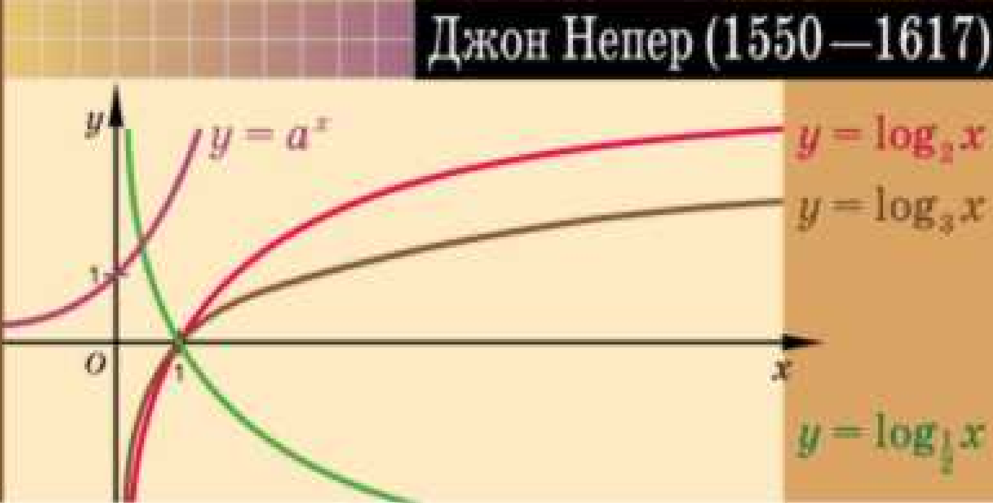
АЛГЕБРА

11

Джон Непер (1550—1617)



АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Пад рэдакцыяй прафесара
Л. Б. Шнэпермана

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

2-е выданне, выпраўленае
і дапоўненае

Мінск «Народная асвета» 2013

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.14я721
А45

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Аўтары:
А. П. Кузняцова, Г. Л. Мураўёва, Л. Б. Шнэперман, Б. Ю. Яшчын

Рэцэнзент
кафедра вышэйшай матэматыкі ўстановы адукацыі
«Беларускі дзяржаўны аграрны тэхнічны ўніверсітэт»
(канд. фіз.-мат. навук, дацэнт, заг. кафедры *А. А. Тіунчык*)

А45 **Алгебра** : вучэб. дапам. для 11-га кл. устаноў агул. сярэд. адукацыі з беларус. мовай навучання / А. П. Кузняцова [і інш.] ; пад рэд. праф. Л. Б. Шнэпермана ; пер. з рус. мовы Н. М. Алганавай. — 2-е выд., выпр. і дап. — Мінск : Нар. асвета, 2013. — 287 с. : іл.
ISBN 978-985-03-1983-8.

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-03-1983-8

АД АЎТАРАЎ

У 11-м класе мы зноў сустрэнемся з ірацыянальнымі лікамі, навучымся пераўтвараць выразы з каранямі n-й ступені, абагульнім веды аб ступенях з рознымі паказчыкамі і аб ступенных функцыях, пазнаёмімся з паказальнай і лагарыфмічнай функцыямі і іх уласцівасцямі, працягнем удасканальваць уменні рашаць ураўненні і няроўнасці і іх сістэмы.

Практыкаванні ў вучэбным дапаможніку нумаруюцца па раздзелах. Лік перад кропкай абазначае нумар раздзела, лік пасля кропкі — нумар практыкавання ў ім. Напрыклад, 2.47 — гэта 47-е практыкаванне з 2-га раздзела. Аналагічна нумаруюцца і пункты з тэарэтычным матэрыялам. Пункт 1.6 абазначае 6-ы пункт з 1-га раздзела.

Сярод практыкаванняў сустракаюцца нумары з кружочкам (напрыклад, 1.36°), нумары з зорачкай (напрыклад, 1.91*) і нумары без абазначэнняў (напрыклад, 2.54). Кружочкам вылучаны практыкаванні, якія павінен умець рашаць кожны вучань, які хоча атрымаць адзнаку ад 3 да 6 балаў па 10-бальнай шкале. Усе астатнія практыкаванні адрасаваны тым, хто жадае паглыбіць свае веды і дасягнуць больш высокіх вынікаў. Найбольш цяжкія з іх адзначаны зорачкай.

Светлы квадрат з дыяганалямі ⊠ абазначае канец доказу тэарэтычнага сцверджання.

Матэрыял, адзначаны трохвугольнікам ▲, прызначаны тым, хто сур'ёзна цікавіцца матэматыкай. Ён не з'яўляецца абавязковым для вывучэння.

Асаблівасці тэорыі, на якія трэба звярнуць увагу, адзначаны клічнікам .

Вагі  нарысаваны там, дзе ёсць магчымасць параўнаць варыянты рашэння або доказу.

Тлумачэнні да пераўтварэнняў размешчаны паміж дзвюма вертыкальнымі стрэлкамі (↓...↓ або ↑...↑); напрамак стрэлак паказвае, якое менавіта пераўтварэнне тлумачыцца. Пры запісе рашэння ў сшытку гэтыя тлумачэнні звычайна прапускаюць.

Матэрыял для паўтарэння адзначаны знакам .

Гістарычныя звесткі, што сустракаюцца ў кнізе, вылучаны знакам .

Пад знакам  пасля кожнага пункта тэорыі прапанаваны пытанні і заданні. Яны дапамогуць паўтарыць новы матэрыял і вылучыць у ім галоўнае.

Раздзел 1

Ступень з рацыянальным паказчыкам. Ступенная функцыя

1.1. Ступень з цэлым паказчыкам

Напомнім азначэнне і асноўныя ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам.

Для любога рэчаіснага ліку a прымаем

$$a^1 = a; \quad a^n = \underbrace{aa...a}_{n} \ (n \geqslant 2,\ n \in \boldsymbol{N}).$$

Для любога рэчаіснага ліку $a \neq 0$ прымаем

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (n \geqslant 1,\ n \in \boldsymbol{N}).$$

Уласцівасці дзеянняў над ступенямі з цэлымі паказчыкамі сфармуляваны ў наступнай тэарэме.

Тэарэма 1. Для любых значэнняў $a \neq 0$ і $b \neq 0$ пры любых цэлых l і m правільныя роўнасці:

$$a^l a^m = a^{l+m}; \tag{1}$$

$$\frac{a^l}{a^m} = a^{l-m}; \tag{2}$$

$$(a^l)^m = a^{lm}; \tag{3}$$

$$(ab)^m = a^m b^m; \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \tag{5}$$

Сфармулюем таксама тэарэму аб узвядзенні ў ступень абедзвюх частак няроўнасці.

Тэарэма 2. Няхай a і b — неадмоўныя лікі, n — натуральны лік. Тады:

1) калі $a < b$, то $a^n < b^n$;
2) калі $a^n < b^n$, то $a < b$.

Доказ. 1) Гэта ўласцівасць была даказана ў вучэбным дапаможніку для 8-га класа.

2) Правядзём доказ метадам ад процілеглага. Дапусцім, што няроўнасць $a < b$ няправільная. Тады правільная адна з дзвюх суадносін: $a = b$ або $a > b$.

Калі $a = b$, то $a^n = b^n$. Гэта супярэчыць умове.

Калі $a > b$, то згодна з першай часткай гэтай тэарэмы $a^n > b^n$. Зноў атрымалі супярэчнасць з умовай.

Значыць, $a < b$. ☒

Прыклад 1. Параўнаць лікі $\sqrt{79}$ і 9.

Рашэнне. Паколькі $9 = \sqrt{81}$ і правільная няроўнасць $79 < 81$, г. зн. $(\sqrt{79})^2 < (\sqrt{81})^2$, то па тэарэме 2 будзе правільнай і няроўнасць $\sqrt{79} < \sqrt{81}$, г. зн. $\sqrt{79} < 9$.

Адказ: $\sqrt{79} < 9$.

Прыклад 2. Вядома, што $m^2 > k$. Ці правільная няроўнасць

$$m^4 > k^2?$$

Рашэнне. Калі $k \geqslant 0$, то з правільнай няроўнасці $m^2 > k$ вынікае, што правільная і няроўнасць $m^4 > k^2$.

Калі $k < 0$, то гарантаваць, што, калі правільная няроўнасць $m^2 > k$, будзе правільнай і няроўнасць $m^4 > k^2$, нельга. Напрыклад, няроўнасць $2^2 > -5$ правільная, а няроўнасць $2^4 > (-5)^2$ няправільная.

Вынік. Няхай a і b — лікі аднаго знака, n — натуральны лік. Тады калі $a^n = b^n$, то $a = b$.

Доказ. Правядзём яго метадам ад процілеглага. Дапусцім, што $a \neq b$, напрыклад $a < b$.

Калі a і b — дадатныя лікі, то згодна з тэарэмай 2 правільная няроўнасць $a^n < b^n$. Атрымалі супярэчнасць з умовай. Значыць, $a = b$. Калі a і b — адмоўныя лікі, то $-a$ і $-b$ — дадатныя лікі, і калі $(-a)^n = (-b)^n$, то, як толькі што было даказана, $-a = -b$, а значыць, $a = b$. ☒

! Заўважым, што пры выкарыстанні гэтага выніку неабходна правяраць супадзенне знакаў a і b пры цотным n, а пры няцотным n такой неабходнасці няма.

Прыклад 3. Ці правільна, што $a = b$, калі:

а) $a^4 = b^4$; б) $a^5 = b^5$?

Рашэнне. а) Правільна, калі a і b — лікі аднаго знака, і няправільна, калі яны розных знакаў. Напрыклад, $2^4 = (-2)^4$ — правільная лікавая роўнасць, але роўнасць $2 = -2$ — няправільная.

б) Паколькі лік і яго няцотная ступень заўсёды маюць адзін і той жа знак, то з таго, што $a^5 = b^5$ — правільная лікавая роўнасць, вынікае роўнасць лікаў a і b.

Прыклад 4. Выканаць дзеянні:

а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9}$; б) $(2x^3x^{-5}y)^4$.

Рашэнне.

а) $2^{8m} \cdot 2^{m+1} : 2^{2m-9} = 2^{8m+(m+1)-(2m-9)} = 2^{8m+m+1-2m+9} = 2^{7m+10}$.

б) $(2x^3x^{-5}y)^4 = (2x^{3+(-5)}y)^4 = (2x^{-2}y)^4 = 16x^{-8}y^4$.

?

1. Як вызначаецца n-я ступень ліку a, калі:

   а) $n = 1$; б) $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$?

2. Як вызначаецца ступень:

   а) a^{-n} $(a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N})$;
   б) a^0 $(a \neq 0)$?

3. Сфармулюйце тэарэму аб уласцівасцях дзеянняў над ступенямі з цэлымі паказчыкамі:

   а) аб множанні ступеней з аднолькавымі асновамі;
   б) аб дзяленні ступеней з аднолькавымі асновамі;
   в) аб узвядзенні ступені ў ступень;
   г) аб узвядзенні ў ступень здабытку;
   д) аб узвядзенні ў ступень дзелі (дробу).

Практыкаванні

1.1°. Вылічыце:

1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^7$;
2) $(-7)^2 - 3^4 - (-4)^3 - (-1)^2$;
3) $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^3 - (-2)^3 - 5(-2)^3 + 3(-2)^3$;
4) $8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3^2 - (-3)^2 + 6(-3)^4 + 5(-3)^3$.

1.2°. Параўнайце лік з нулём:

1) 21^0; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$; 3) $-(-16)^0$; 4) -10^0;

5) $(-8)^0$; 6) -13^0; 7) $\frac{1}{(-2)^0}$; 8) $\frac{1}{2^0}$.

Запішыце ў выглядзе ступені здабытак (**1.3—1.4**).

1.3°. 1) $6 \cdot 6^2 \cdot 6^5$; 2) $0{,}4^3 \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}4$;
3) $(-5)^4(-5)^{16}(-5)$; 4) $(-3)^8(-3)^6(-3)^2$;
5) $2^{3n} \cdot 2^{6n} \cdot 2^n \cdot 16$; 6) $3^{8m} \cdot 3^{5m} \cdot 81$.

1.4°. 1) a^8a^4a; 2) a^4aa^5;
3) $(-m)^2(-m)^3(-m)^4$; 4) $(-m)^9(-m)^2(-m)^{11}$;
5) $(4y)^8(4y)^3(4y)^5$; 6) $(6t)^2(6t)^3(6t)^4(6t)^5$.

1.5°. Запішыце ступень у выглядзе здабытку дзвюх ступеней з аднолькавымі асновамі:

1) 4^8; 2) 15^7; 3) a^5; 4) b^6;
5) 4^{3+b}; 6) 7^{b+1}; 7) 13^{3a}; 8) 10^{2a};
9) $(7p)^{19}$; 10) $(3p)^{13}$; 11) $(-p)^{20}$; 12) $(-t)^{11}$.

1.6°. Запішыце ў выглядзе ступені дзель:

1) $12^6 : 12^4$; 2) $3^8 : 3^5$;
3) $x^{40} : x^{21}$; 4) $x^{10} : x^2$;
5) $a^8 : a$; 6) $a^5 : a$;
7) $19^{4m} : 19^{3m}$; 8) $17^{5n-1} : 17^{3n}$;
9) $(-1{,}5)^{4t+2} : (-1{,}5)^{2t-1}$; 10) $(-0{,}8)^{3t-5} : (-0{,}8)^{2t+1}$.

1.7. Запішыце ступень у выглядзе дзелі дзвюх ступеней з аднолькавымі асновамі:

1) 4^6; 2) 3^4; 3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}$; 4) $\left(1\frac{5}{7}\right)^2$;
5) a^t; 6) $(-x)^{14}$; 7) $\left(\frac{2}{7}b\right)^3$; 8) $(-0{,}1c)^9$.

1.8°. Узвядзіце ступень у ступень:

1) $((-3)^7)^4$; 2) $(5^2)^3$;
3) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-5}$; 4) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right)^2$;
5) $((-8)^{-6})^{-7}$; 6) $((-5)^{-8})^{-2}$;
7) $((-2)^3)^b$; 8) $((-3)^4)^p$.

1.9. Вызначыце, ці правільная роўнасць (адказ абгрунтуйце):

1) $((-3)^4)^5 = (-3^4)^5$; 2) $((-2)^8)^{11} = (-2^8)^{11}$.

Выканайце дзеянні (**1.10—1.11**).

1.10°. 1) $(3x)^4$; 2) $\left(\frac{1}{2}y\right)^5$; 3) $(-7b)^4$;
4) $(-8a)^3$; 5) $(4x^3y^4)^2$; 6) $(10x^2y^5)^3$.

1.11. 1) $\left(\frac{x}{y}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{a}{b}\right)^3$; 3) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2$;
4) $\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^2$; 5) $\left(\frac{a^2b^7}{5c^4}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3a^8}{b^3c^6}\right)^5$.

1.12°. Замяніце ступень дробам:

1) 10^{-2}; 2) 6^{-5}; 3) $(-4)^{-6}$;
4) $(-8)^{-13}$; 5) x^{-20}; 6) y^{-12};
7) $(-2x)^{-9}$; 8) $(-4y)^{-16}$; 9) $(-5b)^{-8}$.

1.13°. Вылічыце:

1) 2^{-3}; 2) 12^{-2}; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; 5) $(-4)^{-3}$; 6) $(-5)^{-2}$;
7) $-(-15)^{-1}$; 8) $-(-10)^{-2}$; 9) $(-6)^0$;
10) -6^0; 11) $((-14)^2)^0$; 12) $((-14)^0)^2$.

1.14°. Замяніце дроб ступенню з адмоўным паказчыкам:

1) $\frac{1}{4^3}$; 2) $\frac{1}{21^{12}}$; 3) $\frac{1}{x^{10}}$; 4) $\frac{1}{(-a)^{27}}$;
5) $\frac{1}{13}$; 6) $\frac{1}{19}$; 7) $\frac{1}{1000}$; 8) $\frac{1}{64}$.

Спрасціце выраз (**1.15—1.16**).

1.15. 1) $\left(2\frac{2}{3}x^6y^{12} : (xy)^4\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}x^7y^{10} : x^6y^8\right)^4$;

2) $\left(3\frac{3}{7}(xy)^9 : x^4y^3\right)\cdot\left(-2\frac{1}{3}x^{12}y^4 : x^7y^3\right)^2$;

3) $\left(-\frac{2}{5}a^2xy\cdot(axy^2)^2\right):\left(-\frac{1}{2}ax^5y^7 : (xy^2)^2\right)$;

4) $\left(-1\frac{1}{2}a^8b^5c^8 : (a^2bc^3)^2\right):\left(-\frac{2}{3}(abc)^2\cdot a(bc)^0\right)$.

1.16. 1) $(-5{,}1a^{k-2}b^{3-k}c^k):(1{,}7a^2b^kc^{2-k})$;

2) $(8{,}4a^{k-3}b^{4-k}c^k):(-2{,}1a^3b^{k-4}c^{3-k})$;

3) $\left(\frac{4a^{-3-2k}b^{3+2k}}{(a^{1+k}b^{1-k})^{-2}}\right)^{-2}$; 4) $\left(\frac{2x^{-2+4k}y^{2-4k}}{(x^{1-k}y^{k+1})^{-4}}\right)^{-3}$.

1.17. Спрасціце выраз:

1) $\left(\dfrac{a^{-2}}{a^{-2}-2}\right)^{-2}-\left(\dfrac{a^{-2}}{a^{-2}+2}\right)^{-2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=(-0{,}25)^{-2}$;

2) $\left(\dfrac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2a^{-2}}{a^{-2}+5}\right)^{-2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=(-0{,}5)^{-4}$.

1.18. Спрасціце выраз:

1) $\dfrac{a^{-2}-2b^{-2}}{3a^{-2}-2b^{-2}}$ і знайдзіце яго значэнне, калі $\left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1}=15^{-1}$;

2) $\dfrac{a^{-2}+3b^{-2}}{2a^{-2}+3b^{-2}}$ і знайдзіце яго значэнне, калі $\left(\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}\right)^{-1}=8^{-1}$.

1.19. Параўнайце лікі:

1) $\sqrt{103}$ і 10;
2) $\sqrt{200}$ і 15;
3) -17 і $-\sqrt{290}$;
4) -28 і $-\sqrt{780}$;
5) $5\sqrt{3}$ і $\sqrt{74}$;
6) $4\sqrt{7}$ і $\sqrt{97}$;
7) $\frac{1}{4}\sqrt{80}$ і $\frac{2}{3}\sqrt{45}$;
8) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{50}$.

1.20. Вядома, што $a^3<b^2$. Ці правільная няроўнасць:

1) $a^9<b^6$;
2) $a^{21}<b^{14}$;
3) $a^{-3}>b^{-2}$;
4) $a^{-15}>b^{-10}$;
5) $\dfrac{a^2\cdot(a^3)^2}{a^{-3}\cdot(a^{-2})^2}<\dfrac{(b^4)^2\cdot(b^3)^2}{(b^2)^3\cdot b^{-2}}$;
6) $\dfrac{(a^5)^3\cdot(a^7)^2}{(a^6)^2:a^4}<\dfrac{(b^3)^3\cdot(b^2)^5}{(b^5)^4\cdot(b^6)^{-2}\cdot b^{-3}}$?

1.21. Вядома, што $a^4>b$. Ці правільная няроўнасць:

1) $(a^2)^3\cdot a^2>(b^3)^2:(b^2)^2$;
2) $(a^2\cdot a^3)^2\cdot(a\cdot a^2)^2>(b\cdot b^5)^3:(b^3\cdot b^4)^2$;
3) $\dfrac{1}{a^8}<\dfrac{1}{b^2}$;
4) $a:(a^3)^7<((b^2)^5:b^5)^{-1}$?

1.22. Ці правільна, што $m=n$, калі:

1) $m^7=n^7$;
2) $m^{26}=n^{26}$;
3) $\dfrac{m^{-3}(-m)^2m^{-1}}{m^{-5}}=\dfrac{n^{10}n^{-2}n^{-3}}{(-n)^2}$;

4) $\frac{(-m)^{-3}\cdot m^{-4}}{(-m)^{-6}} = \frac{(-n^2)^3\cdot n^5}{(-n^3)^4}$;

5) $m^{-2}\cdot\frac{1-m}{1-m^{-1}} = n^{-3}\cdot\frac{2-n}{1-2n^{-1}}$;

6) $m^5\cdot\frac{4+m}{1+4m^{-1}} = n^7\cdot\frac{8n^{-2}+1}{8+n^2}$?

1.23. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\frac{(ab^{-3}-a^{-3}b)^{-1}\cdot(a^{-2}+b^{-2})}{(b^{-2}-a^{-2})^{-1}}$ пры $a=2,\ b=10$;

2) $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}+b^{-3}}\cdot\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-2}$ пры $a=6,\ b=2$.

1.2. Корань *n*-й ступені

У 8-м класе вывучаліся квадратныя карані з рэчаісных лікаў (іх называюць таксама каранямі 2-й ступені).

Пяройдзем да вывучэння каранёў ступені n для адвольнага натуральнага ліку $n \geqslant 2$.

А з н а ч э н н е. ***Няхай $n \geqslant 2$ і $n \in N$. Коранем n-й ступені з ліку a* называецца такі лік t, *n*-я ступень якога роўна *a*.**

Такім чынам, сцверджанне «**t — корань *n*-й ступені з *a***» азначае, што $t^n = a$.

Корань 3-й ступені называецца таксама ***кубічным***.

Напрыклад, кубічны корань з ліку 125 — гэта лік 5, паколькі $5^3 = 125$. Кубічны корань з ліку -125 — гэта лік -5, паколькі $(-5)^3 = -125$.

Корань 7-й ступені з ліку 128 — гэта лік 2, паколькі $2^7 = 128$. Корань 7-й ступені з ліку -128 — гэта лік -2, паколькі $(-2)^7 = -128$. Корань 7-й ступені з ліку 0 — гэта 0, паколькі $0^7 = 0$.

! *У мностве рэчаісных лікаў існуе адзіны корань няцотнай ступені n з любога ліку a.* Гэты корань абазначаецца

$$\sqrt[n]{a}.$$

Напрыклад,

$$\sqrt[3]{125} = 5, \qquad \sqrt[7]{-128} = -2, \qquad \sqrt[7]{0} = 0.$$

Сцверджанне аб існаванні кораня няцотнай ступені з любога ліку мы прымаем без доказу.
Згодна з азначэннем, *калі n няцотны, то пры любым значэнні a правільная роўнасць*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Напрыклад,

$$\left(\sqrt[7]{92}\right)^7 = 92, \qquad \left(\sqrt[7]{123}\right)^7 = 123, \qquad \left(\sqrt[7]{-123}\right)^7 = -123.$$

Заўважым, што 0 — гэта адзіны лік, n-я ступень якога роўна нулю. Таму

пры любым натуральным $n \geqslant 2$ існуе адзіны корань n-й ступені з 0 — гэта лік 0, г. зн.

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Прыкладам каранёў цотнай ступені могуць служыць квадратныя карані: -7 і 7 — квадратныя карані з 49, а -15 і 15 — з 225.

Разгледзім яшчэ некалькі прыкладаў. Карані 4-й ступені з ліку 81 — гэта лікі 3 і -3, паколькі $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$. Карані 6-й ступені з ліку 64 — гэта лікі 2 і -2, паколькі $2^6 = 64$ і $(-2)^6 = 64$.

У мностве рэчаісных лікаў існуе роўна два карані цотнай ступені n з любога дадатнага ліку a, іх модулі роўныя, а знакі процілеглыя. Дадатны корань абазначаецца

$$\sqrt[n]{a}.$$

Напрыклад,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \qquad \sqrt[6]{64} = 2.$$

Сцверджанне аб існаванні кораня цотнай ступені з любога дадатнага ліку мы прымаем без доказу. Згодна з азначэннем, *калі n цотны, то пры любым дадатным значэнні a правільная роўнасць*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Напрыклад,

$$\left(\sqrt[4]{51}\right)^4 = 51, \qquad \left(\sqrt[4]{87}\right)^4 = 87.$$

Не існуе такога ліку, 4-я ступень якога роўна -81. Таму кораня 4-й ступені з ліку -81 не існуе. І наогул, паколькі не існуе такога ліку, цотная ступень якога была б адмоўная, то

не існуе кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку.

Азначэнне. **Неадмоўны корань *n*-й ступені з ліку *a* называецца *арыфметычным коранем n-й ступені з a.***

Пры цотным n сімвалам $\sqrt[n]{a}$ абазначаецца толькі арыфметычны корань n-й ступені з ліку a (пры чытанні запісу $\sqrt[n]{a}$ слова «арыфметычны» звычайна прапускаюць).

Выраз, які стаіць пад знакам кораня, называецца ***падкарэнным выразам***.

Здабыць корань n-й ступені з ліку a — гэта значыць знайсці значэнне выразу $\sqrt[n]{a}$.

Паколькі кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку не існуе, то выраз $\sqrt[n]{a}$ пры цотным n і адмоўным a не мае сэнсу.

Напрыклад, не маюць сэнсу выразы $\sqrt[4]{-81}$ і $\sqrt[6]{-64}$.

Як мы высветлілі, *пры любым значэнні a, пры якім выраз* $\sqrt[n]{a}$ *мае сэнс, правільная роўнасць*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a. \qquad (1)$$

Таму роўнасць (1) *з'яўляецца тоеснасцю.*

У канцы XV ст. бакалаўр Парыжскага ўніверсітэта Н. Шуке ўнёс удасканаленні ў алгебраічную сімволіку. У прыватнасці, знакам кораня служыў сімвал R_x (ад лацінскага слова *radix* — корань). Так, выраз $\sqrt[4]{24+\sqrt{37}}$ у сімволіцы Шуке меў бы выгляд $\overline{R}_x^4\, 24\, \overline{p} \overline{R}_x^2\, 37$.

Знак кораня $\sqrt{\ }$ у сучасным выглядзе быў прапанаваны ў 1525 г. чэшскім матэматыкам К. Рудольфам. Яго падручнік алгебры перавыдаваўся да 1615 г., і па ім вучыўся славуты матэматык Л. Эйлер.

Знак $\sqrt{\ }$ яшчэ называюць ***радыкалам***.

Прыклад 1. Ці правільна, што:

а) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2;$ б) $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$?

Рашэнне. а) Па азначэнні арыфметычны корань n-й ступені з неадмоўнага ліку a (n — цотны лік) з'яўляецца неадмоўным лікам, n-я ступень якога роўна падкарэннаму выразу a.

Паколькі $-2 < 0$, то роўнасць $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ няправільная. Правільная роўнасць $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$.

б) Па азначэнні корань n-й ступені з ліку a (n — няцотны лік) з'яўляецца лікам, n-я ступень якога роўна падкарэннаму выразу a.

Паколькі $(-2)^7 = -2^7$ — правільная роўнасць, то роўнасць $\sqrt[7]{(-2)^7} = -2$ правільная.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне:

а) $x^3 = 7;$ б) $x^4 = 5.$

Рашэнне. а) Рашэннем гэтага ўраўнення з'яўляецца такое значэнне x, 3-я ступень якога роўна 7, г. зн. па азначэнні кубічнага кораня маем:

$$x = \sqrt[3]{7}.$$

б) Рашэннем гэтага ўраўнення з'яўляецца такое значэнне x, 4-я ступень якога роўна 5, г. зн. (па азначэнні) x — гэта корань 4-й ступені з ліку 5. Але з дадатнага ліку 5 існуюць два карані чацвёртай ступені, якія роўныя па модулі і маюць процілеглыя знакі. Паколькі дадатны корань абазначаюць $\sqrt[4]{5}$, то другі корань роўны $-\sqrt[4]{5}$, г. зн.

$$x = \pm\sqrt[4]{5}.$$

Адказ: а) $\sqrt[3]{7}$; б) $\pm\sqrt[4]{5}$.

У сшытку рашэнне ўраўнення б) (аналагічна і а)) можна запісаць і так:

Рашэнне: $x^4 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Адказ: $\pm\sqrt[4]{5}$.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне:

а) $\left(\sqrt[8]{x}\right)^8 = x;$ б) $\left(\sqrt[13]{x}\right)^{13} = x.$

Р а ш э н н е. а) Лік 8 цотны, значыць, дадзеная роўнасць з'яўляецца тоеснасцю пры $x \geqslant 0$, таму кожнае неадмоўнае значэнне x з'яўляецца рашэннем (коранем) ураўнення $\left(\sqrt[8]{x}\right)^8 = x$.

б) Лік 13 няцотны, значыць, дадзеная роўнасць з'яўляецца тоеснасцю пры любым значэнні x, таму рашэннем ураўнення $\left(\sqrt[13]{x}\right)^{13} = x$ з'яўляецца любы рэчаісны лік, а $\boldsymbol{R}$ — мноства ўсіх яго каранёў.

А д к а з: а) $[0; +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$.

П р ы к л а д 4. Рашыць ураўненне

$$x^{12} - 63x^6 - 64 = 0.$$

Р а ш э н н е. Абазначым $x^6 = t$, тады атрымаем ураўненне

$$t^2 - 63t - 64 = 0.$$

Карані гэтага ўраўнення

$$t_1 = 64, \ t_2 = -1.$$

Такім чынам, маем

$$x^6 = 64 \text{ або } x^6 = -1,$$

адкуль $x = \pm 2$ (патлумачце, чаму ўраўненне $x^6 = -1$ не мае каранёў).

А д к а з: ± 2.

?

1. Які лік называецца коранем n-й ступені з ліку a?
2. Колькі каранёў цотнай ступені n існуе з дадатнага ліку a?
3. Корань якой ступені існуе з любога ліку a?
4. Які корань n-й ступені з ліку a называецца арыфметычным?
5. Пры якіх значэннях a правільная роўнасць $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, калі:
   а) n — няцотны лік;
   б) n — цотны лік?

Практыкаванні

1.24°. Выкарыстаўшы азначэнне арыфметычнага кораня n-й ступені, дакажыце, што:

1) $\sqrt[4]{256} = 4$; 2) $\sqrt[10]{1024} = 2$;

3) $\sqrt[6]{729} = 3$; 4) $\sqrt[8]{6561} = 3$;

5) $\sqrt[12]{4096} = 2$; 6) $\sqrt[4]{14\,641} = 11$.

1.25°. Ці правільна, што:

1) лік –4 з'яўляецца коранем чацвёртай ступені з ліку 256;

2) лік –0,3 з'яўляецца коранем чацвёртай ступені з ліку –0,0081?

1.26°. Ці правільна, што:

1) $\sqrt[3]{-1728}=-12$; 2) $\sqrt[3]{-3375}=15$;

3) $\sqrt[5]{-16\,807}=7$; 4) $\sqrt[5]{-7776}=-6$?

1.27°. Знайдзіце арыфметычны квадратны корань з ліку:

1) 16; 2) 49; 3) 0; 4) 1;
5) 0,81; 6) 0,25; 7) 2,25; 8) 1,21;
9) $\frac{36}{169}$; 10) $\frac{144}{289}$; 11) $\frac{169}{100}$; 12) $\frac{81}{256}$.

1.28°. Знайдзіце кубічны корань з ліку:

1) 1; 2) 0; 3) 343; 4) 8;
5) $\frac{1}{27}$; 6) 0,027; 7) 0,001; 8) $\frac{64}{125}$.

1.29°. Знайдзіце арыфметычны корань чацвёртай ступені з ліку:

1) 0; 2) 1; 3) 16; 4) 0,0016;
5) $\frac{16}{81}$; 6) $\frac{256}{652}$; 7) 0,0001; 8) 0,1296.

Вылічыце (**1.30—1.42**).

1.30°. 1) $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$;

2) $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}0025}$, $\sqrt{0{,}0001}$;

3) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{0{,}000216}$, $\sqrt[3]{-1\,000\,000}$;

4) $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[4]{10\,000}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$, $\sqrt[4]{0{,}00000016}$, $\sqrt[4]{2401}$;

5) $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{1024}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[5]{0{,}03125}$, $\sqrt[5]{100\,000}$, $\sqrt[5]{0{,}00001}$;

6) $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[6]{15\,625}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{0{,}046656}$, $\sqrt[6]{1\,000\,000}$.

1.31°. 1) $\sqrt[3]{-1000}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 6) $\sqrt[3]{-343}$;

7) $\sqrt[3]{-\frac{27}{216}}$; 8) $\sqrt[5]{-3125}$; 9) $\sqrt[5]{-0{,}00032}$.

1.32. 1) $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt[5]{-14}\right)^5$; 3) $\left(\sqrt[7]{-30}\right)^7$;
4) $\left(\sqrt[11]{-15}\right)^{11}$; 5) $\left(-\sqrt[9]{6}\right)^9$; 6) $\left(-\sqrt[15]{99}\right)^{15}$.

1.33. 1) $\left(\sqrt[3]{-2\frac{2}{11}}\right)^3 \cdot \left(-\sqrt[5]{6\frac{1}{9}}\right)^5 \cdot \left(-\sqrt[13]{\frac{9}{5}}\right)^{13} \cdot \left(\sqrt[17]{-1\frac{13}{40}}\right)^{17}$;
2) $\left(\sqrt[9]{-3\frac{4}{15}}\right)^9 \cdot \left(\sqrt[7]{-1\frac{5}{8}}\right)^7 \cdot \left(\sqrt[5]{-1\frac{1}{14}}\right)^5 \cdot \left(-\sqrt[3]{1\frac{25}{39}}\right)^3$.

1.34. 1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt[4]{0,1}\right)^{12}$; 3) $\left(\sqrt[5]{1\frac{1}{2}}\right)^{10}$;
4) $\left(\sqrt[6]{2\frac{1}{3}}\right)^{18}$; 5) $\left(\sqrt[7]{\frac{5}{6}}\right)^{21}$; 6) $\left(\sqrt[9]{\frac{2}{3}}\right)^{36}$.

1.35. 1) $\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)^{10}$; 2) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}\right)^{48}$; 3) $\left(\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}\right)^{120}$;
4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}\right)^{12}$; 5) $\left(\sqrt[8]{\sqrt{10}}\right)^{16}$; 6) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[9]{12}}\right)^{36}$.

1.36°. 1) $\left(\sqrt{10}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 3) $\left(-\sqrt[4]{12}\right)^4$;
4) $-\sqrt[4]{12^4}$; 5) $\left(-\sqrt[5]{3}\right)^5$; 6) $\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3$;
7) $\left(-4\sqrt[4]{4}\right)^4$; 8) $\left(-\sqrt[7]{15}\right)^7$; 9) $-5\sqrt[5]{5^5}$;
10) $\left(-\sqrt[6]{3}\right)^6$; 11) $\left(-2\sqrt[9]{2}\right)^9$; 12) $-\sqrt[8]{4^8}$.

1.37°. 1) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$;
3) $12 - 6\sqrt[3]{0,125}$; 4) $1 + 10\sqrt[4]{0,0081}$;
5) $3\sqrt[4]{16} - 4\sqrt[3]{27}$; 6) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{2,25}$;
7) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{64}$; 8) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{64}$.

1.38°. 1) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$; 2) $\sqrt{36} - \sqrt[4]{16}$;
3) $\sqrt{0,81} + \sqrt[3]{0,001}$; 4) $\sqrt[3]{0,027} - \sqrt{0,04}$;
5) $5 - \sqrt[4]{256}$; 6) $7 + \sqrt[3]{8}$;
7) $\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{16}$; 8) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{81}$.

1.39°. 1) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$;
3) $(2\sqrt{3} + 4)(2\sqrt{3} - 4)$; 4) $(3\sqrt{5} - 2)(3\sqrt{5} + 2)$;
5) $(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{10})$; 6) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

1.40. 1) $\sqrt[3]{\frac{12}{25}\sqrt{\frac{244\cdot 15^{-1}}{38^2-23^2}}}$; 2) $\sqrt{58+\sqrt{\frac{44^2-26^2}{35}}}$;

3) $\sqrt{90+\sqrt{\frac{31(57^2-26^2)}{83}}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{23}{64}+\sqrt{\left(\frac{48^2-32^2}{5}\right)^{-1}}}$.

1.41. 1) $\left(\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}\right)^{-3}-\left(\sqrt[5]{\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}}\right)^5\right)^{-1}\cdot\left(\sqrt[7]{-27}\right)^7$;

2) $\left(\left(\sqrt[5]{\frac{1}{7}}\right)^{-10}+\left(-\sqrt[9]{40}\right)^9\cdot\left(\sqrt[7]{\frac{5}{3}}\right)^0\right)^{-1}:\left(\sqrt[5]{9}\right)^{-10}$;

3) $\left(\left(\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\right)^6+\left(\sqrt[7]{-4^{-2}}\right)^7\right):\left(\left(\sqrt{\sqrt[5]{\left(\frac{5}{6}\right)^0}}\right)^{10}-\left(-\sqrt[9]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}\right)^9\right)$;

4) $\left(\left(\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{4}{5}\right)}\right)^3\right)^0-\left(-\sqrt[11]{\sqrt{0{,}1}}\right)^{-22}\right):\left(\left(\sqrt[5]{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}\right)^5\cdot\left(\sqrt[7]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)^7+\left(\sqrt[9]{-\frac{1}{2}}\right)^{-9}\right)$.

1.42. 1) $\frac{\left(\sqrt[7]{a^7}\right)^7}{\left(\sqrt[5]{a^5}\right)^5}$; 2) $\frac{\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^3}{\left(\sqrt[9]{a^9}\right)^9}$;

3) $\left(2\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{a^3}\right)^3\cdot\left(\sqrt[7]{b^7}\right)^7\right)^2\cdot\left(-1\frac{2}{7}\left(\sqrt[5]{a^5}\right)^5\cdot\left(\sqrt[11]{b^{11}}\right)^{11}\right)$;

4) $3\frac{3}{7}\left(\sqrt[5]{a^5}\right)^5\cdot\left(\sqrt[9]{b^9}\right)^9\cdot\left(-2\frac{1}{3}\left(\sqrt[7]{a^7}\right)^7\cdot\left(\sqrt[13]{b^{13}}\right)^{13}\right)^2$.

Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу (**1.43—1.44**).

1.43. 1) $\sqrt{x+4}$; 2) $\sqrt[4]{-9+2x}$;

3) $\sqrt[10]{5x^2-6x}$; 4) $\sqrt[12]{8x-4x^2}$;

5) $\sqrt[3]{x+3}$; 6) $\sqrt[5]{x-7}$;

7) $\sqrt[7]{x^2-4}$; 8) $\sqrt[9]{2x^2-32}$.

1.44. 1) $\sqrt[12]{\frac{3}{4x-1}}$; 2) $\sqrt[14]{\frac{-4}{8x-3}}$;

3) $\sqrt[8]{\frac{2-\sqrt{5}}{9-5x}}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{3-\sqrt{10}}{16-7x}}$;

5) $\frac{2+x}{\sqrt[3]{4-2(8-6x)}}$; 6) $\frac{12-6x}{\sqrt[5]{2-7x+(3x-1)\cdot 2}}$;

7) $\sqrt[4]{\frac{-x^2}{2(x-2)-5(1-3x)-2}}$; 8) $\sqrt[28]{\frac{3(x+4)-6(2-x)+9}{x^4}}$.

1.45. Знайдзіце даўжыню канта куба, калі яго аб'ём роўны:

1) 27 см^3; 2) 64 мм^3;
3) 0,125 дм^3; 4) 0,216 м^3.

Рашыце ўраўненне (**1.46—1.54**).

1.46°. 1) $x^2 = 0{,}49$; 2) $x^2 = 121$;
3) $x^3 = 0{,}008$; 4) $x^3 = 1000$;
5) $x^3 = -64\,000$; 6) $x^4 = 216$;
7) $x^4 = 0{,}0625$; 8) $x^4 = -16$.

1.47. 1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $x^7 = -1$;
4) $x^9 = -512$; 5) $x^3 = -0{,}027$; 6) $x^{11} = 0$.

1.48°. 1) $x^2 = 11$; 2) $x^4 = 19$; 3) $x^8 = 27$;
4) $x^3 = 25$; 5) $x^7 = 38$; 6) $x^9 = -2$;
7) $x^{15} = -6$; 8) $x^{17} = 4$; 9) $x^{13} = -13$.

1.49. 1) $x^2 = 25\,600$; 2) $x^2 = 0{,}0196$;
3) $x^2 + 1 = 1{,}0016$; 4) $5x^2 - 20 = 0$;
5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $x^2 + 1\frac{7}{9} = 0$;
7) $x^2 \cdot 4 = 0$; 8) $-6x^2 = 0$;
9) $1\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$; 10) $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$.

1.50. 1) $4x^3 + \frac{4}{125} = 0$; 2) $8x^3 + 27 = 0$;
3) $-0{,}1x^4 = -0{,}00001$; 4) $16x^4 - 81 = 0$;
5) $\frac{1}{5}x^5 + 16 = 0$; 6) $\frac{1}{32}x^6 - 2 = 0$.

1.51. 1) $x^4 + \sqrt{2} = 7$; 2) $x^5 - \sqrt{3} = 30$;
3) $x^6 - \sqrt{7} = 19$; 4) $x^3 + \sqrt{5} = 5$.

1.52. 1) $(x + 1)^4 = 16$; 2) $(x - 2)^6 = 64$;
3) $(2x + 1)^3 = 27$; 4) $(3x - 1)^5 = 32$.

1.53. 1) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$; 2) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$;
3) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$; 4) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$;
5) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$; 6) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$.

1.54. 1)° $\left(\sqrt[6]{x}\right)^6 = x$; 2)° $\left(\sqrt[10]{x}\right)^{10} = x$;

3)° $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$; 4)° $\left(\sqrt[5]{x}\right)^5 = x$;

5) $\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 = x-1$; 6) $\left(\sqrt[12]{x+2}\right)^{12} = x+2$;

7) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{x}}\right)^7 = \frac{1}{x}$; 8) $\left(\sqrt[11]{\frac{1}{x-2}}\right)^{11} = \frac{1}{x-2}$.

1.3. Тоеснасці з каранямі, якія змяшчаюць адну зменную

Карані n-й ступені вызначаюцца толькі для натуральнага ліку $n \geqslant 2$. Таму ў фармулёўках тэарэм аб уласцівасцях кораня n-й ступені гэта ўмова звычайна прапускаецца.

Тэарэма 1. Няхай n — няцотны лік. Тады пры любым значэнні a правільныя роўнасці:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}. \qquad (2)$$

Доказ. Роўнасці (1) і (2), як і іншыя роўнасці ў тэарэмах гэтага пункта, відавочна, правільныя пры $a = 0$, таму доказы праводзяцца для $a \neq 0$.

Разгледзім роўнасць (1). Узвёўшы яе левую і правую часткі ў n-ю ступень, атрымаем:

$$\left(\sqrt[n]{a^n}\right)^n = a^n.$$

Згодна з тоеснасцю (1) з п. 1.2 гэта правільная лікавая роўнасць пры любым значэнні $a \neq 0$. Па выніку з п. 1.1 правільная і роўнасць

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \boxtimes$$

Роўнасць (2) даказваецца аналагічна: высвятляецца, што n-я ступені левай і правай частак роўныя, і на аснове выніку з п. 1.1 робіцца вывад аб правільнасці роўнасці (2) пры любым значэнні a.

Аналагічнымі разважаннямі можна абгрунтаваць і астатнія роўнасці ў тэарэмах гэтага пункта.

Заўважым, што кожная з гэтых роўнасцей з'яўляецца тоеснасцю, паколькі яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любым значэнні зменнай, пры якім выразы, якія ўваходзяць у гэту роўнасць, маюць сэнс.

Т э а р э м а 2. Няхай n — цотны лік. Тады пры любым значэнні a правільная роўнасць

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|. \tag{3}$$

Т э а р э м а 3. Няхай n і k — натуральныя лікі. Тады пры любым неадмоўным значэнні a правільныя роўнасці:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \tag{5}$$

Заўважым, што, калі абодва лікі n і k няцотныя, роўнасці (4) і (5) правільныя для любых значэнняў a, а не толькі для неадмоўных.

! Роўнасць (5) азначае, што *пры здабыванні кораня з кораня падкарэнны выраз застаецца ранейшым, а паказчыкі каранёў перамнажаюцца.*

Т э а р э м а 4. Няхай k — цэлы лік. Тады пры любым дадатным значэнні a правільная роўнасць

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \tag{6}$$

П р ы к л а д 1. Знайсці значэнне $\sqrt[4]{b^{12}}$ пры:

а) $b = -1$; б) $b = 2$.

Р а ш э н н е. а) $\sqrt[4]{b^{12}} = \left|b^3\right| = \left|(-1)^3\right| = |-1| = 1$;

б) $\sqrt[4]{b^{12}} = \left|b^3\right| = \left|2^3\right| = 8$.

А д к а з: а) 1; б) 8.

П р ы к л а д 2. Параўнаць лікі $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$ і $\sqrt[4]{2}$.

Р а ш э н н е. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\sqrt{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$.

Паколькі правільная няроўнасць $12 > 8$, то будзе правільнай і няроўнасць $\sqrt[12]{12} > \sqrt[12]{8}$. Значыць, $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{2}$.

А д к а з: $\sqrt[6]{2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{2}$.

П р ы к л а д 3. Рашыць ураўненне:

а) $\sqrt[3]{x} = -2$; б) $\sqrt[5]{x + 7} = 3$.

Р а ш э н н е. а) Па азначэнні кораня n-й ступені маем, што дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню $x = (-2)^3$, г. зн. $x = -8$.

б) $x + 7 = 3^5$, адкуль $x = 243 - 7$, г. зн. $x = 236$.

А д к а з: а) –8; б) 236.

П р ы к л а д 4. Рашыць ураўненне

$$\sqrt[3]{x} - 9\sqrt[6]{x} + 14 = 0.$$

Р а ш э н н е. Абазначым $\sqrt[6]{x} = t$, тады $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = t^2$, і атрымаем ураўненне

$$t^2 - 9t + 14 = 0.$$

Карані гэтага ўраўнення $t_1 = 2$, $t_2 = 7$.

Такім чынам, маем $\sqrt[6]{x} = 2$ або $\sqrt[6]{x} = 7$.

Рашыўшы гэтыя ўраўненні, знойдзем:

$$x = 2^6 \text{ або } x = 7^6, \text{ г. зн. } x = 64 \text{ або } x = 117\,649.$$

А д к а з: 64; 117 649.

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб тоеснасцях з каранямі няцотнай ступені.

2. Сфармулюйце тэарэму аб тоеснасцях з каранямі цотнай ступені.

3. Сфармулюйце тэарэму:

а) аб множанні паказчыка кораня на натуральны лік $k > 1$;

б) аб здабыванні кораня з кораня;

в) аб узвядзенні кораня ў ступень k.

4*. Дакажыце кожную з тоеснасцей (1)—(6).

Практыкаванні

Здабудзьце корань (**1.55—1.58**).

1.55°. 1) $\sqrt{m^2}$, $m \geqslant 0$; 2) $\sqrt{y^2}$, $y \leqslant 0$;

3) $\sqrt{m^2}$, $m < 0$; 4) $\sqrt{y^2}$, $y > 0$;

5) $0{,}3\sqrt{t^2}$, $t > 0$; 6) $\frac{1}{4}\sqrt{h^2}$, $h \geqslant 0$;

7) $-5\sqrt{\frac{t^2}{25}}$, $t \leqslant 0$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{9h^2}$, $h < 0$.

1.56°. 1) $\sqrt[3]{a^3}$; 2) $\sqrt[7]{p^7}$; 3) $\sqrt[5]{32t^5}$;

4) $\sqrt[9]{-k^9}$; 5) $\sqrt[13]{-n^{13}}$; 6) $\sqrt[21]{-b^{21}}$.

1.57°. 1) $\sqrt[4]{a^4}$, $a \leqslant 0$; 2) $\sqrt[6]{a^6}$, $a \geqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{b^8}$, $b > 0$; 4) $\sqrt[12]{b^{12}}$, $b < 0$.

1.58°. 1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{16a^2}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4}a^2}$;
4) $\sqrt{0{,}36a^2}$; 5) $\sqrt[4]{a^4}$; 6) $\sqrt[6]{a^6}$;
7) $\sqrt{(a-b)^2}$; 8) $\sqrt[4]{(a-b)^4}$.

1.59. Няхай $t \in \left\{-25;\ -9;\ -5\frac{2}{3};\ 0;\ 5\frac{2}{3};\ 9;\ 25\right\}$. Для кожнага значэння t знайдзіце значэнне выразу:

1) $4\sqrt[4]{t^4}$; 2) $2 - \sqrt[6]{t^6}$; 3) $-6\sqrt[3]{t^3}$; 4) $\sqrt[5]{t^5} - 1$.

1.60. Вылічыце:

1) $\sqrt{(-2)^2} - \sqrt{(-3)^2}$; 2) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{4^2}$;
3) $\sqrt[4]{(-8)^4} + \sqrt[3]{11^3} - \sqrt{(-2)^6}$; 4) $\sqrt[8]{(-3)^8} + \sqrt{6^2} - \sqrt[7]{4^7}$.

1.61. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sqrt[7]{\left(-4\frac{2}{7}\right)^7} : \sqrt[5]{-\left(2\frac{4}{5}\right)^{-5}} : \left(\sqrt{0{,}2^2} + \sqrt[6]{(-0{,}2)^6} \cdot \sqrt[9]{(-1{,}4)^9}\right)$;

2) $\sqrt[12]{\left(-10\frac{2}{5}\right)^{12}} : \sqrt[8]{\left(\frac{13}{18}\right)^8} : \left(\sqrt[9]{0{,}3^9} + \sqrt[7]{(-0{,}3)^7} \cdot \sqrt[10]{(1{,}6)^{10}}\right)$.

1.62. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt{a^2 + 2ax + x^2}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$;
3) $\sqrt{9 + m^2 - 6m}$; 4) $\sqrt{p^2 + 25 + 10p}$.

1.63. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, калі: а) $x \leqslant -1$; б) $x > -1$;
2) $\sqrt[8]{(x-2)^8}$, калі: а) $x \geqslant 2$; б) $x < 2$.

1.64. Ці правільна, што:

1) $t + 5 - \sqrt[10]{(t-5)^{10}} = 2t$ пры $t \leqslant 5$;
2) $6t - 3 - \sqrt[12]{(3-6t)^{12}} = 0$ пры $t > \frac{1}{2}$?

1.65. Рашыце ўраўненне:

1) $\sqrt[5]{x^5} = 5$; 2) $\sqrt[4]{x^4} = 1{,}5$;

3) $\sqrt{x^2} = -3$; 4) $\sqrt{x^2} = -7$;
5) $\sqrt[5]{(x-4)^5} = -1$; 6) $\sqrt[3]{(2+x)^3} = 6$;
7) $\sqrt[4]{x^4} + 6 = 0$; 8) $\sqrt[6]{x^6} + 1 = 0$.

1.66°. Вылічыце:

1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$;
4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[10]{2^5}$; 6) $\sqrt[4]{(-3)^{12}}$;
7) $\sqrt[4]{\left(\frac{36}{81}\right)^{16}}$; 8) $\sqrt[4]{3^{12}}$.

Спрасціце выраз (**1.67—1.68**).

1.67°. 1) $\sqrt[4]{x^2}$; 2) $\sqrt[16]{a^8}$; 3) $\sqrt[8]{a^4}$;
4) $\sqrt[9]{n^3}$; 5) $\sqrt[6]{4m^2n^4}$; 6) $\sqrt[6]{27x^3y^{12}}$;
7) $\sqrt[4]{625m^8n^4}$; 8) $\sqrt[5]{\frac{243a^{15}b^{10}}{32m^5}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^{12}}{125c^{21}}}$.

1.68. 1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{7}-2\right)^3}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;
3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^3}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-4\right)^2}$;
5) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; 6) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$.

1.69°. Вылічыце:

1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[3]{(-4)^{24}}$;
4) $\sqrt[6]{(-2{,}5)^{12}}$; 5) $\sqrt[4]{(-0{,}5)^{12}}$; 6) $\sqrt[4]{(-0{,}8)^{16}}$;
7) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^9}$; 8) $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 9) $\sqrt[17]{\left(-\frac{2}{3}\right)^{34}}$.

1.70. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$; 3) $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$;
4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-3)}}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-243}}$;
7) $\sqrt[7]{\sqrt{7}}$; 8) $\sqrt{\sqrt[9]{9}}$; 9) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$;
10) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$; 11) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$; 12) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{13}}}}$.

1.71. Вылічыце:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$; 3) $\sqrt{\sqrt{256}}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$.

1.72. Параўнайце лікі:

1) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[6]{24}$; 2) $\sqrt[6]{2}$ і $\sqrt[18]{10}$;
3) $\sqrt[4]{4}$ і $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[6]{4}$ і $\sqrt[9]{8}$;
5) $\sqrt[10]{6}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$ і $\sqrt[4]{3}$.

1.73. Як трэба змяніць даўжыню канта куба аб'ёмам 3 м^3, каб атрымаўся куб аб'ёмам, роўным:

1) 6 м^3; 2) 9 м^3; 3) 15 м^3; 4) 27 м^3?

Рашыце ўраўненне (**1.74—1.75**).

1.74°. 1) $\sqrt[5]{x} = -2$; 2) $\sqrt[3]{x} = 2$; 3) $\sqrt[4]{x} = 3$;
4) $\sqrt[3]{x} + 4 = 0$; 5) $\sqrt[5]{y} - 1 = -2$; 6) $\sqrt[9]{y} + 3 = 4$.

1.75. 1) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 0$; 2) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} = 0$;
3) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$; 4) $\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$;
5) $\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[10]{x} + 2 = 0$; 6) $\sqrt[5]{x} + 3\sqrt[10]{x} - 10 = 0$.

1.4. Дзеянні з каранямі няцотнай ступені

Тэарэма. Няхай $n > 1$ — няцотны лік. Тады:
1) пры любых значэннях a і b правільная роўнасць

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad (1)$$

2) пры любых значэннях a і $b \neq 0$ правільная роўнасць

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \qquad (2)$$

3) пры любых значэннях a і b правільная роўнасць

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}. \qquad (3)$$

▲Доказ. Лёгка пераканацца, што выразы, якія ўваходзяць у роўнасці (1)—(3), маюць сэнс. Гэтыя роўнасці, відавочна, правільныя пры $a = 0$, а роўнасці (1) і (3) — і пры $b = 0$. Таму доказы праводзяцца пры $a \neq 0$ і $b \neq 0$.

Дакажам сцверджанне 1). Узвядзём левую і правую часткі роўнасці (1) у n-ю ступень:

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab;$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$$

(патлумачце кожную роўнасць).

Значыць, $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n$ і згодна з вынікам з п. 1.1 маем

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \ \boxtimes$$

Тоеснасці (2) і (3) са сцверджанняў 2), 3) тэарэмы даказваюцца аналагічна (дакажыце іх самастойна). ▲

Сцверджанне 1) тэарэмы можна сфармуляваць і так:

! *Няхай $n > 1$ — няцотны лік. Корань n-й ступені са здабытку двух лікаў роўны здабытку каранёў n-й ступені з гэтых лікаў.*

Такая ж тэарэма правільная пры любой колькасці перамнажаемых каранёў (даказваецца яна зусім аналагічна).

Няхай $n > 1$ — няцотны лік. Корань n-й ступені са здабытку некалькіх лікаў роўны здабытку каранёў n-й ступені з гэтых лікаў.

Такім чынам, пры любых значэннях a_1, a_2, ..., a_k правільная роўнасць

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}. \qquad (4)$$

У прыватнасці, прыняўшы ў гэтай роўнасці $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$, атрымаем

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k. \qquad (5)$$

Сцверджанне 2) тэарэмы можна сфармуляваць так:

! *Няхай $n > 1$ — няцотны лік. Корань n-й ступені з дробу роўны дзелі ад дзялення кораня n-й ступені з лічніка на корань n-й ступені з назоўніка.*

Пераўтварэнне выразу $\sqrt[n]{a^n b}$ да выгляду $a\sqrt[n]{b}$ (у сцверджанні 3) тэарэмы) называецца ***вынясеннем множніка з-пад знака кораня няцотнай ступені***.

Пераўтварэнне выразу $a\sqrt[n]{b}$ да выгляду $\sqrt[n]{a^n b}$ называецца ***ўнясеннем множніка пад знак кораня няцотнай ступені***.

Заўважым, што кожная з роўнасцей (1)—(5) з'яўляецца тоеснасцю.

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу

$$\sqrt[7]{13+\sqrt{41}} \cdot \sqrt[7]{13-\sqrt{41}}.$$

Рашэнне. $\sqrt[7]{13+\sqrt{41}} \cdot \sqrt[7]{13-\sqrt{41}} = \sqrt[7]{\left(13+\sqrt{41}\right)\left(13-\sqrt{41}\right)} =$
$= \sqrt[7]{13^2-\left(\sqrt{41}\right)^2} = \sqrt[7]{169-41} = \sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2.$

Прыклад 2. Вынесці множнік з-пад знака кораня:

а) $\sqrt[5]{y^{11}z}$; б) $\sqrt[7]{\dfrac{b}{y^8}-\dfrac{a}{y^{14}}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[5]{y^{11}z} = \sqrt[5]{y^{10}yz} = y^2\sqrt[5]{yz}$.

б) $\sqrt[7]{\dfrac{b}{y^8}-\dfrac{a}{y^{14}}} = \sqrt[7]{\dfrac{by^6}{y^8y^6}-\dfrac{a}{y^{14}}} = \sqrt[7]{\dfrac{by^6-a}{y^{14}}} = \dfrac{\sqrt[7]{by^6-a}}{y^2}$.

Прыклад 3. Унесці множнік пад знак кораня:

а) $5y\sqrt[7]{\dfrac{2ay}{625}}$; б) $-\dfrac{2x}{y}\sqrt[5]{-\dfrac{7y^3}{8x^9}}$.

Рашэнне.

а) $5y\sqrt[7]{\dfrac{2ay}{625}} = \sqrt[7]{\dfrac{5^7y^7\cdot 2ay}{5^4}} = \sqrt[7]{5^3\cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{125\cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{250ay^8}$.

б) $-\dfrac{2x}{y}\sqrt[5]{-\dfrac{7y^3}{8x^9}} = \sqrt[5]{\left(-\dfrac{2x}{y}\right)^5\left(-\dfrac{7y^3}{8x^9}\right)} = \sqrt[5]{\dfrac{-2^5x^5\cdot(-7)y^3}{y^5 2^3 x^9}} = \sqrt[5]{\dfrac{2^2\cdot 7}{x^4y^2}} =$
$= \sqrt[5]{\dfrac{28}{x^4y^2}}$.

Прыклад 4. Пазбавіцца ад ірацыянальнасці ў назоўніку:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{13}{\sqrt[5]{81}}$; в)* $\dfrac{5}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Рашэнне.

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

б) $\dfrac{13}{\sqrt[5]{81}} = \dfrac{13}{\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{13\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt[5]{3}} = \dfrac{13\sqrt[5]{3}}{3}$.

▲ в) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} =$

выкарыстаем формулу $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, дамножыўшы лічнік і назоўнік на няпоўны квадрат рознасці выразаў $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt[3]{4}$, г. зн. на выраз $\left(\sqrt[3]{6}\right)^2 - \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{4} + \left(\sqrt[3]{4}\right)^2$:

$$= \frac{5\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{6\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}\right)} =$$

$$= \frac{5\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{10} = \frac{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{2}. \blacktriangle$$

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб корані няцотнай ступені са здабытку двух лікаў.

2. Сфармулюйце тэарэму аб корані няцотнай ступені n са здабытку $a^n b$.

3. Сфармулюйце тэарэму аб корані няцотнай ступені з дробу.

4. Якое пераўтварэнне называецца:

а) вынясеннем множніка з-пад знака кораня няцотнай ступені;

б) унясеннем множніка пад знак кораня няцотнай ступені?

5*. Дакажыце кожную з тоеснасцей (1)—(5).

Практыкаванні

1.76. Вылічыце:

1) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[5]{4}\,\sqrt[5]{8}$;

3) $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{9}$; 4) $\sqrt[3]{-84}\,\sqrt[3]{56}\,\sqrt[3]{-126}$;

5) $3\sqrt[3]{36}\,\sqrt[3]{-6}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{9}}\,\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$;

7) $\sqrt[3]{108}\,\sqrt[3]{50}\,\sqrt[3]{40}$; 8) $\sqrt[5]{343}\,\sqrt[5]{98}\,\sqrt[5]{16}$;

9) $\sqrt[5]{27}\,\sqrt[5]{36}\,\sqrt[5]{256}$.

Спрасціце выраз (**1.77—1.78**).

1.77. 1) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\,\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}$;

2) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\,\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$;

4) $\sqrt[5]{17-\sqrt{46}}\,\sqrt[5]{17+\sqrt{46}}$.

1.78. 1) $\frac{1}{2}\left(2\sqrt[3]{135}-5\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{40}\right)\sqrt[3]{25}$;

2) $4\left(\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{72}+6\sqrt[3]{1125}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$;

3) $\frac{4}{3}\left(6\sqrt[3]{\frac{9}{4}}-5\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{\frac{16}{81}}\right)\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$;

4) $\frac{1}{3}\left(6\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}+1{,}8\sqrt[3]{\frac{500}{27}}\right)\sqrt[3]{2}$.

Знайдзіце значэнне выразу (**1.79—1.80**).

1.79. 1) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-0{,}1}\cdot\sqrt[3]{0{,}08}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}}$;

5) $2\sqrt[3]{\frac{4}{5}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{32}{625}}$; 6) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{384}:3\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$.

1.80. 1) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{16}\right):\sqrt[3]{2}$; 2) $\left(\sqrt[5]{729}+\sqrt[5]{-\frac{1}{81}}\right):\sqrt[5]{3}$;

3) $\left(3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{-32}-15\sqrt[3]{-108}\right):3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

4) $\left(3\sqrt[3]{144}-7\sqrt[3]{-18}+4\sqrt[3]{-\frac{16}{3}}\right):2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Спрасціце выраз (**1.81—1.83**).

1.81. 1) $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}\,\frac{1}{4}a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}$;

2) $5\sqrt[3]{\frac{2a^4}{25x^5}\sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}}$;

3) $\frac{x^2}{a^2}\sqrt[3]{\frac{3a}{x^2}\cdot\frac{1}{a^2x^3}\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^4}}}$;

4) $\frac{b^3}{a}\sqrt[5]{\frac{b^9}{a}}\,4\frac{a^3}{b^3}\sqrt[5]{a^3b}\,\frac{1}{8}\cdot\frac{a^4}{b}\sqrt[5]{\frac{b^4}{a^3}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{3x^{-2}y^5}{5x^4y^{-2}}}\,\sqrt[3]{\left(\frac{6x^{-2}}{5y^3}\right)^{-2}}\,\sqrt[3]{-120x^5y^2}$;

6) $\sqrt[3]{\left(\frac{2m^{-3}n}{9m^5n^{-1}}\right)^{-2}}\,\sqrt[3]{\left(-\frac{3n^{-4}}{4m^{-5}}\right)^{-1}}\,\sqrt[3]{72m^4n^6}$;

7) $a\sqrt[5]{a^4b^3}\,ab^2\sqrt[3]{ab^2}\,\sqrt[5]{ab^4}\,a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}$;

8) $b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}}a^2\sqrt[7]{a^5b^2}\,ab\sqrt[3]{a^4b^7}\,\sqrt[7]{a^2b^7}$.

1.82. 1) $\sqrt[3]{3a^2} : \sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[3]{4a^8} : \sqrt[3]{2a^2}$;

3) $\sqrt[5]{64a^3} : \sqrt[5]{-2a^{-2}}$; 4) $\sqrt[5]{-27a^4} : \sqrt[5]{-\frac{1}{9}a^3}$;

5) $\sqrt[5]{-\frac{3a^2}{4}} : \sqrt[5]{\frac{8}{81a^3}}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{25}{a^2}} : \sqrt[3]{\frac{8a}{5}}$.

1.83. 1) $\left(2ab\sqrt[3]{-m^2} - m\sqrt[3]{-b}\right) : \sqrt[3]{-bm}$;

2) $\left(n^2m\sqrt[5]{-n^4m^2} + m\sqrt[5]{-\frac{n^4}{m^3}}\right) : \sqrt[5]{-\frac{m^2}{n}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$;

4) $\left(\sqrt[3]{a^2b} - 2\sqrt[3]{2ab^2} + b\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b}\right)$.

1.84. Выканайце дзеянні:

1) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3$;

3) $\left(-2\sqrt[3]{-2}\right)^5$; 4) $\left(-2\sqrt[3]{-2}\right)^4$;

5) $\left(\sqrt[3]{4x^2}\right)^2$; 6) $\left(-a\sqrt[5]{a^3x}\right)^4$;

7) $\left(ax^2\sqrt[3]{2ax^2}\right)^4$; 8) $\left(-\frac{3}{a^2}\sqrt[5]{\frac{2}{a^4}}\right)^3$.

1.85. У прамавугольным трохвугольніку ABC ($\angle C = 90°$) знайдзіце даўжыню вышыні CD, калі:

1) $AD = \sqrt[3]{4}$, $BD = \sqrt[3]{16}$;

2) $AD = \sqrt[7]{8}$, $BD = \sqrt[7]{16}$.

Вынесіце множнік з-пад знака кораня (**1.86—1.87**).

1.86. 1) $\sqrt[3]{375}$; 2) $\sqrt[3]{24}$; 3) $\sqrt[3]{-54}$;

4) $\sqrt[3]{-686}$; 5) $\sqrt[5]{-96}$; 6) $\sqrt[5]{300\,000}$;

7) $\sqrt[5]{-972}$; 8) $\sqrt[7]{-384}$.

1.87. 1) $\sqrt[3]{x^7b}$; 2) $\sqrt[3]{16x^2y^6a^8}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{x^5a^6}{y^{12}b^7}}$;

4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54x^4a^5}$; 5) $\frac{3x}{8}\sqrt[3]{64x^5y^9}$; 6) $\frac{a}{x}\sqrt[5]{-\frac{243x^{10}y^7}{1024a^{15}}}$;

7) $\sqrt[3]{\frac{m^3}{n^3} - 1}$; 8) $\sqrt[5]{-\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{10}}}$; 9) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^5} - \frac{y}{x^5}}$.

1.88. Унясіце множнік пад знак кораня:

1) $2x\sqrt[3]{3ax}$; 2) $4xy\sqrt[5]{x}$; 3) $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$;

4) $2m^2n\sqrt[3]{-\frac{3}{2mn}}$; 5) $-\frac{3n}{4m}\sqrt[3]{2mn}$; 6) $-\frac{a}{b}\sqrt[5]{-\frac{b^7}{a^8}}$;

7) $\frac{\sqrt[3]{a^3-a^4}}{a}$; 8) $\frac{\sqrt[3]{m^5+1}}{m}$.

Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку (**1.89—1.91**).

1.89. 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[7]{-2}}$;

5) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; 6) $\frac{18}{\sqrt[3]{36}}$; 7) $\frac{12}{\sqrt[5]{16}}$; 8) $\frac{24}{\sqrt[5]{81}}$.

1.90. 1) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$; 2) $\frac{m}{n\sqrt[3]{m^2}}$; 3) $\frac{t^2-1}{\sqrt[3]{t-1}}$;

4) $\frac{t^4-1}{\sqrt[3]{t^2+1}}$; 5) $\frac{2-x}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$; 6) $\frac{4+x}{\sqrt[5]{(4+x)^4}}$.

1.91*. 1) $\frac{k}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k}+1}$; 2) $\frac{k}{\sqrt[3]{k^2}-2\sqrt[3]{k}+4}$;

3) $\frac{m}{\sqrt[3]{m^2}-3}$; 4) $\frac{m}{\sqrt[3]{m}+5}$;

5) $\frac{15}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 6) $\frac{18}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$;

7) $\frac{1}{4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2}+16}$; 8) $\frac{1}{9\sqrt[3]{9}+3^3\cdot\sqrt[3]{3}+81}$.

Рашыце ўраўненне (**1.92—1.93**).

1.92°. 1) $\sqrt[3]{4x+1}=-4$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}=-3$;

3) $\sqrt[5]{3-3x}=1$; 4) $\sqrt[7]{2x+13}=2$;

5) $\sqrt[6]{6+x}=-2$; 6) $\sqrt[8]{3x-2}=-1$;

7) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$; 8) $\sqrt[3]{4x-50+x^2}=3$.

1.93. 1) $\sqrt[5]{5x+1}=\sqrt[5]{2x+10}$; 2) $\sqrt[7]{4+x}=\sqrt[7]{2x+12}$;

3) $3\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{2x-5}$; 4) $\sqrt[3]{7x+1}=2\sqrt[3]{x+4}$;

5) $\sqrt[3]{3x+8}=\sqrt[3]{x^2-2}$; 6) $\sqrt[7]{x+2}\cdot\sqrt[7]{4x-5}=\sqrt[7]{-3}$.

1.5. Дзеянні з каранямі цотнай ступені

Тэарэма. Няхай n — цотны лік. Тады:

1) пры любых неадмоўных значэннях a і b правільная роўнасць
$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}; \qquad (1)$$

2) пры любых неадмоўных значэннях a і дадатных значэннях b правільная роўнасць
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \qquad (2)$$

3) пры любых значэннях a і неадмоўных значэннях b правільная роўнасць
$$\sqrt[n]{a^n b}=|a|\sqrt[n]{b}. \qquad (3)$$

▲ Доказ. Лёгка пераканацца, што выразы, якія ўваходзяць у роўнасці (1)—(3), маюць сэнс. Гэтыя роўнасці, відавочна, правільныя пры $a=0$, а роўнасці (1) і (3) — і пры $b=0$.

Дакажам сцверджанне 3).

Пры любых значэннях a і $b \geqslant 0$ лікі $\sqrt[n]{a^n b}$ і $|a|\sqrt[n]{b}$ неадмоўныя (патлумачце чаму).

Узвёўшы левую і правую часткі роўнасці (3) у n-ю ступень, атрымаем
$$a^n b=|a|^n b.$$

Гэта правільная лікавая роўнасць, паколькі n — цотны лік, і таму $a^n=|a|^n$. Згодна з вынікам з п. 1.1 правільная і роўнасць
$$\sqrt[n]{a^n b}=|a|\sqrt[n]{b}. \ \boxtimes$$

Сцверджанні 1), 2) даказваюцца аналагічна. Дакажыце роўнасці (1), (2) самастойна. ▲

Сцверджанне 1) тэарэмы можна сфармуляваць і так:

! *Няхай n — цотны лік. Корань n-й ступені са здабытку двух неадмоўных лікаў роўны здабытку каранёў n-й ступені з гэтых лікаў.*

Такая ж тэарэма правільная пры любой колькасці каранёў, што перамнажаюцца.

Няхай n — цотны лік. Корань n-й ступені са здабытку некалькіх неадмоўных лікаў роўны здабытку каранёў n-й ступені з гэтых лікаў.

Такім чынам, для любых неадмоўных лікаў $a_1, a_2, ..., a_k$ правільная роўнасць

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}. \quad (4)$$

У прыватнасці, прыняўшы ў гэтай тоеснасці $a_1 = a_2 = ... = a_k = a$, атрымаем

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k. \quad (5)$$

Сцверджанне 2) тэарэмы можна сфармуляваць і так:

Няхай n — цотны лік. Корань n-й ступені з дробу з неадмоўным лічнікам і дадатным назоўнікам роўны дзелі ад дзялення кораня n-й ступені з лічніка на корань n-й ступені з назоўніка.

Доказ гэтай тэарэмы аналагічны доказу роўнасці (3).

Пераўтварэнне выразу $\sqrt[n]{a^n b}$ да выгляду $|a|\sqrt[n]{b}$ (у сцверджанні 3) тэарэмы) называецца ***вынясеннем множніка з-пад знака кораня цотнай ступені***.

Пераўтварэнне выразу $|a|\sqrt[n]{b}$ да выгляду $\sqrt[n]{a^n b}$ называецца ***ўнясеннем множніка пад знак кораня цотнай ступені***.

Заўважым, што кожная з роўнасцей (1)—(5), што разглядаюцца ў гэтым пункце, з'яўляецца тоеснасцю.

Прыклад 1. Вынесці множнік з-пад знака кораня:

а) $\sqrt{mx^{14}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{256}{y^{13}}}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{64n^8}{x^{12}}}$.

Рашэнне.

а) $\sqrt{mx^{14}} = \left|x^7\right|\sqrt{m}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{256}{y^{13}}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^8}{y^{12}y}} = \left|\dfrac{2}{y^2}\right|\sqrt[6]{\dfrac{4}{y}} = \dfrac{2}{y^2}\sqrt[6]{\dfrac{4}{y}}$;

в) $\sqrt[4]{\dfrac{64n^8}{x^{12}}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^6 n^8}{x^{12}}} = \left|\dfrac{2n^2}{x^3}\right|\sqrt[4]{2^2} = \dfrac{2n^2}{\left|x^3\right|}\sqrt[4]{4}$.

Прыклад 2. Пераўтварыць у здабытак каранёў выраз $\sqrt{ab}$ пры $a < 0$ і $b < 0$.

Рашэнне. $\sqrt{ab} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{-a}\sqrt{-b}$.

Можна было б, напрыклад, запісаць і так:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(-2a)\left(-\tfrac{b}{2}\right)} = \sqrt{-2a}\sqrt{-\tfrac{b}{2}}.$$

Або так:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(-\tfrac{3}{7}a\right)\left(-\tfrac{7}{3}b\right)} = \sqrt{-\tfrac{3}{7}a}\sqrt{-\tfrac{7}{3}b} \text{ і г. д.}$$

Прыклад 3. Унесці множнік пад знак кораня:

а) $p\sqrt[6]{7}$ пры $p < 0$; б) $p\sqrt[6]{7}$ пры $p > 0$.

Рашэнне.

а) Паколькі $p < 0$, то $p\sqrt[6]{7} < 0$, значыць,

$$p\sqrt[6]{7} = -(-p)\sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{(-p)^6 \cdot 7} = -\sqrt[6]{7p^6}.$$

б) Паколькі $p > 0$, то $p\sqrt[6]{7} > 0$, значыць,

$$p\sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{7p^6}.$$

Прыклад 4. Спрасціць выраз:

а) $\sqrt[4]{7-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7+\sqrt{33}}$; б)* $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{7-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{7+\sqrt{33}} = \sqrt[4]{\left(7-\sqrt{33}\right)\left(7+\sqrt{33}\right)} =$

$= \sqrt[4]{7^2 - \left(\sqrt{33}\right)^2} = \sqrt[4]{49-33} = \sqrt[4]{16} = 2.$

б) $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^2\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1.$

Прыклад 5. Спрасціць выраз

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt{2}-3\right)^2} \cdot \sqrt[10]{\left(\sqrt{2}-3\right)^8}.$$

Рашэнне.

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt{2}-3\right)^2} \cdot \sqrt[10]{\left(\sqrt{2}-3\right)^8} = \sqrt[10]{\left(\sqrt{2}-3\right)^{10}} = \left|\sqrt{2}-3\right| = 3-\sqrt{2}.$$

▲ **Прыклад 6.** Пазбавіцца ад ірацыянальнасці ў назоўніку:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$; б) $\dfrac{8}{\sqrt[6]{500}-\sqrt[3]{2}}$.

Рашэнне. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{4}} =$

$= \dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[4]{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}}{2}.$

б) $\dfrac{8}{\sqrt[6]{500}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8}{\sqrt[6]{5\cdot 100}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8}{\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[6]{10^2}-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[6]{5^2}-1\right)} =$

$= \dfrac{8\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[3]{4}\left(\sqrt{5}+1\right).$ ▲

Прыклад 7. Рашыць ураўненне:

а) $\sqrt[8]{2x-7}=-1$; б) $\sqrt[4]{4x+19}=2$.

Рашэнне. а) Ураўненне $\sqrt[8]{2x-7}=-1$ не мае рашэнняў, паколькі арыфметычны корань цотнай ступені не можа мець адмоўнае значэнне.

б) Па азначэнні арыфметычнага кораня чацвёртай ступені атрымаем, што ўраўненне $\sqrt[4]{4x+19}=2$ раўназначна ўраўненню $4x+19=2^4$, адкуль $x=-0{,}75$.

Адказ: а) рашэнняў няма; б) $-0{,}75$.

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб корані цотнай ступені са здабытку двух неадмоўных лікаў (некалькіх неадмоўных лікаў).
2. Сфармулюйце тэарэму аб корані цотнай ступені n са здабытку $a^n b$.
3. Сфармулюйце тэарэму аб корані цотнай ступені з дробу з неадмоўным лічнікам і дадатным назоўнікам.
4. Якое пераўтварэнне называецца:

   а) вынясеннем множніка з-пад знака кораня цотнай ступені;

   б) унясеннем множніка пад знак кораня цотнай ступені?
5*. Дакажыце кожную з тоеснасцей (1)—(5).

Практыкаванні

Знайдзіце значэнне выразу (**1.94—1.95**).

1.94°. 1) $\sqrt{4 \cdot 81}$; 2) $\sqrt{36 \cdot 625}$; 3) $\sqrt{75 \cdot 27}$;

4) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 5) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; 6) $\sqrt[4]{16 \cdot 0{,}0001}$;

7) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$; 8) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}}$.

1.95°. 1) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 100}$; 2) $\sqrt{64 \cdot 81 \cdot 225}$;

3) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0016 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^8}$;

5) $\sqrt[4]{1{,}5^4 \cdot 4^8 \cdot 0{,}01^4}$; 6) $\sqrt[10]{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{3}{8}\right)^{10} 4^{10}}$.

1.96°. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt{3^6}$; 2) $\sqrt{7^4}$; 3) $\sqrt[4]{5^{12}}$;

4) $\sqrt[4]{6^8}$; 5) $\sqrt{25a^2}$; 6) $\sqrt{49x^4}$;

7) $\sqrt[4]{1296b^4}$; 8) $\sqrt[6]{64c^{12}}$; 9) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$;

10) $\sqrt[4]{a^{16}c^4}$; 11) $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; 12) $\sqrt[6]{729x^6y^{12}}$.

1.97. Спрасціце выраз ($m \in \boldsymbol{Z}$):

1) $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$; 2) $\sqrt{1\frac{11}{25}a^4b^{10m}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8m}b^{16}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{625}a^{12}b^{8m}}$.

Вынесіце множнік з-пад знака кораня (**1.98—1.99**).

1.98°. 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{48}$; 3) $\sqrt{175}$;

4) $\sqrt{128}$; 5) $\sqrt[4]{243}$; 6) $\sqrt[4]{1250}$;

7) $\sqrt[6]{1458}$; 8) $\sqrt[6]{320}$; 9) $\sqrt{\frac{50}{49}}$;

10) $\sqrt{7\frac{7}{48}}$; 11) $\sqrt{11\frac{11}{120}}$; 12) $\sqrt[4]{1\frac{47}{81}}$.

1.99°. 1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt{ax^6}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{a^5}{81}}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{256}{x^9}}$; 5) $14\sqrt{\frac{5a^3}{98}}$; 6) $\frac{3x}{8}\sqrt[4]{32x^5y^8}$;

7) $\frac{3}{4a}\sqrt[4]{\frac{32a^5b^6}{243x^4y^7}}$; 8) $\frac{2c}{3}\sqrt[4]{81c^6m^5}$.

1.100°. Унясіце множнік пад знак кораня:

1) $2\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{6}$;

5) $2a\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$, дзе $a > 0$; 6) $2xy\sqrt[6]{\frac{x}{y^2}}$, дзе $y > 0$;

7) $n^2\sqrt[10]{\frac{2}{n^5}}$; 8) $\frac{ab}{2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3b^2}}$, дзе $b > 0$.

1.101. Вынесіце множнік з-пад знака кораня:

1) $\sqrt{-t^3}$; 2) $\sqrt[4]{-t^{11}}$; 3) $\sqrt{m^4n^5}$; 4) $\sqrt{m^5n^{10}}$;

5) $\sqrt{16m^2n}$, дзе $m < 0$; 6) $\sqrt{64m^2n^3}$, дзе $m > 0$;

7) $\sqrt{m^5n^{10}}$, дзе $n > 0$; 8) $\sqrt[4]{81m^5n^4}$, дзе $n < 0$;

9) $\sqrt{m^3n^3}$; 10) $\sqrt[4]{m^5n^5}$;

11) $\sqrt[4]{m^6n^8}$, дзе $m < 0$;

12) $\sqrt{m^2n^2t}$, дзе $m > 0$, $n < 0$.

1.102*. Унясіце множнік пад знак кораня:

1) $m\sqrt{5}$, дзе $m < 0$; 2) $m\sqrt{-m}$;

3) $m\sqrt[4]{m-2}$; 4) $m\sqrt[4]{n}$, дзе $m < 0$;

5) $m\sqrt[4]{5}$, дзе $m < 0$; 6) $m\sqrt[6]{3}$, дзе $m > 0$;

7) $(m+4)\sqrt[4]{\frac{1}{m+4}}$; 8) $(m-4)\sqrt{\frac{2}{1-m}}$.

1.103°. Вылічыце:

1) $\sqrt[8]{9^4}$; 2) $\sqrt[12]{27^4}$; 3) $\sqrt[6]{16^3}$;

4) $\sqrt[8]{1{,}69^4}$; 5) $\sqrt[16]{1296^4}$; 6) $\sqrt[6]{\left(\frac{49}{16}\right)^3}$;

7) $\sqrt[12]{\left(\frac{125}{27}\right)^4}$; 8) $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{121}\right)^2}$; 9) $\sqrt[8]{\left(\frac{10000}{256}\right)^2}$.

1.104. Выканайце дзеянні:

1) $\left(\sqrt[12]{\frac{m^5}{n^4}}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[4]{\frac{11}{x^2y^4}}\right)^8$;

3) $\left(\sqrt[16]{\frac{a^5}{b^6}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt[8]{\frac{16}{a^2d^3}}\right)^4$.

1.105*. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

5) $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; 6) $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку (**1.106—1.109**).

1.106. 1) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$;

4) $\frac{5}{\sqrt[6]{125}}$; 5) $-\frac{4}{\sqrt{12}}$; 6) $-\frac{3}{2\sqrt[4]{3}}$;

7) $\frac{6}{5\sqrt[4]{32}}$; 8) $\frac{9}{4\sqrt[8]{64}}$; 9) $\frac{3}{7\sqrt[6]{81}}$.

1.107. 1) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$; 2) $\frac{a+b}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[4]{a-b}}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[6]{(a+b)^5}}$;

5)* $\frac{a^2+b^2}{\sqrt[8]{a^4+2a^2b^2+b^4}}$; 6)* $\frac{a^4-b^4}{\sqrt[8]{(a^2-2ab+b^2)^3}}$.

1.108. 1) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{1-\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5}$;

4) $\frac{7}{\sqrt{7}-7}$; 5) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 6) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

7) $\frac{243}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^4}$; 8) $\frac{16}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^4}$; 9) $\frac{26}{2-\sqrt[4]{3}}$;

10) $\frac{9}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$.

1.109*. 1) $\frac{33}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$;

5) $\frac{4}{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{10}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$;

7) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}}$; 8) $\frac{1}{2+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}$.

1.110*. Пры якіх значэннях t правільная роўнасць:

1) $\sqrt[6]{t^6}=-t$; 2) $\sqrt[4]{t^4}=t$;

3) $\sqrt[4]{t^4}=|t|$; 4) $t\sqrt[8]{5}=\sqrt[8]{5t^8}$;

5) $t\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}=-0{,}2\sqrt[4]{t^4}$; 6) $t\sqrt[4]{4}=-\sqrt[4]{4t^4}$?

1.111*. Пры якіх значэннях k правільная роўнасць:

1) $\sqrt[10]{(k-4)^2} = \sqrt[5]{k-4}$;

2) $\sqrt[8]{(2-3k)^4} = \sqrt{2-3k}$;

3) $\sqrt{k-2} \cdot \sqrt{k+1} = \sqrt{(k-2)(k+1)}$;

4) $\sqrt[4]{\frac{k+4}{k-2}} = \frac{\sqrt[4]{-k-4}}{\sqrt[4]{2-k}}$?

Рашыце ўраўненне (**1.112—1.115**).

1.112°. 1) $\sqrt{4x+1} = 0$; 2) $\sqrt[4]{2x+3} = 0$;

3) $\sqrt[4]{4x+1} = -4$; 4) $\sqrt{2x+3} = -3$;

5) $\sqrt{4x+1} = 4$; 6) $\sqrt{2x+3} = 3$;

7) $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$; 8) $\sqrt{3x-5x^2+23} = 3$.

1.113. 1) $\sqrt[4]{x^2-36} = \sqrt[4]{2x-1}$; 2) $\sqrt[8]{8-5x} = \sqrt[8]{x^2-16}$;

3) $\sqrt{4x+1} = \sqrt{x^2+3x-1}$; 4) $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x^2+x-1}$;

5) $\sqrt{1+\sqrt{x+38}} = 3$; 6) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2$.

1.114. 1) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} = 10$;

2) $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} = 5$;

3) $\sqrt{2x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{2x-3}$;

4) $\sqrt[4]{3x+4} - \sqrt[8]{3x+4} - 2 = 0$.

1.115. 1) $\sqrt{x+2+\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt{\sqrt{5}-2x} = \sqrt[4]{5}$;

3) $\sqrt[6]{2x-1+6\sqrt{6}} = \sqrt[6]{6\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{x-1-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$;

5) $\sqrt{x-5-2\sqrt{10}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$;

6) $\sqrt{2\sqrt{14}-3x} = \sqrt{7}+\sqrt{2}$.

1.6. Бясконца спадальная геаметрычная прагрэсія

Азначэнне. **Геаметрычная прагрэсія з назоўнікам q, які задавальняе ўмову $|q| < 1$, называецца *бясконца спадальнай*.**

Прывядзём прыклады бясконца спадальных геаметрычных прагрэсій.

Прыклад 1. Паслядоўнасць

$$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2}{3^3},\ \ldots,\ \frac{2}{3^{n-1}},\ \ldots$$

з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй з першым членам $b_1 = 2$ і назоўнікам $q = \frac{1}{3}$.

Прыклад 2. Паслядоўнасць

$$-4,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2^2},\ \ldots,\ -\frac{1}{(-2)^{n-3}},\ \ldots$$

з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй з першым членам $b_1 = -4$ і назоўнікам $q = -\frac{1}{2}$ (тут $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$).

Пакажам 4 першыя члены геаметрычнай прагрэсіі з прыкладу 1 на каардынатнай прамой (рыс. 1).

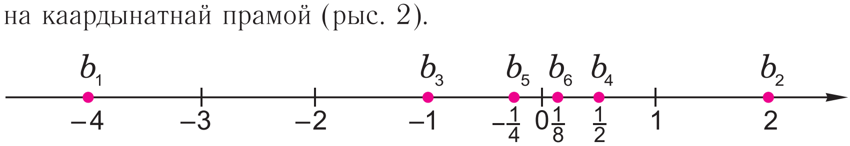
Рыс. 1

Мы бачым, што чым большы нумар члена прагрэсіі, тым бліжэйшы гэты член да нуля, г. зн. тым меншы яго модуль, і з павелічэннем n гэты модуль становіцца меншым за любы зададзены дадатны лік.

Напрыклад, калі мы зададзім лік 0,01, то

$$\left|\frac{2}{3^5}\right| = \left|\frac{2}{243}\right| < 0{,}01 \text{ і } \left|\frac{2}{3^{n-1}}\right| \leqslant 0{,}01 \text{ пры любым } n \geqslant 6.$$

Пакажам 6 першых членаў геаметрычнай прагрэсіі з прыкладу 2 на каардынатнай прамой (рыс. 2).



Рыс. 2

І ў гэтым прыкладзе мы бачым, што чым большы нумар члена прагрэсіі, тым бліжэйшы гэты член да нуля, г. зн. тым меншы яго модуль, і з павелічэннем n гэты модуль становіцца меншым за любы зададзены дадатны лік.

Напрыклад, калі мы зададзім лік 0,001, то

$$\left|\frac{1}{(-2)^{10}}\right| = \frac{1}{1024} < 0{,}001 \text{ і } \left|\frac{1}{(-2)^{n-3}}\right| < 0{,}001 \text{ пры любым } n \geqslant 13.$$

Такую ж з'яву, як у гэтых двух прыкладах, мы назіраем *у любой бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі* (b_n): *чым большы нумар* n *члена прагрэсіі* (b_n), *тым меншы* $|b_n|$, *і з павелічэннем* n *гэты модуль становіцца меншым за любы зададзены дадатны лік.*

Гэта сцверджанне фармулюецца яшчэ і так:

b_n *імкнецца да нуля, калі* n *імкнецца да бясконцасці.*

Заўважым, што калі $|q| < 1$, то $|q^n|$ імкнецца да нуля пры n, што імкнецца да бясконцасці.

Разгледзім бясконца спадальную геаметрычную прагрэсію з першым членам b_1 і назоўнікам q.

Запішам формулу сумы першых n членаў гэтай прагрэсіі і пераўтворым гэты выраз:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Абазначым

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Тады атрымаем

$$|S - S_n| = \left|\frac{b_1}{1-q} - \left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n\right)\right| = \left|\frac{b_1}{1-q}\right| \cdot |q|^n.$$

Паколькі $|q| < 1$, то $\left|\frac{b_1}{1-q}\right| \cdot |q|^n$ імкнецца да нуля, калі n імкнецца да бясконцасці. Значыць, $|S - S_n|$ імкнецца да нуля, калі n імкнецца да бясконцасці, г. зн. чым большы лік n (чым больш складаемых у суме S_n), тым меншае адрозненне паміж S і S_n. Таму лік S называюць ***сумай бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі***.

Прыклад 3. Знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) $2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \ldots,\ \frac{2}{3^{n-1}}, \ldots;$

б) $-4,\ 2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ -\frac{1}{(-2)^{n-3}}, \ldots.$

Рашэнне.

а) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3;$

б) $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4}{\frac{3}{2}} = \frac{-4 \cdot 2}{3} = \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}.$

Адказ: а) $S = 3$; б) $S = -2\frac{2}{3}$.

?

1. Якая геаметрычная прагрэсія называецца бясконца спадальнай?
2. Як разумець сцверджанне «b_n імкнецца да нуля, калі n імкнецца да бясконцасці»?
3. Як знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі?

Практыкаванні

1.116. Дакажыце, што дадзеная геаметрычная прагрэсія з'яўляецца бясконца спадальнай:

1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots;$ 2) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots;$

3) $-81,\ -27,\ -9,\ \ldots;$ 4) $-125,\ -25,\ -5,\ \ldots;$

5) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots;$ 6) $-\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{64},\ \ldots\ .$

1.117. Ці з'яўляецца геаметрычная прагрэсія (b_n) бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, калі:

1) $b_1 = 80$ і $b_{10} = -40;$ 2) $b_7 = 24$ і $b_{11} = \frac{3}{4};$

3) $b_5 = 30$ і $b_4 = 15;$ 4) $b_6 = -9$ і $b_{12} = \frac{1}{27};$

5) $b_3 = 0{,}01$ і $b_8 = -10;$ 6) $b_9 = -0{,}04$ і $b_{13} = -0{,}64;$

7) $b_{20} = \frac{1}{9}$ і $b_{19} = \frac{1}{3};$ 8) $b_{22} = -\frac{1}{16}$ і $b_{21} = \frac{1}{8}$?

Знайдзіце суму S бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (**1.118—1.119**).

1.118. 1) $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ ...;$ 2) $5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ ...;$

3) $-49;\ -7;\ -1;\ ...;$ 4) $-8;\ -1;\ -\frac{1}{8};\ ...;$

5) $\frac{1}{3};\ -\frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ ...;$ 6) $-1;\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{36};\ ...\ .$

1.119. 1) $3\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{3};\ ...;$

2) $\sqrt{\frac{3}{2}};\ \sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};\ ...;$

3) $\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{1}{5}};\ \frac{1}{25}\sqrt{5};\ ...;$

4) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};\ ...\ .$

1.120. Знайдзіце суму S бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

1) $b_3 = \frac{1}{8},\ q = \frac{1}{2};$ 2) $b_5 = \frac{1}{9},\ q = \frac{1}{3};$

3) $b_7 = \frac{1}{81},\ q = \frac{1}{3};$ 4) $b_6 = -\frac{1}{8},\ q = -\frac{1}{2};$

5) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q = \frac{1}{\sqrt{3}};$ 6) $b_1 = \sqrt{2},\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

1.121. Знайдзіце суму S бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

1) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n;$ 2) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$

3) $b_n = \frac{6}{2^{n-1}};$ 4) $b_n = \frac{(-1)^n}{3^n}.$

1.122. Лік 150 з'яўляецца сумай бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n). Задайце прагрэсію формулай n-га члена, калі:

1) $q = \frac{1}{5};$ 2) $q = -\frac{1}{3};$ 3) $b_1 = 75;$ 4) $b_1 = 50.$

1.123*. Лікавая паслядоўнасць (b_n) зададзена рэкурэнтнай формулай. Ці правільна, што (b_n) з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, калі:

1) $b_{n+1} = \frac{7}{2}b_n;$ 2) $b_n = \frac{3}{4}b_{n-1};$

3) $b_{n-1} = 3^{-1}b_{n-2};$ 4) $b_{n-2} = 7b_{n-3}?$

1.124*. Знайдзіце суму:

1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots;$ 2) $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}-\frac{1}{3}+\frac{27}{243}+\frac{1}{9}+\ldots.$

1.125. 1) Дадзены квадрат з дыяганаллю, роўнай a. Старана квадрата з'яўляецца дыяганаллю другога квадрата, старана другога квадрата — дыяганаллю новага квадрата і г. д. Знайдзіце суму плошчаў усіх квадратаў.

2) У круг, радыус якога роўны R, упісаны квадрат, у квадрат упісаны круг, у гэты круг упісаны другі квадрат і г. д. Знайдзіце суму плошчаў усіх кругоў і суму плошчаў усіх квадратаў.

1.7. Перыядычныя дробы

Кожны рацыянальны лік з'яўляецца рэчаісным лікам, а таму можа быць запісаны ў выглядзе дзесятковага дробу — канечнага або бясконцага. Добра вядома, як гэта робіцца, калі $\frac{k}{n}$ — нескарачальны дроб ($k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$), назоўнік якога не змяшчае ніякіх простых множнікаў, акрамя 2 і 5; у гэтым выпадку лічнік дзеляць на назоўнік і атрымліваюць канечны дзесятковы дроб. Напрыклад,

$$\frac{1}{4}=0{,}25; \quad \frac{371}{125}=2{,}968; \quad \frac{7}{80}=0{,}0875.$$

Прыменім цяпер гэты метад пераўтварэння звычайнага дробу ў дзесятковы да ліку $\frac{19}{11}$. Для гэтага падзелім 19,000... на 11:

$$\begin{array}{r|l}
-19 & 11 \\
\underline{11} & 1{,}7272\ldots \\
-80 & \\
\underline{77} & \\
-30 & \\
\underline{22} & \\
-80 & \\
\underline{77} & \\
-30 & \\
\underline{22} & \\
8 & \\
\ldots &
\end{array}$$

Такім чынам, $\frac{19}{11} = 1{,}7272...$.

Бясконцы дроб, які стаіць у правай частцы гэтай роўнасці, змяшчае групу лічбаў 72, якая перыядычна паўтараецца. Гэта група лічбаў называецца ***перыядам дробу***, а сам дроб — ***перыядычным***. Пры запісе такіх дробаў перыяд бяруць у дужкі і пішуць адзін раз:

$$\frac{19}{11} = 1{,}(72).$$

(Чытаецца: «адна цэлая семдзесят два ў перыядзе».)

Яшчэ адзін прыклад: $\frac{19}{22} = 0{,}86363... = 0{,}8(63).$

(Чытаецца: «нуль цэлых восем дзясятых шэсцьдзясят тры ў перыядзе».)

Калі дапісваць да канечнага дзесятковага дробу бясконца многа нулёў, то атрымаецца бясконцы дзесятковы дроб. Таму канечныя дзесятковыя дробы таксама лічацца перыядычнымі з перыядам 0. (Пры дзяленні двух натуральных лікаў не могуць атрымацца дробы з лікам 9 у перыядзе, таму ў школьным курсе алгебры іх не разглядаюць.)

Прыведзеныя прыклады даюць магчымасць здагадацца, што

! *кожны рацыянальны лік запісваецца ў выглядзе бясконцага дзесятковага перыядычнага дробу.*

Каб у гэтым пераканацца, заўважым, што для ператварэння звычайнага дробу $\frac{19}{11}$ у дзесятковы мы на кожным кроку астачу ад дзялення (яна была роўна або 8, або 3) памнажалі на 10 і дзялілі на 11. Але пры дзяленні на 11 увогуле магчымы толькі 11 розных астач. Значыць, на нейкім кроку астача абавязкова паўторыцца (у нашым прыкладзе гэта здарылася на трэцім кроку), і таму ў выніку дзялення абавязкова атрымаецца перыядычны дроб.

! *Наадварот, кожны бясконцы дзесятковы перыядычны дроб уяўляе сабой некаторы рацыянальны лік.*

Кожны перыядычны дзесятковы дроб можна разглядаць або як суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, або як суму канечнага дзесятковага дробу і сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі. Гэта дазваляе запісваць перыядычныя дзесятковыя дробы ў выглядзе звычайных дробаў.

Прыклад 1. Ператварыць у звычайны дроб лік:

а) 0,(7); б) 3,4(12).

Рашэнне. а) $0,(7) = 0,7777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + ... =$
$= 0,7 + 0,7 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,01 + 0,7 \cdot 0,001 + ... =$
$= 0,7 + 0,7 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,1^2 + 0,7 \cdot 0,1^3 + ...$.

Такім чынам, лік 0,(7) ёсць S — сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n), дзе $b_1 = 0,7$, $q = 0,1$ $(|q| < 1)$.

Значыць, $0,(7) = S = \frac{0,7}{1 - 0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}$.

б) $3,4(12) = 3,41212121212... =$
$= 3,4 + 0,012 + 0,00012 + 0,0000012 + 0,000000012 + ... =$
$= 3,4 + (0,012 + 0,012 \cdot 0,01 + 0,012 \cdot 0,01^2 + 0,012 \cdot 0,01^3 + ...)$.

Суму, што стаіць у дужках, абазначым літарай S. Тады $S = 0,0(12)$ ёсць сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі з першым членам $b_1 = 0,012$ і назоўнікам $q = 0,01$.

Значыць,

$$S = 0,0(12) = \frac{0,012}{1 - 0,01} = \frac{0,012}{0,99} = \frac{12}{990} = \frac{4}{330} = \frac{2}{165}.$$

Такім чынам,

$$3,4(12) = 3,4 + 0,0(12) = 3,4 + \frac{2}{165} = 3 + \frac{2}{5} + \frac{2}{165} =$$
$$= 3 + \frac{2 \cdot 33 + 2 \cdot 1}{165} = 3 + \frac{68}{165} = 3\frac{68}{165}.$$

Адказ: а) $0,(7) = \frac{7}{9}$; б) $3,4(12) = 3\frac{68}{165}$.

Вывучэннем перыядычных дробаў займаўся знакаміты нямецкі матэматык К. Ф. Гаус (1777—1855). Ужо ў дзяцінстве ён дзяліў адзінку на ўсе запар простыя лікі p з першай тысячы. Пры гэтым Гаус заўважыў, што, пачынаючы з нейкага месца, дзесятковыя знакі пачынаюць паўтарацца, г. зн. атрымліваюцца перыядычныя дзесятковыя дробы. А перыяды асобных дробаў дасягалі некалькіх соцень дзесятковых знакаў. Разглядаючы гэтыя прыклады, Гаус высветліў, што лік лічбаў у перыядзе заўсёды з'яўляецца дзельнікам ліку $p-1$.

Прыклад 2. Знайсці значэнне выразу:

а) $3,(7)+4,(3)$;

б) $\dfrac{3,4(12)-3,4(11)}{1,(12)}$.

Рашэнне. Пераўтварыўшы кожны з лікаў у звычайны дроб (гл. Прыклад 1), атрымаем:

а) $3,(7)+4,(3)=3\frac{7}{9}+4\frac{3}{9}=7\frac{10}{9}=8\frac{1}{9}$;

б) $\dfrac{3,4(12)-3,4(11)}{1,(12)}=\dfrac{3,4+\frac{12}{990}-3,4-\frac{11}{990}}{1+\frac{12}{99}}=\dfrac{1}{990}:\dfrac{111}{99}=\dfrac{1\cdot 99}{990\cdot 111}=$
$=\dfrac{1}{1110}$.

Адказ: а) $8\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{1110}$.

?

1. Які лік называюць рацыянальным?
2. Як звычайны дроб пераўтвараюць у дзесятковы?
3. Што называецца перыядам у запісе перыядычнага дзесятковага дробу?
4. Як звязаны перыядычны дзесятковы дроб і бясконца спадальная геаметрычная прагрэсія?

Практыкаванні

1.126°. Знайдзіце сотую лічбу пасля коскі ў дзесятковым запісе ліку:

1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{3}{7}$;

5) $\frac{5}{13}$; 6) $\frac{9}{11}$.

1.127°. Падзяліце «вугалком» лік 1 на:

1) 9; 2) 99; 3) 999;
4) 9999; 5) 99 999; 6) 999 999.

1.128*. Дакажыце, што:

$$\frac{1}{\underbrace{99...9}_{n\text{ разоў}}} = 0,(\underbrace{00...0}_{(n-1)\text{ разоў}}1).$$

1.129°. Запішыце звычайны дроб у выглядзе дзесятковага:

1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{44}{99}$;
4) $\frac{77}{99}$; 5) $\frac{55555}{99999}$; 6) $\frac{444444}{999999}$.

1.130. Запішыце дзесятковы дроб у выглядзе звычайнага:

1) 6,(11); 2) 3,(24);
3) 0,(423); 4) 0,(451);
5) 17,4(7); 6) 31,5(4);
7) 9,12(47); 8) 8,23(41).

Выканайце дзеянні (**1.131—1.132**).

1.131. 1) $0,(23) + 0,(43)$;
2) $2,2(7) - 0,47(2)$;
3) $5,0(8) - 4,1(6)$;
4) $0,42(6) + 0,12(3)$.

1.132. 1) $\frac{0,8(3) - 0,4(6)}{1,8(3)}$;

2) $(10,(6) - 5,(3)) : 3,(3)$;

3) $\frac{(0,(6) + 0,(3)) : 0,25}{0,12(3) : 0,0925}$;

4) $\frac{(1,25 : 0,(18) - 1,25 : 0,(8)) : 0,3(8)}{5,(3) + 0,291(6)}$.

1.133*. Дакажыце, што сума (здабытак, рознасць) двух перыядычных дзесятковых дробаў таксама з'яўляецца перыядычным дзесятковым дробам.

1.8. Ступень з рацыянальным паказчыкам

Напомнім, што кожны рацыянальны лік можна запісаць у выглядзе дробу $\frac{k}{n}$, дзе назоўнік n — натуральны лік, а лічнік k — цэлы лік.

Азначэнне. **Няхай k — цэлы лік, n — натуральны лік, не роўны 1. *Ступенню дадатнага ліку а з рацыянальным паказчыкам* $\frac{k}{n}$ (абазначаецца $a^{\frac{k}{n}}$) называецца дадатны корань n-й ступені з ліку a^k.**

Такім чынам,

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Ступень з рацыянальным паказчыкам вызначаецца і для асновы, роўнай нулю ($a = 0$), але толькі тады, калі паказчык дадатны.

Для $\frac{k}{n} > 0$ прымаем $0^{\frac{k}{n}} = 0$.

Прывядзём некалькі прыкладаў пераўтварэння ступеней з рацыянальнымі паказчыкамі:

а) $243^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{243^3} = \sqrt[5]{(3^5)^3} = \sqrt[5]{3^{15}} = 3^3 = 27;$

б) $243^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{243^3} = \sqrt[7]{3^{15}} = \sqrt[7]{(3^2)^7 \cdot 3} = 9\sqrt[7]{3};$

в) $243^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{243^{-3}} = \sqrt[4]{3^{-15}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^{15}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{3^{16}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{(3^4)^4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3^4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{81}.$

! Выразы $(-2)^{\frac{1}{3}}$, $(-243)^{\frac{3}{5}}$, $(-16)^{\frac{2}{3}}$ не маюць сэнсу, паколькі *па азначэнні аснова ступені з рацыянальным паказчыкам можа быць толькі неадмоўнай.*

Паколькі рацыянальны лік можна запісваць у выглядзе дробу неаднaзначна, то ўзнікае пытанне: ці залежыць азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам ад выгляду дробу, якім ён запісаны? Напрыклад, ці правільная роўнасць

$$5^{-\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{14}{21}}?$$

На гэта пытанне адказвае наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Для любога дадатнага значэння a пры любым натуральным l правільная роўнасць

$$a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{kl}{nl}}.$$

Доказ. Пераўтворым правую частку гэтай роўнасці, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам, а таксама ўласцівасці ступеней і каранёў:

$$a^{\frac{kl}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{kl}} = \sqrt[nl]{(a^k)^l} = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}. \boxtimes$$

Узнікае пытанне: калі, напрыклад, вылічыць 2^5, выкарыстаўшы азначэнне ступені з цэлым паказчыкам, і вылічыць $2^{\frac{15}{3}}$, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам, то ці атрымаем мы адзін і той жа лік?

На гэта пытанне адказвае наступная тэарэма.

Тэарэма 2. Для любога дадатнага значэння a пры любым натуральным $p > 1$ і цэлым k правільная роўнасць

$$a^{\frac{kp}{p}} = a^k.$$

Доказ. Пераўтворым левую частку гэтай роўнасці, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам, а таксама ўласцівасці ступеней і каранёў:

$$a^{\frac{kp}{p}} = \sqrt[p]{a^{kp}} = \sqrt[p]{(a^k)^p} = a^k. \boxtimes$$

?

1. Сфармулюйце азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам.
2*. Чаму нельга вызначыць ступень з рацыянальным паказчыкам для адмоўнай асновы?

Практыкаванні

1.134°. Запішыце карані ў выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам:

1) $\sqrt{x^5}$; 2) $\sqrt[5]{x^4}$; 3) $\sqrt[3]{b^2}$; 4) $\sqrt[7]{c^{-3}}$;

5) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; 6) $\sqrt[4]{xy^3}$; 7) $\sqrt[4]{a^3b^{-2}}$;
8) $\sqrt[5]{a^{-3}b^4}$; 9) $\sqrt{(a+b)^{-1}}$; 10) $\sqrt[3]{(m-n)^{-2}}$;
11) $\sqrt{a^2+b^2}$; 12) $\sqrt[7]{a^4-b^3}$.

1.135°. Замяніце ступень з рацыянальным паказчыкам коранем:

1) $x^{\frac{1}{6}}$, $y^{\frac{2}{7}}$, $(3a)^{\frac{2}{3}}$, $(2b)^{\frac{5}{4}}$, $5t^{-\frac{1}{2}}$, $8d^{-\frac{2}{9}}$;

2) $2a^{20,2}$, $4a^{3,5}$, $a^{-0,3}$, $a^{-0,6}$, $(9a)^{-20,3}$, $(5a)^{-1,5}$;

3) $(m+n)^{\frac{1}{5}}$, $(m^2+n^2)^{\frac{3}{4}}$, $(m^3+n^3)^{-\frac{5}{4}}$, $(m+2n)^{-\frac{2}{3}}$, $-(m+n)^{-\frac{1}{2}}$, $6(m+n)^{-\frac{4}{5}}$;

4) $(c^2-d^2)^{4,7}$, $(c^2+d^2)^{5,4}$, $(c-d)^{-0,7}$, $(c^3-d^3)^{-0,9}$, $-(c+3d)^{-6,2}$, $-(c-2d)^{-7,3}$.

1.136°. Вылічыце:

1) $4^{\frac{1}{2}}$, $64^{\frac{3}{2}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{\frac{5}{4}}$, $-27^{\frac{1}{3}}$, $-125^{\frac{4}{3}}$;

2) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(1\frac{61}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$, $-\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\left(7\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

3) $1,44^{-\frac{1}{2}}$, $0,81^{-\frac{1}{2}}$, $0,00001^{-\frac{1}{5}}$, $0,0016^{-\frac{1}{4}}$, $-0,027^{\frac{2}{3}}$, $-0,0625^{-\frac{1}{4}}$;

4) $16^{-0,25}$, $10\,000^{-0,75}$, $169^{-0,5}$, $9^{-1,5}$, $1024^{0,6}$, $625^{0,75}$.

1.137°. Ці мае сэнс выраз:

1) $7^{\frac{3}{4}}$; 2) $(-27)^{\frac{2}{3}}$; 3) $21^{-\frac{3}{2}}$;
4) $0^{\frac{3}{4}}$; 5) $0^{-\frac{4}{5}}$; 6) $(-16)^{-\frac{1}{4}}$;
7) $(-64)^{-\frac{4}{3}}$; 8) $(-81)^{-\frac{3}{4}}$; 9) $-625^{\frac{3}{4}}$?

Вылічыце (**1.138—1.141**).

1.138°. 1) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $0,64^{0,5}\cdot 0,027^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{-0,75}:1024^{-0,6}$;

5) $8^{\frac{1}{3}} : 2^{-1}$; 6) $4^{-1} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$;

7) $(-3)^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; 8) $64^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$.

1.139°. 1) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1}$;

3) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(1\frac{3}{5}\right)^{-1}$; 4) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{-0,5}$;

5) $\left(125^{-1} \cdot \frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 6) $0,01^{-1} : 100^{-\frac{1}{2}}$.

1.140°. 1) $8^{\frac{2}{3}} - 256^{\frac{1}{8}} + 27^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}} + 81^{\frac{3}{4}}$;

3) $16^{0,5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$;

4) $9^{-0,5} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$;

5) $0,0625^{-0,75} - \left(1\frac{61}{64}\right)^{\frac{2}{3}} + 0,027^{1\frac{1}{3}}$;

6) $16^{0,5} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

1.141°. 1) $2m + 3m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$ пры $m = 49,\ n = 16$;

2) $\left(m^2 - \frac{7}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ пры $m = -\frac{4}{5}$;

3) $t^{-0,5} + p^{0,4}$ пры $p = 32,\ t = 49$;

4) $2(t^2 - p^{-1})^{\frac{2}{3}}$ пры $p = \frac{1}{8},\ t = 4$.

1.142°. Ці правільна, што:

1) $3,87^{\frac{13}{17}} = 3,87^{\frac{65}{85}}$; 2) $19,24^{-\frac{29}{36}} = 19,24^{-\frac{174}{216}}$;

3) $9,56^{-1,45} = 9,56^{-13,05}$; 4) $20,08^{7,8} = 20,08^{85,8}$;

5) $7,32^{\frac{1353}{11}} = 7,32^{123}$; 6) $5,01^{\frac{360}{5}} = 5,01^{72}$;

7) $4,16^{-\frac{396}{33}} = 4,16^{-12}$; 8) $11,44^{-\frac{406}{29}} = 11,44^{-14}$?

Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу (**1.143—1.147**).

1.143°. 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $a^{-\frac{1}{2}}$; 4) $a^{\frac{1}{3}}$;

5) $\sqrt[3]{a}$; 6) $a^{-\frac{2}{5}}$; 7) $a^{-\frac{5}{2}}$; 8) a^2;

9) a^3; 10) a^{-4}; 11) $a^{\frac{4}{7}}$; 12) $\sqrt[9]{a^8}$.

1.144°. 1) $(a+1)^{\frac{1}{4}}$; 2) $(a+3)^{\frac{1}{3}}$; 3) $(6a)^{\frac{3}{5}}$;

4) $(3a)^{-\frac{3}{4}}$; 5) $(a-10)^0$; 6) $(2a+1)^{-\frac{3}{2}}$;

7) $(1-3a)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $(2a+6)^{\frac{3}{5}}$; 9) $(4-8a)^{-\frac{2}{7}}$;

10) $(a+2)^{\frac{1}{5}}$; 11) $(a-3)^{\frac{1}{8}}$; 12) $(3a-15)^{-\frac{2}{7}}$.

1.145. 1) $(a^2-4)^{\frac{4}{16}}$; 2) $(9-a^2)^{\frac{15}{20}}$;

3) $(a^2-5a)^{\frac{21}{24}}$; 4) $(a^2+2a)^{-\frac{6}{48}}$;

5) $(a^2-6a+8)^{-\frac{15}{40}}$; 6) $(a^2-3a-10)^{-\frac{4}{24}}$;

7) $(3a^2+4a-4)^{-\frac{5}{15}}$; 8) $(3a^2-8a-3)^{-\frac{16}{8}}$;

9) $(6-a-7a^2)^{-\frac{30}{10}}$; 10) $(3-2a-5a^2)^{-\frac{21}{6}}$.

1.146*. 1) $\left(\frac{6-7a+a^2}{a-1}\right)^{\frac{1}{10}}$;

2) $\left(\frac{3-2a-a^2}{a+3}\right)^{-\frac{1}{20}}$;

3) $\left(\frac{a^2-7a-8}{5-a}\cdot\frac{(a-8)^3}{(a+2)^2}\right)^{\frac{7}{22}}$;

4) $\left(\frac{2}{2a^2+a-3}+\frac{1}{a-1}-\frac{2}{2a+3}+1\right)^{-\frac{3}{4}}$.

1.147*. 1) $(\sin x-1)^{\frac{1}{4}}$; 2) $(\operatorname{ctg} x-1)^{\frac{1}{3}}$;

3) $(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $(-1-\cos x)^{\frac{1}{6}}$;

5) $(-2-\cos x)^{\frac{1}{8}}$; 6) $(\sin x-2)^{\frac{1}{10}}$;

7) $(-1-\sin x)^{\frac{1}{6}}$; 8) $(\cos x - 1)^{\frac{1}{4}}$;

9) $\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$; 10) $\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$.

1.148*. Параўнайце з адзінкай лік:

1) $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$; 3) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

1.9. Дзеянні са ступенямі з рацыянальнымі паказчыкамі

Для дадатных асноў усе дзеянні са ступенямі з рацыянальнымі паказчыкамі валодаюць тымі ж уласцівасцямі, што і дзеянні са ступенямі з цэлымі паказчыкамі.

Тэарэма. Для любых дадатных значэнняў a і b пры любых рацыянальных s і t правільныя роўнасці:

$$a^s a^t = a^{s+t}; \quad (1)$$

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}; \quad (2)$$

$$(a^s)^t = a^{st}; \quad (3)$$

$$(ab)^s = a^s b^s; \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}. \quad (5)$$

▲ Доказ. Няхай $s = \frac{p}{q}$, $t = \frac{k}{n}$, дзе $q \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $p \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Дакажам роўнасць (1). Пераўтворым яе левую частку:

$$a^s a^t = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{k}{n}} =$$

↓ па тэарэме 1 з п. 1.8 атрымаем ↓

$$= a^{\frac{np}{nq}} \cdot a^{\frac{kq}{nq}} =$$

↓ па азначэнні ступені з рацыянальным паказчыкам маем ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np}} \cdot \sqrt[nq]{a^{kq}} =$$

↓ па тэарэмах з п. 1.4, 1.5 маем ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np} \cdot a^{kq}} =$$

↓ па ўласцівасці ступеней з цэлымі паказчыкамі атрымаем ↓

$$= \sqrt[nq]{a^{np + kq}} =$$

↓ па азначэнні ступені з рацыянальным паказчыкам маем ↓

$$= a^{\frac{np + kq}{nq}} = a^{\frac{np}{nq} + \frac{kq}{nq}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{k}{n}} = a^{s + t}. \boxtimes$$

Доказ астатніх роўнасцей аналагічны доказу роўнасці (1) (праўдзіце яго самастойна). ▲

! Заўвага 1. Згодна з тэарэмай 2 з п. 1.8 даказаныя ў гэтым пункце сцверджанні правільныя і ў выпадку, калі адзін з лікаў s або t цэлы.

Заўвага 2. Роўнасці (1)—(5) з'яўляюцца тоеснасцямі, паколькі кожная з іх ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любых значэннях зменных, пры якіх выразы, што ў яе ўваходзяць, маюць сэнс.

Вынік. Для любых дадатных значэнняў a і b пры любым рацыянальным t правільныя роўнасці:

$$a^{-t} = \frac{1}{a^t}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-t} = \left(\frac{b}{a}\right)^t.$$

▲ Дакажыце гэтыя роўнасці самастойна, выкарыстаўшы роўнасці (2) і (5). ▲

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{2,5}}{\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^7}\right)^{-1} \text{ пры } a = 2,25.$$

Рашэнне. Выканаем пераўтварэнні:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{2,5}}{\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^7}\right)^{-1} = \frac{a^{\frac{3 \cdot 7}{14}}}{a^{0,5 + 2,5}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^3} = a^{1,5 - 3} = a^{-1,5}.$$

Пры $a = 2,25 = \frac{225}{100} = \frac{9}{4}$ атрымаем

$$a^{-1,5}=\left(\frac{9}{4}\right)^{-1,5}=\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}.$$

Адказ: $\frac{8}{27}$.

Прыклад 2. Няхай $a > 0$, $b > 0$. Раскласці выраз $a-b$ на множнікі як рознасць:

а) квадратаў; б)* кубоў; в) чацвёртых ступеней.

Рашэнне.

а) $a-b=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right).$

▲ б) $a-b=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{3}=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\right)=$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+(ab)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right).$ ▲

в) $a-b=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{4}-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{4}=\left(\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{2}+\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}\right)\left(\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{2}-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{2}\right)=$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right).$

▲ **Прыклад 3.** Скараціць дроб

$$\frac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{125-m}.$$

Рашэнне.

$$\frac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{125-m}=\frac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{5^{3}-\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{3}}=$$

$$=\frac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{\left(5-m^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{2}+5m^{\frac{1}{3}}+\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\right)}=\frac{1}{5-m^{\frac{1}{3}}}.$$

Адказ: $\frac{1}{5-m^{\frac{1}{3}}}$. ▲

Прыклад 4. Знайсці значэнне выразу

$$\left(3-14^{\frac{1}{4}}\right)\left(3+14^{\frac{1}{4}}\right):\left(9+\left(7^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\right).$$

Р а ш э н н е.

$$\frac{\left(3-14^{\frac{1}{4}}\right)\left(3+14^{\frac{1}{4}}\right)}{9+\left(7^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{3^2-\left(14^{\frac{1}{4}}\right)^2}{9+\left(\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2-2\cdot7^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{9-14^{\frac{1}{2}}}{9+7+2-2\cdot14^{\frac{1}{2}}}=\frac{9-14^{\frac{1}{2}}}{18-2\cdot14^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}.$$

А д к а з: $\frac{1}{2}$.

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб дзеяннях над ступенямі з рацыянальнымі паказчыкамі.
2. Як памножыць дзве ступені з аднолькавымі асновамі?
3. Чаму роўна дзель дзвюх ступеней з аднолькавымі асновамі?
4. Як узвесці ступень з рацыянальным паказчыкам у рацыянальную ступень?
5. Як узвесці ў рацыянальную ступень здабытак дадатных лікаў?
6. Як узвесці ў рацыянальную ступень дадатны дроб?

П р а к т ы к а в а н н і

Запішыце ў выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам (**1.149—1.154**).

1.149°. 1) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 2) $a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{9}}$;
4) $a^5a^{\frac{1}{3}}$; 5) $a^{0{,}2}a^{-1}a^{0{,}6}$; 6) $a^{\frac{1}{6}}a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{1}{2}}$;
7) $a^{\frac{3}{8}}a^{\frac{5}{24}}a^{-\frac{1}{3}}$; 8) $a^{0{,}8}a^{-5}a^{7{,}2}$; 9) $a^{\frac{5}{9}}a^{-\frac{1}{18}}a^{\frac{1}{4}}$.

1.150°. 1) $b^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{3}{2}}$; 2) $b^{\frac{5}{6}}:b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{\frac{1}{5}}:b^{-\frac{1}{2}}$;
4) $b^{\frac{2}{5}}:b^{\frac{1}{10}}$; 5) $b^{-\frac{1}{3}}:b^2$; 6) $b^{0{,}6}:b^{\frac{1}{15}}$;
7) $b^{-0{,}4}:b^{-0{,}8}$; 8) $b^{\frac{3}{4}}:b^5:b^{-\frac{1}{6}}$; 9) $b^{\frac{5}{6}}:b^{-\frac{5}{12}}:b^{\frac{1}{2}}$.

1.151°. 1) $\left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{9}}$; 3) $\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$;
4) $(t^4)^{-\frac{5}{12}}$; 5) $\left(t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{8}}$; 6) $(t^{0{,}4})^{-2{,}5}$.

1.152°. 1) $(t^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (t^{-6})^{\frac{1}{9}}$; 2) $\left(t^{\frac{4}{7}}\right)^{-3,5} \cdot (t^{-1,25})^{1\frac{3}{5}}$;

3) $\left(t^{2\frac{1}{4}}\right)^{3\frac{1}{2}} \cdot \left(t^{6\frac{1}{2}}\right)^{2\frac{1}{4}} : t^{17\frac{1}{2}}$; 4) $\left(t^{2\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{13}} \cdot \left(t^{\frac{5}{18}}\right)^{2\frac{4}{7}} \cdot \left(t^{1\frac{1}{2}}\right)^{2\frac{1}{7}}$.

1.153. 1) $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\right)$; 2) $\left(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{5}{6}}\right) : \left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}\right)$; 4) $\left(a^{\frac{11}{15}}b^{\frac{2}{3}}\right) : \left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{5}{6}}\right)$.

1.154. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{18}}\right)^3 \cdot \left(a^{-1,5}b^{\frac{5}{6}}\right)$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}b^{0,625}\right)^4 \cdot \left(a^{-1\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{5}{7}}b^{-\frac{5}{14}}\right)^{1,4} \cdot (a^{0,4}b^{0,2})^{-2,5}$; 4) $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^{-1,5} \cdot \left(a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{5}{12}}\right)^{\frac{6}{5}}$.

Вылічыце (**1.155—1.158**).

1.155°. 1) $3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{11}{5}}$; 2) $2^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}}$;

3) $3^{-\frac{1}{3}} : 9^{-\frac{2}{3}}$; 4) $5^{-1,3} : 5^{-0,7} : 25^{-0,8}$;

5) $10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1} \cdot 10^{\frac{2}{5}}$; 6) $25^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{1\frac{2}{3}} \cdot 125^{-\frac{1}{9}}$;

7) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot \sqrt[5]{2}$; 8) $125^{-\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{5}$;

9) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{0,5}$; 10) $\sqrt[5]{16} \cdot 2^{-0,6} \cdot 2^{1,8}$.

1.156°. 1) $(8 \cdot 27)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\left(\frac{49}{144}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

4) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; 5) $\left(\frac{36^3}{125^2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 6) $\left(\frac{3^8}{64^4}\right)^{-\frac{1}{8}}$.

1.157. 1) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{32}{243}\right)^{0,1}$; 2) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $4^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$;

5) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-0,5} - \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 6) $125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

7) $27^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$; 8) $\dfrac{5^{\frac{2}{3}} \cdot 3^3}{5^{-\frac{1}{3}}}$;

9) $\dfrac{10^{0,6}\cdot 2^{-\frac{3}{5}}}{5^{-1,4}}$; 10) $\dfrac{7^{-0,8}\cdot 14^{\frac{4}{5}}}{2^{-2,2}}$.

1.158. 1) $\dfrac{8^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{9}}{8^{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt[3]{3^{-1}}}$; 2) $\dfrac{81^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[5]{49}}{7^{-1,6}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

3) $\dfrac{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}}:\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}}$; 4) $\dfrac{\left(\frac{49}{121}\right)^{-\frac{1}{8}}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}}:3^{-5}}{\left(\frac{64^{-1}}{11^{-0,5}}\right)^{-\frac{7}{2}}:\left(\frac{2^{-16}}{7^{1,25}}\right)^{-1}}$.

1.159. Знайдзіце x, калі:

1) $\dfrac{x}{(\sqrt[3]{2})^2}=\dfrac{2^{\frac{5}{3}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$;

2) $\dfrac{9^{-\frac{1}{3}}\cdot 243^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{9}\cdot x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{243}}$;

3) $\dfrac{4^{-\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[6]{16})^2\cdot\sqrt{4}\cdot x}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\cdot\dfrac{1}{(\sqrt[4]{16})^2}$;

4) $\dfrac{125^{\frac{1}{2}}\cdot 0,2^3}{(\sqrt[4]{25})^3\cdot(x-1)}=\dfrac{(\sqrt[6]{25})^3}{25^2}$.

1.160. Запішыце ў выглядзе сумы:

1) $x^{\frac{1}{3}}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)$; 2) $x^{\frac{1}{2}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)$;

3) $a^{\frac{1}{2}}b^{2,5}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; 4) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}\right)$.

Вынесіце агульны множнік за дужкі (**1.161—1.162**).

1.161°. 1) $a^{\frac{1}{2}}+a$; 2) $a-a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a+a^{\frac{5}{6}}$;

4) $a^{\frac{7}{9}}-a$; 5) $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}$; 6) $a^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{3}{5}}$;

7) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{6}}$; 8) $a^{\frac{3}{5}}-a^{\frac{2}{5}}+a$; 9) $a-a^{\frac{2}{9}}+a^{\frac{5}{6}}$.

1.162°. 1) $(ab)^{\frac{1}{3}}+(ac)^{\frac{1}{3}}$; 2) $(ab)^{\frac{3}{4}}-(ac)^{\frac{5}{8}}$;

3) $12ab^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{2}}b$; 4) $5a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}+15a^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}}$;

5) $24a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}+8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$; 6) $2^{\frac{1}{6}}a^{\frac{2}{5}}b-2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{10}}b^{\frac{1}{3}}$.

1.163. Дакажыце тоеснасць:

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=a-b$;

2)* $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a+b$;

3)* $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a-b$.

1.164°. Узвядзіце ў квадрат выраз:

1) $2^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{3}}$; 2) $3^{-\frac{1}{2}}+9^{-\frac{1}{3}}$;

3) $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}$; 4) $m^{\frac{5}{2}}-n^{-\frac{1}{4}}$;

5) $2m^{\frac{1}{2}}-3n^{\frac{1}{2}}$; 6) $4t^{\frac{3}{2}}+5d^{\frac{5}{3}}$.

1.165. Спрасціце выраз:

1)° $\left(a-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+b^{\frac{1}{2}}\right)$; 2)° $\left(c+t^{\frac{3}{4}}\right)\left(c-t^{\frac{3}{4}}\right)$;

3)° $\left(a^{\frac{1}{2}}-c^{-1}\right)\left(c^{-1}+a^{\frac{1}{2}}\right)$; 4)° $\left(b^{\frac{1}{4}}-d^{-3}\right)\left(d^{-3}+b^{\frac{1}{4}}\right)$;

5) $\left(4a^{\frac{2}{5}}+t^{-\frac{1}{4}}\right)\left(4a^{\frac{2}{5}}-t^{-\frac{1}{4}}\right)$;

6) $\left(3t^{\frac{2}{3}}+d^{-\frac{5}{6}}\right)\left(3t^{\frac{2}{3}}-d^{-\frac{5}{6}}\right)$;

7) $4a^{\frac{2}{3}}-\left(2a^{\frac{1}{3}}+3b^{\frac{1}{3}}\right)\left(2a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}\right)$;

8) $9b^{\frac{2}{5}}-\left(3b^{\frac{1}{5}}-2a^{\frac{1}{3}}\right)\left(3b^{\frac{1}{5}}+2a^{\frac{1}{3}}\right)$;

9) $25b^{\frac{2}{5}}+16c-\left(5b^{\frac{1}{5}}+4c^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

10) $9a^{\frac{2}{3}}-25b-\left(3a^{\frac{1}{3}}-5b^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

1.166. Вылічыце:

1) $\left(16^{-\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}}+16^{-0,25}\right)$;

2) $\left(81^{-\frac{1}{4}}+7^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\left(7\sqrt{7}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{81}\right)^{0,25}\right)$;

3) $\left(5^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)^2:\left(\left(2+15^{\frac{1}{4}}\right)\left(2-15^{\frac{1}{4}}\right)\right)$;

4) $\left(\left(5^{\frac{1}{2}}-21^{\frac{1}{4}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}}+21^{\frac{1}{4}}\right)\right):\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2$.

Раскладзіце на множнікі, выкарыстаўшы формулу рознасці квадратаў (**1.167—1.168**).

1.167°. 1) $a-121$; 2) $49-m$; 3) n^2-13; 4) $5-t^2$; 5) $7-b^4$; 6) d^6-10.

1.168. 1) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{2}{3}}-1$; 4) $4-n^{\frac{1}{2}}$; 5) $4a^{\frac{1}{2}}-25b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0,01m^{\frac{1}{6}}-0,09n^{\frac{1}{2}}$; 7) $x^{\frac{2}{3}}-3$; 8) $6-x^{\frac{2}{5}}$; 9) $x^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{4}}$; 10) $x^{-3}-a^{-\frac{1}{4}}$; 11) $m^4-n^{-\frac{1}{2}}$; 12) $m^{-5}-n^{\frac{1}{5}}$.

Скараціце дроб (**1.169—1.170**).

1.169. 1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}}{p-t}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}$; 5) $\dfrac{a^{\frac{2}{7}}-25b^{\frac{4}{7}}}{2a^{\frac{1}{7}}-10b^{\frac{2}{7}}}$; 6) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-9b^{\frac{1}{2}}}{4a^{\frac{1}{3}}+12b^{\frac{1}{4}}}$;

7)* $\dfrac{a-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 8)* $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 9)* $\dfrac{27-a}{9+3a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$.

1.170. 1) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$; 2)* $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{a+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$;

3)* $\dfrac{a^{1,5}b^{0,5}+b^2}{ab^{0,5}-a^{0,5}b+b^{1,5}}$; 4) $\dfrac{a^{-0,5}-2a^{-0,25}b^{-0,25}+b^{-0,5}}{a^{-0,5}-b^{-0,5}}$;

5)* $\dfrac{a + a^{0,25}b^{0,75}}{a^{0,5} + a^{0,25}b^{0,25}}$; 6) $\dfrac{b - a^{0,5}b^{0,5}}{b^{0,75} + a^{0,25}b^{0,5}}$.

Спрасціце выраз (**1.171—1.174**).

1.171. 1) $\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} - 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}$;

2) $\sqrt{a^{-2\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}a^4b^{1\frac{1}{3}}}$.

1.172. 1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{4x^{0,5} - 16}{x - 16} + \dfrac{x^{0,5}}{x^{0,5} + 4}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a-b}$;

5) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$; 6) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$;

7) $\left(\dfrac{a^2 + b^2}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}\right)ab^{-1}$;

8) $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{a^{\frac{3}{2}} + ab^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}\right) : \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$.

1.173*. 1) $\dfrac{8a+1}{1 + 4a^{\frac{2}{3}} - 2\cdot\sqrt[3]{a}}$; 2) $\dfrac{a - 27}{a^{\frac{2}{3}} + 9 + 3\cdot\sqrt[3]{a}}$;

3) $\dfrac{1 + a^{\frac{1}{3}}}{1 - a^{\frac{1}{3}}}\left(1 + \dfrac{a - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 1} - 2\cdot\sqrt[3]{a}\right)$;

4) $\dfrac{1 - a^{\frac{1}{3}}}{1 - a^{\frac{4}{3}}}\left(1 - \dfrac{a + a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + 1} + 2\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)$.

1.174*. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + \dfrac{b - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}\right) : \left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} + \dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a} - \dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \dfrac{2a^{0,5}}{a^{1,5} + b^{1,5}}\cdot\dfrac{a - a^{0,5}b^{0,5} + b}{a^{0,5} - b^{0,5}}\right) : 4a^{0,5}b^{0,5}$;

3) $\left(\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}\right):(a-b)+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$;

4) $\left(\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}-1}+\dfrac{a^{0,5}-1}{a^{0,5}+1}-\dfrac{4}{a-1}\right)^{-2}$.

1.10. Параўнанне ступеней з рацыянальнымі паказчыкамі

Тэарэма 1. Няхай $a > 1$. Тады:
1) калі r — дадатны рацыянальны лік, то $a^r > 1$;
2) калі s і r — рацыянальныя лікі і $s > r$, то $a^s > a^r$.

Доказ. Дакажам сцверджанне 1). Дадатны рацыянальны лік r можна запісаць у выглядзе $r = \frac{k}{l}$, дзе k і l — натуральныя лікі.

Па ўмове $a > 1$, значыць, згодна з уласцівасцю ступеней з натуральнымі паказчыкамі атрымаем $a^k > 1^k$, г. зн. $a^k > 1$. Апошнюю няроўнасць можна перапісаць так:

$$\left(a^{\frac{k}{l}}\right)^l > 1^l.$$

Яшчэ раз выкарыстаўшы ўласцівасць ступеней з натуральнымі паказчыкамі, атрымаем

$$a^{\frac{k}{l}} > 1, \text{ г. зн. } a^r > 1. \ \boxtimes$$

Сцверджанне 2) даказваецца аналагічна.

Тэарэма 2. Няхай $0 < a < 1$. Тады:
1) калі r — дадатны рацыянальны лік, то $a^r < 1$;
2) калі s і r — рацыянальныя лікі і $s > r$, то $a^s < a^r$.

Доказ гэтай тэарэмы аналагічны доказу тэарэмы 1.

Прыклад 1. Параўнаць значэнні выразаў:

а) $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}}$ і $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}$;

б) $0{,}8^{-10}$ і $0{,}8^{-6,9}$;

в) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-11}$ і $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3,7}$.

Р а ш э н н е. а) Аснова ступеней $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}}$ і $\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}$ — лік $\frac{7}{9}$ — дадатны і меншы за 1, пры гэтым паказчык $\frac{5}{4}$ большы за паказчык $\frac{4}{5}$. У гэтым выпадку большаму значэнню паказчыка адпавядае меншае значэнне ступені. Таму маем

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

б) Для асновы ступеней і іх паказчыкаў адпаведна правільныя няроўнасці

$$0 < 0{,}8 < 1 \quad \text{і} \quad -10 < -6{,}9.$$

У гэтым выпадку большаму значэнню паказчыка адпавядае меншае значэнне ступені. Таму маем

$$0{,}8^{-10} > 0{,}8^{-6{,}9}.$$

в) Для асновы ступеней і іх паказчыкаў адпаведна правільныя няроўнасці

$$\frac{5}{3} > 1 \quad \text{і} \quad -11 < -3{,}7.$$

У гэтым выпадку большаму значэнню паказчыка адпавядае большае значэнне ступені. Таму маем

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-11} < \left(\frac{5}{3}\right)^{-3{,}7}.$$

Прыклад 2. Параўнаць k ($k > 0$) з адзінкай, калі вядома, што правільная няроўнасць:

а) $k^{\frac{2}{7}} < k^{\frac{1}{7}}$; б) $k^{-3{,}4} > k^{-2{,}1}$; в) $k^{0} < k^{5{,}7}$.

Р а ш э н н е. а) Паколькі для паказчыкаў ступеней правільная няроўнасць $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ і па ўмове большаму значэнню паказчыка ступені адпавядае меншае значэнне ступені, то аснова ступені k задавальняе няроўнасць $0 < k < 1$.

б) Паколькі для паказчыкаў ступеней правільная няроўнасць $-3{,}4 < -2{,}1$ і па ўмове большаму значэнню паказчыка ступені адпавядае меншае значэнне ступені, то аснова ступені k задавальняе няроўнасць $0 < k < 1$.

в) Паколькі для паказчыкаў ступеней правільная няроўнасць $0 < 5{,}7$ і па ўмове большаму значэнню паказчыка ступені адпавядае большае значэнне ступені, то аснова ступені k задавальняе няроўнасць $k > 1$.

Адказ: а) $0 < k < 1$; б) $0 < k < 1$; в) $k > 1$.

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб параўнанні ступеней з асновай, большай за адзінку.
2. Сфармулюйце тэарэму аб параўнанні ступеней з дадатнай асновай, меншай за адзінку.

Практыкаванні

Параўнайце лікі (**1.175—1.180**).

1.175°. 1) $2^{-\frac{1}{2}}$ і $2^{-\frac{1}{4}}$; 2) $23^{\frac{5}{8}}$ і $23^{\frac{3}{8}}$;

3) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{7}}$ і $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,7}$; 4) $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{5}{8}}$ і $\left(\frac{7}{3}\right)^{0,6}$;

5) $0,001^{-1,3}$ і $0,001^{-1,5}$; 6) $0,999^{-2,1}$ і $0,999^{-1,8}$;

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,251}$; 8) $\left(\frac{2}{5}\right)^{0,32}$ і $\left(\frac{2}{5}\right)^{0,3}$;

9) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{8}{3}}$ і $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{3}{8}}$; 10) $\left(\frac{9}{10}\right)^{0,8}$ і $0,9^{\frac{2}{7}}$.

1.176°. 1) $0,2^{-7,8}$ і $5^{6,4}$; 2) $8^{\frac{13}{6}}$ і $0,125^{-2,5}$;

3) $1,2^{\frac{2}{3}}$ і $1,2^{0}$; 4) $1,6^{0}$ і $1,6^{\frac{3}{2}}$;

5) 1 і $0,7^{\frac{5}{4}}$; 6) $0,81^{\frac{4}{5}}$ і 1;

7) $\left(\sqrt{3}\right)^{3,5}$ і 1; 8) 1 і $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;

9) $2,5\sqrt[7]{0,4}$ і $0,4\sqrt[7]{2,5}$; 10) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt[8]{1\frac{2}{3}}$ і $\frac{5}{3}\cdot\sqrt[8]{0,6}$.

1.177. 1) $\dfrac{3^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{0,5}}{\sqrt[6]{3}}$ і $\dfrac{3^{1\frac{1}{3}}\cdot 3^{0,5}}{\sqrt[6]{3^5}}$;

2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{6^{-2}}$ і $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{6^{-3}}$;

3) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{4}$ і $\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^{9}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{81}}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^{10}$ і $\left(\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{216}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt[4]{3}\right)^{8}$.

1.178. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{6}{11}}$ і $\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{6}{11}}$; 2) $0{,}357^{-\frac{1}{3}}$ і $0{,}3571^{-\frac{1}{3}}$;

3) $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ і $\left(3\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\sqrt{21}\right)^{-\frac{2}{7}}$ і $\left(2\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{7}}$.

1.179. 1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ і $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}}$ і $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{4}}}$;

3) $\sqrt[8]{\left(1-\left(1\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right)^{\frac{9}{16}}}$ і $\sqrt[12]{\left(1-\left(1\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right)^{\frac{7}{24}}}$;

4) $\sqrt[5]{\left(1+\left(5\frac{2}{3}-3\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{9}{25}}}$ і $\sqrt[7]{\left(1+\left(5\frac{2}{3}-3\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{8}{21}}}$.

1.180. 1) $2\sqrt{5}-1$ і $6-\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{7}-1$ і $9-3\sqrt{7}$;

3) $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ і $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$;

4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2$ і $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

1.181. Размясціце лікі ў парадку спадання:

1) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{8}}$; $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$; 4) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$; $\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{8}}$; $\left(\frac{256}{81}\right)^{-\frac{1}{6}}$;

5) $\sqrt{0{,}3}$; $0{,}3$; $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$; 6) $\sqrt{1{,}7}$; $1{,}7$; $\left(3-\sqrt{7}\right)^2$.

1.182. Параўнайце з адзінкай лік:

1) 3^{-5}; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$; 6) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{7}{3}}$;

7) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{13}{4}}$; 8) $(\pi-1)^{\frac{1}{3}}$; 9) $\left(\frac{\pi-1}{4}\right)^{\frac{8}{3}}$;

10) $\left(\frac{\pi-3}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 11) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{9}{2}}$; 12) $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{8}}$.

1.183. Ведаючы, што $0 < m < 1$, параўнайце:

1) $m^{7,1}$ і $m^{9,3}$; 2) $m^{0,13}$ і $m^{0,16}$;
3) $m^{-23,5}$ і m^{-30}; 4) m^{-40} і $m^{-51,4}$;
5) $m^{0,74}$ і $m^{0,9}$; 6) $m^{0,63}$ і $m^{0,62}$;
7) $m^{\frac{3}{2}}$ і $m^{\frac{2}{3}}$; 8) $m^{-\frac{3}{4}}$ і $m^{-\frac{4}{3}}$;
9) $m^{-2,8}$ і $m^{-0,28}$; 10) $m^{-4,14}$ і $m^{-4,04}$.

1.184. Ведаючы, што $a > 1$, параўнайце:

1) $a^{-9,3}$ і a^{-9}; 2) a^{-18} і $a^{-17,99}$;
3) $a^{0,235}$ і $a^{0,401}$; 4) $a^{1,63}$ і $a^{1,82}$;
5) $a^{-\frac{1}{3}}$ і $a^{-\frac{2}{5}}$; 6) $a^{-\frac{7}{10}}$ і $a^{-\frac{8}{9}}$;
7) $a^{\frac{5}{2}}$ і $a^{\frac{2}{5}}$; 8) $a^{-\frac{4}{5}}$ і $a^{-\frac{5}{4}}$;
9) $a^{0,36}$ і $a^{3,6}$; 10) $a^{5,3}$ і $a^{5,001}$.

Параўнайце лікі a і b, калі вядома, што правільная няроўнасць (**1.185—1.186**).

1.185. 1) $3^a > 3^b$; 2) $1,4^a < 1,4^b$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^a < \left(\frac{2}{3}\right)^b$;
4) $\left(\frac{2}{9}\right)^a > \left(\frac{2}{9}\right)^b$; 5) $\left(\frac{7}{6}\right)^a > \left(\frac{7}{6}\right)^b$; 6) $\left(\frac{13}{12}\right)^a < \left(\frac{13}{12}\right)^b$.

1.186. 1) $\left(\sqrt{5}\right)^a < \left(\sqrt{5}\right)^b$; 2) $\left(\sqrt{3}\right)^a > \left(\sqrt{3}\right)^b$;
3) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^a > \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^b$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^a < \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^b$;
5) $\pi^a < \pi^b$; 6) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^a > \left(\frac{1}{\pi}\right)^b$;
7) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^a > \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^b$; 8) $\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^a > \left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^b$.

Параўнайце лік m ($m > 0$) з адзінкай, калі вядома, што дадзеная няроўнасць правільная (**1.187—1.188**).

1.187. 1) $m^2 > m^3$; 2) $m^4 < m^5$; 3) $m^{\frac{2}{5}} < m^{\frac{3}{5}}$;
4) $m^{\frac{1}{3}} > m^{\frac{2}{3}}$; 5) $m^{-2} > m^2$; 6) $m^{-8,1} < m^{-10}$;
7) $m^{\frac{4}{9}} < m^{0,6}$; 8) $m^{-0,5} > m^{-\frac{1}{4}}$.

1.188. 1) $\left(m^{\frac{3}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{m^2} < \left(m^{\frac{5}{6}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{m^3}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{m^3}}{\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}} > \dfrac{(m^{0,25})^{0,75}}{\sqrt{m^3}}$;

3) $\dfrac{m\sqrt[10]{m\sqrt[3]{m^2}}}{m^{\frac{7}{6}}} > \dfrac{\sqrt[6]{m\sqrt[3]{m^{-1}}}}{m^{-\frac{17}{9}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[5]{m^2 \cdot \sqrt[4]{m^{-3}}}}{m^{-\frac{1}{4}}} < \dfrac{m\sqrt[5]{m^2 \cdot \sqrt{m}}}{m^{-0,7}}$;

5) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{m^5}} \cdot \sqrt[6]{m^7}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{m^7}}} > \dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{1}{m^{-1}}} \cdot \sqrt{m^3}}}{\sqrt[15]{m} \cdot \sqrt[5]{m^{-1}}}$;

6) $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{m^5}} \cdot \sqrt[6]{m^{18}}}{m^2 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{m^{-12}}}} < \dfrac{\sqrt[9]{\sqrt[3]{\frac{1}{m^{-3}}} \cdot \sqrt{m^7}}}{\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[6]{m^{-5}}}$.

1.11. Ступенная функцыя (паказчык дадатны)

У папярэдніх класах мы вывучалі функцыі $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Кожная з іх з’яўляецца прыватным выпадкам функцыі

$$y = x^r,$$

дзе $r > 0$ — лік.

Такая функцыя называецца ***ступеннай***.

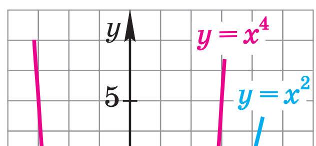
Разгледзім ступенныя функцыі з рознымі дадатнымі паказчыкамі.

1. Функцыя $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in N$

Натуральны абсяг вызначэння выразу x^{2k} — мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў. Яно і з’яўляецца абсягам вызначэння функцыі

$$y = x^r, \text{ дзе } r = 2k,\ k \in \boldsymbol{N}.$$

Назавём уласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$. Яны тыя ж, што і ў функцыі $y = x^2$, і ўстанаўліваюцца гэтак жа, як уласцівасці гэтай функцыі. Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^2$ і $y = x^4$ паказаны на рысунку 3.



Рыс. 3

Т э а р э м а (*аб уласцівасцях функцыі* $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з’яўляецца мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з’яўляецца прамежак $[0; +\infty)$.

3. Значэнне функцыі, роўнае нулю ($y = 0$), з’яўляецца найменшым, а найбольшага значэння функцыя не мае.

4. Графік функцыі мае з восямі каардынат адзіны агульны пункт $(0; 0)$ — пачатак каардынат.

5. Значэнне аргумента, роўнае нулю ($x = 0$), з’яўляецца нулём функцыі.

6. Функцыя прымае дадатныя значэнні ($y > 0$) на мностве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, г. зн. усе пункты графіка, акрамя пачатку каардынат, ляжаць вышэй за вось Ox, у I і II каардынатных вуглах.

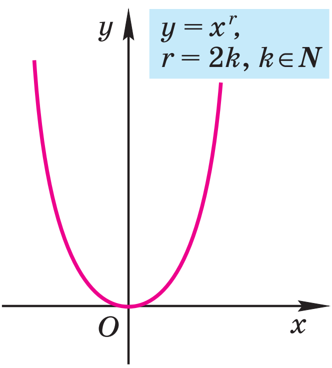
7. Функцыя цотная; графік функцыі сіметрычны адносна восі ардынат.

8. Функцыя спадальная на прамежку $(-\infty; 0]$ і нарастальная на прамежку $[0; +\infty)$.

9. Функцыя не з’яўляецца перыядычнай.

Пераканайцеся ў справядлівасці гэтых уласцівасцей, выкарыстаўшы схематычны відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$, на рысунку 4.

З а ў в а г а. Калі $r = 0$, то функцыя $y = x^r$ мае выгляд $y = x^0$.

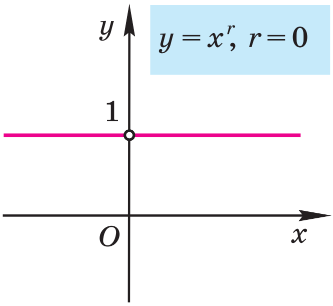


Рыс. 4

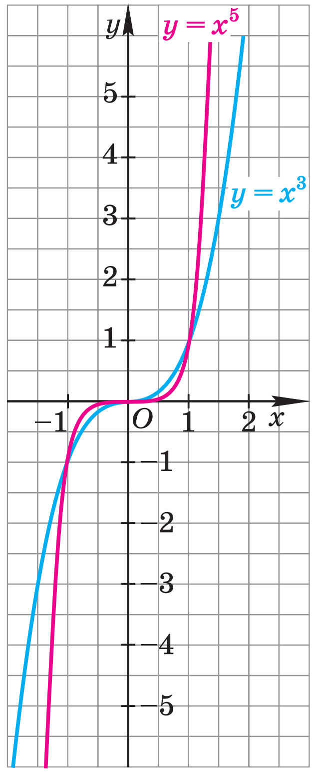
Натуральны абсяг вызначэння выразу x^0 — мноства $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, г. зн. усе значэнні зменнай x, акрамя нуля ($x \neq 0$). На гэтым абсягу вызначэння функцыя $y = x^0$ мае пастаяннае значэнне, роўнае 1. Відарыс графіка гэтай функцыі паказаны на рысунку 5.

2. Функцыя $y = x^r$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in N$

Натуральны абсяг вызначэння выразу x^{2k+1} — мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаіс-



Рыс. 5



Рыс. 6

ных лікаў. Гэта і будзе абсяг вызначэння функцыі

$$y = x^r,$$

дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Назавём уласцівасці гэтай функцыі. Яны тыя ж, што і ў функцыі $y = x^3$, і ўстанаўліваюцца аналагічна. Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^3$ і $y = x^5$ паказаны на рысунку 6.

Т э а р э м а (*аб уласцівасцях функцыі* $y = x^r$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў.

3. Функцыя найменшага і найбольшага значэнняў не мае.

4. Графік функцыі перасякае восі каардынат у адзіным пункце (0; 0) — пачатку каардынат.

5. Значэнне аргумента, роўнае нулю ($x = 0$), з'яўляецца нулём функцыі.

6. Функцыя прымае адмоўныя значэнні ($y < 0$) на прамежку $(-\infty; 0)$ і дадатныя значэнні ($y > 0$) на прамежку $(0; +\infty)$, г. зн. графік функцыі размешчаны ў I і III каардынатных вуглах.

7. Функцыя няцотная; графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат.

8. Функцыя нарастальная на абсягу вызначэння.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

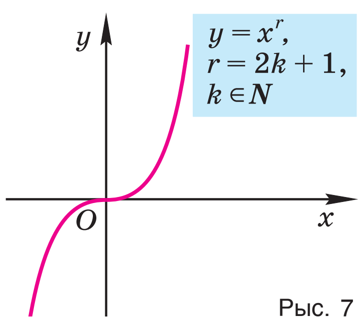
Пераканайцеся ў справядлівасці гэтых уласцівасцей, выкарыстаўшы схематычны відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, на рысунку 7.

Прыклад 1. Параўнаўшы схематычныя відарысы графікаў функцый $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$, і $y = x^r$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. рыс. 4, 7), запісаць, на якім з мностваў абедзве функцыі:

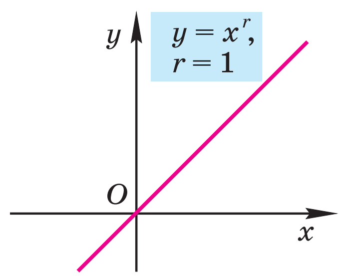
а) нарастаюць;
б) маюць значэнні розных знакаў;
в) спадаюць;
г) прымаюць неадмоўныя значэнні;
д) прымаюць дадатныя значэнні;
е) прымаюць роўныя значэнні.

Адказ: а) $[0; +\infty)$;
б) $(-\infty; 0)$;
в) няма такога прамежку;
г) $[0; +\infty)$;
д) $(0; +\infty)$;
е) $\{0; 1\}$.

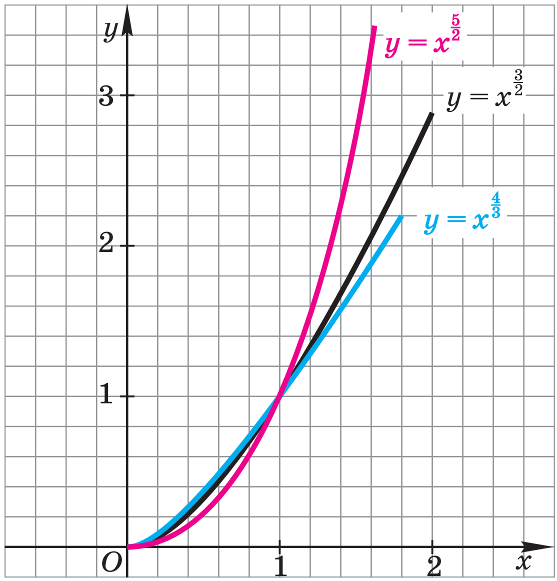
Заўвага. Калі $r = 1$, то функцыя $y = x^r$ супадае з функцыяй $y = x$, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 8.



Рыс. 7



Рыс. 8



Рыс. 9

3. Функцыя $y = x^r$, дзе r — рацыянальны няцэлы лік, большы за 1, г. зн. $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$

Абсяг вызначэння гэтай функцыі — прамежак $[0; +\infty)$, г. зн. гэтая функцыя разглядаецца толькі на мностве ўсіх неадмоўных рэчаісных лікаў.

Назавём уласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$. Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{2}}$ і $y = x^{\frac{5}{2}}$ паказаны на рысунку 9.

Тэарэма (*аб уласцівасцях функцыі* $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства $[0; +\infty)$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца мноства $[0; +\infty)$.

3. Значэнне функцыі, роўнае нулю ($y = 0$), з'яўляецца найменшым, а найбольшага значэння функцыя не мае.

4. Графік функцыі мае з восямі каардынат адзіны агульны пункт $(0; 0)$ — пачатак каардынат.

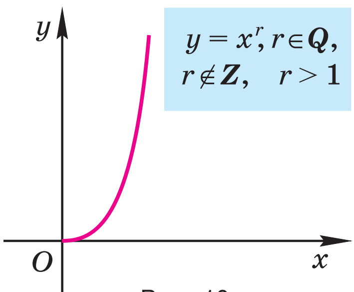
5. Значэнне аргумента, роўнае нулю ($x = 0$), з'яўляецца нулём функцыі.

6. Функцыя прымае дадатныя значэнні ($y > 0$) на прамежку $(0; +\infty)$, г. зн. графік функцыі размешчаны ў I каардынатным вугле.

7. Функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

8. Функцыя нарастальная на абсягу вызначэння.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.



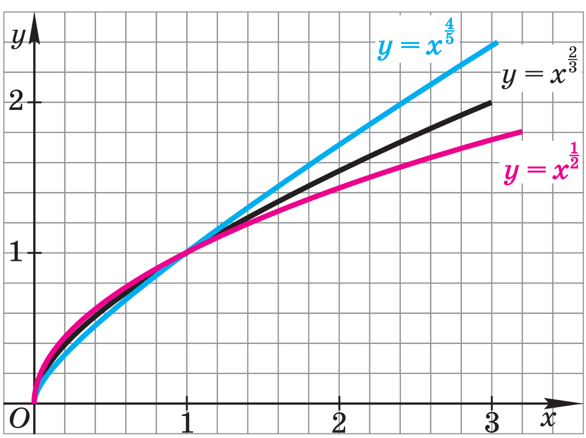
Рыс. 10

Пераканайцеся ў справядлівасці гэтых уласцівасцей, выкарыстаўшы схематычны відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$, на рысунку 10.

4. Функцыя $y = x^r$, дзе r — рацыянальны дадатны лік, меншы за 1, г. зн. $r \in \boldsymbol{Q}$, $0 < r < 1$

Абсяг вызначэння гэтай функцыі — прамежак $[0; +\infty)$, г. зн. гэтая функцыя разглядаецца толькі на мностве ўсіх неадмоўных рэчаісных лікаў.

Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{5}}$ паказаны на рысунку 11.

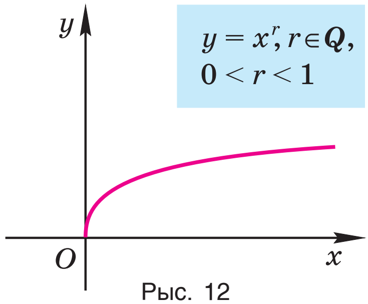


Рыс. 11

Уласцівасці функцыі

$$y = x^r,$$

дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $0 < r < 1$ тыя ж, што і ў функцыі $y = x^{\frac{1}{2}}$. (Сфармулюйце гэтыя ўласцівасці, выкарыстаўшы рысунак 12.)



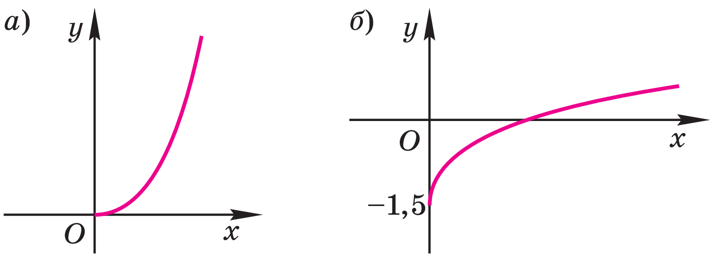
Рыс. 12

Падкрэслім, што функцыя $y = x^r$, дзе r — дадатны рацыянальны, але не натуральны лік, разглядаецца толькі на мностве ўсіх неадмоўных рэчаісных лікаў.

Прыклад 2. Паказаць (схематычна) відарыс графіка функцыі:

а) $y = x^{\frac{13}{4}}$; б) $y = x^{0,374} - 1,5$.

Рашэнне. а) На рысунку 13, *а* схематычна паказаны відарыс графіка функцыі $y = x^{\frac{13}{4}}$.



Рыс. 13

б) На рысунку 13, *б* схематычна паказаны відарыс графіка функцыі $y = x^{0,374} - 1,5$.

1. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$.
2. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.
3. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, калі:
   а) $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$; б) $0 < r < 1$.
4. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, калі:
   а) $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$; б) $0 < r < 1$.

5. Што можна сказаць аб асаблівасцях графіка:
а) цотнай функцыі;
б) няцотнай функцыі;
в) перыядычнай функцыі?

6. Што можна сказаць аб асаблівасцях абсягу вызначэння:
а) цотнай функцыі;
б) няцотнай функцыі;
в) перыядычнай функцыі?

Практыкаванні

1.189°. Ці з'яўляецца ступеннай функцыя:

1) $y = 3^x$; 2) $y = (\sin x)^x$; 3) $y = x^6$;
4) $y = (x+3)^2$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = \pi^{5,4}$;
7) $y = x^{\sin 0,5\pi}$; 8) $y = \left(\frac{2}{x}\right)^2$; 9) $y = \left(-\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{\pi}}$?

1.190°. Вядома, што $0 < r < 1$, $r \in \boldsymbol{Q}$. Параўнайце:

1) $0{,}13^r$ і $0{,}17^r$; 2) $0{,}23^r$ і $0{,}34^r$;
3) $2{,}78^r$ і $3{,}1^r$; 4) $4{,}52^r$ і $6{,}9^r$;
5) $\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)^r$ і $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^r$; 6) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^r$ і $\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^r$.

1.191°. Вядома, што $r > 1$, $r \in \boldsymbol{Q}$. Параўнайце:

1) $0{,}47^r$ і $0{,}51^r$; 2) $0{,}39^r$ і $0{,}42^r$;
3) $3{,}14^r$ і $4{,}73^r$; 4) $9{,}2^r$ і $11{,}38^r$;
5) $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^r$ і $(\operatorname{tg} 0)^r$; 6) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^r$ і $\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)^r$.

1.192. Знайдзіце значэнне функцыі $f(x)$ у пункце x_0:

1) $f(x) = 4x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 8$;

2) $f(x) = (16x)^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$;

3) $f(x) = \dfrac{(x^2)^{\frac{1}{5}}}{x^{-\frac{2}{5}}}$, $x_0 = 32$;

4) $f(x) = \dfrac{(x^5)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $x_0 = 4$;

5) $f(x)=\dfrac{(x^2)^{0,5}\cdot(x^3)^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[5]{x}}$, $x_0=3$;

6) $f(x)=\dfrac{(x^5)^{0,25}\cdot(x^3)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{x}}$, $x_0=2$.

1.193. Знайдзіце найбольшае цэлае значэнне x, што належыць абсягу вызначэння функцыі:

1) $f(x)=(4-x)^{\frac{9}{20}}$; 2) $f(x)=(12-x)^{\frac{15}{4}}$;

3) $f(x)=(40-x^2-3x)^{\frac{6}{23}}$; 4) $f(x)=(9x-x^2-14)^{\frac{12}{7}}$.

1.194. Запішыце натуральны абсяг вызначэння выразу:

1) $\left(\dfrac{x-2}{5-2x}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{7-3x}{2+x}\right)^7$;

3) $\left(\dfrac{9x+4}{12-5x}\right)^{\frac{15}{4}}$; 4) $\left(\dfrac{13x-6}{7x+21}\right)^{\frac{2}{23}}$;

5) $((9-x^2)(x+2))^{\frac{8}{5}}$; 6) $((4-x^2)(2x+8))^{\frac{4}{11}}$;

7) $\left(\dfrac{x+12-x^2}{x^2-9}\right)^{\frac{3}{29}}$; 8) $\left(\dfrac{4-3x-x^2}{x^2+4x}\right)^{\frac{33}{10}}$.

1.195°. Функцыя зададзена формулай $y=x^n$. Знайдзіце n, калі вядома, што графік функцыі праходзіць праз пункт:

1) $A(7;\ 49)$; 2) $B(13;\ 169)$; 3) $C(144;\ 12)$;
4) $D(81;\ 9)$; 5) $M(-64;\ -4)$; 6) $N(-216;\ -6)$;
7) $K(625;\ 5)$; 8) $P(1024;\ 4)$; 9) $T(-243;\ -3)$.

1.196°. Запішыце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

1) $y=x^9$; 2) $y=x^{2015}$; 3) $y=x^{\frac{13}{3}}$;
4) $y=x^{\frac{34}{11}}$; 5) $y=x^{\frac{9}{14}}$; 6) $y=x^{\frac{2}{7}}$.

1.197. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x)=-5x^{\frac{2}{3}}$ на прамежку:

1) $[0;\ 8]$; 2) $[1;\ 27]$;
3) $[0,001;\ 125]$; 4) $[0,008;\ 1000]$.

1.198. Запішыце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый:

1) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^{\frac{3}{4}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ і $y = x^{\frac{4}{7}}$;

3) $y = \sqrt[9]{x+1}$ і $y = (x+1)^{\frac{4}{9}}$; 4) $y = \sqrt[3]{x-2}$ і $y = x^{\frac{2}{3}}$.

1.199. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца няцотнай:

1) $f(x) = x^5 + x^7$; 2) $f(x) = x^9 - x^3$;

3) $f(x) = (x^3 - 3x)^{13}$; 4) $f(x) = (5x^{11} + 0{,}1x)^{99}$.

1.200. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца цотнай:

1) $f(x) = x^6 - 13x^{12}$; 2) $f(x) = 0{,}7x^4 + x^2$;

3) $f(x) = (x^{22} - 4)^{10}$; 4) $f(x) = (x^{66} + 8)^{100}$;

5) $f(x) = (|x| + x^2)^{0{,}25}$; 6) $f(x) = \left(\left|x^4 - 1\right| + x^8\right)^{8{,}25}$.

Пакажыце (схематычна) відарыс графіка функцыі (**1.201—1.205**).

1.201. 1) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = x^{0{,}3}$; 3) $y = x^4$;

4) $y = x^{100}$; 5) $y = x^{\frac{8}{5}}$; 6) $y = x^{\frac{5}{8}}$.

1.202. 1) $y = x^{\sin\frac{\pi}{3}}$; 2) $y = x^{\cos\frac{\pi}{4}}$; 3) $y = x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$;

4) $y = x^{\cos\frac{5\pi}{3}}$; 5) $y = x^{\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}}$; 6) $y = x^{\sin\frac{25\pi}{6}}$.

1.203. 1) $y = x^{\frac{2}{5}} + 2$; 2) $y = x^{\frac{1}{2}} - 1$; 3) $y = x^{\frac{15}{2}} - 3$;

4) $y = x^{1{,}2} + 1$; 5) $y = x^9 - 2$; 6) $y = x^{20} + 3$.

1.204. 1) $y = (x-1)^{\frac{19}{3}}$; 2) $y = (x+1)^{\frac{33}{7}}$; 3) $y = (x+2)^{17}$;

4) $y = (x-2)^{26}$; 5) $y = (x+3)^{\frac{5}{14}}$; 6) $y = (x-3)^{\frac{22}{23}}$.

1.205. 1) $y = (x+2)^{12} - 1$; 2) $y = (x-3)^{19} + 1$;

3) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + 2$; 4) $y = (x-2)^{\frac{9}{22}} - 2$;

5) $y = (x+3)^{\frac{29}{7}} - 3$; 6) $y = (x-1)^{\frac{35}{11}} + 3$.

1.206. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі ў кожным з практыкаванняў 1.201—1.205, запішыце для яе:

а) абсяг вызначэння;

б) мноства (абсяг) значэнняў;

в) пры якіх значэннях x значэнні y дадатныя (адмоўныя);

г) каардынаты пунктаў перасячэння графіка з восямі каардынат.

1.207*. Пакажыце (схематычна) відарыс графіка функцыі і назавіце для яе:

а) абсяг вызначэння;

б) мноства (абсяг) значэнняў;

в) прамежкі нарастання і спадання:

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^{\frac{3}{13}}$;

3) $y = |x|^{\frac{5}{4}}$; 4) $y = |x|^{\frac{18}{7}}$;

5) $y = |x-1|^{\frac{12}{17}}$; 6) $y = |x+1|^{\frac{24}{29}}$;

7) $y = |x+2|^{\frac{31}{3}}$; 8) $y = |x-2|^{\frac{34}{7}}$;

9) $y = |1-x|^{\frac{1}{10}} + 2$; 10) $y = |3-x|^{\frac{9}{20}} - 2$;

11) $y = |1+x|^{\frac{10}{7}} + 4$; 12) $y = |2+x|^{\frac{25}{9}} - 4$.

Рашыце ўраўненне (**1.208—1.210**).

1.208. 1) $x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{9}{5}} - 7x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + 12 = 0$;

2) $x^{\frac{9}{10}} \cdot x^{\frac{11}{10}} - 11x^{\frac{9}{10}} \cdot x^{\frac{1}{10}} + 30 = 0$;

3) $x^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{23}{12}} - 5\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{6}{5}} - 24 = 0$;

4) $x^{\frac{7}{13}} \cdot x^{\frac{19}{13}} + 4\left(x^{\frac{8}{7}}\right)^{\frac{7}{8}} - 5 = 0$;

5) $\left(x^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{7}{12}} \cdot x^{\frac{5}{12}} + 2 = 0$;

6) $\left(x^{\frac{4}{9}}\right)^{4,5} + 9x^{\frac{6}{17}} \cdot x^{\frac{11}{17}} + 18 = 0$.

1.209°. 1) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5$; 2) $x^{\frac{4}{7}} \cdot x^{\frac{3}{7}} = 4$;

3) $x^{\frac{5}{9}} \cdot x^{\frac{4}{9}} = 0$; 4) $x^{\frac{7}{11}} \cdot x^{\frac{4}{11}} = -3$;

5) $\left(x^{\frac{1}{19}}\right)^{57} = 27;$ 6) $\left(x^{\frac{1}{24}}\right)^{72} = 64;$

7) $\left(x^{\frac{1}{17}}\right)^{34} = 9;$ 8) $\left(x^{\frac{1}{21}}\right)^{42} = 100;$

9) $\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^{35} = 243;$ 10) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{18} = 512.$

1.210*. 1) $(x-3)^{\frac{1}{2}} = 4;$ 2) $(x+2)^{\frac{1}{3}} = 3;$

3) $(x-1)^{\frac{6}{5}} = -2;$ 4) $(x+4)^{\frac{7}{6}} = -4;$

5) $(x^2-2x+1)^{3,5} = 1;$ 6) $(x^2+6x+9)^{5,5} = 0;$

7) $(x^2-2x+3)^{0,9} = -1;$ 8) $(x^2-5x+6)^{9,7} = -2.$

1.211*. Рашыце няроўнасць:

1) $\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^{7} < 8;$ 2) $\left(x^{\frac{1}{13}}\right)^{13} < 9;$

3) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{5} \leqslant 9;$ 4) $\left(x^{\frac{2}{19}}\right)^{19} > 4;$

5) $\left(x^{\frac{3}{22}}\right)^{22} < 27;$ 6) $\left(x^{\frac{3}{34}}\right)^{34} \geqslant 64.$

1.12. Ступенная функцыя (паказчык адмоўны)

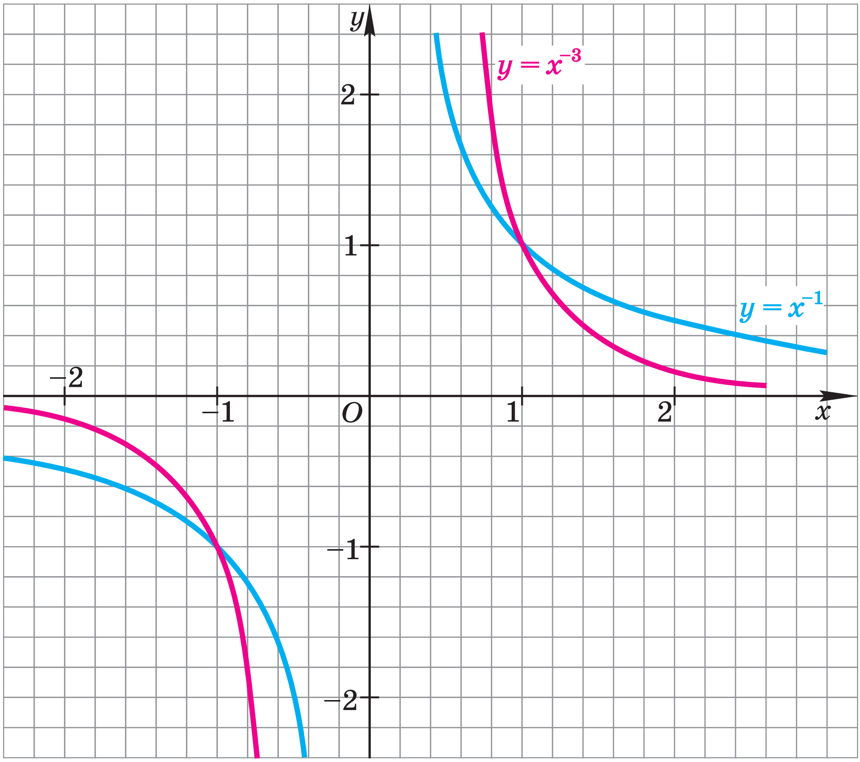
У папярэдніх класах мы вывучалі функцыю $y = \frac{1}{x}$ (або $y = x^{-1}$). Гэтая функцыя з’яўляецца прыватным выпадкам ступеннай функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Z}$, $r < 0$.

Разгледзім яшчэ некалькі выпадкаў ступеннай функцыі з адмоўным паказчыкам.

1. Функцыя $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in N$

Натуральны абсяг вызначэння выразу x^{-2k+1} — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя нуля, г. зн. $x \neq 0$. Інакш кажучы, абсягам вызначэння функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, будзе мноства $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Назавём уласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$. Яны тыя ж, што і ў функцыі $y = x^{-1}$, і ўстанаўліваюцца гэтак жа, як уласцівасці гэтай функцыі. Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^{-1}$ і $y = x^{-3}$ паказаны на рысунку 14.



Рыс. 14

Т э а р э м а (*аб уласцівасцях функцыі* $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя нуля, г. зн. $x \neq 0$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя нуля, г. зн. $y \neq 0$.

3. Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

4. Графік функцыі не перасякае каардынатныя восі.

5. Функцыя не мае нулёў.

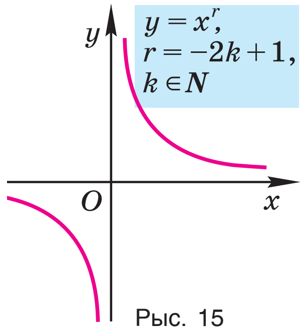
6. Функцыя прымае адмоўныя значэнні ($y < 0$) на прамежку $(-\infty; 0)$ і прымае дадатныя значэнні ($y > 0$) на прамежку $(0; +\infty)$, г. зн. графік функцыі размешчаны ў I і III каардынатных вуглах.

7. Функцыя няцотная; графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат.

8. Функцыя з'яўляецца спадальнай на прамежку $(-\infty; 0)$ і спадальнай на прамежку $(0; +\infty)$.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Пераканайцеся ў справядлівасці гэтых уласцівасцей, выкарыстаўшы схематычны відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, на рысунку 15.



Рыс. 15

! Заўважым, што сцверджанне: *функцыя* $y = x^r$, *дзе* $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, *спадае на ўсім абсягу вызначэння* — няправільнае (патлумачце чаму).

2. Функцыя $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in N$

Натуральны абсяг вызначэння выразу x^{-2k} — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя нуля, г. зн. $x \neq 0$. Інакш кажучы, абсягам вызначэння функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$, будзе мноства $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Назавём уласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$. Яны ўстанаўліваюцца гэтак жа, як уласцівасці функцыі $y = x^{-2}$, г. зн. $y = \frac{1}{x^2}$. Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^{-2}$ і $y = x^{-4}$ паказаны на рысунку 16.

Т э а р э м а (*аб уласцівасцях функцыі* $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя нуля, г. зн. $x \neq 0$.

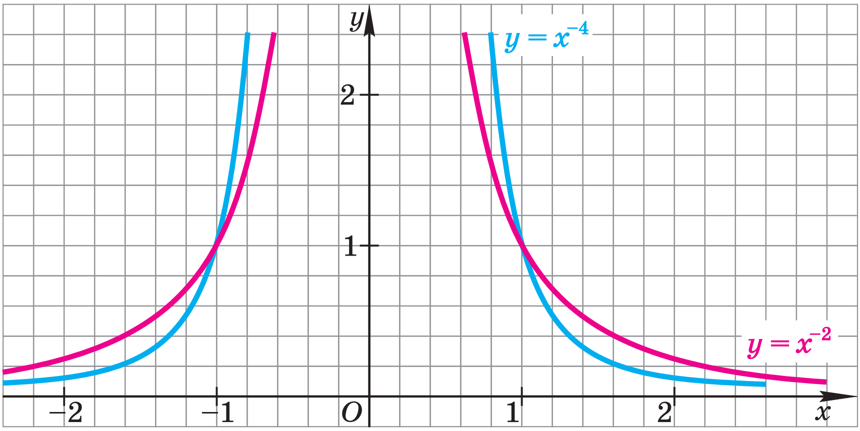
2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца прамежак $(0; +\infty)$.

3. Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

4. Графік функцыі не перасякае каардынатныя восі.

5. Функцыя не мае нулёў.

6. Функцыя прымае дадатныя значэнні $(y > 0)$ на ўсім абсягу вызначэння $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, г. зн. графік функцыі размешчаны ў I і II каардынатных вуглах.



Рыс. 16

7. Функцыя цотная; графік функцыі сіметрычны адносна восі ардынат.

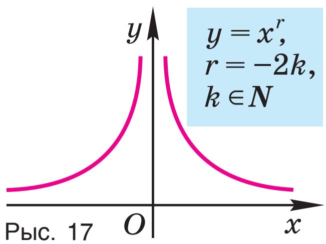
8. Функцыя нарастальная на прамежку $(-\infty; 0)$ і спадальная на прамежку $(0; +\infty)$.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Пераканайцеся ў справядлівасці гэтых уласцівасцей, выкарыстаўшы схематычны відарыс графіка функцыі

$$y = x^r, \text{ дзе } r = -2k,\ k \in \boldsymbol{N},$$

на рысунку 17.



Рыс. 17

Прыклад. Параўнаўшы відарысы графікаў функцый $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, і $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. рыс. 15, 17), назваць, на якім з мностваў абедзве функцыі:

а) нарастаюць;

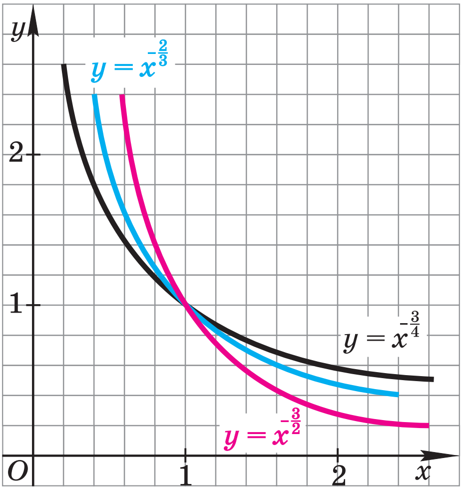
б) маюць значэнні розных знакаў;

в) спадаюць;

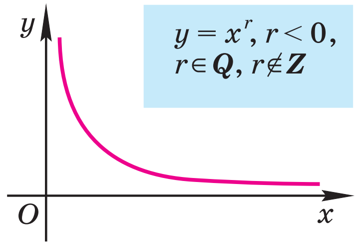
г) прымаюць дадатныя значэнні;

д) прымаюць роўныя значэнні.

Адказ: а) няма такіх прамежкаў; б) $(-\infty; 0)$; в) $(0; +\infty)$; г) $(0; +\infty)$; д) $\{1\}$.



Рыс. 18



Рыс. 19

3. Функцыя $y = x^r$, дзе r — адмоўны рацыянальны няцэлы лік, г. зн. $r < 0$, $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$

Абсяг вызначэння гэтай функцыі — прамежак $(0; +\infty)$, г. зн. гэтая функцыя разглядаецца толькі на мностве ўсіх дадатных рэчаісных лікаў.

Для параўнання відарысы графікаў функцый $y = x^{-\frac{2}{3}}$, $y = x^{-\frac{3}{4}}$ і $y = x^{-\frac{3}{2}}$ паказаны на рысунку 18.

Уласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r < 0$, $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, тыя ж, што і ўласцівасці функцыі $y = x^n$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$, $n < 0$, разглядаемай на прамежку $(0; +\infty)$. (Сфармулюйце гэтыя ўласцівасці, выкарыстаўшы рысунак 19.)

?

1. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.
2. Чаму нельга сцвярджаць, што функцыя $y = x^r$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$, спадае на ўсім абсягу вызначэння?
3. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$.
4. Сфармулюйце ўласцівасці функцыі $y = x^r$, дзе $r < 0$, $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$.
5. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі $y = x^r$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, калі:

   а) $r = -7$; б) $r = -8$;

   в) $r = -0{,}7$; г) $r = -5{,}4$.

Практыкаванні

1.212°. Вядома, што $r < 0$, $r \in \boldsymbol{Q}$. Параўнайце:

1) $0{,}15^r$ і $0{,}34^r$;
2) $0{,}17^r$ і $0{,}23^r$;
3) $3{,}1^r$ і $4{,}52^r$;
4) $2{,}78^r$ і $6{,}9^r$;
5) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^r$ і $(\sin^2 7^0 + \cos^2 7^0)^r$;
6) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{13}\right)^r$ і $\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^r$.

1.213°. Вядома, што $0 < x < 1$. Параўнайце:

1) x^{-2} і x^{-8};
2) x^{-4} і x^{-8};
3) $x^{-5,3}$ і $x^{-3,4}$;
4) $x^{-6,7}$ і $x^{-4,1}$;
5) $x^{-0,58}$ і $x^{-5,8}$;
6) $x^{-0,49}$ і $x^{-4,9}$;
7) $x^{-\frac{2}{3}}$ і $x^{-\frac{3}{2}}$;
8) $x^{-\frac{5}{4}}$ і $x^{-\frac{4}{5}}$.

1.214°. Вядома, што $x > 1$. Параўнайце:

1) x^{-3} і x^{-6};
2) x^{-12} і x^{-10};
3) $x^{-4,3}$ і $x^{-3,9}$;
4) $x^{-6,1}$ і $x^{-3,8}$;
5) $x^{-0,34}$ і $x^{-3,8}$;
6) $x^{-0,12}$ і $x^{-4,5}$;
7) $x^{-\frac{2}{7}}$ і $x^{-\frac{7}{2}}$;
8) $x^{-\frac{9}{4}}$ і $x^{-\frac{4}{9}}$.

1.215. Знайдзіце значэнне функцыі $f(x)$ у пункце x_0:

1) $f(x) = 32x^{-\frac{7}{2}}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = (64x)^{-\frac{5}{4}}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \dfrac{(x^2)^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}}$, $x_0 = 243$;

4) $f(x) = \dfrac{(x^7)^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}}$, $x_0 = 27$;

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^{-1}} \cdot (x^{-0,25})^2}{x^{-\frac{1}{6}}}$, $x_0 = 125$;

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^{-1}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^2}{x^{-\frac{2}{3}}}$, $x_0 = 64$.

1.216. Знайдзіце найменшае цэлае значэнне x, што належыць абсягу вызначэння функцыі:

1) $f(x) = (x+5)^{-\frac{7}{3}}$; 2) $f(x) = (x-7)^{-\frac{13}{10}}$;

3) $f(x) = (10x - x^2 - 9)^{-\frac{6}{23}}$; 4) $f(x) = (6x - x^2 + 7)^{-\frac{1}{8}}$.

1.217. Запішыце натуральны абсяг вызначэння выразу:

1) $(0{,}1x-4)^{-6}$;

2) $(2x+0{,}4)^{-13}$;

3) $\left(\frac{x(x-2)(x-6)}{21-3x}\right)^{-\frac{19}{4}}$;

4) $\left(\frac{x(x-2)(x-5)}{2x-16}\right)^{-\frac{2}{11}}$;

5) $((x^2+x-6)(x+2))^{-\frac{8}{21}}$;

6) $((x^2-4x+4)(2x-8))^{-\frac{4}{17}}$;

7) $\left(\frac{4x-3-x^2}{x}\right)^{-\frac{3}{14}}$;

8) $\left(\frac{10+3x-x^2}{x^2+x}\right)^{-\frac{21}{4}}$.

1.218°. Функцыя зададзена формулай $y = x^n$. Знайдзіце n, калі вядома, што графік функцыі праходзіць праз пункт:

1) $A(4;\ 0{,}5)$; 2) $B(16;\ 0{,}25)$; 3) $C\left(27;\ \frac{1}{9}\right)$;

4) $D\left(81;\ \frac{1}{9}\right)$; 5) $M\left(-64;\ -\frac{1}{4}\right)$; 6) $N\left(216;\ \frac{1}{6}\right)$;

7) $K\left(625;\ \frac{1}{5}\right)$; 8) $P\left(1024;\ \frac{1}{4}\right)$; 9) $T\left(243;\ \frac{1}{3}\right)$.

1.219°. Запішыце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

1) $y = x^{-7}$; 2) $y = x^{-24}$; 3) $y = x^{-\frac{17}{4}}$;

4) $y = x^{-\frac{30}{7}}$; 5) $y = x^{-\frac{1}{15}}$; 6) $y = x^{-\frac{18}{25}}$.

1.220. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = -x^{-\frac{3}{4}}$ на прамежку:

1) $[1;\ 16]$; 2) $[16;\ 81]$;

3) $[0{,}0016;\ 10\,000]$; 4) $[0{,}0081;\ 625]$.

1.221. Запішыце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый:

1) $y=\sqrt[4]{x^{-1}}$ і $y=x^{-\frac{3}{4}}$;

2) $y=\sqrt[7]{x^{-1}}$ і $y=x^{-\frac{4}{7}}$;

3) $y=\sqrt[9]{(x-1)^{-2}}$ і $y=(x+1)^{-\frac{4}{9}}$;

4) $y=\sqrt[3]{(x+3)^{-4}}$ і $y=x^{-\frac{2}{3}}$.

1.222. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца няцотнай:

1) $f(x)=x^{-9}+5x^{-13}$; 2) $f(x)=3x^{-19}-8x^{-3}$;
3) $f(x)=x^{-5}-6x^{-13}$; 4) $f(x)=6x^{-11}+0{,}3x^{-9}$.

1.223. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца цотнай:

1) $f(x)=1{,}5x^{-6}-2x^{-12}$;
2) $f(x)=12x^{-4}+8x^{-22}$;
3) $f(x)=(x^{-26}-9)^{-100}$;
4) $f(x)=(16x^{-6}+81)^{-10}$;
5) $f(x)=\left(|5x|+x^{-24}\right)^{0{,}45}$;
6) $f(x)=\left(\left|9x^{-4}-10\right|+x^{-18}\right)^{8{,}25}$.

Пакажыце (схематычна) відарыс графіка функцыі (**1.224—1.228**).

1.224. 1) $y=x^{-2}$; 2) $y=x^{-8}$; 3) $y=x^{-5}$;
4) $y=x^{-13}$; 5) $y=x^{-\frac{8}{5}}$; 6) $y=x^{-\frac{5}{8}}$.

1.225. 1) $y=x^{\sin\frac{\pi}{6}}$; 2) $y=x^{\cos\frac{4\pi}{3}}$; 3) $y=x^{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$;
4) $y=x^{\cos\frac{7\pi}{6}}$; 5) $y=x^{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}}$; 6) $y=x^{\sin\frac{13\pi}{2}}$.

1.226. 1) $y=x^{-9}-2$; 2) $y=x^{-27}+1$; 3) $y=x^{-20}+3$;
4) $y=x^{-12}-1$; 5) $y=x^{-0{,}9}+2$; 6) $y=x^{-2{,}5}-3$.

1.227*. 1) $y=(x+1)^{-\frac{25}{3}}$; 2) $y=(x-1)^{-\frac{22}{7}}$;
3) $y=(x-2)^{-11}$; 4) $y=(x+2)^{-31}$;
5) $y=(x-3)^{-14}$; 6) $y=(x+3)^{-24}$.

1.228*. 1) $y = (x-2)^{-102} + 1$; 2) $y = (x+3)^{-15} - 1$;

3) $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}} - 3$; 4) $y = (x+2)^{-\frac{9}{2}} + 3$;

5) $y = (x-3)^{-\frac{2}{7}} - 2$; 6) $y = (x-1)^{-\frac{5}{7}} + 2$.

1.229*. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі ў кожным з практыкаванняў 1.224—1.228, запішыце для яе:

а) абсяг вызначэння;
б) мноства (абсяг) значэнняў;
в) пры якіх значэннях x значэнні y дадатныя (адмоўныя);
г) каардынаты пунктаў перасячэння графіка з восямі каардынат.

1.230*. Пакажыце (схематычна) відарыс графіка функцыі і запішыце для яе:

а) абсяг вызначэння;
б) мноства (абсяг) значэнняў;
в) прамежкі нарастання і спадання:

1) $y = |x|^{-\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^{-\frac{3}{19}}$;

3) $y = |x|^{-3}$; 4) $y = |x|^{-23}$;

5) $y = |x-1|^{-12}$; 6) $y = |x+1|^{-62}$;

7) $y = |x+2|^{-\frac{25}{3}}$; 8) $y = |x-2|^{-\frac{21}{5}}$;

9) $y = |1-x|^{-\frac{7}{10}} + 2$; 10) $y = |3-x|^{-\frac{17}{20}} - 2$;

11) $y = |1+x|^{-\frac{1}{23}} + 4$; 12) $y = |2+x|^{-\frac{14}{9}} - 4$.

1.231*. Рашыце ўраўненне:

1) $x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 9$; 2) $x^{-\frac{4}{7}} \cdot x^{-\frac{3}{7}} = -12$;

3) $x^{-\frac{5}{9}} \cdot x^{-\frac{13}{9}} = 4$; 4) $x^{-\frac{7}{11}} \cdot x^{-\frac{15}{11}} = 25$;

5) $\left(x^{-\frac{1}{19}}\right)^{57} = -27$; 6) $\left(x^{\frac{1}{15}}\right)^{-45} = -\frac{1}{125}$;

7) $\left(x^{-\frac{1}{22}}\right)^{88} = \frac{1}{81}$; 8) $\left(x^{-\frac{1}{21}}\right)^{105} = -32$;

9) $\left(x^{\frac{1}{9}}\right)^{72} = 256$.

1.232*. Рашыце няроўнасць:

1) $\left(x^{-\frac{1}{5}}\right)^5 < 10;$ 2) $\left(x^{-\frac{1}{12}}\right)^{12} < 5;$ 3) $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^3 > 9;$

4) $\left(x^{-\frac{2}{7}}\right)^7 > 25;$ 5) $\left(x^{-\frac{3}{16}}\right)^{16} < 125;$ 6) $\left(x^{-\frac{1}{14}}\right)^{14} > 27.$

1.13. Ірацыянальныя ўраўненні

У гэтым пункце мы будзем разглядаць ураўненні, што змяшчаюць зменную (невядомае) пад знакам кораня (радыкала), — такія ўраўненні называюць ***ірацыянальнымі***.

Напомнім на прыкладах два з магчымых падыходаў да рашэння ірацыянальных ураўненняў (іншыя падыходы будуць разгледжаны ў п. 1.14).

Першы падыход заключаецца ***ў замене зыходнага ўраўнення раўназначным яму ўраўненнем (сістэмай або сукупнасцю ўраўненняў і няроўнасцей)***. Паколькі ўсе раўназначныя ўраўненні маюць адны і тыя ж рашэнні, то пры гэтым падыходзе праверка атрыманых значэнняў зменнай па ўмове зыходнага ўраўнення не з'яўляецца неабходнай часткай рашэння.

Напрыклад, пры рашэнні ірацыянальных ураўненняў часта карыстаюцца наступнымі сцверджаннямі аб раўназначнасці:

1) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$

2) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

(замест няроўнасці $f(x) \geqslant 0$ можна запісаць $g(x) \geqslant 0$).

Другі падыход заключаецца ***ў замене зыходнага ўраўнення яго вынікам***. Паколькі рашэнняў ва ўраўненні-выніку (сістэме або сукупнасці) можа быць больш, чым у зыходным ураўненні, то ***неабходнай часткай працэсу рашэння з'яўляецца праверка атрыманых значэнняў зменнай па ўмове зыходнага ўраўнення***.

Пераход да выніку з дадзенага ўраўнення пры афармленні запісу рашэння можна абазначаць сімвалам «$\Rightarrow$».

Прыклад 1. Рашыць ураўненне:

а) $\sqrt[4]{x^4 + x^2 - x - 6} = x;$ б) $\sqrt[3]{x^2 - x^3 - x - 6} = -x.$

Рашэнне. *Спосаб* 1 (*захаванне раўназначнасці*).

а) $\sqrt[4]{x^4+x^2-x-6}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^4+x^2-x-6=x^4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ (x=-2 \text{ або } x=3) \end{cases} \Leftrightarrow \ x=3.$

б) $\sqrt[3]{x^2-x^3-x-6}=-x \Leftrightarrow x^2-x^3-x-6=-x^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=-2 \text{ або } x=3).$

Адказ: а) 3; б) –2; 3.

Для ўраўнення а) пакажам рашэнне *спосабам* 2 (*выкарыстанне ўраўнення-выніку*):

$$\sqrt[4]{x^4+x^2-x-6}=x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4+x^2-x-6=x^4 \Leftrightarrow (x=-2 \text{ або } x=3).$$

Праверка: пры $x=-2$ атрымаем $\sqrt[4]{16+4+2-6}=-2$, г. зн. $\sqrt[4]{16}=-2$, — няправільную лікавую роўнасць, таму лік –2 не з'яўляецца коранем ураўнення а);

пры $x=3$ атрымаем $\sqrt[4]{81+9-3-6}=3$, г. зн. $\sqrt[4]{81}=3$, — правільную лікавую роўнасць, таму лік 3 — корань ураўнення а).

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-1}=1$.

Рашэнне. *Спосаб* 1 (*захаванне раўназначнасці*).

$$\sqrt{6-x}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x} \Leftrightarrow$$

пры любых дапушчальных значэннях x абедзве часткі ўраўнення неадмоўныя, таму ўзвёўшы іх у квадрат, атрымаем раўназначнае ўраўненне

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{6-x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=(3-x)^2, \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x=2 \text{ або } x=5), \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Адказ: 2.

Спосаб 2 (*выкарыстанне ўраўнення-выніку*).

$$\sqrt{6-x}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x} \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x-1}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{6-x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3-x \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=(3-x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1=9+x^2-6x \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ або } x=5).$$

Праверка: $x=2$ задавальняе зыходнае ўраўненне, а $x=5$ не задавальняе (пераканайцеся ў гэтым).

Прыклад 3. Рашыць ураўненне $\sqrt[6]{x^2-x-2}\cdot\sqrt[3]{x^2-5x}=0$.

Рашэнне. *Спосаб* 1 (*захаванне раўназначнасці*).

$$\sqrt[6]{x^2-x-2}\cdot\sqrt[3]{x^2-5x}=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2=0 \text{ або } \begin{cases} x^2-5x=0, \\ x^2-x-2\geqslant 0 \end{cases}\right).$$

Рашыўшы гэтае ўраўненне і сістэму, атрымаем $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$.

Адказ: –1; 2; 5.

Спосаб 2 (*выкарыстанне ўраўнення-выніку*).

$$\sqrt[6]{x^2-x-2}\cdot\sqrt[3]{x^2-5x}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-x-2=0 \text{ або } x^2-5x=0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=-1 \text{ або } x=2 \text{ або } x=0 \text{ або } x=5).$$

Праверка па ўмове зыходнага ўраўнення паказвае, што 0 не з'яўляецца яго коранем, паколькі пры $x=0$ выраз $\sqrt[6]{x^2-x-2}$ роўны $\sqrt[6]{-2}$ і не мае сэнсу. А лікі –1; 2; 5 з'яўляюцца каранямі ўраўнення, што зададзена ва ўмове.

▲ **Прыклад 4.** Рашыць ураўненне з невядомым x:

$$\sqrt{a-x}=a-x.$$

Рашэнне. Маем (патлумачце чаму):

$$\sqrt{a-x}=a-x \Leftrightarrow a-x=(a-x)^2 \Leftrightarrow (x=a \text{ або } x=a-1).$$

Адказ: пры любым значэнні a маем $x_1=a-1$, $x_2=a$.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне $\sqrt{x}=ax$ адносна x.

Р а ш э н н е. Відавочна, што $x = 0$ — корань ураўнення $\sqrt{x} = ax$ пры любым значэнні a.

Пры $x > 0$ ураўненне $\sqrt{x} = ax$ раўназначна ўраўненню $a\sqrt{x} = 1$. Калі $a \leqslant 0$, то гэтае ўраўненне рашэнняў не мае, а калі $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$.

А д к а з: калі $a \leqslant 0$, то $x = 0$; калі $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{a^2}$. ▲

?

1. Што значыць рашыць ураўненне з адной зменнай?
2. Якія ўраўненні называюцца раўназначнымі?
3. Якое ўраўненне называецца вынікам дадзенага ўраўнення?

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (**1.233—1.246**).

1.233°. 1) $\sqrt{12 - x} + 5 = 0$; 2) $\sqrt{6 + x} + 1 = 0$;
3) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = 0$; 4) $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{x + 4} = 0$;
5) $\sqrt{x^2 + 4} = -1$; 6) $\sqrt{x^4 + 25} = -4$;
7) $\sqrt[4]{15 + 6x} = -6$; 8) $\sqrt[6]{21 - 3x} = -4$.

1.234°. 1) $\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 5x - 14} = x$;
2) $\sqrt[4]{x^4 + x^2 - 4x - 12} = x$;
3) $\sqrt[3]{-x^3 + x^2 + 8x - 9} = -x$;
4) $\sqrt[3]{-x^3 + x^2 + 2x - 15} = -x$;
5) $\sqrt[5]{-32x^5 - x^2 - 2x + 24} = -2x$;
6) $\sqrt[5]{-243x^5 - x^2 + 5x + 24} = -3x$.

1.235°. 1) $\sqrt{5 + 2x} = 3$; 2) $\sqrt{3x + 7} = 4$;
3) $\sqrt{x^2 + 19} = 10$; 4) $\sqrt{61 - x^2} = 5$;
5) $\sqrt[3]{6x + 1} = -5$; 6) $\sqrt[3]{x - 3} = -2$;
7) $\sqrt[5]{x^3 - 32} = 2$; 8) $\sqrt[4]{x^3 - 44} = 3$.

1.236°. 1) $\sqrt{4x^2 + 5x + 4} = 2$; 2) $\sqrt{11 - 5x^2 + 3x} = 3$;
3) $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$; 4) $\sqrt[3]{x^2 + 14x - 16} = -4$.

1.237. 1) $\sqrt{11-\sqrt[3]{x+7}}=3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$;

3) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x^2+5}}=3$; 4) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$;

5) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2+4x+6}}=2$; 6) $\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{x^2+14x-16}}=1$.

1.238. 1) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+19}$;

3) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x^2-5x+1}$; 4) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-4x+5}$;

5) $\sqrt[8]{x^2-36}=\sqrt[8]{2x-1}$; 6) $\sqrt[10]{x^2-16}=\sqrt[10]{8-5x}$.

1.239. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{x+6}=x$;

3) $\sqrt{x+6}=-x$; 4) $\sqrt{x+2}=-x$;

5) $\sqrt{7-x}=x-1$; 6) $\sqrt{5x+1}=1-x$;

7) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 8) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

1.240. 1) $\sqrt{x^2-x-14}=x+2$;

2) $\sqrt{4x^2+7x+2}=2x-1$;

3) $\sqrt[3]{x^3-9x^2+28x-27}=x-3$;

4) $\sqrt[3]{x^3+6x^2-4x+8}=x+2$.

1.241. 1) $\sqrt{x^2+\sqrt{x+2}}=x+1$;

2) $\sqrt{x^2+\sqrt{5x+19}}=x+3$;

3) $\sqrt[3]{x^3-6x^2+4\sqrt{x+14}}=x-2$;

4) $\sqrt[3]{x^3+3x^2-\sqrt{5-10x}}=x+1$.

1.242. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$; 2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

3) $3\sqrt{x}+\sqrt{11x-2}=6$; 4) $2\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}=2$;

5) $\sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}+3$; 6) $\sqrt{x-13}=\sqrt{8+x}-3$.

1.243. 1) $(x^2+5x)\sqrt{x-3}=0$;

2) $(x^2+x)\sqrt{x-1}=0$;

3) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$;

4) $(x^2-16)\sqrt{2-x}=0$;

5) $(x^2-11x+24)\sqrt{x^2-7x+10}=0$;

6) $(x^2-2x-3)\sqrt{x^2+x-6}=0$.

1.244. 1) $\sqrt[4]{x^2-x-12}\cdot\sqrt[9]{x^2+2x}=0$;

2) $\sqrt[8]{x^2-7x-18}\cdot\sqrt[12]{3x^2+18x}=0$;

3) $\sqrt[6]{14-x^2-5x}\cdot\sqrt[9]{x^2-2x+1}=0$;

4) $\sqrt[4]{40-x^2-3x}\cdot\sqrt[13]{x^2-4x+16}=0$;

5) $\sqrt[3]{x^2-6x+8}\cdot\sqrt[4]{x^2+6x-27}=0$;

6) $\sqrt[5]{x^2-x-12}\cdot\sqrt[20]{x^2-25}=0$.

1.245. 1) $(x+1)\sqrt{x^2-6x+17}=3x+3$;

2) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$;

3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$;

4) $(x+2)\sqrt{x^2+2x-6}=3x+6$.

1.246. 1) $\sqrt{x}-3=2\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;

3) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; 4) $9-8\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=0$;

5) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=18$; 6) $2\sqrt[8]{x}=3-\sqrt[4]{x}$.

1.247*. Пры якіх значэннях a мае адзінае рашэнне ўраўненне:

1) $\sqrt{x+a}=\sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{a-x}=\sqrt{7+2x}$;

3) $\sqrt{x+4}=a-2$; 4) $\sqrt{8-x}=a+1$;

5) $\sqrt{x-a}=1-x$; 6) $\sqrt{a-x}=1+x$;

7) $\frac{a}{\sqrt{x}+2}=2-\sqrt{x}$; 8) $\frac{a}{\sqrt{x}-5}=5+\sqrt{x}$?

1.248*. Рашыце ўраўненне з невядомым x:

1) $\sqrt{x-4}=a$; 2) $\sqrt{x+1}=-a$;

3) $a\sqrt{x+2}=0$; 4) $(x-a)\sqrt{x-3}=0$;

5) $(x+1)\sqrt{x-a}=0$; 6) $\sqrt{x}\sqrt{x-a}=0$;

7) $\frac{x-a}{\sqrt{x-2}}=0$; 8) $\frac{x-2}{\sqrt{x+a}}=0$.

1.14. Рашэнне ірацыянальных ураўненняў з выкарыстаннем уласцівасцей функцый

Удакладнім азначэнне ўраўнення з адной зменнай, дадзенае ў папярэдніх классах.

Няхай f і g — функцыі ад зменнай x, D — мноства ўсіх значэнняў зменнай x, пры якіх вызначаны абедзве гэтыя функцыі. Роўнасць

$$f(x) = g(x)$$

называецца ***ўраўненнем са зменнай x***, а мноства D — ***абсягам вызначэння*** гэтага ўраўнення (або *абсягам дапушчальных значэнняў зменнай*).

Зменную ва ўраўненні называюць таксама ***невядомым***.

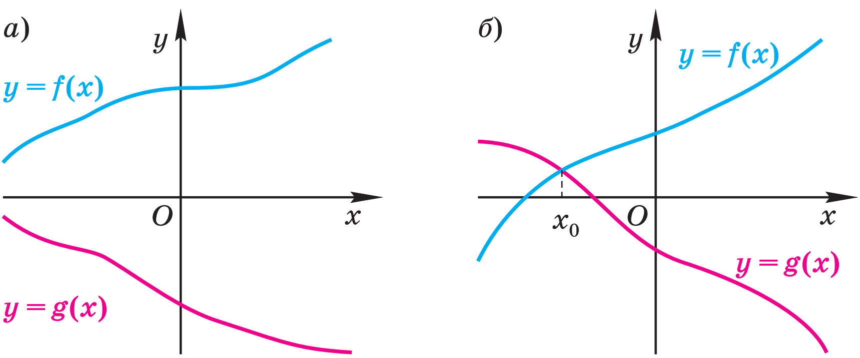
Коранем або ***рашэннем*** ураўнення $f(x) = g(x)$ называецца такі лік $c \in D$, пры якім $f(c) = g(c)$ — правільная лікавая роўнасць.

Тэарэма. Ураўненне

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

дзе f — нарастальная і g — спадальная функцыі, вызначаныя на адным і тым жа мностве, мае не больш за адзін корань, г. зн. або зусім не мае каранёў, або мае адзіны корань.

(Сапраўды, на рысунку 20, *а*, *б* бачна, што графікі нарастальнай функцыі f і спадальнай функцыі g перасякаюцца на абсягу вызначэння не больш чым у адным пункце.)



Рыс. 20

▲ Д о к а з. Няхай x_0 — корань ураўнення (1), г. зн.

$f(x_0) = g(x_0)$ — правільная лікавая роўнасць.

Калі $x < x_0$, то па азначэнні нарастальнай і спадальнай функцый маем

$$f(x) < f(x_0), \qquad g(x_0) < g(x).$$

Такім чынам, $f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x)$, г. зн. $f(x) < g(x)$. Значыць, ніякі лік $x < x_0$ коранем ураўнення (1) не з'яўляецца. Аналагічна даказваецца, што і ніякі лік $x > x_0$ не з'яўляецца коранем ураўнення (1).☒ ▲

З а ў в а г а. Гэтая тэарэма справядлівая і тады, калі адна функцыя нарастальная (спадальная), а другая пастаянная.

Прывядзём некалькі прыкладаў, дзе пры рашэнні ірацыянальных ураўненняў выкарыстоўваюцца ўласцівасці нарастання і спадання функцый.

П р ы к л а д 1. Рашыць ураўненне $\sqrt{2x-1} = 4 - 3x$.

Р а ш э н н е. *Спосаб* 1. Падборам знаходзім, што $x = 1$ з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення. Сапраўды, $\sqrt{2\cdot1-1} = 4 - 3\cdot1$ — правільная лікавая роўнасць.

Паколькі функцыя $f(x) = \sqrt{2x-1}$ нарастальная, а функцыя $g(x) = 4 - 3x$ спадальная, то згодна з тэарэмай $x = 1$ — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

А д к а з: 1.

Спосаб 2. Магчыма і іншае рашэнне:

$$\sqrt{2x-1} = 4 - 3x \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + 3x = 4.$$

Паколькі функцыя $h(x) = \sqrt{2x-1} + 3x$ нарастальная, то (гл. заўвагу) ураўненне $h(x) = 4$ мае не больш за адно рашэнне. Падборам знаходзім корань $x = 1$.

П р ы к л а д 2. Рашыць ураўненне $\sqrt[10]{9-4x} = \sqrt[7]{2x-3}$.

Р а ш э н н е. Падборам знаходзім, што лік 2 — корань дадзенага ўраўнення, паколькі $\sqrt[10]{9-4\cdot2} = \sqrt[7]{2\cdot2-3}$, г. зн. $1 = 1$ — правільная лікавая роўнасць. Іншых каранёў ураўненне не мае, паколькі функцыя $f(x) = \sqrt[10]{9-4x}$ з'яўляецца спадальнай, а функцыя $g(x) = \sqrt[7]{2x-3}$ — нарастальнай.

А д к а з: 2.

▲ Часам пры рашэнні ірацыянальных (і іншых) ураўненняў бывае карысна спачатку знайсці абсяг вызначэння ўраўнення.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне:

а) $(x+7)\sqrt{x+5} = (5-2x)(x+7);$ (2)

б) $(x+7)\sqrt{5-x} = (9-2x)(x+7).$ (3)

Рашэнне. а) Значэнне $x=-7$ не належыць абсягу вызначэння ўраўнення (2), паколькі пры гэтым значэнні выраз $\sqrt{x+5}$ не мае сэнсу. Таму $x+7\neq 0$, і ўраўненне (2) раўназначна ўраўненню

$$\sqrt{x+5} = 5-2x. \tag{4}$$

Рэшым гэтае ўраўненне, перайшоўшы да ўраўнення-выніку:

$$x+5=(5-2x)^2,$$

$$x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = 4.$$

Праверка паказвае, што коранем ураўнення (4) (а значыць, і ўраўнення (2)) з'яўляецца значэнне $x = \frac{5}{4}$.

б) Відавочна, што $x=-7$ ператварае ўраўненне (3) у правільную лікавую роўнасць і належыць абсягу вызначэння ўраўнення (3) — мноству $D=(-\infty;\ 5]$. Значыць, $x=-7$ — корань ураўнення (3).

Пры $x\neq -7$ ураўненне (3) раўназначна ўраўненню

$$\sqrt{5-x} = 9-2x. \tag{5}$$

Рашыўшы яго, атрымаем:

$$\sqrt{5-x} = 9-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x=(9-2x)^2, \\ 9-2x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x=4 \text{ або } x=4\frac{3}{4}\right), \\ x\leqslant 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Адказ: а) 1,25; б) –7; 4.

Рашэнне ўраўнення (3) з дапамогай знакаў раўназначнасці можна запісаць так:

$$(x+7)\sqrt{5-x} = (9-2x)(x+7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+7=0, \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases} \text{або } \sqrt{5-x} = 9-2x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=-7, \\ x \leqslant 5 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 5-x=(9-2x)^2, \\ 9-2x \geqslant 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=-7 \text{ або } \begin{cases} \left(x=4 \text{ або } x=4\frac{3}{4}\right), \\ x \leqslant 4{,}5 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=-7 \text{ або } x=4).$$

Прыклад 4. Рашыць ураўненне:

а) $1-\sqrt{x^2-16} = \sqrt[6]{8x-2x^2} + 3x$;

б) $12+\sqrt[4]{x^2-16} = \sqrt[10]{8x-2x^2} + 3x$.

Рашэнне. а) Паколькі функцыя $f(x)=1-\sqrt{x^2-16}$ вызначана для значэнняў x, што задавальняюць няроўнасць $x^2-16 \geqslant 0$, а функцыя $g(x)=\sqrt[6]{8x-2x^2}+3x$ вызначана для значэнняў x, што задавальняюць няроўнасць $8x-2x^2 \geqslant 0$, то абсяг вызначэння дадзенага ўраўнення супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей

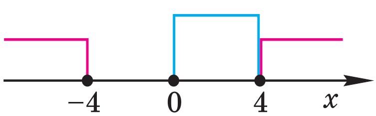
$$\begin{cases} x^2-16 \geqslant 0, \\ 8x-2x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Рашаючы гэтую сістэму, атрымліваем раўназначную ёй сістэму:

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 16, \\ 2x(x-4) \leqslant 0, \end{cases}$$

адкуль маем

$$\begin{cases} (x \leqslant -4 \text{ або } x \geqslant 4), \\ 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$



Рыс. 21

На рысунку 21 бачна, што рашэннем гэтай сістэмы з'яўляецца толькі значэнне $x=4$. Значыць, абсяг вызначэння ўраўнення складаецца з адзінага ліку 4, г. зн. $D=\{4\}$.

Засталося праверыць, ці з'яўляецца лік 4 коранем дадзенага ўраўнення. Падставіўшы $x = 4$ у зыходнае ўраўненне, атрымаем

$$1 - \sqrt{4^2 - 16} = \sqrt[6]{8 \cdot 4 - 2 \cdot 16} + 3 \cdot 4,$$

г. зн. $1 = 12$ — няправільную лікавую роўнасць, таму 4 не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

б) Рашэнне гэтага прыкладу аналагічна рашэнню прыкладу а). Выканайце яго самастойна.

Адказ: а) няма каранёў; б) 4.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{x - 7} - \sqrt[4]{1 - 2x} = 3x - 8.$$

Рашэнне. Абсяг вызначэння дадзенага ўраўнення супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей:

$$\begin{cases} x - 7 \geqslant 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 7, \\ x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Паколькі сістэма не мае рашэнняў, то абсяг вызначэння не змяшчае ні аднаго ліку. Значыць, дадзенае ўраўненне не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

Часам пры рашэнні ўраўненняў бывае карысна звярнуць увагу на найбольшае або найменшае значэнні функцый, што ўваходзяць у іх.

Прыклад 6. Рашыць ураўненне

$$\sqrt{36 + \sqrt{4 - x^2}} = 11.$$

Рашэнне. Абсяг вызначэння ўраўнення супадае з мноствам рашэнняў няроўнасці $4 - x^2 \geqslant 0$, г. зн. $D = [-2;\ 2]$.

Відавочна, што функцыя $f(x) = \sqrt{36 + \sqrt{4 - x^2}}$ мае найбольшае значэнне $\sqrt{38}$ пры $x = 0$. Такім чынам, пры любых значэннях $x \in [-2;\ 2]$ будзе правільнай няроўнасць $f(x) \leqslant \sqrt{38}$, але $\sqrt{38} < 11$, таму дадзенае ва ўмове ўраўненне рашэнняў не мае.

Адказ: няма рашэнняў. ▲

1. Якое мноства D называюць абсягам вызначэння ўраўнення $f(x) = g(x)$?

2. У якім выпадку ўраўненне $f(x) = g(x)$ мае не больш за адзін корань?

3*. Ці правільна, што лік x_0 з'яўляецца коранем ураўнення $f(x) = g(x)$, вызначанага на мностве D, калі:

а) $x_0 \notin D$; б) $x_0 \in D$; в) $f(x_0) = g(x_0)$?

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (**1.249—1.257**).

1.249. 1) $\sqrt{3x+7} = 7 - x$; 2) $\sqrt{5+2x} = 5 - x$;

3) $\sqrt{x+1} = 11 - x$; 4) $\sqrt{x+3} = 17 - x$;

5) $\sqrt{2-x} = 4x - 3$; 6) $\sqrt{3-x} = 2x - 3$.

1.250*. 1) $\sqrt[10]{3x-5} = \sqrt[3]{17-8x}$;

2) $\sqrt[6]{9x-17} = \sqrt[5]{7-3x}$;

3) $\sqrt[4]{13-4x} = \sqrt[7]{4x-11}$;

4) $\sqrt[8]{5x-19} = \sqrt[11]{5-x}$;

5) $\sqrt[8]{3-x} = \sqrt[7]{-x^2+7x-12}$;

6) $\sqrt[4]{2x+3} = \sqrt[5]{-2x^2-7x-6}$;

7) $\sqrt[12]{x^2+3x-10} = \sqrt[7]{4-x^2}$;

8) $\sqrt[10]{x^2+2x-8} = \sqrt[13]{4-x^2}$.

1.251*. 1) $\sqrt[7]{2x^2-3x-77} \cdot \sqrt{x^3-x} = 0$;

2) $\sqrt[8]{3x^2-7x-20} \cdot \sqrt[3]{x^2-x-2} = 0$;

3) $\sqrt[9]{\sqrt{x+2}\,(x-4)} \cdot \sqrt[4]{x^4-27x} = 0$;

4) $\sqrt[11]{|x+4|\sqrt{x+5}} \cdot \sqrt[6]{x^6-32x} = 0$;

5) $\sqrt[5]{x^3-3x^2+3x-1} \cdot \sqrt[6]{x^2-2x-15} = 0$;

6) $\sqrt[13]{8x^3-36x^2+54x-27} \cdot \sqrt[10]{\sqrt{2-3x} \cdot (x+5)} = 0$.

1.252*. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=3-x$;

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=9-x$;

3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{7-x}$;

4) $\sqrt{7+3x}-\sqrt{5-4x}=1-2\sqrt{x+2}$.

1.253*. 1) $(x+4)\sqrt{2x-4}=(x+4)(x-1)$;

2) $(3x-36)\sqrt{7-x}=(x-1)(3x-36)$;

3) $(2x-30)\sqrt{8-x}=(4-2x)(x-15)$;

4) $(3x+18)\sqrt{x-3}=(x-9)(3x+18)$;

5) $(x-4)\sqrt{|x-2|+5}=(1-x)(x-4)$;

6) $(x+4)\sqrt{3-|x+3|}=(x+4)(x+2)$.

1.254*. 1) $(x+3)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\right)=2x+6$;

2) $(x-5)\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}\right)=3x-15$.

1.255*. 1) $5-\sqrt{x^2-25}=\sqrt[6]{15x-3x^2}+x$;

2) $8-\sqrt[8]{x^2-4}=\sqrt[4]{-2x-x^2}-4x$;

3) $\sqrt[8]{x^2-49}+x=\sqrt{7x-x^2}+7$;

4) $\sqrt{3x-x^2}-2x+6=\sqrt{x^2-9}$;

5) $-28-\sqrt[4]{49-x^2}=\sqrt[6]{-63-16x-x^2}+4x$;

6) $4-\sqrt{x^2-64}=\sqrt[6]{8+7x-x^2}+0{,}5x$.

1.256*. 1) $3-\sqrt[10]{|x+4|-6}=\sqrt[6]{3-|2x-1|}+1{,}5x$;

2) $5-\sqrt[6]{|x+2|-4}=\sqrt[10]{1-|x-1|}+2{,}5x$;

3) $8-\sqrt[4]{|2x-3|-5}=\sqrt[16]{|x-5|-1}+2x$;

4) $12-\sqrt[8]{8-|3x+1|}=\sqrt{6-|x+9|}-4x$.

1.257*. 1) $\sqrt[6]{x-4}+\sqrt[8]{3-x}=x+9$;

2) $\sqrt[10]{x-9}-\sqrt[8]{6-2x}=5x-2$;

3) $\sqrt{x-6}-\sqrt[6]{3x-x^2}=4x-16$;

4) $\sqrt[8]{5x-20}+\sqrt[4]{x-x^2}=6x+1$.

1.15. Ірацыянальныя няроўнасці

У гэтым пункце мы будзем разглядаць няроўнасці, якія змяшчаюць зменную (невядомае) пад знакам кораня. Такія няроўнасці называюцца ***ірацыянальнымі***.

Пры рашэнні ірацыянальных няроўнасцей часта выкарыстоўваюць падыход, які мы ўжо прымянялі пры рашэнні ірацыянальных ураўненняў. Яго сутнасць — замена зыходнай няроўнасці раўназначнай ёй няроўнасцю (сістэмай або сукупнасцю няроўнасцей).

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць:

а) $\sqrt[7]{2x-5} > -1$; б) $\sqrt[4]{3x+8} \geqslant -6$.

Рашэнне. а) З улікам уласцівасцей кораня няцотнай ступені атрымліваем:

$$\sqrt[7]{2x-5} > -1 \Leftrightarrow 2x-5 > (-1)^7 \Leftrightarrow x > 2.$$

б) Па азначэнні кораня цотнай ступені значэнні выразу $\sqrt[4]{3x+8}$ неадмоўныя пры ўсіх значэннях x, пры якіх гэты выраз мае сэнс, г. зн. калі значэнні падкарэннага выразу неадмоўныя. Такім чынам, маем:

$$\sqrt[4]{3x+8} \geqslant -6 \Leftrightarrow 3x+8 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2\frac{2}{3}.$$

Адказ: а) $(2; +\infty)$; б) $\left[-2\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць:

а) $\sqrt[10]{11-4x} \leqslant 0$; б) $\sqrt[6]{21-2x} \leqslant 1$.

Рашэнне. а) Па азначэнні кораня цотнай ступені значэнні выразу $\sqrt[10]{11-4x}$ адмоўнымі быць не могуць. Таму маем:

$$\sqrt[10]{11-4x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt[10]{11-4x} = 0 \Leftrightarrow 11-4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}.$$

б) Паколькі абедзве часткі няроўнасці $\sqrt[6]{21-2x} \leqslant 1$ неадмоўныя пры ўсіх значэннях x, пры якіх яго левая частка мае сэнс, то маем:

$$\sqrt[6]{21-2x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 21-2x \geqslant 0, \\ 21-2x \leqslant 1^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{21}{2}, \\ x \geqslant \frac{20}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 10 \leqslant x \leqslant 10{,}5.$$

Адказ: а) $x = 2\frac{3}{4}$; б) $[10; 10{,}5]$.

Пры рашэнні ірацыянальных няроўнасцей часта выкарыстоўваецца таксама метад інтэрвалаў.

Прыклад 3. Рашыць няроўнасць $\sqrt{2x+3} \leqslant 3-2x$.

Рашэнне. Абазначым $f(x)=\sqrt{2x+3}+2x-3$. Знойдзем абсяг вызначэння функцыі f:

$$2x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1{,}5.$$

Такім чынам, $D(f)=[-1{,}5;\ +\infty)$.

Знойдзем нулі функцыі f, г. зн. карані ўраўнення $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+2x-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=3-2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+3=(3-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow (x=0{,}5 \text{ або } x=3).$$

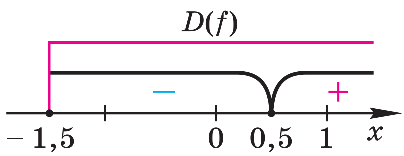
Праверка: $f(0{,}5)=\sqrt{2\cdot 0{,}5+3}+2\cdot 0{,}5-3=0;$

$$f(3)=\sqrt{2\cdot 3+3}+2\cdot 3-3=6.$$

Значыць, 0,5 — адзіны нуль функцыі f.

Адзначым нуль функцыі f на абсягу вызначэння $D(f)$ (рыс. 22). Вызначым знакі значэнняў функцыі f на атрыманых інтэрвалах, для чаго вылічым:

$$f(0)=\sqrt{3}-3<0;$$
$$f(1)=\sqrt{5}-1>0.$$



Рыс. 22

Выкарыстаўшы рысунак 22, запішам рашэнне няроўнасці $f(x)\leqslant 0$: $x\in[-1{,}5;\ 0{,}5]$.

Адказ: $[-1{,}5;\ 0{,}5]$

Прыклад 4. Рашыць няроўнасць $\sqrt{2x+3} > 3-2x$.

Рашэнне. Рашэнне гэтага прыкладу даслоўна паўтарае рашэнне прыкладу 3.

Выкарыстаўшы рысунак 22, запішам рашэнне няроўнасці $f(x)>0$: $x\in(0{,}5;\ +\infty)$.

Адказ: $(0{,}5;\ +\infty)$.

▲ Пры рашэнні ірацыянальных няроўнасцей часта выкарыстоўваюцца наступныя сцверджанні аб раўназначнасці няроўнасцей і сістэм няроўнасцей:

$$\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leqslant g^2(x),\\ f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \text{або} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \right). \qquad (2)$$

Рэшым прыклад 3, выкарыстаўшы раўназначнасць (1):

$$\sqrt{2x+3} \leqslant 3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \leqslant (3-2x)^2, \\ 2x+3 \geqslant 0, \\ 3-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+3 \geqslant 0, \\ x \geqslant -1{,}5, \\ x \leqslant 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-0{,}5)(x-3) \geqslant 0, \\ x \geqslant -1{,}5, \\ x \leqslant 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0{,}5 \text{ або } x \geqslant 3, \\ x \geqslant -1{,}5, \\ x \leqslant 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow -1{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}5.$$

Адказ: $[-1{,}5;\ 0{,}5]$.

Рэшым прыклад 4, выкарыстаўшы раўназначнасць (2):

$$\sqrt{2x+3} > 3-2x \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 3-2x \geqslant 0, \\ 2x+3 > (3-2x)^2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 3-2x < 0, \\ 2x+3 \geqslant 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ 2x^2-7x+3 < 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x > 1{,}5, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ 0{,}5 < x < 3 \end{cases} \text{або } x > 1{,}5 \right) \Leftrightarrow x > 0{,}5.$$

Адказ: $(0{,}5;\ +\infty)$.

Для рашэння заданняў такога тыпу, як, напрыклад, у практыкаванні 1.265, можна выкарыстоўваць наступныя сцверджанні аб раўназначнасці:

$$\sqrt{f(x)} \leqslant \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Аналагічныя сцверджанні можна запісаць і для няроўнасцей $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)}$. ▲

1. Якія няроўнасці называюцца ірацыянальнымі?

2. Апішыце падыходы да рашэння няроўнасцей выгляду:

а) $\sqrt[4]{f(x)} > 5$; б) $\sqrt[5]{f(x)} \leqslant 2$; в) $\sqrt[3]{f(x)} \leqslant -3$.

3*. Запішыце сцверджанні аб раўназначнасці для няроўнасцей:

а) $\sqrt{f(x)} < g(x)$; б) $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$;

в) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$; г) $\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)}$.

Практыкаванні

Рашыце няроўнасць (**1.258—1.266**).

1.258°. 1) $\sqrt{x-1} > 2$; 2) $\sqrt{x+2} > 3$;
3) $\sqrt{x-1} < 2$; 4) $\sqrt{x+2} < -3$;
5) $\sqrt{x-1} > -2$; 6) $\sqrt{x+2} > -3$;
7) $\sqrt{x-1} < -2$; 8) $\sqrt{x+2} < 3$.

1.259°. 1) $\sqrt{x^2-9} \leqslant -1$; 2) $\sqrt{x^4-16} < -5$;
3) $\sqrt{x^2-8} \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x^4-32} \leqslant 0$;
5) $\sqrt{x^2} > 0$; 6) $\sqrt{x^2} < 0$;
7) $\sqrt{x^2} < 4$; 8) $\sqrt{x^2} > 9$;
9) $\sqrt{x^2} \geqslant 0$; 10) $\sqrt{x^2} \leqslant 0$.

1.260°. 1) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$; 2) $\sqrt{x^2-5x+4} < 2$;
3) $\sqrt{11+6x-5x^2} > -1$; 4) $\sqrt{-x^2-3x+4} > -2$.

1.261°. 1) $\sqrt{2-\sqrt{x}} > 1$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{x}} > 2$;
3) $\sqrt{4+\sqrt{x}} < 3$; 4) $\sqrt{6+\sqrt{x}} < 1$.

1.262. 1) $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} < 0$; 2) $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1} > 0$; 3) $\frac{4+\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} > 0$;
4) $\frac{2-\sqrt{x}}{7+\sqrt{x}} < 0$; 5) $\frac{\sqrt{x}-10}{2-\sqrt{x}} \leqslant 0$; 6) $\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} \geqslant 0$;
7) $\frac{\sqrt{x}}{7-\sqrt{x}} \geqslant 0$; 8) $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} \leqslant 0$.

1.263. 1) $(x-1)\sqrt{x} \leqslant 0$; 2) $(x-2)\sqrt{x} \leqslant 0$;
3) $(x-1)\sqrt{x} \geqslant 0$; 4) $(x-2)\sqrt{x} \geqslant 0$;
5) $(x-1)\sqrt{x} < 0$; 6) $(x-2)\sqrt{x} < 0$;
7) $(x-1)\sqrt{x} > 0$; 8) $(x-2)\sqrt{x} > 0$.

1.264. 1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$; 2) $(x+8)\sqrt{x-2} \leqslant 0$;
3) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$; 4) $(x-6)\sqrt{x-1} \leqslant 0$;
5)* $(x^2-4)\sqrt{x-1} \leqslant 0$; 6)* $(x^2-9)\sqrt{x-3} \leqslant 0$;
7)* $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geqslant 0$;
8) $(x+1)\sqrt{(x+4)(x+7)} \leqslant 0$.

1.265*. 1) $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x-2} > \sqrt{3-x}$;
3) $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-x}$; 4) $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$;
5) $\sqrt{3-7x} \geqslant \sqrt{6x-8}$; 6) $\sqrt{5-2x} \leqslant \sqrt{3x-9}$;
7) $\sqrt{5-x} \leqslant \sqrt{x+1}$; 8) $\sqrt{8-x} \geqslant \sqrt{x+2}$.

1.266*. 1) $\sqrt{x-3} < x-2$; 2) $\sqrt{x-2} > x$;
3) $\sqrt{12+x} > x$; 4) $\sqrt{x+6} > x$;
5) $\sqrt{5x-x^2} > x-2$; 6) $\sqrt{5x-x^2} < x-2$;
7) $\sqrt{10-x^2} > 3x$; 8) $\sqrt{x^2+5x+7} < 3-x$.

Раздзел 2
Паказальная і лагарыфмічная функцыі

2.1. Ступень з рэчаісным паказчыкам

Мы ўжо ведаем, што такое ступень з рацыянальным паказчыкам. Цяпер вызначым ступень з ірацыянальным паказчыкам пры аснове $a > 0$. Зробім гэта спачатку для асновы $a > 1$.

Няхай s — ірацыянальны лік. Возьмем такія рацыянальныя лікі r і t, што

$$r < s < t.$$

Тады па ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам $a^r < a^t$. Будзе натуральна вызначыць ступень a^s так, каб гэты лік задавальняў няроўнасць

$$a^r < a^s < a^t.$$

Менавіта так мы і зробім.

Азначэнне. **Няхай $a > 1$. *Ступенню ліку a з ірацыянальным паказчыкам s* называецца такі лік b, што**

$$a^r < b < a^t$$

пры любых рацыянальных значэннях r і t, што задавальняюць няроўнасць

$$r < s < t.$$

Гэты лік b абазначаецца a^s.

! Сцверджанне аб існаванні і адзінасці такога ліку b мы прымаем без доказу.

Аналагічна для дадатнага ліку $a < 1$.

Азначэнне. **Няхай $0 < a < 1$. *Ступенню ліку a з ірацыянальным паказчыкам s* называецца такі лік b, што**

$$a^t < b < a^r$$

пры любых рацыянальных значэннях r і t, што задавальняюць няроўнасць

$$r < s < t.$$

Гэты лік b абазначаецца a^s.

Сцверджанне аб існаванні і адзінасці такога ліку b мы прымаем без доказу.

Нарэшце, вызначым ступень з асновай 1.

Азначэнне. **Для любога ірацыянальнага ліку s**

$$1^s = 1.$$

Такім чынам, *пры дадатнай аснове паняцце ступені вызначана для любога рацыянальнага і для любога ірацыянальнага паказчыка*, г. зн. ***для любога рэчаіснага паказчыка***. Пры гэтым усе дзеянні са ступенямі з адвольнымі рэчаіснымі паказчыкамі валодаюць тымі ж уласцівасцямі, што і дзеянні са ступенямі з рацыянальнымі паказчыкамі. Гэтыя ўласцівасці мы сфармулюем у наступнай тэарэме, якую прымем без доказу.

Тэарэма. Для любых значэнняў $a > 0$ і $b > 0$ пры любых рэчаісных s і t правільныя роўнасці:

$$a^s a^t = a^{s+t}; \quad (1)$$

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}; \quad (2)$$

$$(a^s)^t = a^{st}; \quad (3)$$

$$(ab)^s = a^s b^s; \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}. \quad (5)$$

Прыклад 1. Размясціць у парадку спадання лікі:

а) $0{,}63^3$, $0{,}63^{3{,}5}$, $0{,}63^{\sqrt{11}}$; б) $11{,}7^{1{,}4}$, $11{,}7^{1{,}7}$, $11{,}7^{\frac{\pi}{2}}$.

Рашэнне. а) Параўнаем лікі 3; 3,5 і $\sqrt{11}$. Паколькі $3 = \sqrt{9}$, $3{,}5 = \sqrt{12{,}25}$, а $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{12{,}25}$, то

$$3 < \sqrt{11} < 3{,}5.$$

Значыць, па азначэнні ступені з ірацыянальным паказчыкам пры аснове 0,63 атрымаем правільную няроўнасць

$$0{,}63^{3{,}5} < 0{,}63^{\sqrt{11}} < 0{,}63^3.$$

б) Параўнаем лікі 1,4; 1,7 і $\frac{\pi}{2}$. Паколькі $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57$, то

$$1{,}4 < \frac{\pi}{2} < 1{,}7.$$

Значыць, па азначэнні ступені з ірацыянальным паказчыкам пры аснове 11,7 атрымаем правільную няроўнасць

$$11{,}7^{1{,}4} < 11{,}7^{\frac{\pi}{2}} < 11{,}7^{1{,}7}.$$

Адказ: а) $0{,}63^3$; $0{,}63^{\sqrt{11}}$; $0{,}63^{3{,}5}$; б) $11{,}7^{1{,}7}$; $11{,}7^{\frac{\pi}{2}}$; $11{,}7^{1{,}4}$.

Прыклад 2. Выкарыстаўшы азначэнне ступені з ірацыянальным паказчыкам, запісаць па тры правільныя двайныя няроўнасці для ступені a^s, калі: а) $a = 4$; $s = \sqrt{13}$; б) $a = \frac{5}{7}$; $s = \pi$.

Рашэнне. а) Запішам тры правільныя двайныя няроўнасці спачатку для паказчыка $s = \sqrt{13}$:

$$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}, \quad \text{г. зн.} \quad 3 < \sqrt{13} < 4;$$
$$\sqrt{12{,}25} < \sqrt{13} < \sqrt{13{,}69}, \quad \text{г. зн.} \quad 3{,}5 < \sqrt{13} < 3{,}7;$$
$$\sqrt{12{,}96} < \sqrt{13} < \sqrt{13{,}69}, \quad \text{г. зн.} \quad 3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7.$$

Па азначэнні ступені з ірацыянальным паказчыкам пры аснове $4 > 1$ будуць правільныя і няроўнасці:

$$4^3 < 4^{\sqrt{13}} < 4^4;$$
$$4^{3{,}5} < 4^{\sqrt{13}} < 4^{3{,}7};$$
$$4^{3{,}6} < 4^{\sqrt{13}} < 4^{3{,}7}.$$

б) Запішам тры правільныя двайныя няроўнасці спачатку для паказчыка $s = \pi$. Паколькі $\pi \approx 3{,}1415$, то маем:

$$3 < \pi < 4;$$
$$3{,}1 < \pi < 3{,}2;$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15.$$

Па азначэнні ступені з ірацыянальным паказчыкам пры аснове $0 < \frac{5}{7} < 1$ будуць правільныя і няроўнасці:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 < \left(\frac{5}{7}\right)^\pi < \left(\frac{5}{7}\right)^3;$$
$$\left(\frac{5}{7}\right)^{3{,}2} < \left(\frac{5}{7}\right)^\pi < \left(\frac{5}{7}\right)^{3{,}1};$$
$$\left(\frac{5}{7}\right)^{3{,}15} < \left(\frac{5}{7}\right)^\pi < \left(\frac{5}{7}\right)^{3{,}14}.$$

?

1. Сфармулюйце азначэнне ступені ліку a з ірацыянальным паказчыкам s, калі:
а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $a = 1$.
2. Сфармулюйце азначэнне ступені дадатнага ліку a для выпадкаў, калі паказчык:
а) натуральны лік, большы за 1; б) 1; в) 0; г) адмоўны лік; д) рацыянальны лік выгляду $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$; е) любы ірацыянальны лік.
3. Сфармулюйце тэарэму аб дзеяннях над ступенямі з адвольнымі рэчаіснымі паказчыкамі.

Практыкаванні

2.1°. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

1) $0{,}7^{1{,}5}$; $0{,}7^{2}$; $0{,}7^{\sqrt{2}}$; $0{,}7^{0{,}2}$;
2) $3{,}4^{2{,}7}$; $3{,}4^{\sqrt{5}}$; $3{,}4^{3}$; $3{,}4^{2{,}2}$;
3) $4{,}1^{2{,}2}$; $4{,}1^{\sqrt{10}}$; $4{,}1^{3{,}5}$; $4{,}1^{3}$;
4) $0{,}2^{1{,}7}$; $0{,}2^{\sqrt{3}}$; $0{,}2^{3{,}9}$; $0{,}2^{1{,}5}$;
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $2^{-0{,}5}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $8^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$;
6) $\left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $25^{-\frac{\sqrt{19}}{6}}$; $\left(\frac{1}{125}\right)^{\sqrt{0{,}1}}$.

2.2°. Выкарыстаўшы азначэнне ступені з ірацыянальным паказчыкам, запішыце па тры правільныя двайныя няроўнасці для a^s, калі:

1) $a = 3$; $s = \sqrt{2}$;
2) $a = 0{,}7$; $s = \sqrt{3}$;
3) $a = 0{,}1$; $s = \frac{\pi}{3}$;
4) $a = 5$; $s = \frac{\pi}{2}$;
5) $a = \arcsin\frac{1}{2}$; $s = \sqrt{5}$;
6) $a = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; $s = \sqrt{7}$.

2.3. Параўнайце лікі:

1) $2^{\sin\frac{\pi}{3}}$ і $2^{\sqrt{3}}$;
2) $4^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$ і $4^{\sqrt{2}}$;
3) $3{,}5^{-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}$ і 1;
4) 1 і $0{,}8^{-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$;
5) $3^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$ і $3^{\sin\frac{\pi}{4}}$;
6) $7^{\sin\frac{\pi}{4}}$ і $7^{\cos\frac{\pi}{6}}$;
7) $0{,}11^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}}$ і $0{,}11^{\operatorname{tg}0}$;
8) $0{,}17^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$ і $0{,}17^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}$.

Спрасціце (**2.4—2.9**).

2.4. 1) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot 9^{-\sqrt{3}}}$; 2) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{5}+1)^2}\cdot 25^{-\sqrt{5}}}$;

3) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

5) $\left(\left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 6) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;

7) $2^{(\sqrt{2}+1)^2} : 4^{\sqrt{2}}$; 8) $3^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{3}}$.

2.5. 1) $2^{\sin^2\frac{\pi}{5}}\cdot 2^{\cos^2\frac{\pi}{5}}$; 2) $\left(3^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}$;

3) $\left(4^{2\sin\frac{\pi}{12}}\right)^{\cos\frac{\pi}{12}}$; 4) $\left(0{,}5^{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}}$;

5) $5^{\cos^2\frac{\pi}{6}} : 5^{\sin^2\frac{\pi}{6}}$; 6) $0{,}09\cdot 0{,}09^{\cos\frac{2\pi}{3}}$;

7) $0{,}04 : 0{,}04^{\cos 120°}$; 8) $0{,}13^{\cos^2\frac{\pi}{13}}\cdot 0{,}13^{\sin^2\frac{\pi}{13}}$;

9) $49^{\cos^2 30°} : 49^{\sin^2 30°}$; 10) $\left(16^{2\cos 15°}\right)^{\sin 15°}$.

2.6. 1) $4^{\arcsin\frac{1}{2}}\cdot 4^{\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot 4^{\operatorname{arctg} 0} : 4^{\arccos(-1)}$;

2) $7^{\arccos\frac{1}{2}}\cdot 7^{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot 7^{\operatorname{arctg} 1} : 7^{\arcsin 1+\pi}$;

3) $\left(0{,}2^{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{3}{\pi}} + \left(0{,}96^{\operatorname{arctg}(-1)}\right)^{-\frac{4}{\pi}}$;

4) $\left(0{,}64^{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{-\frac{6}{\pi}} + \left(0{,}6^{\operatorname{arcctg}(-1)}\right)^{\frac{8}{3\pi}}$.

2.7. 1) $\dfrac{m^{2\sqrt{2}}-n^{2\sqrt{2}}}{\left(m^{\sqrt{2}}-n^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$; 2) $1-\dfrac{\left(m^{\sqrt{3}}+n^{\sqrt{3}}\right)^2}{m^{2\sqrt{3}}-n^{2\sqrt{3}}}$;

3) $\dfrac{m^{2\sqrt{8}}-m^{\sqrt{8}}}{m^{\sqrt{8}}}-m^{\sqrt{8}}$;

4) $\dfrac{n^{3\sqrt{10}}+n^{2\sqrt{10}}}{n^{2\sqrt{10}}}-n^{\sqrt{10}}$;

5) $\dfrac{m^{2\sqrt{3}}-n^{2\sqrt{3}}}{m^{2\sqrt{3}}+n^{2\sqrt{3}}+2m^{\sqrt{3}}n^{\sqrt{3}}}\cdot\left(m^{\sqrt{3}}+n^{\sqrt{3}}\right)^2$;

6) $\dfrac{m^{2\sqrt{5}}-n^{2\sqrt{5}}}{m^{2\sqrt{5}}+n^{2\sqrt{5}}-2m^{\sqrt{5}}n^{\sqrt{5}}}\cdot\left(m^{\sqrt{5}}-n^{\sqrt{5}}\right)^2$.

2.8*. 1) $\dfrac{m^{3\sqrt{6}}-n^{3\sqrt{6}}}{m^{2\sqrt{6}}+m^{\sqrt{6}}n^{\sqrt{6}}+n^{2\sqrt{6}}}$; 2) $\dfrac{m^{3\sqrt{10}}+n^{3\sqrt{10}}}{m^{2\sqrt{10}}-m^{\sqrt{10}}n^{\sqrt{10}}+n^{2\sqrt{10}}}$;

3) $\dfrac{m^{\sqrt{3}}+n^{\sqrt{3}}}{m^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}-m^{\frac{\sqrt{3}}{3}}n^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+n^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$; 4) $\dfrac{m^{\sqrt{5}}-n^{\sqrt{5}}}{m^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+m^{\frac{\sqrt{5}}{3}}n^{\frac{\sqrt{5}}{3}}+n^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}}$;

5) $\dfrac{m^{\sqrt{2}}}{1-m^{3\sqrt{2}}}:\dfrac{m^{\sqrt{2}}+m^{2\sqrt{2}}}{m^{2\sqrt{2}}+m^{\sqrt{2}}+1}$; 6) $\dfrac{m^{3\sqrt{7}}+27}{m^{\sqrt{7}}}:\dfrac{m^{2\sqrt{7}}-3m^{\sqrt{7}}+9}{m^{\sqrt{7}}-m^{2\sqrt{7}}}$.

2.9. 1) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{2}}+2}{a^{\sqrt{2}}-2}+\dfrac{a^{\sqrt{2}}-2}{a^{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{16}{a^{2\sqrt{2}}-4}\right)^2$;

2) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{7}}-4}{a^{\sqrt{7}}+4}+\dfrac{a^{\sqrt{7}}+4}{a^{\sqrt{7}}-4}-\dfrac{64}{a^{2\sqrt{7}}-16}\right)^2$;

3) $\left(\dfrac{2}{\left(1-a^{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{1}{a^{2\sqrt{2}}-1}\right)\left(a^{\sqrt{2}}-1\right)^2-\dfrac{3a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}+1}$;

4) $\left(\dfrac{2}{\left(2a^{\sqrt{5}}+1\right)^2}-\dfrac{1}{1-4a^{2\sqrt{5}}}\right):\dfrac{1}{\left(1+2a^{\sqrt{5}}\right)^2}-\dfrac{6a^{\sqrt{5}}}{2a^{\sqrt{5}}-1}$;

5) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}+1}{a^{\sqrt{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt{3}}-1}{a^{\sqrt{3}}+1}+4a^{\sqrt{3}}\right)\left(a^{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}\right)$;

6) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}}-b^{\sqrt{10}}}-\dfrac{a^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}}+b^{\sqrt{10}}}\right)\left(\dfrac{a^{\sqrt{10}}}{b^{\sqrt{10}}}+\dfrac{b^{\sqrt{10}}}{a^{\sqrt{10}}}-2\right)$.

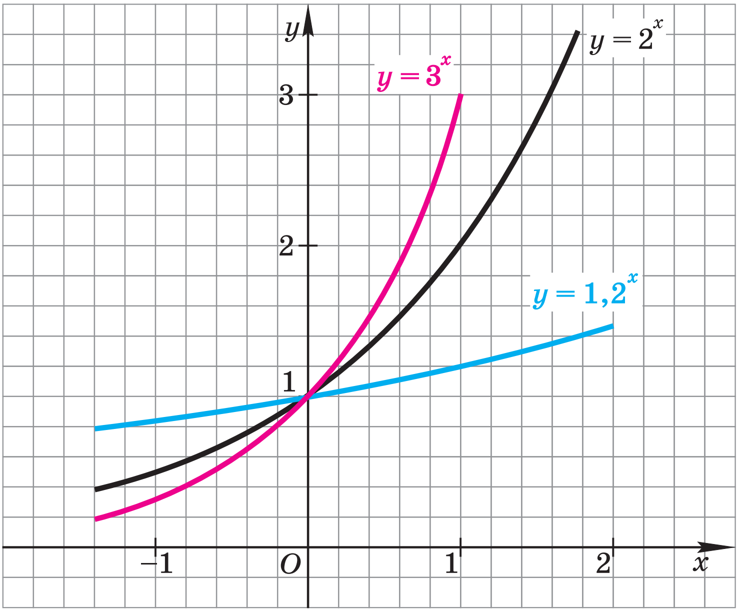
2.2. Паказальная функцыя

Разгледзім выраз a^x, дзе a — лік, $a > 0$, $a \neq 1$, а x — зменная. Гэты выраз мае сэнс пры любым рэчаісным значэнні x, таму яго натуральным абсягам вызначэння з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў.

Азначэнне. ***Паказальнай функцыяй*** **называецца функцыя выгляду $y = a^x$, дзе a — лік, $a > 0$, $a \neq 1$.**

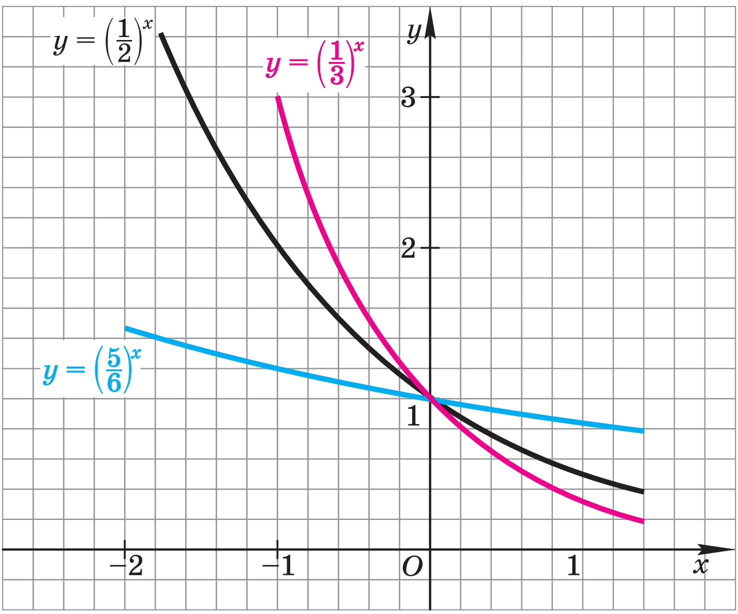
Абсяг вызначэння паказальнай функцыі — гэта натуральны абсяг вызначэння выразу a^x, г. зн. мноства ўсіх рэчаісных лікаў.

Відарысы графікаў некаторых паказальных функцый пры $a > 1$ паказаны на рысунку 23, пры $0 < a < 1$ — на рысунку 24. Як атрымліваюцца відарысы такіх графікаў?



y
$y = 2^x$
$y = 3^x$
3
2
$y = 1,2^x$
1
−1
O
1
2
x

Рыс. 23



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
y
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
3
2
$y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$
1
−2
−1
O
1
x

Рыс. 24

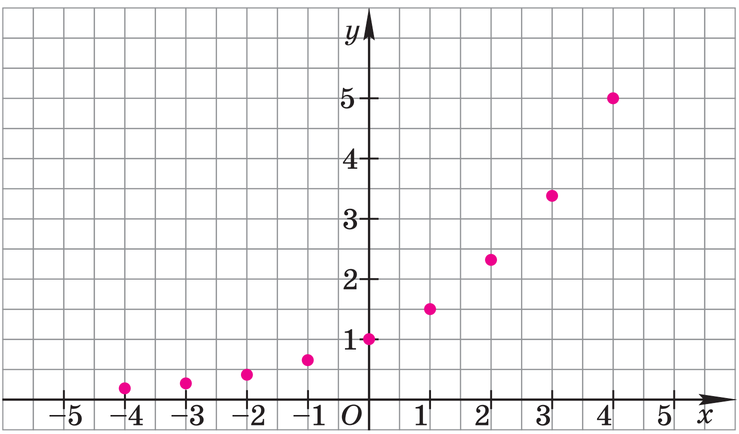
Напрыклад, каб паказаць відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, нададзім некалькі значэнняў аргументу, вылічым адпаведныя значэнні функцыі і ўнясём іх у табліцу:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$

Вылічыўшы прыбліжаныя значэнні y з дакладнасцю да 0,1, атрымаем наступную табліцу:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0,2	0,3	0,4	0,7	1	1,5	2,3	3,4	5

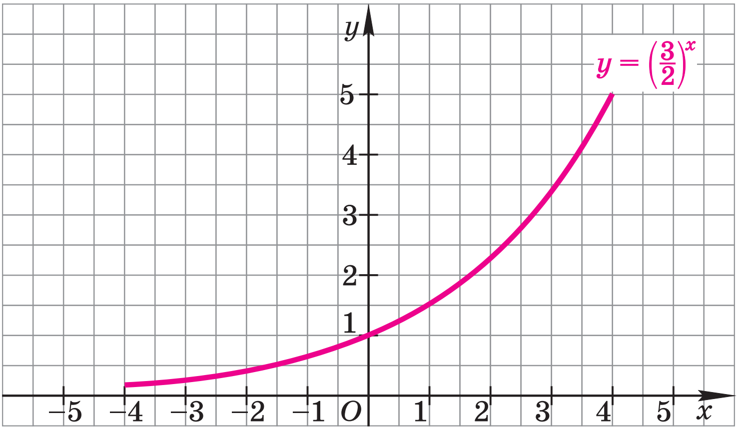
Пакажам пункты $(x; y)$ з запісанымі каардынатамі на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 25) і злучым гэтыя пункты плаўнай непарыўнай лініяй.



Рыс. 25

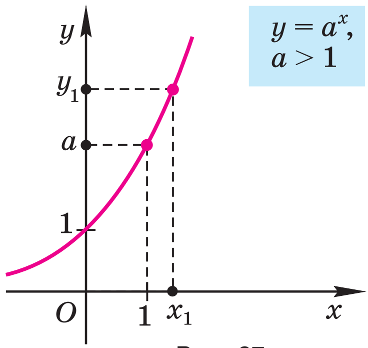
Атрыманую крывую можна разглядаць як відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (рыс. 26).

Графік функцыі $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ размешчаны над воссю Ox і перасякае вось Oy у пункце (0; 1). Заўважым яшчэ, што калі значэнні аргумента x памяншаюцца, то графік гэтай функцыі «прыціскаецца» да



Рыс. 26

восі Ox, а калі значэнні аргумента x павялічваюцца, то графік «крута падымаецца» ўверх.



Рыс. 27

Аналагічна для любой функцыі $y = a^x$ пры $a > 1$ (рыс. 27).

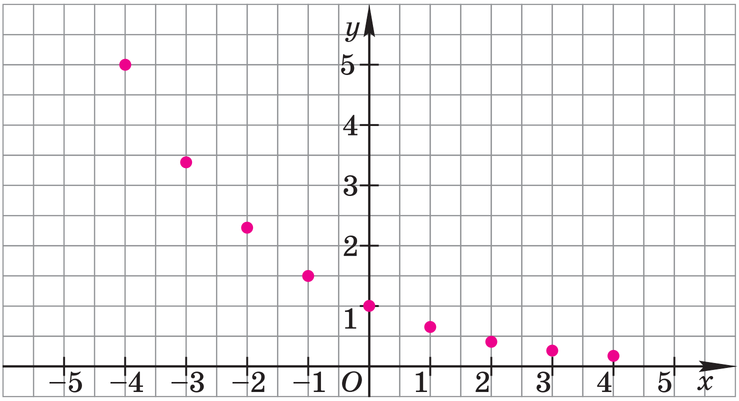
Пакажам цяпер відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Для гэтага нададзім некалькі значэнняў аргументу, вылічым адпаведныя значэнні функцыі і ўнясём іх у табліцу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$

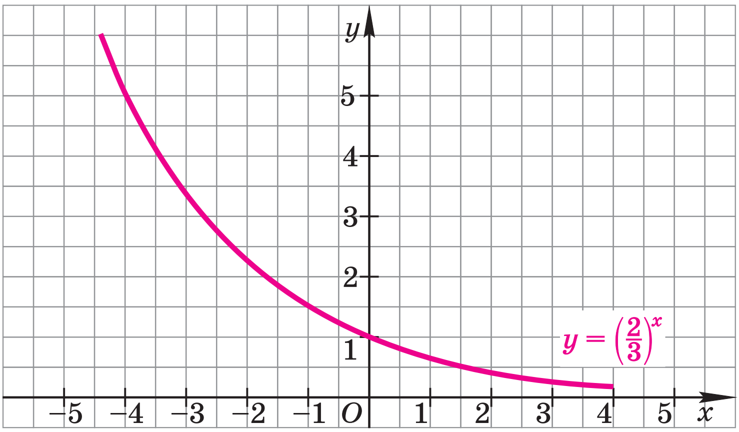
Вылічыўшы прыбліжаныя значэнні y з дакладнасцю да 0,1, атрымаем наступную табліцу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	3,4	2,3	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

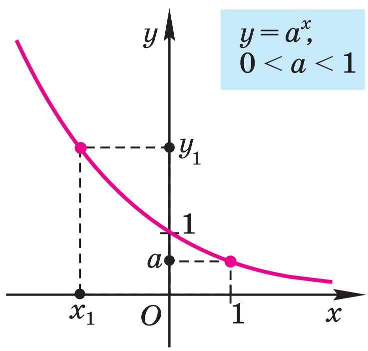
Пакажам пункты $(x; y)$ з запісанымі каардынатамі на каардынатнай плоскасці Oxy (рыс. 28) і злучым гэтыя пункты плаўнай непарыўнай лініяй.



Рыс. 28



Рыс. 29



Рыс. 30

Атрыманую крывую можна разглядаць як відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ (рыс. 29).

Графік функцыі $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ размешчаны над воссю Ox і перасякае вось Oy у пункце (0; 1). Заўважым яшчэ, што калі значэнні аргумента x павялічваюцца, то графік гэтай функцыі «прыцісакаецца» да восі Ox, а калі значэнні аргумента x памяншаюцца, то графік «крута падымаецца» ўверх.

Аналагічна для любой функцыі $y = a^x$ пры $0 < a < 1$ (рыс. 30).

Тэарэма (*аб уласцівасцях паказальнай функцыі* $y = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$)

1. Абсягам вызначэння паказальнай функцыі з'яўляецца множства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў паказальнай функцыі з'яўляецца інтэрвал $(0; +\infty)$.

3. Паказальная функцыя найменшага і найбольшага значэнняў не мае.

4. Графік паказальнай функцыі перасякаецца з воссю ардынат у пункце $(0; 1)$ і не перасякаецца з воссю абсцыс.

5. Паказальная функцыя не мае нулёў.

6. Паказальная функцыя прымае дадатныя значэнні на ўсім абсягу вызначэння; усе пункты яе графіка ляжаць вышэй за вось Ox у I і II каардынатных вуглах.

7. Паказальная функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

8. Пры $a > 1$ паказальная функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння. Пры $0 < a < 1$ паказальная функцыя спадае на ўсім абсягу вызначэння.

9. Паказальная функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Уласцівасці, названыя ў гэтай тэарэме, мы прымем без доказу.

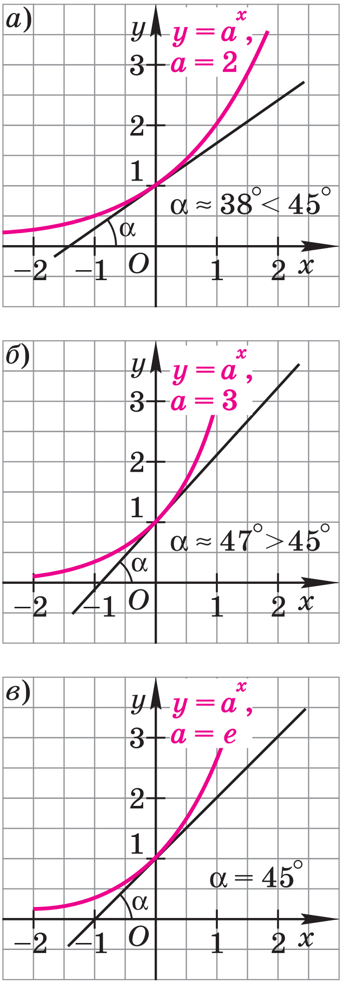
Відарыс графіка паказальнай функцыі дазваляе наглядна ўявіць гэтыя ўласцівасці.

Мноства (абсяг) значэнняў паказальнай функцыі — гэта праекцыя яе графіка на вось Oy, а на рысунках 27 і 30 бачна, што гэтая праекцыя ёсць інтэрвал $(0; +\infty)$ на восі Oy. Гэта значыць, што для любога пункта y_1, які належыць гэтаму інтэрвалу, знойдзецца такі пункт x_1 на восі Ox, што $y_1 = a^{x_1}$ (*уласцівасць* 2).

Мноства (абсяг) значэнняў паказальнай функцыі — гэта інтэрвал $(0; +\infty)$, а ў гэтым інтэрвале няма ні найменшага ліку, ні найбольшага (*уласцівасць* 3).

Графік паказальнай функцыі праходзіць праз пункт $(0; 1)$ і ляжыць у верхняй паўплоскасці (*уласцівасці* 4, 5, 6).

Графік паказальнай функцыі не сіметрычны адносна восі ардынат, таму яна не з'яўляецца цотнай; графік паказальнай функцыі не



Рыс. 31

сіметрычны адносна пачатку каардынат, таму яна не з'яўляецца няцотнай (*уласцівасць* 7).

На рысунку 27 бачна, што пры $a > 0$ паказальная функцыя на абсягу вызначэння нарастае, на рысунку 30 бачна, што пры $0 < a < 1$ паказальная функцыя на абсягу вызначэння спадае (*уласцівасць* 8).

На графіку паказальнай функцыі няма пунктаў з аднолькавымі ардынатамі, таму яна не з'яўляецца перыядычнай (*уласцівасць* 9).

▲ Да графіка паказальнай функцыі $y = a^x$ можна правесці невертыкальную датычную ў любым яго пункце, у тым ліку і ў пункце (0; 1) (напомнім, што гэта азначае наяўнасць вытворнай функцыі ў гэтым пункце).

Калі $a > 1$, то вугал α, які ўтварае такая датычная з воссю Ox, востры. Напрыклад, калі $a = 2$, то $\alpha \approx 38° < 45°$ (рыс. 31, *а*), а калі $a = 3$, то $\alpha \approx 47° > 45°$ (рыс. 31, *б*).

Існуе аснова $2 < a < 3$ такой адзінай паказальнай функцыі, што датычная, праведзеная да яе графіка ў пункце (0; 1), утварае з воссю Ox вугал $\alpha = 45°$ (рыс. 31, *в*).

Асновай паказальнай функцыі з такой уласцівасцю з'яўляецца лік, які быў адкрыты яшчэ ў XVII ст. Джонам Неперам (яго партрэт — на вокладцы) і названы ***неперавым лікам***; ён прыбліжана роўны 2,7182818284. З XVIII ст. неперавы лік сталі абазначаць літарай ***e***, у гонар знакамітага Леанарда Эйлера. У 1766 г. Ламбертам (з дапамогай прыёму Эйлера) было даказана, што лік e, як і

лік π, ірацыянальны. Лікі e і π вельмі важныя для матэматыкі, яны ўваходзяць у вялікую колькасць формул.
У расійскіх гімназіях для запамінання прыбліжанага значэння ліку e выкарыстоўвалі такі вершык:
«*Помнить е — закон простой:*
Два, семь, дважды Лев Толстой»,
паколькі 1828 — год нараджэння вялікага рускага пісьменніка Л. М. Талстога. ▲

Прыклад. Запісаць найбольшае і найменшае значэнні функцыі (калі яны існуюць):

а) $y = 3^{x^2}$; б) $y = \frac{1}{3} \cdot 0{,}7^{\sin x}$.

Рашэнне. а) Паколькі 3 — дадатны лік, большы за 1, то большаму значэнню паказчыка x^2 адпавядае і большае значэнне ступені 3^{x^2}. Але выраз x^2 пры $x = 0$ мае найменшае значэнне, а найбольшага значэння не мае. Значыць, пры любых значэннях x правільная няроўнасць

$$3^{x^2} \geqslant 3^0, \text{ г. зн. } 3^{x^2} \geqslant 1.$$

б) Паколькі 0,7 — дадатны лік, меншы за 1, то большаму значэнню паказчыка $\sin x$ адпавядае меншае значэнне ступені $0{,}7^{\sin x}$. Значэнні выразу $\sin x$ пры любых значэннях x задавальняюць няроўнасць

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

Такім чынам, пры любых значэннях x правільная няроўнасць

$$0{,}7^1 \leqslant 0{,}7^{\sin x} \leqslant 0{,}7^{-1}.$$

Значыць, правільная і няроўнасць

$$\frac{1}{3} \cdot 0{,}7 \leqslant \frac{1}{3} \cdot 0{,}7^{\sin x} \leqslant \frac{1}{3} \cdot 0{,}7^{-1}, \text{ г. зн.}$$

$$\frac{7}{30} \leqslant \frac{1}{3} \cdot 0{,}7^{\sin x} \leqslant \frac{10}{21}.$$

Адказ: а) 1 — найменшае значэнне функцыі $y = 3^{x^2}$; найбольшага значэння няма;

б) $\frac{7}{30}$ — найменшае значэнне, а $\frac{10}{21}$ — найбольшае значэнне функцыі $y = \frac{1}{3} \cdot 0{,}7^{\sin x}$.

?

1. Сфармулюйце азначэнне паказальнай функцыі.
2. Сфармулюйце тэарэму аб уласцівасцях паказальнай функцыі $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
3. Як можна пераканацца, што паказальная функцыя з асновай $0 < a < 1$:
   а) не прымае найбольшага значэння;
   б) не прымае найменшага значэння;
   в) не з'яўляецца цотнай;
   г) не з'яўляецца няцотнай;
   д) не з'яўляецца перыядычнай?
4. Няхай f — паказальная функцыя. Дакажыце, не карыстаючыся відарысам яе графіка, што:
   а) функцыя f не з'яўляецца цотнай;
   б) функцыя f не з'яўляецца няцотнай.

5*. Што вы ведаеце пра лік e?

Практыкаванні

2.10°. Ці з'яўляецца паказальнай функцыя:

1) $y = 3^x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = (-3)^x$;
4) $y = \sqrt{3^x}$; 5) $y = x$; 6) $y = (x-2)^5$;
7) $y = \pi^x$; 8) $y = 5^{-x}$; 9) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2x}$?

2.11°. Выкарыстаўшы відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (гл. рыс. 26), вызначыце прыбліжана з дакладнасцю да 0,1 значэнні функцыі пры x, роўным:

1) 1,5; 2) −1,5; 3) −2,5; 4) 2,5;
5) −0,5; 6) −1,3; 7) 2,8; 8) 3,5.

Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі (**2.12—2.13**).

2.12°. 1) $y = 4^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = 3{,}5^x$;
4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$; 6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

2.13°. 1) $y = \left(\sqrt{0{,}4}\right)^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 3) $y = \sqrt{3^x}$;
4) $y = \sqrt{\left(\frac{6}{19}\right)^x}$; 5) $y = \pi^x$; 6) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$;
7) $y = \left(\frac{\pi}{6}\right)^x$; 8) $y = 0{,}2017^x$; 9) $y = 2016{,}2015^x$.

2.14. Пры якім значэнні a графік функцыі $y = a^x$ праходзіць праз пункт:

1) $A(1;\ 2)$; 2) $B(2;\ 9)$; 3) $C(2;\ 16)$;
4) $D(-2;\ 4)$; 5) $K\left(-3;\ \frac{1}{27}\right)$; 6) $M\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{2}\right)$?

2.15. 1) Знайдзіце значэнне m, калі пункт $A(\sin 30°;\ m)$ належыць графіку функцыі $y = 25^x$.
2) Знайдзіце значэнне k, калі пункт $D(\cos 60°;\ k)$ належыць графіку функцыі $y = 16^x$.

2.16. 1) Знайдзіце значэнне p, калі пункт $B\left(p;\ 16\cos\frac{\pi}{3}\right)$ належыць графіку функцыі $y = 2^x$.
2) Знайдзіце значэнне t, калі пункт $M\left(t;\ 32\sin\frac{\pi}{2}\right)$ належыць графіку функцыі $y = 2^x$.

2.17. Запішыце каардынаты пункта перасячэння графікаў функцый:

1) $y = 2^x$ і $y = 8$; 2) $y = 3^x$ і $y = \frac{1}{3}$;
3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ і $y = 9$; 4) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ і $y = \frac{1}{64}$.

2.18. Ці мае графік функцыі $y = 2^x$ агульныя пункты з прамой:

1) $y = 12$; 2) $y = -3$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0{,}0001$?

2.19. Ці мае графік функцыі $y = 2^x - 1$ агульныя пункты з прамой:

1) $y = 6$; 2) $y = -1$; 3) $y = 0$; 4) $y = -1{,}004$?

2.20. Ці мае графік функцыі $y = 2^x + 2$ агульныя пункты з прамой:

1) $y = 7$; 2) $y = 1$; 3) $y = 2$; 4) $y = 2{,}05$?

2.21°. Параўнайце:

1) $1{,}8^0$ і 1; 2) 1 і $0{,}4^2$;
3) $4{,}3^{1,5}$ і $4{,}3^{1,6}$; 4) $0{,}3^{-3}$ і $0{,}3^{-2}$;
5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^{1,6}$; 6) 3^{π} і $3^{3,14}$;
7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2\pi}{3}}$; 8) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{7}}$ і $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{4\pi}{5}}$;
9) $\sqrt{3}^{\sin\sqrt{3}}$ і $\left(\frac{2\pi}{5}\right)^{\sin\sqrt{3}}$; 10) $\sqrt{0{,}5}^{\cos\sqrt{6}}$ і $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\cos\sqrt{6}}$.

2.22. Ці з'яўляецца нарастальнай (спадальнай) функцыя:

1) $y = 4^x$; 2) $y = 0{,}5^x$; 3) $y = \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^x$;

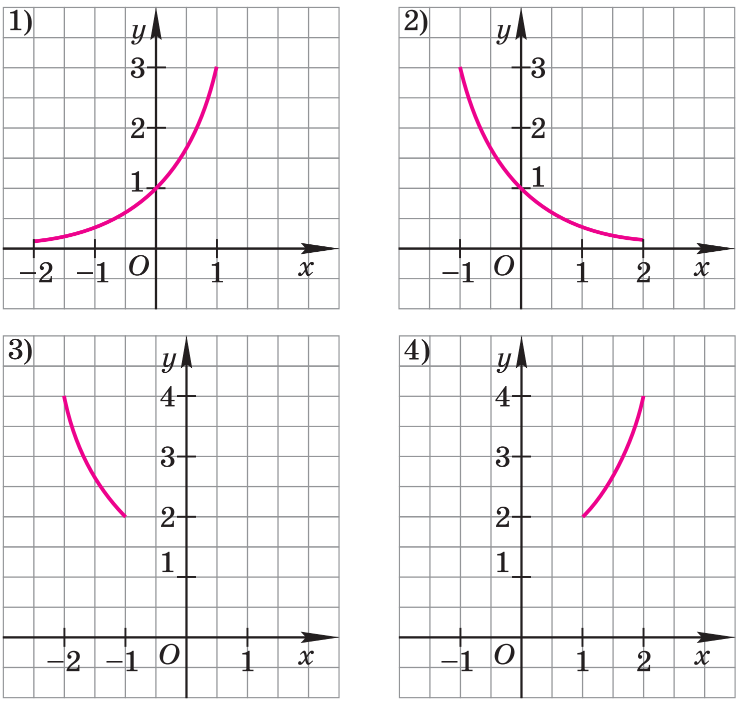
4) $y = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^x$; 5) $y = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^x$; 6) $y = \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)^x$;

7) $y = 0{,}2^{-x}$; 8) $y = 1{,}4^{-x}$; 9) $y = \left(\frac{1}{15}\right)^{-2x}$;

10) $y = \left(1\frac{3}{7}\right)^{-3x}$; 11) $y = 67^{-\frac{x}{2}}$; 12) $y = 0{,}64^{-\frac{x}{4}}$?

2.23. На рысунку 32 паказаны відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай $y = a^x$ на мностве D. Запішыце для яе:

а) значэнне a;
б) абсяг вызначэння;
в) мноства (абсяг) значэнняў;
г) прамежкі нарастання (спадання);
д) каардынаты пункта перасячэння графіка з воссю Oy;
е) значэнні ў пунктах $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$;
ж) найбольшае і найменшае значэнні.



Рыс. 32

Запішыце (пры $a > 0$) натуральны абсяг вызначэння выразу (**2.24—2.25**).

2.24. 1) a^{3x}; 2) $a^{\sqrt{x}}$; 3) $a^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

4) $a^{\frac{6}{4-x^2}}$; 5) $a^{\frac{2}{x^2+16}}$; 6) $a^{\frac{4}{x^2-9}}$;

7) $a^{\sqrt{16-x^2}}$; 8) $a^{\sqrt{x^2-64}}$; 9) $a^{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

2.25. 1) $a^{\sin x}$; 2) $a^{\cos x+1}$; 3) $a^{\frac{1}{\sin 2x}}$;

4) $a^{\frac{1}{\cos 0{,}5x}}$; 5) $a^{\operatorname{tg} x}$; 6) $a^{\operatorname{ctg} x}$;

7) $a^{\frac{1}{\sin x-1}}$; 8) $a^{\frac{1}{\cos x+1}}$; 9) $a^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Запішыце найменшае і найбольшае значэнні выразу (калі яны існуюць) (**2.26—2.28**).

2.26. 1) 2^x; 2) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; 3) $4^{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{5^{|x|}}$.

2.27*. 1) $5 \cdot 2^{\sin x}$; 2) $6 \cdot 2^{\cos x}$;

3) $0{,}3^{\sin^2 x} \cdot 0{,}3^{\cos^2 x}$; 4) $4{,}5^{\sin^2 x} \cdot 4{,}5^{\cos^2 x}$;

5) $11^{\frac{1}{\sin^2 x}} : 11^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 6) $7{,}4^{\frac{1}{\cos^2 x}} : 7{,}4^{\operatorname{tg}^2 x}$;

7) $6^{\sin^2 x} \cdot 6$; 8) $4 \cdot 4^{\cos^2 x}$.

2.28*. 1) 4^{x^2-x-6}; 2) 6^{x^2-x-2};

3) 2^{5x-6-x^2}; 4) 5^{10-x^2-3x}.

Рашыце няроўнасць (**2.29—2.30**).

2.29. 1) $6^x > 0$; 2) $6^x < 0$;
3) $6^x > -2$; 4) $6^x < -6$.

2.30. 1) $3^x > 1$; 2) $3^x < 1$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 1$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 1$;

5) $\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\right)^x \geqslant 1$; 6) $\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}\right)^x \leqslant 1$.

Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі (**2.31—2.32**).

2.31. 1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$;

3) $y = 2^{x+1}$; 4) $y = 3^{x-2}$;

5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$; 6) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$;

7) $y = 2^{x-3} + 1$; 8) $y = 3^{x+1} - 2$.

2.32. 1) $y = -3^x$; 2) $y = -0{,}5^x$;
3) $y = -0{,}1^{-2x} + 1$; 4) $y = -2^{-2x} - 2$;
5) $y = 2 - 3^x$; 6) $y = 3 - 2^x$.

2.33*. Няхай $0 < a < 1$. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі і запішыце яе ўласцівасці:

1) $y = a^x$; 2) $y = a^{x-1}$; 3) $y = a^{x+1}$;
4) $y = a^x + 1$; 5) $y = a^x - 1$; 6) $y = a^{x+1} - 1$;
7) $y = a^{x-1} + 1$; 8) $y = a^{x-1} - 1$; 9) $y = a^{x+1} + 1$;
10) $y = -a^x$; 11) $y = -a^x + 2$; 12) $y = -a^{x+2}$.

2.34*. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі з практыкавання 2.33 пры $a > 1$ і запішыце яе ўласцівасці.

Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі (**2.35—2.38**).

2.35*. 1) $y = \left|2^x\right|$; 2) $y = 4^{|x|}$; 3) $y = \left|3^{-x}\right|$;

4) $y = 5^{-|x|}$; 5) $y = -\left|0{,}5^{-x}\right|$; 6) $y = -0{,}2^{|x|}$;

7) $y = \left|3^{|x|}\right|$; 8) $y = -\left|4^{|x|}\right|$.

2.36*. 1) $y = \left|3^x - 1\right|$; 2) $y = \left|0{,}5^x - 2\right|$;

3) $y = \left|0{,}2^{x+1} - 2\right|$; 4) $y = \left|2^{x-1} - 1\right|$.

2.37*. 1) $y = 3^{|x|+x}$; 2) $y = 3^{|x|-x}$;

3) $y = 3^{|x-2|+|x+1|}$; 4) $y = 3^{|x-1|+|x+2|}$;
5) $y = 3^{|x+1|-|x-2|}$; 6) $y = 3^{|x+3|-|x-4|}$.

2.38*. 1) $y = \frac{4^x - 4}{2^x - 2}$; 2) $y = \frac{9^x - 9}{3^x + 3}$;

3) $y = \frac{4^{2x} + 4^x}{4^x + 4^0}$; 4) $y = \frac{3^{2x} - 3^x}{3^x - 3^0}$.

2.3. Паказальныя ўраўненні

Разгледзім ураўненні, у якіх зменная (невядомае) знаходзіцца ў паказчыку ступені. Напрыклад:

$$3^x = 81;$$
$$8 \cdot 2^{x-1} \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x+2} = 92;$$
$$9^x + 5 \cdot 6^x + 64^x = 0.$$

Ураўненні такога выгляду прынята называць ***паказальнымі***.

Пры рашэнні паказальных ураўненняў нам будзе карысны вынік з тэарэмы аб уласцівасцях паказальнай функцыі.

Вынік. Няхай $a > 0$, $a \neq 1$. Калі ступені з асновай a роўныя, то іх паказчыкі роўныя, г. зн. калі $a^s = a^t$, то $s = t$.

Відарысы графікаў паказальнай функцыі падказваюць гэтую ўласцівасць. На рысунках 27, 30 бачна, што кожнаму значэнню паказальнай функцыі $y = a^s$ адпавядае адзіны паказчык s.

Доказ гэтага выніку абапіраецца на тэарэму з п. 2.2.

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $3^{2x^2-3x+5} = 3^{x^2+2x-1}$.

Рашэнне. Згодна з вынікам з роўнасці дзвюх ступеней з аднолькавай асновай 3 вынікае роўнасць іх паказчыкаў. Такім чынам, дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню

$$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x - 1,$$

адкуль

$$x_1 = 2;\ x_2 = 3.$$

Адказ: 2; 3.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне:

а) $27\left(\sqrt{3}\right)^{2x-4} = 81^{\frac{3}{2x}}$; б) $\sqrt[4]{32^x} = 0{,}25^{x^2+5x}$.

Рашэнне. а) Дадзенае ўраўненне раўназначна (патлумачце чаму) ураўненню

$$3^{x+1} = 3^{\frac{6}{x}}.$$

Калі ступені з асновай 3 роўныя, то роўныя і іх паказчыкі:

$$x + 1 = \frac{6}{x}.$$

Рашыўшы гэтае ўраўненне, атрымаем

$$x_1 = -3,\ x_2 = 2.$$

б) $\sqrt[4]{32^x} = 0{,}25^{x^2+5x} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x}{4}} = 2^{-2\left(x^2+5x\right)} \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = -2x^2 - 10x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(8x+45) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ або } x = -\frac{45}{8}\right).$

Адказ: а) –3; 2; б) 0; $-\frac{45}{8}$.

! Пры рашэнні кожнага ўраўнення з прыкладу 2 спачатку абедзве часткі ўраўнення запісалі ў выглядзе ступені з адной і той жа асновай, а затым запісалі роўнасць паказчыкаў гэтых ступеней.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне:

а) $8 \cdot 2^{3x-1} - 2^{3x} + 5 \cdot 2^{3x+2} = 92;$ б) $3^x = 5^x$.

Рашэнне. а) Дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню

$$2^{3x-1}\left(8 - 2^{3x-(3x-1)} + 5 \cdot 2^{3x+2-(3x-1)}\right) = 92.$$

Рашыўшы яго, атрымаем:

$$2^{3x-1}(8 - 2 + 5 \cdot 2^3) = 92;$$

$$2^{3x-1} \cdot 46 = 92;$$

$$2^{3x-1} = 2.$$

Паколькі дзве ступені з аднолькавай асновай 2 роўныя, то роўныя і іх паказчыкі, г. зн. $3x - 1 = 1$, адкуль знаходзім $x = \frac{2}{3}$.

б) Раздзяліўшы абедзве часткі ўраўнення на $5^x > 0$, атрымаем ураўненне $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$, раўназначнае дадзенаму. Рашыўшы яго, атрымаем $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0$, г. зн. $x = 0$.

Адказ: а) $\frac{2}{3}$; б) 0.

! Пры рашэнні прыкладу 3 а) левую частку ўраўнення расклалі на множнікі. Прычым за дужку вынеслі такі множнік, што ў дужках застаўся лікавы выраз, які не змяшчае зменнай.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Рашэнне. Абазначым $3^x = t$, тады $9^x = t^2$.

Такім чынам, з дадзенага ўраўнення атрымліваем

$$t^2 - 12t + 27 = 0,$$

адкуль знаходзім $t = 3$ або $t = 9$.

З улікам абазначэнняў маем:

$$3^x = 3 \text{ або } 3^x = 9;$$
$$x = 1 \text{ або } x = 2.$$

Адказ: 1; 2.

! При рашэнні прыкладу 4 быў выкарыстаны метад увядзення новай зменнай, які дазволіў звесці дадзенае ўраўненне да квадратнага адносна гэтай зменнай.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне $3^{\frac{x}{2}} + 2^x = 16 - 3^x$.

Рашэнне. Можна заўважыць, што 2 — корань дадзенага ўраўнення. Іншых каранёў ураўненне не мае, паколькі функцыя, што стаіць у левай частцы ўраўнення, нарастальная, а функцыя, што стаіць у правай частцы ўраўнення, спадальная. Таму ўраўненне мае не больш за адзін корань (гл. тэарэму з п. 1.14).

Адказ: 2.

Прыклад 6. Рашыць ураўненне $6^x - 81 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x + 648 = 0$.

Рашэнне. $3^x \cdot 2^x - 81 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x + 648 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^x(3^x - 81) - 8(3^x - 81) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3^x - 81)(2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3^x - 81 = 0 \text{ або } 2^x - 8 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3^x = 3^4 \text{ або } 2^x = 2^3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 4 \text{ або } x = 3).$$

Адказ: 3; 4.

Прыклад 7. Пры якім значэнні a коранем ураўнення

$$3^{1 + x - x^2} = 3^{a - 8}$$

з'яўляецца лік, роўны 2?

Рашэнне. Паколькі $x = 2$ — корань, то будзе правільнай роўнасць

$$3^{1 + 2 - 2^2} = 3^{a - 8}, \text{ г. зн. } 3^{-1} = 3^{a - 8}.$$

Рашыўшы гэтае ўраўненне, знойдзем $a = 7$.

Адказ: пры $a = 7$.

?

1. Сфармулюйце вынік з роўнасці ступеней з дадатнымі адрознымі ад 1 асновамі.
2. Прывядзіце прыклады паказальных ураўненняў.
3. Апішыце спосаб рашэння ўраўнення выгляду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ пры $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Апішыце спосаб рашэння ўраўнення выгляду

$$216 \cdot 6^{f(x)} = \left(\sqrt[5]{36}\right)^{g(x)}.$$

5. Апішыце спосаб рашэння ўраўнення выгляду
$$13 \cdot 6^{f(x)} = 7 \cdot 6^{f(x)+1} - 6^{f(x)+2} + 42.$$
6. Апішыце спосаб рашэння ўраўнення выгляду
$$5 \cdot 49^{f(x)} - 34 \cdot 7^{f(x)} - 7 = 0.$$

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (**2.39—2.57**).

2.39°. 1) $5^x = 125$; 2) $6^x = 1296$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256}$;
5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$;
7) $16^x = \frac{1}{4}$; 8) $27^x = \frac{1}{3}$;
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -2$; 10) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -2{,}5$.

2.40°. 1) $3^{5-2x} = 1$; 2) $4^{8+5x} = 1$;
3) $3^{x^2-x} = 1$; 4) $4^{x^2+x} = 1$;
5) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9} = 1$; 6) $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2-25}$;
7) $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x} = 1$; 8) $1 = \left(6^{x^2-10x+16}\right)^{4-x^2}$.

2.41°. 1) $2^{x+1} = 16$; 2) $3^{2-x} = 27$;
3) $4^{x-1} = 32$; 4) $8^{x+2} = 128$;
5) $9^{-x} = 27$; 6) $8^{-x} = 16$;
7) $9^{\frac{1}{2}x-1} - 3 = 0$; 8) $27^{3-\frac{1}{3}x} - 81 = 0$;
9) $5^{x-3} + 5^2 = 25$; 10) $7^{2-x} + 49 = 7^2$.

2.42°. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-9}$;
3) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2+x}$; 4) $\left(\frac{7}{13}\right)^{3-2x} = \left(\frac{13}{7}\right)^{4+3x}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x^2-29} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+5}$; 6) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x} = \left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$.

2.43. 1) $0{,}04^{2-x} = 25^{-1}$; 2) $0{,}5^{3x-1} = 16^{-2}$;
3) $3{,}5^{x-5} = \left(\frac{4}{49}\right)^2$; 4) $0{,}8^{3-2x} = 1{,}25^3$;
5) $0{,}125^{x-1} = 2^3$; 6) $0{,}625^{4x+1} = 1{,}6^{3-2x}$.

2.44. 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$;
3) $3^{x+0,5} \cdot 3^{x-2} = 3$; 4) $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$;
5) $8^x \cdot 4^{x+13} = \frac{1}{16}$; 6) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} = \frac{1}{8}$.

2.45. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1} = \left(3\sqrt{3}\right)^x$; 2) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-1}$;
3) $9^{3x+4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{\left(\sqrt{2}\right)^x} = 4^{3x-2} \cdot \sqrt{2}$;
5) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-75}$; 6) $25^{3-2x} = \frac{1}{125}\left(25\sqrt{5}\right)^{-x}$;
7) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$; 8) $0,008\left(25\sqrt{5}\right)^{-x} = 25^{3-2x}$.

2.46. 1) $\sqrt{5^{x+2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$; 2) $\sqrt[3]{3^{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$;
3) $\sqrt[3]{49^{2x+1}} = \frac{7}{\sqrt[5]{7}}$; 4) $\sqrt[5]{6^{x+1}} = \frac{36}{\sqrt{6}}$;
5) $16^{-1}\sqrt{64^x} = 2^x$; 6) $8^{-1}\sqrt{16^x} = 2^{\frac{x}{2}}$;
7) $\sqrt{\sqrt[3]{2^x}} = 4$; 8) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^x}} = 27$.

2.47. 1) $0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$; 2) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$;
3) $16 \cdot \sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$; 4) $\frac{1}{27} \cdot \sqrt[4]{9^{3x-1}} = 27^{-\frac{2}{3}}$.

2.48. 1) $\left(\frac{5}{6}\right)^{13\sqrt{x}+5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{7\sqrt{x}-45}$; 2) $\left(\frac{51}{9}\right)^{\sqrt{x-1}-3} = \left(\frac{9}{51}\right)^{8\sqrt{x-1}-15}$;
3) $\left(\frac{14}{19}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-3} = \left(\frac{19}{14}\right)^{-\frac{7}{\sqrt{x}}+5}$; 4) $\left(\frac{33}{15}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5} = \left(\frac{15}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$.

2.49°. 1) $2^x \cdot 3^x = 36$; 2) $2^x \cdot 5^x = 0,1$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{125}{8}\right)^x = \frac{625}{16}$;
5) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; 6) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.

2.50. 1) $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}$; 2) $\frac{10^{x^2}}{2^4} = \frac{5^4}{10^{9-6x}}$;
3) $\frac{2^{x^2+2}}{6^{3x}} = \frac{6^{3x-6}}{3^{x^2+2}}$; 4) $\frac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \frac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}$.

2.51. 1) $3^{x+1} + 3^x = 108$; 2) $2^{x+2} + 2^x = 5$;
3) $2^x - 2^{x-2} = 12$; 4) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$;
5) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; 6) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$;

7) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17;$
8) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^{x} + 6 = 0.$

2.52. 1) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246;$

2) $49^{\frac{2x-2}{2}} + \left(\frac{1}{7}\right)^{3-2x} + 7^{2x-1} = 399;$

3) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207;$

4) $2^{2x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x} + 4^{x+1} = -\sqrt{\frac{1}{4^{3-2x}}} + 78;$

5) $25^{x-1} + \sqrt{\frac{1}{25^{-2x}}} = 525 + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x};$

6) $2^{-(x-1)} + \sqrt{\frac{1}{4^{2+x}}} = 56 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+x}.$

2.53. 1) $2^{2x} + 2^{x} - 2 = 0;$ 2) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x} - 3 = 0;$
3) $9^{x} - 6 \cdot 3^{x} - 27 = 0;$ 4) $4^{x} - 14 \cdot 2^{x} - 32 = 0;$
5) $100^{x} - 11 \cdot 10^{x} + 10 = 0;$ 6) $49^{x} - 8 \cdot 7^{x} + 7 = 0;$
7) $36^{x} - 4 \cdot 6^{x} - 12 = 0;$ 8) $64^{x} - 8^{x} - 56 = 0.$

2.54. 1) $13^{2x+1} - 13^{x} = 12;$ 2) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x} + 3 = 0;$
3) $9^{x} + 3^{x+1} - 108 = 0;$ 4) $4^{x} + 2^{x+1} - 80 = 0.$

2.55. 1) $3^{-2x+1} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 2;$ 2) $5 \cdot 5^{-2x} + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 1;$
3) $2^{-2x+3} = 2^{-x+1} + 1;$ 4) $2 \cdot 3^{-2x+2} = 3^{-x+1} + 1;$
5) $3 \cdot 2^{-2x+3} = 2^{-x+1} + 1;$ 6) $6 \cdot 5^{-2x+3} - 1 = 5^{-x+1}.$

2.56. 1) $5^{x} - 24 = \frac{25}{5^{x}};$ 2) $2^{x} + \frac{8}{2^{x}} = 16{,}5;$
3) $2^{x+2} - 2^{2-x} = 15;$ 4) $3^{x} + 3^{3-x} = 12;$
5) $9 - 2^{x} = 2^{3-x};$ 6) $4^{x} - 0{,}25^{x-2} = 15;$
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 3^{x+3} = 12;$ 8) $5 \cdot 5^{x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$

2.57*. 1) $\sqrt{2 \cdot 5^{x} + 6} = 5^{x} - 1;$ 2) $\sqrt{10 - 3^{x+2}} = 3^{x+1} - 2;$
3) $\sqrt{3^{x} - 5} = 11 - 3^{x};$ 4) $\sqrt{9 \cdot 2^{x} + 25} = 2^{x} - 3.$

2.58*. 1) Пры якім значэнні a коранем ураўнення $2^{4+x-x^2} = 2^{a}$ з’яўляецца лік, роўны -1?

2) Пры якім значэнні a коранем ураўнення $5^{6+2x-x^2} = 5^a$ з'яўляецца лік, роўны 2?

2.59*. 1) Пры якім значэнні a коранем ураўнення $\left(\sqrt{3}\right)^{x^2+ax+2} = 3$ з'яўляецца лік, роўны −2?

2) Пры якім значэнні a коранем ураўнення $\left(\sqrt{7}\right)^{x^2-ax+4} = \frac{1}{7}$ з'яўляецца лік, роўны 1?

2.60*. 1) Пры якім значэнні a коранем ураўнення

$$0{,}5^{a+x} = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x^2-2x}$$

з'яўляецца лік, роўны −1?

2) Пры якім значэнні a коранем ураўнення

$$\left(\sqrt{2}\right)^{a-x} = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{x^2+2x}$$

з'яўляецца лік, роўны 1?

Рашыце ўраўненне (**2.61—2.63**).

2.61*. 1) $3^{|x-2|} = 9$; 2) $4^{|x-2|} = 16$;

3) $8^{|x^2-1|} = 16$; 4) $27^{|x^2-2|} = 81$;

5) $2^{|x-2|} = 4^{|x+1|}$; 6) $5^{|x+4|} = 25^{|x|}$.

2.62*. 1) $(0,(3))^{6-x} = 27$; 2) $3^x \cdot (0,(3))^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$;

3) $0{,}25 \cdot (0{,}1(6))^{x-16} = 54$; 4) $\sqrt[3]{(0,(6))^x} = \sqrt[5]{1{,}5}$.

2.63*. 1) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}$; 2) $0{,}26^{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - 1} = 6^{1+x}$;

3) $11^{1+\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}} = 0{,}11^{3+x}$; 4) $23^{x-1} = \left(\frac{7}{9}\right)^{1+\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}}$.

2.64*. Запішыце найбольшы адмоўны корань ураўнення:

1) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = \sin\frac{\pi}{2}$; 2) $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\sin x} = \cos 2\pi$.

Рашыце ўраўненне (**2.65—2.69**).

2.65*. 1) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sin^2 x} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\cos^2 x} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

2.66*. 1) $2^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $3^{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $2^{\cos 2x} = \sqrt{0,5}$; 4) $5^{\sin 2x} = \sqrt{0,2}$;

5) $3^{\cos(\pi + 0,5x)} = \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$; 6) $8 \cdot 2^{\cos(1,5\pi + 0,4x)} = \sqrt{32}$.

2.67*. 1) $\left(\sqrt{3}\right)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}}$; 2) $2^{\cos^2 x} = 8^{\sin^2 x}$;

3) $25^{1 - \cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$; 4) $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}$.

2.68*. 1) $3 \cdot 3^4 \cdot 3^7 \cdot ... \cdot 3^x = 3^{117}$;

2) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot ... \cdot 5^{2x} = 0,04^{-28}$.

2.69*. 1) $2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^2 x} \cdot 2^{\cos^3 x} \cdot ... = 2$;

2) $3^{\sin x} \cdot 3^{\sin^2 x} \cdot 3^{\sin^3 x} \cdot ... = 3$.

2.70*. Пры якіх значэннях a ураўненне:

1) $25^x + 5^x \cdot (2 - 3a) + 2a^2 - 5a - 3 = 0$ мае адно рашэнне;

2) $9^x - 3^x \cdot (5a + 3) + 6a^2 + 11a - 10 = 0$ мае адно рашэнне;

3) $4^x - 2^x \cdot (6a - 4) + 5a^2 - 4a = 0$ мае два рашэнні;

4) $36^x + 6^x \cdot (a - 1) - 2a^2 + a = 0$ мае два рашэнні?

2.71*. Рашыце сістэму ўраўненняў:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2 - 7x + 12} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^{y^2 - 5y + 6} = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{0,5x} - 2^y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5^{\frac{x}{2}} + 3^y = 8, \\ 5^x - 3^{2y} = 16. \end{cases}$

2.4. Паказальныя няроўнасці

Разгледзім няроўнасці, у якіх зменная (невядомае) знаходзіцца ў паказчыку ступені. Напрыклад,

$$7^{3x^2 - x} < 7^{x^2 + 3x};$$

$$0,09 \leqslant 0,3^{x^2} < 1.$$

Няроўнасці такога выгляду прынята называць ***паказальнымі***.

З тэарэмы аб уласцівасцях паказальнай функцыі (п. 2.2, уласцівасць 8) атрымліваем вынік, які пастаянна выкарыстоўваецца пры рашэнні паказальных няроўнасцей.

Вынік. Няхай $a > 1$. Калі $a^s > a^t$, то $s > t$.
Няхай $0 < a < 1$. Калі $a^s > a^t$, то $s < t$.

Відарысы графікаў паказальнай функцыі падказваюць гэтую ўласцівасць. На рысунку 27 бачна, што пры $a > 1$ большаму значэнню функцыі адпавядае большае значэнне аргумента. А на рысунку 30 бачна, што пры $0 < a < 1$ большаму значэнню функцыі адпавядае меншае значэнне аргумента.

Пры рашэнні паказальных няроўнасцей, як і пры рашэнні паказальных ураўненняў, прыходзіцца выкарыстоўваць запіс абедзвюх частак няроўнасці ў выглядзе ступеней з адной і той жа асновай, раскладанне адной з частак няроўнасці на множнікі, увядзенне новай зменнай.

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць $7^{3x^2 - x} < 7^{x^2 + 3x}$.

Рашэнне. Паколькі з дзвюх ступеней з асновай 7 большая тая, паказчык якой большы, то дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$3x^2 - x < x^2 + 3x.$$

Рэшым яе:

$$2x^2 - 4x < 0,$$
$$2x(x - 2) < 0,$$
$$0 < x < 2.$$

Адказ: (0; 2).

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць $0{,}5^{2x - 3} \geqslant 0{,}25^{1 - x}$.

Рашэнне. Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$0{,}5^{2x - 3} \geqslant 0{,}5^{2(1 - x)}.$$

Паколькі з дзвюх ступеней з аднолькавай асновай 0,5 большая тая, паказчык якой меншы, то маем:

$$2x - 3 \leqslant 2(1 - x),$$
$$4x \leqslant 5,$$
$$x \leqslant \frac{5}{4}.$$

Адказ: $(-\infty; 1{,}25]$.

Прыклад 3. Рашыць няроўнасць $5^{0,3x^2} + 2 \cdot 5^{0,3x^2+2} \leqslant 10,2.$

Рашэнне. Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$5^{0,3x^2}(1 + 2 \cdot 5^2) \leqslant 10,2,$$

адкуль

$$5^{0,3x^2} \cdot 51 \leqslant 10,2,$$

$$5^{0,3x^2} \leqslant \frac{1}{5},$$

$$5^{0,3x^2} \leqslant 5^{-1}.$$

Паколькі з дзвюх ступеней з асновай 5 большая тая, паказчык якой большы, то дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$0,3x^2 \leqslant -1.$$

Рашэнняў няма, паколькі $0,3x^2 \geqslant 0$ пры любых значэннях x.

Адказ: няма рашэнняў.

Прыклад 4. Рашыць няроўнасць

$$7 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} \leqslant 14 \cdot 2^{2x+1} + 40.$$

Рашэнне.

$$7 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} - 14 \cdot 2^{2x+1} \leqslant 40 \Leftrightarrow 2^{2x}(7 \cdot 4 + 5 - 14 \cdot 2) \leqslant 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \leqslant 8 \Leftrightarrow 2^{2x} \leqslant 2^3 \Leftrightarrow x \leqslant 1,5.$$

Адказ: $(-\infty;\ 1,5]$.

Прыклад 5. Рашыць няроўнасць $0,09 \leqslant 0,3^{x^2} < 1.$

Рашэнне. Дадзеную няроўнасць перапішам у выглядзе

$$0,3^2 \leqslant 0,3^{x^2} < 0,3^0.$$

Паколькі з дзвюх ступеней з асновай 0,3 большая тая, паказчык якой меншы, то маем:

$$2 \geqslant x^2 > 0,$$

$$0 < x^2 \leqslant 2,$$

$$0 < |x| \leqslant \sqrt{2},$$

$$-\sqrt{2} \leqslant x < 0 \text{ або } 0 < x \leqslant \sqrt{2}.$$

Адказ: $\left[-\sqrt{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \sqrt{2}\right]$.

Прыклад 6. Рашыць няроўнасць

$$5 \cdot 49^{5|x|-3} - 34 \cdot 7^{5|x|-3} - 7 \leqslant 0.$$

Рашэнне. Няхай $7^{5|x|-3}=t$, тады $49^{5|x|-3}=t^2$. Выкарыстаўшы гэтыя абазначэнні для дадзенай няроўнасці, атрымаем $5t^2-34t-7\leqslant 0$. Рашыўшы гэтую няроўнасць, атрымаем:

$$-\frac{1}{5}\leqslant t\leqslant 7,\ \text{г. зн.}\ \begin{cases} t\geqslant -\frac{1}{5},\\ t\leqslant 7.\end{cases}$$

Паколькі $t=7^{5|x|-3}>0$, то $t\geqslant -\frac{1}{5}$ пры любых значэннях x. Застаецца рашыць другую няроўнасць сістэмы:

$$7^{5|x|-3}\leqslant 7.$$

Атрымаем:

$$5|x|-3\leqslant 1 \Leftrightarrow 5|x|\leqslant 4 \Leftrightarrow |x|\leqslant \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\frac{4}{5}\leqslant x\leqslant \frac{4}{5}.$$

Адказ: $\left[-\frac{4}{5};\ \frac{4}{5}\right]$.

▲**Прыклад 7.** Пры якіх значэннях m любое значэнне x з прамежку [9; 10] з'яўляецца рашэннем няроўнасці

$$3^{2x-m}<81?$$

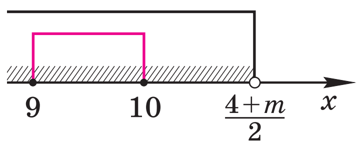
Рашэнне.

$$3^{2x-m}<81 \Leftrightarrow 3^{2x-m}<3^4 \Leftrightarrow 2x-m<4 \Leftrightarrow x<\frac{4+m}{2}.$$

Для таго каб рашэннем няроўнасці $3^{2x-m}<81$ было любое значэнне x з прамежку [9; 10], неабходна, каб прамежак [9; 10] уваходзіў у множства рашэнняў дадзенай няроўнасці, г. зн. у прамежак $\left(-\infty;\ \frac{4+m}{2}\right)$ (рыс. 33).

Такім чынам, маем:

$$10<\frac{4+m}{2} \Leftrightarrow 20<4+m \Leftrightarrow m>16.$$



Рыс. 33

Адказ: пры $m>16$. ▲

?

1. Прывядзіце прыклады паказальных няроўнасцей.
2. Апішыце спосаб рашэння няроўнасцей выгляду:

а) $0{,}375^{f(x)}<0{,}375^{g(x)}$; б) $3{,}75^{f(x)}<3{,}75^{g(x)}$.

3. Апішыце спосаб рашэння няроўнасці выгляду

$$5\cdot 49^{f(x)}-34\cdot 7^{f(x)}-7\geqslant 0.$$

4. Апішыце спосаб рашэння няроўнасці выгляду

$$13 \cdot 6^{f(x)} + 7 \cdot 6^{f(x)+1} < 6^{f(x)+2} + 114.$$

5. Апішыце спосаб рашэння няроўнасці выгляду

$$343 \cdot 7^{g(x)} > \left(\sqrt[4]{7}\right)^{8f(x)}.$$

Практыкаванні

Рашыце няроўнасць (**2.72—2.86**).

2.72°. 1) $3^x > 9$; 2) $6^x < 36$;

3) $\left(\frac{1}{25}\right)^x < \frac{1}{25}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{4}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 2$; 6) $4^x \leqslant \frac{1}{2}$;

7) $2^{3x} \leqslant \frac{1}{8}$; 8) $5^{2x} \geqslant \frac{1}{25}$.

2.73°. 1) $5^{-x} < \sqrt{5}$; 2) $7^{-x} > \sqrt{7}$;

3) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt[3]{12}$; 4) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{x}{4}} > \sqrt[4]{10}$;

5) $9^{-5x} \leqslant \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$; 6) $25^{-3x} \geqslant \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$;

7) $10^{-\frac{2x}{7}} \geqslant 0{,}1$; 8) $0{,}01^{-\frac{4x}{5}} \leqslant 1000$.

2.74°. 1) $2^{x^2-4} \geqslant 1$; 2) $5^{x^2-16} \leqslant 1$;

3) $0{,}7^{x^2-27} < 0{,}7^9$; 4) $0{,}6^{x^2} > 0{,}36^2$;

5) $0{,}25^{-x^2+3x} < 256$; 6) $0{,}5^{-x^2-2x} > 8$;

7) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$; 8) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} \leqslant \frac{121}{169}$.

2.75. 1) $3^{x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$; 2) $5^{4x+3} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

3) $\left(\frac{1}{49}\right)^{2x} < \left(\sqrt{7}\right)^{x^2+3{,}75}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\frac{1}{3}x} > 8^{2\frac{2}{3}-x^2}$;

5) $8 \cdot 2^{x^2-3x} \leqslant (0{,}5)^{-1}$; 6) $9 \cdot 3^{x^2-4x} \geqslant 3^{-1}$.

2.76. 1) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$; 2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \geqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geqslant 8^{3x}$; 4) $\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \leqslant 9^{4x}$;

5) $25 \cdot 0{,}04^{2x} > 0{,}2^{x(3-x)}$; 6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} < 0{,}25^{2x}$.

2.77. 1) $5^{2-3x}-1\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4x}-1\leqslant 0$;

3) $\pi^{\frac{x-3}{x^2+1}}<1$; 4) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{x+5}{x^2-9}}>1$;

5) $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{x^2-4}{x-1}}\geqslant 1$; 6) $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{x^2-16}{x+3}}\leqslant 1$.

2.78. 1) $(0{,}5)^{1-\frac{3}{x}}\geqslant 8\cdot(0{,}5)^x$; 2) $2^{1+\frac{8}{x}}\geqslant 0{,}5\cdot 2^x$;

3) $(0{,}3)^{\frac{x+2}{x-1}}<(0{,}3)^{\frac{2}{x-1}}$; 4) $(0{,}1)^{\frac{x-3}{x+1}}>10^{\frac{3}{x+1}}$;

5) $(0{,}4)^{\frac{3x-1}{x+1}}\leqslant(2{,}5)^{x+1}$; 6) $(0{,}5)^{\frac{3x-4}{x-2}}<2^{x-2}$;

7) $(0{,}5)^{\frac{x^2-4}{x}}>8$; 8) $(0{,}2)^{\frac{x^2-3}{x}}<25$.

2.79. 1) $5^{|x+2|}>625$; 2) $9^{|x-4|}<81$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x+3|}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$; 4) $\left(\frac{4}{9}\right)^{|x-9|}\leqslant\left(\frac{9}{4}\right)^{-x}$;

5) $2^{|2x+3|}\geqslant 2^{|4x-1|}$; 6) $10^{|2x+5|}\leqslant 10^{|7-x|}$.

2.80. 1) $5^{\sqrt{3x-6}}<125$; 2) $4^{\sqrt{4x-1}}>64$;

3) $3^{\sqrt{-x^2-3x+4}}>9$; 4) $7^{\sqrt{x^2+x+1}}<7$.

2.81*. 1) $3^{\sqrt{3x+4}}\geqslant\frac{1}{3^x}$; 2) $2^{\sqrt{24-5x}}\geqslant 2^x$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x^2+x-12}}\geqslant 5^x$; 4) $6^{\sqrt{7+3x}}\geqslant\frac{6}{6^x}$.

2.82*. 1) $5^{\cos x}>1$; 2) $6^{\sin x}<1$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin x}\leqslant 1$; 4) $\left(\frac{5}{11}\right)^{\cos x}\geqslant 1$;

5) $2{,}6^{\operatorname{tg}x}<1$; 6) $0{,}54^{\operatorname{ctg}x}<1$;

7) $0{,}13^{\operatorname{ctg}x}\geqslant 1$; 8) $9{,}68^{\operatorname{tg}x}\geqslant 1$.

2.83*. 1) $0{,}7^{\sin x}<1\frac{3}{7}$; 2) $0{,}4^{\cos x}>\frac{2}{5}$;

3) $6{,}2^{\cos x}\geqslant 6\frac{1}{5}$; 4) $7{,}4^{\sin x}\leqslant\frac{5}{37}$;

5) $4{,}5^{\operatorname{tg}x}\leqslant\frac{2}{9}$; 6) $0{,}65^{\operatorname{ctg}x}\geqslant\frac{13}{20}$;

7) $0{,}24^{\operatorname{ctg}x}>\frac{6}{25}$; 8) $3{,}6^{\operatorname{tg}x}<\frac{5}{18}$.

2.84°. 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$;
2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;
3) $3^{2x+2} - 3^{2x-1} \geqslant 78$;
4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$;
5) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$;
6) $3^{2x-2} + 3^{2x-1} - 3^{2x-4} \leqslant 315$;
7) $2^{x-2} + 8^{\frac{1}{3}x-1} - 4^{\frac{1}{2}x-2} < 10$;
8) $4^{x} - 2^{2x-2} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$;
9) $2^{x-1} + 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} \geqslant 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$;
10) $3^{x+3} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} \leqslant 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.

2.85. 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 \leqslant 0$; 2) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} + 3 < 0$;
3) $9^{x} - 3^{x} - 6 > 0$; 4) $4^{x} - 2^{x} < 12$;
5) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^{x} - 1 \leqslant 0$; 6) $3^{2x+1} + 11 \cdot 3^{x} \geqslant 4$;
7) $3^{2x+2} - 3^{x+4} > 3^{x} - 9$; 8) $9^{x+1} - 3^{x+3} \geqslant 3^{x} - 3$.

2.86. 1) $0{,}04 < 5^{x} < 125$; 2) $\frac{1}{36} < 6^{x} < 36$;
3) $\frac{1}{27} < \left(\sqrt{3}\right)^{x} < 81 \cdot \sqrt[5]{9}$; 4) $\frac{1}{32} < \left(\sqrt{2}\right)^{x} < 64 \cdot \sqrt[4]{4}$;
5) $0{,}125 < 5^{x^2} < 5$; 6) $0{,}0081 < 0{,}3^{x^2} < 1$;
7) $0{,}16 < 0{,}4^{2x-1} < 1$; 8) $0{,}00032 < 0{,}2^{4x-2} < 1$.

2.87. Рашыце сістэму няроўнасцей:

1) $\begin{cases} 6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3-x} \geqslant 9, \\ x^2 - 2x - 3 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{2-3x} - 1 > 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 2 > 0, \\ x^2 - x - 20 < 0; \end{cases}$

5)* $\begin{cases} 3^{x} - 7 > 2, \\ x + 8 < 3 \text{ або } 2x + 4 \geqslant 5; \end{cases}$

6)* $\begin{cases} 4^{x} - 10 < 6, \\ 4x - 1 < -5 \text{ або } 2x + 3 > 5. \end{cases}$

2.88. Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу:

1) $\sqrt[6]{9^{\frac{1}{x}} - \sqrt{3^x}}$; 2) $\sqrt[8]{\sqrt{2^x} - 32^{\frac{1}{x}}}$;

3) $\sqrt{\frac{19}{4^{x+3}} - \frac{12}{4^{x-4}}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{2^x+3} - \frac{1}{2^{x+1}+1}}$.

2.89*. Дакажыце, што пры любых значэннях x правільная няроўнасць:

1) $0{,}09^{\sin^2 x + \cos^2 x - 1} \geqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}$;

2) $7{,}3^{\sin^2 x - 3} \leqslant \left(\frac{3}{7}\right)^{1 + \cos x - 2\cos^2 \frac{x}{2}}$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - \cos x} \geqslant 4{,}5^{\cos^2 x - 5}$;

4) $0{,}07^{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x^4}$.

2.90*. 1) Пры якіх значэннях a любое значэнне x, большае за -1, з'яўляецца рашэннем няроўнасці $5^{x+a} > 125$?

2) Пры якіх значэннях a любое значэнне x, меншае за 1, з'яўляецца рашэннем няроўнасці $4^{x+a} < 16$?

2.5. Лагарыфмы

Мноствам (абсягам) значэнняў паказальнай функцыі $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) з'яўляецца мноства ўсіх дадатных лікаў. Значыць, для любога дадатнага ліку b знойдзецца такое значэнне аргумента c, што

$$a^c = b.$$

Такое значэнне аргумента адзінае, паколькі калі $b = a^c$ і $b = a^d$, то па выніку з п. 2.3 будзе правільнай роўнасць $c = d$. Гэта адзінае значэнне аргумента c называюць ***лагарыфмам ліку b па аснове a*** і абазначаюць $\log_a b$, г. зн.

$$c = \log_a b.$$

Такім чынам, роўнасць $c = \log_a b$ азначае, што $b = a^c$. Сфармулюем азначэнне лагарыфма яшчэ раз.

Азначэнне. **Няхай $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. *Лагарыфмам ліку b па аснове a* называецца паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік a, каб атрымаць лік b.**

Прывядзём некалькі прыкладаў:

а) $\log_5 125 = 3$, паколькі $125 = 5^3$;

б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, паколькі $\frac{1}{125} = 5^{-3}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$, паколькі $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$;

г) $\log_7 1 = 0$, паколькі $1 = 7^0$;

д) $\log_5 (-9)$ не мае сэнсу, паколькі значэнне выразу 9^x пры любых значэннях x дадатнае і не можа быць роўным -9;

е) па азначэнні лагарыфма не маюць сэнсу і такія выразы, як $\log_{-2} 4$, $\log_0 1$, $\log_1 3$, $\log_1 1$, паколькі асновай лагарыфма павінен быць дадатны лік, адрозны ад адзінкі.

Знаходжанне лагарыфма ліку называецца ***лагарыфмаваннем***.

Абазначым $\log_a b = s$. Тады згодна з азначэннем лагарыфма будзе правільнай роўнасць $a^s = b$, г. зн.

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b.}$$

Гэтая роўнасць называецца ***асноўнай лагарыфмічнай тоеснасцю***.

Згодна з гэтай тоеснасцю, напрыклад, маем:

$$5^{\log_5 125} = 125; \qquad 5^{\log_5 \frac{1}{125}} = \frac{1}{125}; \qquad \frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \frac{1}{81}; \qquad 7^{\log_7 1} = 1.$$

! Асноўная лагарыфмічная тоеснасць дазваляе дадзены лік b запісваць у выглядзе ступені з любой дадатнай асновай.

Напрыклад:

$$17 = 3^{\log_3 17} = 0{,}11^{\log_{0,11} 17} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 17}.$$

Лагарыфмы былі вынайдзены ў 1614 г. шатландскім матэматыкам Дж. Неперам (1550—1617) і незалежна ад яго на шэсць гадоў пазней швейцарскім механікам і матэматыкам І. Бюргі (1552—1632).

Абодва даследчыкі хацелі знайсці зручны сродак арыфметычных вылічэнняў, але іх азначэнні лагарыфма розныя і ў абодвух непадобныя на сучасныя.

Разуменне лагарыфма як паказчыка ступені з дадзенай асновай упершыню з'явілася ўжо ў XVIII ст. у працах англійскага матэматыка В. Гардынера (1742 г.). Шырокаму распаўсюджанню гэтага азначэння лагарыфма больш за іншых спрыяў Л. Эйлер, які ўпершыню выкарыстаў у гэтай сувязі і тэрмін «аснова».

Тэрмін «лагарыфм» належыць Неперу. Ён узнік са спалучэння грэчаскіх слоў *логас* — *адносіна* і *арытмас* — *лік*. Слова «лагарыфм», такім чынам, азначала «лік адносіны».

Прыклад 1. а) Запісаць лік $\sqrt{3}$ у выглядзе лагарыфмаў па аснове 3; $\frac{3}{2}$; $\sqrt{7}$.

б) Запісаць лік -5 у выглядзе лагарыфмаў па аснове $\frac{1}{4}$ і x ($x > 0$; $x \neq 1$).

Рашэнне. а) Па азначэнні лагарыфма маем:

$$\sqrt{3} = \log_3 3^{\sqrt{3}},$$
$$\sqrt{3} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{3}},$$
$$\sqrt{3} = \log_{\sqrt{7}} \left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{3}}.$$

б) Па азначэнні лагарыфма маем:

$$-5 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = \log_{\frac{1}{4}} 4^5 = \log_{\frac{1}{4}} 1024;$$
$$-5 = \log_x x^{-5} = \log_x \frac{1}{x^5}.$$

Прыклад 2. Паміж якімі цэлымі лікамі знаходзіцца лік $\log_2 17$?

Рашэнне. Няхай $\log_2 17 = p$, тады правільная роўнасць $2^p = 17$. Паколькі $2^4 = 16 < 17 = 2^p$ і $2^p = 17 < 32 = 2^5$, то $2^4 < 2^p < 2^5$. Па ўласцівасцях паказальнай функцыі з асновай 2 маем $4 < p < 5$. Значыць, $\log_2 17$ знаходзіцца паміж лікамі 4 і 5.

Адказ: $4 < \log_2 17 < 5$.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне:

а) $3^x = 2$; б) $3^x = 2^{x-1}$.

Рашэнне. а) Паколькі $3^x = 2$, то па азначэнні лагарыфма маем

$$x = \log_3 2.$$

б) $3^x = 2^{x-1} \Leftrightarrow 3^x = \frac{2^x}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 2.$

Адказ: а) $\log_3 2$; б) $\log_{\frac{2}{3}} 2$.

Лагарыфмы па аснове 10 маюць асобую назву — ***дзесятковыя лагарыфмы***.
Дзесятковы лагарыфм ліку b абазначаецца $\lg b$.
Такім чынам, $\lg b = \log_{10} b$.

▲ Асобае абазначэнне і назву маюць не толькі дзесятковыя лагарыфмы, але і лагарыфмы, асновай якіх з'яўляецца лік e:

$$\log_e b = \ln b.$$

Такія лагарыфмы называюцца ***натуральнымі***.
Лагарыфмы па аснове e дазваляюць выражаць матэматычную залежнасць, якая характарызуе многія біялагічныя, хімічныя, фізічныя, сацыяльныя і іншыя працэсы. Відаць, гэтым і тлумачыцца назва «натуральныя лагарыфмы», г. зн. прыродныя (гэты тэрмін увёў у 1659 г. італьянскі матэматык П. Менголі).
Натуральныя і дзесятковыя лагарыфмы мелі вялікае значэнне для палягчэння вылічэнняў у XVII—XX стст. да стварэння магутных сучасных вылічальных сродкаў. Натуральныя лагарыфмы маюць і вялікае тэарэтычнае значэнне. ▲

1. Сфармулюйце азначэнне лагарыфма.
2. Сфармулюйце асноўную лагарыфмічную тоеснасць.
3. Як абазначаюцца і называюцца лагарыфмы па аснове 10?
4. Дакажыце, што пры любым $a > 1$:

   а) $\log_a 1 = 0$;   б) $\log_a a = 1$.

Практыкаванні

2.91°. У якую ступень трэба ўзвесці лік 10, каб атрымаць лік:

1) 100; 2) 10 000; 3) 1000;
4) 10; 5) 1; 6) 0,1;
7) 0,001; 8) $\frac{1}{10000}$; 9) $\frac{1}{10^7}$;
10) $\sqrt{10}$; 11) $\frac{1}{\sqrt[5]{10}}$; 12) $\frac{1}{\sqrt[7]{100}}$?

2.92°. Запішыце роўнасць з дапамогай лагарыфма па ўзоры $7^{-2} = \frac{1}{49}$, г. зн. $-2 = \log_7 \frac{1}{49}$:

1) $2^3 = 8$; 2) $3^4 = 81$;
3) $10^3 = 1000$; 4) $64^{\frac{1}{3}} = 4$;
5) $3^1 = 3$; 6) $6^0 = 1$;
7) $0{,}11^2 = 0{,}0121$; 8) $2{,}1^2 = 4{,}41$;
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$; 10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$;
11) $\left(\frac{3}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{3}$; 12) $\left(\frac{9}{20}\right)^{-1} = \frac{20}{9}$.

2.93°. Запішыце лікі 0; −1; 1;−2; 2; −0,3; 0,3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ у выглядзе лагарыфма па аснове:

1) 7; 2) 5; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{6}$;
5) 0,11; 6) 0,2; 7) 2,5; 8) 1,3.

2.94. Запішыце ў выглядзе лагарыфмаў з асновамі 0,1; 2; $\frac{1}{3}$; x ($x > 0$; $x \neq 1$); $x - 2$ ($x > 2$; $x \neq 3$); m^2 ($m \neq 0$; $|m| \neq 1$) лік:

1) −2; 2) −3; 3) −1; 4) $-\frac{1}{2}$;
5) 3; 6) 2; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) 1;
9) $\frac{1}{2}$; 10) $\frac{1}{3}$; 11) 0; 12) 10.

2.95°. Знайдзіце лагарыфм ліку па аснове 3:

1) 9; 2) 1; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{1}{81}$;
5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$; 7) $\sqrt[5]{9}$; 8) $3^{\sqrt{3}}$.

2.96°. Знайдзіце лік, лагарыфм якога па аснове 3 роўны:

1) 0; 2) 1; 3) −1; 4) −3;
5) 2; 6) 3; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{4}$.

2.97. Знайдзіце a, калі $\log_a \frac{1}{16}$ роўны:

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) −4;
5) −1; 6) −2; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{2}$.

Вылічыце (**2.98—2.105**).

2.98°. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 2$; 3) $\log_2 64$;
4) $\log_2 1$; 5) $\log_2 \frac{1}{2}$; 6) $\log_2 \frac{1}{8}$;
7) $\log_2 \frac{1}{64}$; 8) $\log_2 \frac{1}{512}$; 9) $\log_2 \left(2\sqrt[8]{2}\right)$.

2.99°. 1) $\log_3 81$; 2) $\log_3 27$; 3) $\log_3 \frac{1}{3}$;
4) $\log_3 1$; 5) $\log_3 \frac{1}{9}$; 6) $\log_3 3$;
7) $\log_3 243$; 8) $\log_3 \frac{1}{243}$; 9) $\log_3 \left(3\sqrt[10]{9}\right)$.

2.100°. 1) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 1$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 0{,}125$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$;
7) $\log_{\frac{1}{2}} 128$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[8]{2}$; 9) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2.101. 1) $\log_6 \sin \frac{\pi}{2}$; 2) $\log_4 \sin \frac{\pi}{6}$;
3) $\log_{0,25} \cos \frac{\pi}{4}$; 4) $\log_{\frac{1}{8}} \cos \frac{\pi}{3}$;
5) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$; 6) $\log_{0,5} \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$;
7) $\log_3 \operatorname{ctg}(-150°)$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}(-120°)$.

2.102. 1) $\log_{16} \sqrt{2\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - 8\cos \frac{4\pi}{3}}$;
2) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + 2\sin \frac{7\pi}{6}}$;
3) $\log_2 \sqrt{6\sin \frac{5\pi}{6} + 2\cos \frac{5\pi}{3}}$;
4) $\log_3 \sqrt{4\sin \frac{19\pi}{3} - 2\cos \frac{5\pi}{6}}$.

2.103°. 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 10}$; 3) $10^{\log_{10} 1}$;
4) $4^{\log_4 8}$; 5) $2^{\log_2 1}$; 6) $12^{\log_{12} 100}$;
7) $7^{\log_7 7}$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$; 9) $\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_{\frac{3}{16}} \frac{18}{5}}$.

2.104. 1) $\left(2^{\log_2 5}\right)^2$; 2) $\left(6^{\log_6 2}\right)^4$; 3) $25^{\log_5 3}$;

4) $4^{\log_2 6}$; 5) $3^{-\log_3 3}$; 6) $4^{-\log_4 16}$;

7) $27^{-\log_3 2}$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 \frac{1}{3}}$; 9) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_5 10}$.

2.105. 1) $2^{2+\log_2 5}$; 2) $3^{2+\log_3 10}$; 3) $5^{2-\log_5 10}$;
4) $25^{1-\log_{25} 15}$; 5) $5 \cdot 3^{\log_3 4 - 1}$; 6) $4 \cdot 5^{\log_5 10 - 2}$;

7) $27^{\log_3 6 - 1}$; 8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5 + 1}$; 9) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\lg \frac{1}{2} - 2}$.

2.106. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 27)$; 2) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}\right)$;

3) $\log_2\left(\log_5 \sqrt[8]{5}\right)$; 4) $\log_4\left(\log_3 \sqrt{81}\right)$;

5) $\log_3(3\log_2 8)$; 6) $\log_3(3\log_3 27)$;

7) $\log_6(3\log_2 4)^3$; 8) $\lg(5\lg 100)^2$.

2.107. Вылічыце:

1) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$; 2) $4\log_6 216 - 2\log_{0,5} 8$;

3) $2\log_2 \frac{1}{4} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$; 4) $5\log_{\frac{1}{5}} 625 + 8\log_4 1$;

5) $\log_4 \log_{16} 256 + \log_4 2$; 6) $\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$;

7) $\frac{2}{5} \cdot \left(\log_3 81 + 16^{\log_2 3}\right)^{\log_{85} 25}$;

8) $\frac{1}{3} \cdot \left(\lg 10 + 9^{\log_3 7}\right)^{\log_{50} 3}$;

9) $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5}$;

10) $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$.

Рашыце ўраўненне (**2.108—2.110**).

2.108°. 1) $\log_3 x = 3$; 2) $\lg x = 1$; 3) $\log_5 x = 1$;
4) $\lg x = 0$; 5) $\log_4 x = 2$; 6) $\log_7 x = -2$;

7) $\lg x = -1$; 8) $\log_{0,1} x = -2$; 9) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.

2.109. 1) $\log_x 16 = 2$; 2) $\log_x 5 = -1$; 3) $\log_x 81 = -4$;

4) $\log_x\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}$; 5) $\log_x 64 = 6$; 6) $\log_x 36 = -2$;

7) $\log_x \frac{1}{125} = -3$; 8) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; 9) $\log_x 1 = 2$;

10) $\log_x 16 = 4$; 11) $\log_x 1 = -3$; 12) $\log_x \frac{5}{7} = -1$.

2.110. 1) $4^x = 5$; 2) $6^x = 2$; 3) $5^{x-1} = 8$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 6$; 5) $7^{x+1} = 3^x$; 6) $8^{x-2} = 10^x$;

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 5^x$; 8) $2^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; 9) $3^x = \left(\frac{3}{8}\right)^{x+1}$.

2.111. Ці мае сэнс выраз:

1) $\log_2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$; 2) $\log_4\left(5 - 3\sqrt{2}\right)$;

3) $\log_{2-\sqrt{5}} 4$; 4) $\log_{3-\sqrt{10}} \frac{7}{8}$;

5) $\log_{\sin\frac{\pi}{2}} (\pi - 1)$; 6) $\log_{\cos 2\pi} (4 - \pi)$;

7) $\sqrt{\log_2 0{,}6}$; 8) $\sqrt{\log_4 0{,}9}$?

2.112. Паміж якімі цэлымі лікамі знаходзіцца лік:

1) $\log_3 15$; 2) $\log_6 200$; 3) $\log_{0,5} 1000$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 10$; 5) $\log_5 \frac{1}{8}$; 6) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{12}{13}$?

2.6. Асноўныя ўласцівасці лагарыфмаў

Тэарэма 1. Пры любых дадатных значэннях b і c правільныя роўнасці:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c; \quad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \quad (2)$$

Доказ. Дакажам сцверджанне (1).

Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці

$$a^{\log_a(bc)} = bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} =$$

↓ па ўласцівасцях ступені ↓

$$= a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Такім чынам, маем:

$$a^{\log_a(bc)} = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Адсюль па выніку з п. 2.3 атрымліваем роўнасць (1).

Дакажам сцверджанне (2).

Пераўторым левую частку роўнасці (2):

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{b}{c} + \log_a c - \log_a c =$$

↓ выкарыстаўшы роўнасць (1), атрымаем ↓

$$= \log_a\left(\frac{b}{c}\cdot c\right) - \log_a c = \log_a b - \log_a c. \boxtimes$$

Заўважым, што роўнасць (2) можна даказаць тым жа спосабам, што і роўнасць (1), — зрабіце гэта самастойна.

Роўнасць (1) азначае, што *лагарыфм здабытку двух дадатных лікаў роўны суме лагарыфмаў гэтых лікаў.*

Роўнасць (2) азначае, што *лагарыфм дробу з дадатнымі лічнікам і назоўнікам роўны рознасці лагарыфмаў лічніку і назоўніку.*

Заўвага. Роўнасці, даказаныя ў тэарэме 1 (як і іншыя роўнасці гэтага пункта), з'яўляюцца тоеснасцямі. Сапраўды, кожная з іх ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любых значэннях a, b і c, для якіх выразы, што ўваходзяць у роўнасць, маюць сэнс.

Тэарэма 2. Пры любых значэннях s і дадатных значэннях b правільная роўнасць

$$\log_a b^s = s\log_a b. \quad (3)$$

Доказ. Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці

$$a^{\log_a b^s} = b^s = \left(a^{\log_a b}\right)^s =$$

↓ па ўласцівасцях ступені ↓

$$= a^{s\log_a b}.$$

Такім чынам, маем

$$a^{\log_a b^s} = a^{s\log_a b}.$$

Адсюль па выніку з 2.3 атрымліваем роўнасць (3). ☒

Вынік 1. Калі лікі u і v аднаго знака, то мае месца роўнасць

$$\log_a (uv) = \log_a |u| + \log_a |v|. \quad (4)$$

Вынік 2. Пры любым цэлым k і $u \neq 0$ мае месца роўнасць

$$\log_a u^{2k} = 2k\log_a |u|. \quad (5)$$

Дакажыце гэтыя роўнасці самастойна.

Прыклад 1. Знайсці значэнне выразу:

а) $\log_2 60 - \log_2 15$; б) $\lg 125 + \lg 8$; в) $\log_3 243$.

Рашэнне.

а) $\log_2 60 - \log_2 15 = \log_2 \frac{60}{15} = \log_2 4 = 2$;

б) $\lg 125 + \lg 8 = \lg (125 \cdot 8) = \lg 1000 = 3$;

в) $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3 = 5$.

Адказ: а) 2; б) 3; в) 5.

Тэарэма 3. Пры любых значэннях $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ і $c > 0$ правільная роўнасць

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}. \qquad (6)$$

Доказ. *Спосаб* 1. Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці маем

$$b^{\log_b c} = c.$$

Пралагарыфмаваўшы левую і правую часткі гэтай тоеснасці па аснове a, атрымаем

$$\log_a \left(b^{\log_b c}\right) = \log_a c.$$

Прымяніўшы тоеснасць (3), маем

$$\log_b c \cdot \log_a b = \log_a c.$$

Паколькі $b \neq 1$, то $\log_a b \neq 0$. Таму левую і правую часткі гэтай роўнасці можна раздзяліць на $\log_a b$. У выніку атрымаем тоеснасць (6). ☒

Спосаб 2. Няхай $\log_b c = x$, тады $c = b^x$. Пралагарыфмаваўшы абедзве часткі гэтай роўнасці па аснове a, атрымаем

$$\log_a c = \log_a b^x, \text{ г. зн. } \log_a c = x \log_a b.$$

Адкуль маем

$$x = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Такім чынам, $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$. ☒

Тоеснасць (6) называецца ***формулай пераходу ад лагарыфма па адной аснове да лагарыфма па другой аснове***.

Звычайна ў табліцах, калькулятарах даюцца значэнні лагарыфмаў па аснове 10, а калі трэба знайсці значэнне лагарыфма па іншай аснове, карыстаюцца формулай пераходу ад лагарыфма па адной аснове да лагарыфма па другой аснове.

Вынікам з тоеснасці (6) пры аснове $a = c$ з'яўляецца формула

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad (7)$$

(пераканайцеся ў гэтым самастойна).

Прыклад 2. Знайсці значэнне выразу, калі $\log_3 p = m$:

а) $\log_{\sqrt{3}} p^2 - \log_{\frac{1}{3}} p + \log_9 \sqrt{p}$;

б) $\log_{\sqrt{3}} p^4 - \log_4 13 \cdot \log_{13} 4 + 1$.

Рашэнне. а) $\log_{\sqrt{3}} p^2 - \log_{\frac{1}{3}} p + \log_9 \sqrt{p} =$

↓ згодна з тоеснасцю (6) маем ↓

$$= \frac{\log_3 p^2}{\log_3 \sqrt{3}} - \frac{\log_3 p}{\log_3 \frac{1}{3}} + \frac{\log_3 \sqrt{p}}{\log_3 9} =$$

↓ выкарыстаўшы тоеснасць (3), атрымаем ↓

$$= \frac{2\log_3 p}{\frac{1}{2}} - \frac{\log_3 p}{-1} + \frac{\frac{1}{2}\log_3 p}{2} =$$

$$= 4\log_3 p + \log_3 p + \frac{1}{4}\log_3 p =$$

↓ выкарыстаўшы тоеснасць (1), маем↓

$$= \frac{21}{4}\log_3 p =$$

↓ з улікам умовы $\log_3 p = m$ маем↓

$$= 5{,}25m.$$

б) $\log_{\sqrt{3}} p^4 - \log_4 13 \cdot \log_{13} 4 + 1 =$

↓ выкарыстаўшы тоеснасці (6) і (7), атрымаем ↓

$$= \frac{\log_3 p^4}{\log_3 \sqrt{3}} - 1 + 1 =$$

↓ па тоеснасці (3) і з улікам умовы маем ↓

$$= \frac{4\log_3 p}{\frac{1}{2}} = 8m.$$

Адказ: а) $5{,}25m$; б) $8m$.

Вынік 3. Маюць месца тоеснасці:

а) $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q}\log_a b;$ (8)

б) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$ (9)

Тоеснасці (8) і (9) можна даказаць, выкарыстаўшы ўжо даказаныя тоеснасці з гэтага пункта.

Прыклад 3. Спрасціць выраз $A = \dfrac{1}{3 - \log_2 \frac{8}{9}}$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма, пакажам лікі 1 і 3 у выглядзе лагарыфмаў па аснове 2:

$$A = \frac{1}{3 - \log_2 \frac{8}{9}} = \frac{\log_2 2}{\log_2 8 - \log_2 \frac{8}{9}} =$$

↓ па ўласцівасці (2) лагарыфмаў маем ↓

$$= \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{8 \cdot 9}{8}} = \frac{\log_2 2}{\log_2 9} =$$

↓ выкарыстаўшы формулу (7), атрымаем ↓

$$= \log_9 2.$$

Адказ: $A = \log_9 2$.

Развіццё навукі, перш за ўсё астраноміі, ужо ў XVI ст. прывяло да неабходнасці грувасткіх вылічэнняў пры множанні і дзяленні шматзначных лікаў. Гэтыя вылічальныя праблемы былі ў нейкай ступені вырашаны пасля адкрыцця лагарыфмаў і стварэння табліц лагарыфмаў.

?

1. Сфармулюйце тэарэму аб лагарыфме:
   а) здабытку; б) дзелі (дробу); в) ступені.
2. Дакажыце тэарэму аб лагарыфме:
   а) здабытку; б) дзелі (дробу); в) ступені.
3. Запішыце і абгрунтуйце формулу пераходу ад лагарыфма па адной аснове да лагарыфма па другой аснове.

4*. Дакажыце формулу:

   а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; б) $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q}\log_a b$; в) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Практыкаванні

Вылічыце (**2.113—2.115**).

2.113°. 1) $\lg 5 + \lg 2$; 2) $\lg 8 + \lg 125$;
3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 1{,}5$;
5) $\lg 25 + \lg 4$; 6) $\log_6 18 + \log_6 2$.

2.114°. 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$;
5) $\log_{36} 84 - \log_{36} 14$; 6) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$.

2.115°. 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;
2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;
3) $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24$;
4) $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$;
5) $\log_4 91 - \log_4 13 - \log_4 3{,}5$;
6) $\log_5 \frac{1}{3} - \log_5 \frac{1}{150} + \log_5 2{,}5$.

2.116°. Спрасціце выраз:

1) $\log_{3^{15}} 7^5$; 2) $\log_{7^{20}} 4^{15}$;
3) $\log_{2^{18}} 5^{12}$; 4) $\log_{5^{16}} 11^{24}$.

Вылічыце (**2.117—2.119**).

2.117°. 1) $\log_{17} \sqrt[7]{289}$; 2) $\log_9 \sqrt[5]{6561}$;
3) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{625}$; 4) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[5]{343}$;
5) $\log_6 \frac{1}{\sqrt[8]{216}}$; 6) $\log_4 \frac{1}{\sqrt[6]{1024}}$.

2.118°. 1) $\log_4 32$; 2) $\log_{32} 16$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;
4) $\log_4 \frac{1}{128}$; 5) $\log_9 243$; 6) $\log_{2\sqrt{2}} 8$;
7) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64}$; 8) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt{2}$; 9) $\log_{25} \frac{1}{5\sqrt{5}}$.

2.119°. 1) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$; 2) $\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 40\,000$;
3) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 4) $\log_7 196 - 2\log_7 2$;
5) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$; 6) $3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64$;
7) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$; 8) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{27} 16^3$;

9) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;

10) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

Вылічыце (**2.120—2.122**).

2.120°. 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\frac{\lg 5}{\lg 25}$;

4) $\frac{\log_{0,2} 36}{\log_{0,2} \frac{1}{6}}$; 5) $\frac{\lg(3\sqrt{3})}{\lg \frac{1}{3}}$; 6) $\frac{\log_9 \frac{1}{6}}{\log_9 \sqrt{6}}$.

2.121. 1) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; 2) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$;

3) $\frac{\lg 81 + \lg 64}{2\lg 3 + 3\lg 2}$; 4) $\frac{\lg 27 + \lg\sqrt{8}}{\lg 2 + 2\lg 3}$;

5) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$; 6) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;

7) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 8) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$.

2.122. 1) $\log_{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}\right) - \log_{\sqrt{3}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{9\pi}{8}\right)$;

2) $\log_9(2\operatorname{tg} 195°) - \log_9(1 - \operatorname{tg}^2 195°)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}} \sin 375° + \log_{\frac{1}{4}} \cos 375°$;

4) $\log_8 \sin 795° + \log_8 \cos 795°$;

5) $\log_{\sqrt{3}}(2\cos 15° + 2\sin 15°) + \log_{\sqrt{3}}(\cos 15° - \sin 15°)$;

6) $\log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8} - 2\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Знайдзіце значэнне выразу (**2.123—2.124**).

2.123*. 1) $\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+1)$; 2) $\log_{\sqrt{3}+2}(2-\sqrt{3})$;

3) $\log_{2\sqrt{2}+3}(3-2\sqrt{2})$; 4) $\log_{7-2\sqrt{12}}(7+2\sqrt{12})$;

5) $\log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3})$; 6) $\log_{5+2\sqrt{6}}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

2.124*. 1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9} - \frac{\log_{27} 8}{\log_3 4}$;

3) $\left(\dfrac{\lg 125-2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4}+\lg 0{,}2}\right)^2$; 4) $\left(\dfrac{\log_6 25+2\log_6 2}{\log_6\sqrt[3]{0{,}000125}+\log_6\frac{1}{5}}\right)^3$;

5) $\left(\log_7 2+\dfrac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 6) $\left(\log_{13} 4+\dfrac{1}{\log_{25} 13}\right)\lg 13$.

2.125. Спрасціце выраз:

1) $\dfrac{1}{1+\log_2 3}$; 2) $\dfrac{1}{\log_4 5-1}$;

3) $\dfrac{2}{\log_3\frac{4}{5}-1}$; 4) $\dfrac{1-\log_2\frac{3}{7}}{2}$.

2.126. Ці правільная роўнасць:

1) $3^{\log_{11}5}=5^{\log_{11}3}$; 2) $7^{\log_\pi 4}=4^{\log_\pi 7}$;

3) $\log_9 7^4=2\log_3 7$; 4) $\log_{13^{15}} 2^{35}=\dfrac{7}{3}\log_{13} 2$;

5) $7=\log_7 9^7$;

6) $8=\log_3 8^3$;

7) $\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=\log_2 3-\log_2 5$;

8) $\log_3 7\cdot\log_3 2=\log_3 7+\log_3 2$;

9) $5^{\log_5 5^{13}}=13$; 10) $2^{\log_2 7}=7$;

11) $4^{\log_5 12}=12^{\log_5 4}$; 12) $2^{\log_5 6}=5^{\log_2 6}$?

Вылічыце (**2.127—2.132**).

2.127. 1) $\log_5 10\cdot\lg 5$; 2) $\log_3 18\cdot\log_{18} 3$;
3) $\log_2 10\cdot\lg 32$; 4) $\log_4 6\cdot\log_{\sqrt{6}} 16$;
5) $\log_3 25\cdot\log_5 81$; 6) $\log_2 27\cdot\log_3 64$;
7) $\log_3 128\cdot\log_2\dfrac{1}{27}$; 8) $\log_5 49\cdot\log_7\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$.

2.128*. 1) $7^{\frac{1}{\log_8 7}}+3^{\log_5 2}-2^{\log_5 3}$; 2) $4^{\lg 6}+12^{\frac{1}{\log_5 12}}-6^{\lg 4}$;

3) $3^{\frac{1}{\log_8 27}}-5^{\log_6 10}+10^{\log_6 5}$; 4) $9^{\frac{1}{\log_4 81}}-8^{\log_7 5}+5^{\log_7 8}$;

5) $9^{\log_2 12}-12^{\log_2 9}+11^{\frac{1}{4\log_{16} 11}}$;

6) $14^{\frac{1}{3\log_{125} 14}}+15^{\log_3 25}-25^{\log_3 15}$.

2.129. 1) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; 2) $\sqrt{9^{\frac{1}{\log_{15} 3}}+169^{\frac{1}{\log_{20} 13}}}$;

3) $\sqrt{27^{\frac{1}{3\log_{16} 3}}+6^{2-\frac{1}{\log_3 6}}+4^{\frac{1}{\log_8 4}}}$;

4) $\sqrt{8^{\frac{1}{3\log_9 2}}+3^{1+\frac{1}{2\log_4 3}}+1}$.

2.130. 1) $\log_6 3+\log_6 72+\log_4 7\cdot\log_{\sqrt{7}} 2+5^{\log_5 3}$;

2) $\log_5 35-\log_5 7+\log_3 125\cdot\log_{\sqrt{5}} 9-6^{\log_6 2}$;

3) $81^{-\log_{0,5} 3\cdot\log_{\frac{1}{3}} 4+2,5}$;

4) $64^{-\log_{0,25} 9\cdot\log_{\frac{1}{3}} 2+1,5}$.

2.131*. 1) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15} 16$;

2) $\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\ldots\cdot\log_{16} 15$;

3) $\log_{15} 20\cdot\log_{16} 15\cdot\log_{17} 16\cdot\log_{18} 17\cdot\log_{19} 18\cdot\log_{20} 19$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}\cdot\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{6}\cdot\log_{\frac{1}{6}}\frac{1}{7}\cdot\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{8}$.

2.132. 1) $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+5^{\log_{25}(\sqrt{3}+2)^2}$;

2) $6^{\log_{36}(\sqrt{5}-3)^2}+7^{\log_{49}(\sqrt{5}+3)^2}$;

3) $5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+3^{\log_9(2\sqrt{3}-4)^2}$;

4) $2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5+3\sqrt{2}}}+4^{\log_{16}(3\sqrt{2}-5)^2}$.

2.133. Выразіце праз m і n, калі $\log_7 2=m$ і $\log_7 3=n$:

1) $\log_7 6$; 2) $\log_7 1,5$; 3) $\log_7 72$;
4) $\log_7 42$; 5) $\log_7 12$; 6) $\log_7 84$.

2.134. Вядома, што $\log_3 5=m$. Выразіце праз m:

1) $\log_9 15$; 2) $\log_5 45$; 3) $\log_{1875} 375$.

2.135*. Вядома, што $\log_{21} 14=m$ і $\log_{28} 24=n$. Выразіце праз m і n:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_2 7$; 3) $\log_2 21$.

2.136. Знайдзіце значэнне выразу:

1) $\lg\left(10a^4\cdot\sqrt[5]{b^2}\right)$ пры $\lg a=2$; $\lg b=3$;

2) $\lg\left(\frac{1}{100}a^8\cdot\sqrt[4]{b^3}\right)$ пры $\lg a=4$; $\lg b=5$;

3) $\lg(100a\cdot\sqrt[3]{0{,}1})$ пры $\lg a=-2$;

4) $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{10b\sqrt{10\,000}}}{0{,}1b}\right)$ пры $\lg b=-1$;

5) $\lg\left(\frac{a\sqrt{1000}\cdot\sqrt[12]{ab^3}}{10\sqrt{a^2b}}\right)$ пры $\lg a=1$; $\lg b=-1$;

6) $\lg\left(\frac{100^2a^4\cdot\sqrt[4]{a^5b}}{0{,}001\sqrt{ab^5}}\right)$ пры $\lg a=-2$; $\lg b=-1$.

Знайдзіце значэнне x (**2.137—2.138**).

2.137. 1) $\log_5 x=2\log_5 3+4\log_{25}2$;

2) $\log_3 x=9\log_{27}8-3\log_3 4$;

3) $\lg x=3\lg 2+\frac{1}{2}\lg 64-\frac{1}{3}\lg 8$;

4) $\lg x=2\lg 6+\frac{1}{2}\lg 25-\frac{1}{3}\lg 125$;

5) $\lg x=\lg\left(36^{\log_6 5}+10^{2-\lg 4}+4^{\log_4 49}\right)$;

6) $\lg x=\lg\left(0{,}36^{\log_{0,6}4}+4^{2-\log_4 2}-3^{\log_3 16}\right)$.

2.138*. 1) $\lg x=\lg\left(\frac{\log_2^2 10+\log_2 10\cdot\log_2 5-2\log_2^2 5}{\log_2 10+2\log_2 5}\right)$;

2) $\lg x=\lg\left(\frac{\lg^2 5-2\lg 5\cdot\lg 2-3\lg^2 2}{2\lg 5-6\lg 2}\right)$;

3) $\lg x=\lg\left(\frac{\log_5^2 15-\log_5^2 3+2\log_5 15+2\log_5 3}{\log_5 15+\log_5 3}\right)$;

4) $\lg x=\lg\left(\frac{\log_2^2 18-4\log_2^2 3+3\log_2 18+6\log_2 3}{\log_2 18+2\log_2 3}\right)$;

5) $\lg x=\lg\left(4^{\log_2 3}\cdot 3^{\log_3^2 2}-9\cdot 2^{\log_3 2}+2^{\log_4 9}\right)$;

6) $\lg x=\lg\left(7^{\frac{1}{2\log_3 7}}\cdot 7^{\log_7^2 8}-\sqrt{3}\cdot 8^{\log_7 8}+\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 9}\right)$;

7) $\lg x=\lg\big((\log_3 6+\log_6 81+4)(\log_3 6-$

$-\log_{54}36)\log_6 3-\log_3 6\big)$;

8) $\lg x=\lg\big((\log_3 2+\log_2 81+4)(\log_3 2-$

$-2\log_{18}2)\log_2 3-\log_3 2\big)$.

2.7. Лагарыфмічная функцыя

Разгледзім выраз $\log_a x$, дзе x — зменная, a — лік, $a > 0$, $a \neq 1$. Гэты выраз мае сэнс пры любым значэнні $x > 0$ і не мае сэнсу пры любым значэнні $x \leqslant 0$. Такім чынам, натуральным абсягам вызначэння выразу $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ з'яўляецца мноства ўсіх дадатных рэчаісных лікаў, г. зн. прамежак $(0; +\infty)$.

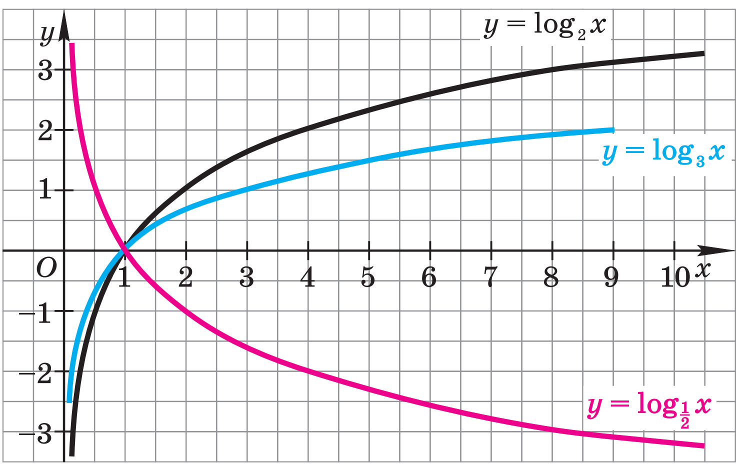
Азначэнне. ***Лагарыфмічнай функцыяй*** **называецца функцыя выгляду $y = \log_a x$, дзе a — лік, $a > 0$, $a \neq 1$.**

Абсяг вызначэння лагарыфмічнай функцыі — гэта натуральны абсяг вызначэння выразу $\log_a x$, г. зн. мноства $(0; +\infty)$.

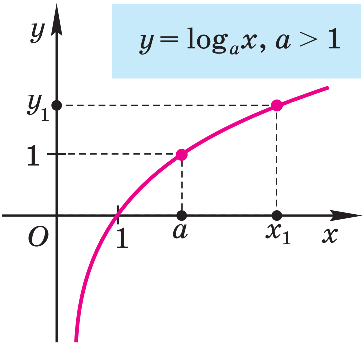
Відарысы графікаў некаторых лагарыфмічных функцый паказаны на рысунку 34. Гэтыя відарысы (як і для графікаў іншых функцый) можна атрымаць, пабудаваўшы іх па пунктах. Адзначым некаторыя асаблівасці паказаных графікаў.

Графік функцыі $y = \log_2 x$ размешчаны справа ад восі Oy і перасякае вось Ox у пункце $(1; 0)$.

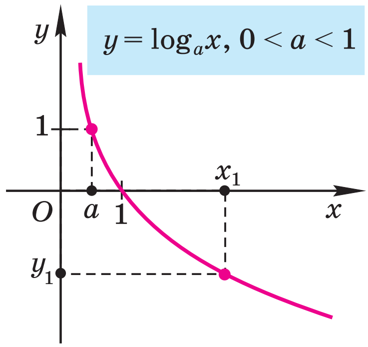
Калі значэнні аргумента x памяншаюцца, г. зн. набліжаюцца да нуля, то графік гэтай функцыі «набліжаецца» да восі Oy і пры гэтым «крута» апускаецца ўніз. А калі значэнні аргумента x павя-



Рыс. 34



Рыс. 35



Рыс. 36

лічваюцца, то графік «павольна» падымаецца ўверх (гл. рыс. 34). Аналагічна для любой функцыі $y = \log_a x$ пры $a > 1$ (рыс. 35).

Графік функцыі $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ размешчаны справа ад восі Oy і перасякае вось Ox у пункце $(1;\ 0)$ (гл. рыс. 34).

Заўважым, што калі значэнні аргумента x памяншаюцца, г. зн. набліжаюцца да нуля, то графік гэтай функцыі «набліжаецца» да восі Oy і пры гэтым «крута» падымаецца ўверх. А калі значэнні аргумента x павялічваюцца, то графік «павольна» апускаецца ўніз. Аналагічна для любой функцыі $y = \log_a x$ пры $0 < a < 1$ (рыс. 36).

Тэарэма (*аб уласцівасцях лагарыфмічнай функцыі* $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$)

1. Абсягам вызначэння лагарыфмічнай функцыі з'яўляецца інтэрвал $(0;\ +\infty)$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў лагарыфмічнай функцыі з'яўляецца мноства $\boldsymbol{R}$ усіх рэчаісных лікаў.

3. Лагарыфмічная функцыя не мае ні найменшага, ні найбольшага значэнняў.

4. Графік лагарыфмічнай функцыі перасякаецца з воссю абсцыс у пункце $(1;\ 0)$ і не перасякаецца з воссю ардынат.

5. Значэнне аргумента $x = 1$ з'яўляецца нулём лагарыфмічнай функцыі.

6. Пры $a > 1$ лагарыфмічная функцыя прымае адмоўныя значэнні на інтэрвале $(0;\ 1)$ і прымае дадатныя значэнні на інтэрвале $(1;\ +\infty)$.

При $0 < a < 1$ лагарыфмічная функцыя прымае адмоўныя значэнні на інтэрвале $(1; +\infty)$ і прымае дадатныя значэнні на інтэрвале $(0; 1)$.

7. Лагарыфмічная функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

8. При $a > 1$ лагарыфмічная функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

При $0 < a < 1$ лагарыфмічная функцыя спадае на ўсім абсягу вызначэння.

9. Лагарыфмічная функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Відарыс графіка лагарыфмічнай функцыі дазваляе наглядна ўявіць гэтыя ўласцівасці.

Мноства (абсяг) значэнняў лагарыфмічнай функцыі — праекцыя яе графіка на вось Oy, а на рысунках 35 і 36 бачна, што гэтая праекцыя ёсць вось Oy. Гэта значыць, што для любога пункта y_1, што ляжыць на восі Oy, знойдзецца такі пункт x_1, які належыць інтэрвалу $(0; +\infty)$, што $y_1 = \log_a x_1$ (*уласцівасць* 2).

Мноства (абсяг) значэнняў лагарыфмічнай функцыі — гэта мноства ўсіх рэчаісных лікаў, а ў ім няма ні найменшага ліку, ні найбольшага (*уласцівасць* 3).

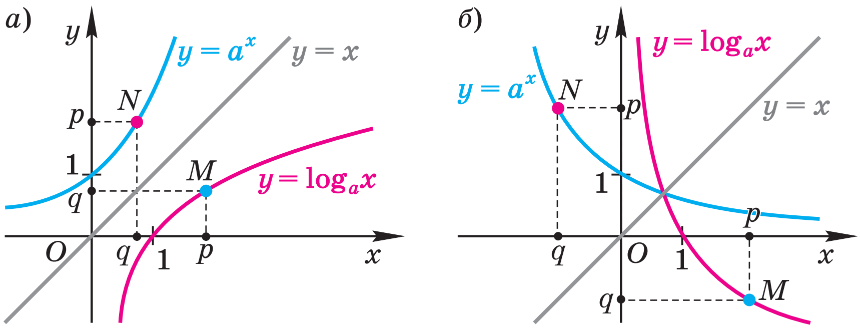
Графік лагарыфмічнай функцыі праходзіць праз пункт $(1; 0)$ і ляжыць у правай паўплоскасці (*уласцівасці* 4, 5).

При $a > 1$ графік лагарыфмічнай функцыі ляжыць у IV каардынатным вугле, калі $x \in (0; 1)$, і ляжыць у I каардынатным вугле, калі $x \in (1; +\infty)$. При $0 < a < 1$ графік лагарыфмічнай функцыі ляжыць у I каардынатным вугле, калі $x \in (0; 1)$, і ляжыць у IV каардынатным вугле, калі $x \in (1; +\infty)$ (*уласцівасць* 6).

Абсяг вызначэння лагарыфмічнай функцыі — інтэрвал $(0; +\infty)$, таму лагарыфмічная функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай, ні перыядычнай (*уласцівасці* 7, 9).

На рысунку 35 бачна, што пры $a > 1$ лагарыфмічная функцыя нарастае на абсягу вызначэння, а на рысунку 36 бачна, што пры $0 < a < 1$ лагарыфмічная функцыя спадае на абсягу вызначэння (*уласцівасць* 8).

Няхай пункт $M(p; q)$ ляжыць на графіку функцыі $y = \log_a x$. Гэта значыць, што правільная лікавая роўнасць $q = \log_a p$, такім чынам, згодна з азначэннем лагарыфма правільная лікавая роўнасць $p = a^q$.



Рыс. 37

У сваю чаргу, апошняя роўнасць азначае, што пункт $N(q; p)$ ляжыць на графіку функцыі $y = a^x$.

Заўважым, што пункты $M(p; q)$ і $N(q; p)$ сіметрычныя адносна прамой $y = x$. Такім чынам, кожнаму пункту M на графіку функцыі $y = \log_a x$ адпавядае сіметрычныя яму адносна гэтай прамой пункт N на графіку функцыі $y = a^x$, і наадварот. Значыць, графікі функцый $y = \log_a x$ і $y = a^x$ сіметрычныя адносна прамой $y = x$ (рыс. 37).

Апошняе сцверджанне дае магчымасць, ведаючы графік функцыі $y = a^x$, паказаць відарыс графіка функцыі $y = \log_a x$ (не выкарыстоўваючы пабудаванне па пунктах).

▲ Сіметрычнасць графікаў функцый $y = \log_a x$ і $y = a^x$ адносна прамой $y = x$ азначае, што гэтыя функцыі ўзаемна адваротныя.

Функцыі $y = f(x)$ і $y = g(x)$ называюцца ***ўзаемна адваротнымі***, калі для любога $x \in D(f)$ правільная роўнасць $g(f(x)) = x$ і для любога $x \in D(g)$ правільная роўнасць $f(g(x)) = x$.

Пакажам, што *паказальная і лагарыфмічная функцыі з адной і той жа асновай а ўзаемна адваротныя.*

Няхай $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$. Тады $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = (0; +\infty)$.

Для любога $x \in \boldsymbol{R}$

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x\log_a a = x.$$

Для любога $x \in (0; +\infty)$

$$f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x.$$

Пакажам, што *графікі ўзаемна адваротных функцый f і g сіметрычныя адносна прамой $y = x$.*

Няхай пункт $M(p; q)$ ляжыць на графіку функцыі $y = f(x)$. Гэта азначае, што правільная лікавая роўнасць $q = f(p)$. Тады па азначэнні ўзаемна адваротных функцый $g(q) = g(f(p)) = p$. А роўнасць $g(q) = p$ азначае, што пункт $N(q; p)$ ляжыць на графіку функцыі $y = g(x)$.

Такім чынам, кожнаму пункту M на графіку $y = f(x)$ адпавядае сіметрычны адносна прамой $y = x$ пункт N на графіку функцыі $y = g(x)$, і наадварот. Значыць, графікі функцый f і g сіметрычныя адносна прамой $y = x$. ▲

?

1. Сфармулюйце азначэнне лагарыфмічнай функцыі.
2. Сфармулюйце тэарэму аб уласцівасцях лагарыфмічнай функцыі.

3*. Абгрунтуйце асноўныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі:
а) пры $a > 1$;
б) пры $0 < a < 1$.

Практыкаванні

Запішыце натуральны абсяг вызначэння выразу (**2.139—2.145**).

2.139°. 1) $\lg x$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x$;
3) $\log_2 (x - 1)$; 4) $\lg(x + 6)$;
5) $\log_3 (3 - x)$; 6) $\lg(6 - x)$;
7) $\log_5 (-2x)$; 8) $\log_{0,2} \left(-\frac{x}{5}\right)$.

2.140. 1) $\lg(2x^2 - 9x + 4)$; 2) $\lg(2x^2 - 5x + 2)$;
3) $\log_4 (2 - 2x^2 + 3x)$; 4) $\log_{0,1} (3 + 5x - 2x^2)$;
5) $\log_{\frac{2}{3}} (4x^2 + 20x + 25)$; 6) $\log_8 (9x^2 - 6x + 1)$;
7) $\log_5 (8x - 16x^2 - 1)$; 8) $\log_{\frac{3}{5}} (28x - 4x^2 - 49)$.

2.141. 1) $\log_5 |x|$; 2) $\log_{1,4} |x - 2|$;
3) $\log_6 x^2$; 4) $\log_2 x^3$.

2.142. 1) $\log_4 \frac{6x - 5}{4x + 1}$; 2) $\log_2 \frac{2 - 3x}{2x + 5}$;
3) $\lg \frac{x + 4}{x(3 - x)}$; 4) $\lg \frac{x(x + 5)}{2 - x}$;

5) $\lg\frac{(2x-3)(6+3x)}{7-4x}$; 6) $\lg\frac{x-1}{(4x+12)(6-x)}$;

7) $\log_{14}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)$; 8) $\log_3\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{4}\right)$.

2.143. 1) $\lg(|x+1|-1)$; 2) $\lg(|5-2x|-1)$;

3) $\lg(|x^2+5x|-6)$; 4) $\lg(|x^2-x|-2)$;

5)* $\lg(|x|+|x+3|-5)$; 6)* $\lg(|x-2|+|x+2|-4)$.

2.144. 1) $\lg\frac{x+2}{|x-2|}$; 2) $\lg\frac{x+4}{|x-5|}$;

3) $\lg\frac{|x^2-9|}{2x-5}$; 4) $\lg\frac{3x+5}{|x^2-25|}$;

5) $\lg\frac{|x-1|}{x^2-2x-8}$; 6) $\lg\frac{x^2+6x-7}{|x+4|}$.

2.145. 1) $\lg(1-\sin x)$; 2) $\lg(1+\cos x)$;

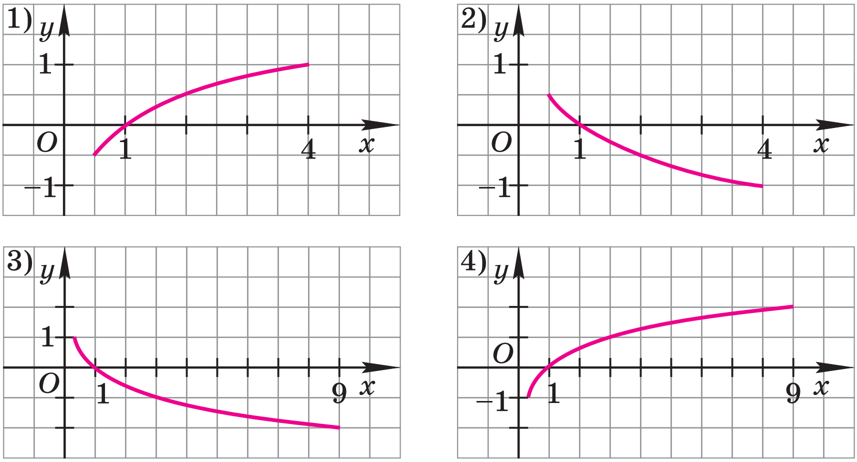
3) $\sqrt{\lg\cos x}$; 4) $\sqrt{\lg\sin x}$;

5) $\lg(\arcsin x)$; 6) $\lg(\arccos x)$.

2.146°. 1) Сярод пунктаў $A(8;\ 3)$, $B\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$, $C(16;\ 2)$, $D\left(\frac{1}{64};\ -3\right)$ выберыце тыя, што належаць графіку функцыі $y=\log_4 x$.
2) Сярод пунктаў $K(5;-1)$, $M\left(\frac{1}{25};\ -2\right)$, $N\left(\frac{1}{5};\ 1\right)$, $P(-5;\ 1)$ выберыце тыя, што належаць графіку функцыі $y=\log_5 x$.

2.147. На рысунку 38 паказаны відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай $y=\log_a x$ на мностве D. Запішыце для яе:

а) значэнне a;
б) абсяг вызначэння;
в) мноства (абсяг) значэнняў;
г) прамежкі нарастання (спадання);
д) каардынаты пункта перасячэння графіка з воссю Ox;
е) прамежкі, на якіх функцыя прымае дадатныя значэнні;
ж) прамежкі, на якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні.



Рыс. 38

2.148. Вызначыце значэнне a і пакажыце відарыс графіка функцыі $y = \log_a x$, ведаючы, што ён праходзіць праз пункт:

1) $A(4;\ 2)$; 2) $B(9;\ -2)$; 3) $C(4;\ -2)$; 4) $M(9;\ 2)$.

2.149. Запішыце некалькі пунктаў, каардынаты якіх задавальняюць ураўненне, што задае функцыю, і пакажыце відарыс графіка функцыі:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;

4) $y = \log_4 x$; 5) $y = \log_2 (-x)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x)$.

2.150. Для функцыі (гл. пр. 2.149) запішыце:

а) абсяг вызначэння;
б) мноства (абсяг) значэнняў;
в) прамежак спадання;
г) прамежак нарастання;
д) значэнні x, пры якіх $y > 0$;
е) значэнні x, пры якіх $y < 0$;
ж) нулі функцыі.

Параўнайце з нулём лік (**2.151—2.152**).

2.151°. 1) $\log_3 8$; 2) $\log_2 2{,}5$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$;

4) $\lg 3{,}8$; 5) $\lg 0{,}45$; 6) $\log_{0{,}2} 2{,}5$;

7) $\log_{0,3} 0,35$; 8) $\log_{1,4} 0,8$; 9) $\log_{0,1} 10$.

2.152. 1) $\log_6 \frac{4}{5} - \log_6 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 7$;

3) $-\log_{\frac{2}{3}} 6$; 4) $-\log_3 8$;

5) $\log_3 8 - 1$; 6) