, π ; 7) з'яўляецца, 2π ;
 9) з'яўляецца, 2π .
- 3.70. 2) З'яўляецца, π . 3.71. 1) Не; 3) з'яўляецца, π ; 5) з'яўляецца, $\frac{\pi}{2}$.
- 3.72. 2) $D(f) = x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}, E(f) = \mathbf{R}$; 4) $D(f) = x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}, E(f) = [0; +\infty)$;
 6) $D(f) = x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}, E(f) = (-\infty; 5]$; 8) $D(f) = x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}, E(f) = (-4; +\infty)$.
- 3.73. 1) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right), n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{15}; 0\right), n \in \mathbf{Z}$.
- 3.74. 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right), \operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{14}\right), \operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right), \operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 3,1, \operatorname{ctg} 5,9,$
 $\operatorname{ctg} 8,1, \operatorname{ctg} 4$.
- 3.75. 1) $\operatorname{ctg}(-1,5\pi) < \operatorname{ctg}(-1,6\pi)$; 3) $\operatorname{ctg} 2 > \operatorname{ctg} 3$; 5) $\operatorname{ctg}(-5,1) > \operatorname{ctg}(-4,2)$.
- 3.76. 2) Няцотная; 4) няцотная; 6) няцотная; 8) цотная.
- 3.77. 1) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} > 0$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{11}\right) > 0$; 5) $\operatorname{ctg} 5,1 < 0$; 7) $\operatorname{ctg}(-2,5) > 0$.
- 3.78. 2) а) Няма; б) 0; в) няма; г) $[1,5\pi; 2\pi)$; д) $(1,5\pi; 2\pi)$; е) няма; ж) $1,5\pi$; 4) а) 0;
 б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$; в) няма; г) $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right]$; д) няма; е) $\left[\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$; 6) а) $\operatorname{ctg} 6$;
 б) $\operatorname{ctg} 4$; в) няма; г) $[4; 6]$; д) $(1,5\pi; 6]$; е) $[4; 1,5\pi)$; ж) $1,5\pi$.
- 3.79. 1) 0,9; 3) -0,6. 3.80. 2) Не; 4) мае; 6) мае.
- 3.81. а) $(-2\pi; -1,5\pi), \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right), \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$; б) $(-1,5\pi; -\pi), \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
 3) а) $(3\pi; 3,5\pi), (4\pi; 4,5\pi)$; б) $(2,5\pi; 3\pi), (3,5\pi; 4\pi)$; 5) а) $\left(1; \frac{\pi}{2}\right), (\pi; 1,5\pi)$;
 б) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), (1,5\pi; 5)$.
- 3.82. 2) $\pi - 6 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{14\pi}{9} + \frac{8\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$.
- 3.83. 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\pi - \operatorname{arctg} 9$; 7) $\operatorname{arctg} 37$.
- 3.84. 2) $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbf{Z}$; 4) $(4\pi n; 2\pi + 4\pi n], n \in \mathbf{Z}$;
 6) $\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}\right), n \in \mathbf{Z}$.
- 3.85. 1) а) $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$; б) $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$; г) $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$; 3) а) $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$; б) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$;
 в) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right)$; г) $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$; 5) а) $(\pi - \operatorname{arctg} 17; \pi)$; б) $(0; \pi - \operatorname{arctg} 17)$;

- в) $[\pi - \operatorname{arccotg} 17; \pi)$; г) $(0; \pi - \operatorname{arccotg} 17]$; 7) а) $(\operatorname{arccotg} \frac{2}{9}; \pi)$;
 б) $(0; \operatorname{arccotg} \frac{2}{9})$; в) $[\operatorname{arccotg} \frac{2}{9}; \pi)$; г) $(0; \operatorname{arccotg} \frac{2}{9}]$.
- 3.86. 2) з'яўляецца, $\frac{\pi}{3}$; 4) з'яўляецца, 2π ; 6) з'яўляецца, π ; 8) з'яўляецца, 3π .
- 3.87. 1) з'яўляецца, π .
- 3.88. 2) з'яўляецца, π ; 4) з'яўляецца, 2π .
- 3.90. 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 3.91. 1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;
 5) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 3.92. 2) $(-1)^n 5 \arcsin \frac{5}{8} + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) няма каранёў.
- 3.93. 1) а) $-\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{2\pi}{5}, \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{\pi}{5}, -\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7}, \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} + \frac{\pi}{5},$
 $-\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} + \frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \pi, -\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{4}{5}\pi, \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{3}{5}\pi,$
 $-\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{2}{5}\pi, \frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7} - \frac{1}{5}\pi, -\frac{1}{5} \arcsin \frac{1}{7}$; 3) а) няма каранёў;
 б) няма каранёў.
- 3.94. 2) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{9\pi}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 3.95. 1) а) $-2\frac{1}{3}\pi, -1\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi$; б) $-1\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi, 2\frac{1}{3}\pi$;
 3) а) $-1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi$; б) $-1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\frac{2}{3}\pi$; 5) а) $-2\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{6}\pi,$
 $1\frac{1}{2}\pi$; б) $-\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$.
- 3.96. 2) $\pm \frac{7}{2} \arccos \frac{1}{8} + 7\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) няма каранёў.
- 3.97. 1) $\frac{2}{5} - \frac{7\pi}{30}, \frac{2}{5} + \frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{2}{3} - \frac{7\pi}{12}, \frac{2}{3} - \frac{\pi}{12}$; 5) $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}, -\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{16}$;
 7) $\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}, \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{8}$.
- 3.98. 2) $-2\frac{3}{4}, -2\frac{5}{12}, -1\frac{3}{4}, -1\frac{5}{12}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}$; 4) $-\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, -\frac{19}{24},$
 $\frac{23}{24}, 1\frac{19}{24}, 1\frac{23}{24}$.
- 3.99. 1) $-2\frac{1}{3}\pi, -2\frac{1}{6}\pi, -1\frac{1}{3}\pi, -1\frac{1}{6}\pi, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$; 5) $-\frac{\pi}{12},$
 $\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, 1\frac{1}{12}\pi, 1\frac{1}{4}\pi$.
- 3.100. Напрыклад: 2) $[0; 2\pi]$; $(4\pi; 6\pi)$; 4) $(-2\pi; 2\pi)$; $[0; 4\pi]$.

3.101. 1) а) 1; б) 1; в) 4; г) 4; д) 1; е) 1.

3.102. 2) $\pm\left(\pi - \arccos \frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.103. 1) 0; 3) $-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; -2; 2$; 5) $\frac{7\pi}{3}; -1; 6$.

3.104. 2) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.105. 1) $-1 < a \leq -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a < 1$.

3.106. 2) Калі $a \geq \frac{1}{2}$, то $x = \pm \arccos \frac{1-a}{a} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; калі $a < \frac{1}{2}$, то каранёў
 няма; 4) калі $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; калі $a \neq 0$, то каранёў няма; 6) калі
 $a = 0$, то $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; калі $a \neq 0$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; 8) калі $a = 0$, то $x = 1$; калі $a \neq 0$, то каранёў няма.

3.108. 2) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; 1 + \pi l, l \in \mathbb{Z}; -2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 8) $3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.109. 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; 7) $-\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.110. 2) а) $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$; 4) а) $-\frac{2\pi}{3}$;
 б) $-\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$; 6) а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$; 8) а) $-\frac{13\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$;
 б) $-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{35\pi}{12}, \frac{47\pi}{12}$.

3.111. 1) $\frac{2}{5} - \frac{2\pi}{15}, \frac{2}{5} + \frac{\pi}{15}$; 3) $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}, -\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{16}$.

3.112. 2) $-1\frac{3}{4}, -1\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$; 4) $-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}$.

3.113. 1) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}$; 5) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3},$
 $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$.

3.114. Напрыклад: 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right); \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$; 4) $(0; 3\pi); \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

3.115. 1) а) 1; б) 0; в) 1; г) 1; д) 2; е) 2.

3.116. 2) $\pm 1\,000\,000 \operatorname{arctg} 1000 + 1\,000\,000\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

4) $1000 \operatorname{arctg} 10 + 1000\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 8) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 1,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.117. 1) Няма каранёў; 3) $-\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3.118. 2) $a \geq -2$.

3.119. 1) $\operatorname{arctg}((1 \pm \sqrt{2})a) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$;

3) калі $a = 3$, то $x = \operatorname{arctg} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; калі $3 < a \leq 4$, $a \geq 8$, то

$$x = \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{6 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a + 32}}{2} + \pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$; калі $4 < a < 8$, то $x = \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; калі $a < 3$, то каранёў няма.

3.120. 2) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^k \cdot \frac{2}{7} \arcsin \frac{5}{8} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{10} + \frac{3\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.121. 1) $-3 + (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.122. 2) $-3\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{5\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.123. 1) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.124. 2) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $2\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.125. 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.126. 2) 3; 4) 1.

3.127. 1) $\frac{\pi}{3}$.

3.128. 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.129. 1) $-\operatorname{arctg} 15 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.130. 2) πn , $n \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^{n+1} \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.131. 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm(\pi - \arccos 0,2) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3.132. 2) Калі $-1 < a < 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; калі $a \leq -1$ або $a \geq 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \pm\left(\pi - \arccos \frac{1}{a}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) калі $a = 0$, то $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; калі $a \neq 0$, то $x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 3.133. 1) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.134. 2) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$; $\frac{2\pi l}{5}$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq 15$; $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 9$.
- 3.135. 1) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.136. 2) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{1}{3}(\pi - \arccos \frac{3}{5}) + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.137. 1) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{16} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{7\pi}{16} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.
- 3.138. 2) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 3.139. 1) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 3.140. 2) $\arctg \frac{15}{8} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{12} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $-\frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.141. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{1}{4} \arctg \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{4} \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.142. 2) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 8m$, $m \in \mathbb{Z}$; 6) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.143. 1) $-\arctg 3 + (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{10}}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.144. 2) $\frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.145. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.146. 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 3.147. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{8} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- 3.148. 2) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 7 + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$
- 4) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 2 + \frac{(-1)^n}{4} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$
- 6) $-\frac{1}{4} \operatorname{arctg} 9 + \frac{(-1)^n}{4} \arcsin \frac{\sqrt{82}}{82} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$
- 8) $-\frac{3}{2} \operatorname{arctg} 7 + (-1)^n \frac{3\pi n}{8} + \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$
- 3.149. 1) $2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$ 5) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- 3.150. 2) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 6) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
- 8) $-\operatorname{arctg} \frac{12}{5} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- 3.151. 1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
- 5) $-\operatorname{arctg} 0,6 - \pi k, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{N};$
- 7) $\pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$ 9) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- 3.152. 2) $-\sqrt{58} \leq a \leq \sqrt{58};$ 4) $a \leq -\sqrt{7}; a \geq \sqrt{7}.$
- 3.153. 1) Калі $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$, то $x = \pm \frac{5}{16} \arccos(4a - 3) + \frac{5\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z};$ калі $a < \frac{1}{2}$ або $a > 1$, то каранёў няма;
- 3) калі $-2 \leq a < 0$, то $x = \pm 2 \arccos \frac{-1 + \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z},$ калі $0 \leq a \leq \frac{9}{8}$, то $x = \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- 3.154. 2) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; 2\right), n \in \mathbb{Z};$ 4) $\left(\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{1}{4}\right), n \in \mathbb{Z}.$
- 3.155. 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 3) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} - \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$
- 3.156. 2) $\left(\frac{7\pi}{24} + \pi(k_1 + n_1); \frac{13\pi}{24} + \pi(k_1 - n_1)\right),$
- $\left(\frac{13\pi}{24} + \pi(k_2 + n_2); \frac{7\pi}{24} + \pi(k_2 - n_2)\right), \left(-\frac{\pi}{24} + \pi(k_3 + n_3); \frac{5\pi}{24} + \pi(k_3 - n_3)\right),$
- $\left(\frac{5\pi}{24} + \pi(k_4 + n_4); -\frac{\pi}{24} + \pi(k_4 - n_4)\right), k_i \in \mathbb{Z}, n_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4;$
- 4) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(l + k); -\frac{\pi}{6} + \pi(l - k)\right), l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z};$
- $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n + m); \frac{\pi}{6} + \pi(n - m)\right), n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}.$

- 3.157. 1) $\left(\frac{5\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} - \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) няма рашэнняў.
- 3.158. 2) $\left(\pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.159. 1) $(-45^\circ + 180^\circ n; -240^\circ + 180^\circ n)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-60^\circ + 180^\circ n; -30^\circ + 180^\circ n)$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.160. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{12} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.161. 1) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+l); -\frac{\pi}{6} + \pi(k-l)\right)$, $l \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$;
 $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(m+n); \frac{\pi}{6} + \pi(m-n)\right)$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 3) $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(k+l); -\frac{\pi}{3} + \pi(k-l)\right)$, $l \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$;
 $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(m+n); \frac{\pi}{3} + \pi(m-n)\right)$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.162. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + \pi k; \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 4) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k; \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.
- 3.163. 1) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \arctg 2 + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 3) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \arctg \frac{4}{3} + \pi n\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi l; \arctg \frac{4}{3} + \pi m\right)$, $l \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{Z}$.
- 3.164. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{1}{2}\arctg 2 + \frac{\pi n}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 4) $\left(\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; -\frac{1}{9}\arctg 2 + \frac{\pi n}{9}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

ПРАДМЕТНЫ ПАКАЗАЛЬНІК

Абсяг вызначэння функцыі 4

— значэнняў функцыі 5

Адрэзак 66

Акружнасць адзінкавая 82

— трыганаметрычная 82

Аргумент функцыі 4

Арккатангенс ліку 122

Арккосінус ліку 109

Арксінус ліку 108

Арктангенс ліку 121

Вугал, які адпавядае павароту праменя 80

— нахілу прамой да восі Ox 14

Вуглавы каэфіцыент прамой 15

Вытворная 25

— дзелі 46

— здабытку 45

— пастаяннай 26

— ступені 47

— сумы 44

Галіна катангенсоіды 206

— тангенсоіды 198

Градус 76

Графік функцыі 5

Датычная 38

Зменная залежная 4

— незалежная 4

Значэнне косінуса найбольшае 101

— — найменшае 101

— сінуса найбольшае 101

— — найменшае 100

— функцыі найбольшае на адрэзку 67

— — — на інтэрвале 71

— — — найменшае на адрэзку 67

— — — на прамежку 73

Інтэрвал 20

Катангенс вугла 76, 114

— ліку 167

Катангенсоіда 206

Косінус вугла 76, 91

— ліку 167

Косінусоіда 190

Круг трыганаметрычны 82

Максімум функцыі 58

Мінімум функцыі 58

Мноства значэнняў катангенса 116

— — косінуса 100

— — сінуса 100

— — тангенса 116

— — функцыі 5

Наваколле пункта 20

Нулі катангенса 116

— косінуса 102

— сінуса 102

— тангенса 116

Паварот адмоўны 81

— дадатны 81

Пачатак адліку для вугла 82

Перыяд функцыі 167

Поўны абарот 80

Правілы формул прывядзення 133

Прымета нарастання функцыі 51

— спадання функцыі 51

Прырашчэнне аргумента 20

— функцыі 20

Прамежкі знакапастаянства катангенса 116

— — косінуса 104

— — сінуса 103

— — тангенса 116

Пункт максімуму функцыі 58

— мінімуму функцыі 58

— унутраны 57

— экстрэмуму функцыі 58

Радыян 86

Сінус вугла 76, 91

— ліку 167

Сінусоіда 181

Скорасць 33

Тангенс вугла 76, 114

— ліку 167

Тангенсоіда 198

Тоеснасць асноўная трыганаметрычная 95

Тэарэмы складання 139, 140

- Умова экстрэмуму дастатковая 59
— — неабходная 59
Універсальная падстаноўка 158
Ураўненне датычнай да графіка
функцыі 39
— прамой 16
Формулы двайного вугла 145
— палавіннага вугла 146
— прывядзення 132
— складання 139, 140
Функцыя катангенс 204
— косінус 189
— нарастальная 6
— няцотная 7
— перыядычная 167
— сінус 180
— спадальная 6
— тангенс 197
— трыганаметрычная 167
— цотная 6
Экстрэмум функцыі 58

ЗМЕСТ

Ад аўтараў	3
------------------	---

Раздзел 1

Вытворная і яе прымяненне

1.1. Функцыя	4
1.2. Ураўненне прамой з дадзеным вуглавым каэфіцыентам	14
1.3. Прырашчэнне функцыі	20
1.4. Вытворная	24
1.5. Механічны сэнс вытворнай	32
1.6. Геаметрычны сэнс вытворнай. Ураўненне датычнай да графіка функцыі	37
1.7. Тэарэмы аб вылічэнні вытворных	44
1.8. Нарастанне і спаданне функцыі	50
1.9. Максімумы і мінімумы функцыі	57
1.10. Прымяненне вытворнай пры даследаванні функцый	64
1.11. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адрэзку	66
1.12. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адвольным пра- межку	71

Раздзел 2

Трыганаметрычныя выразы

▲ 2.1. Градусная мера вуглоў і дуг. Суадносіны паміж старанамі і вуг- ламі прамавугольнага трохвугольніка	76
2.2. Паняцце вугла	79
2.3. радыянная мера вуглоў і дуг	86
2.4. Сінус і косінус адвольнага вугла	90
2.5. Уласцівасці выказаў $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$	99
2.6. Паняцце арксінуса і арккосінуса	107
2.7. Тангенс і катангенс адвольнага вугла	114
2.8. Паняцце арктангенса і арккатангенса	121
2.9. Суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катанген- сам аднаго і таго ж вугла	126
2.10. Формулы прывядзення	131
2.11. Формулы складання	137
2.12. Формулы двойнога і палавіннага вуглоў	145
2.13. Пераўтварэнне здабытку ў суму (рознасць). Пераўтварэнне сумы (рознасці) у здабытак	151
▲ 2.14. Выражэнне сінуса, косінуса і тангенса вугла праз тангенс па- лавіннага вугла	157
▲ 2.15. Пераўтварэнне некаторых трыганаметрычных выказаў	160

Раздзел 3

Трыганаметрычныя функцыі

3.1. Трыганаметрычныя функцыі. Перыядычнасць	167
▲ 3.2. Перыядычныя функцыі	173
3.3. Функцыя $y = \sin x$	180
3.4. Функцыя $y = \cos x$	189
3.5. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$	197
3.6. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$	204
3.7. Рашэнне ўраўненняў выгляду $\sin x = a$, $\cos x = a$	211
3.8. Рашэнне ўраўненняў выгляду $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	219
3.9. Трыганаметрычныя ўраўненні	225
▲ 3.10. Трыганаметрычныя ўраўненні (працяг)	232
▲ 3.11. Сістэмы трыганаметрычных ураўненняў	241
Адказы	246
Прадметны паказальнік	268

(Назва і нумар установы адукацыі)

Вучэбны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

**Кузняцова Алена Паўлаўна
Мураўёва Галіна Леанідаўна
Шнэперман Леў Барысавіч
Яшчын Барыс Юр'евіч**

АЛГЕБРА

**Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання**

3-е выданне, перагледжанае і выпраўленае

Заг. рэдакцыі *В. Г. Бехціна*. Рэдактар *Н. М. Алганава*. Афармленне *К. Э. Агуновіч*. Мастацкі рэдактар *А. А. Валатовіч*. Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко*. Карэктары *К. І. Даніленка, В. С. Казіцкая, Д. Р. Лосік, В. С. Бабеня, Г. В. Алешка*.

Падпісана ў друк 08.05.2013. Фармат 60 × 90¹/₁₆. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Афсетны друк. Ум. друк. арк. 17 + 0,25 форз. Ул.-выд. арк. 10,87 + 0,13 форз. Тыраж 16 110 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.

ЛИ № 02330/0494083 ад 03.02.2009.

Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».

ЛИ № 02330/0150496 ад 11.03.2009.

Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск.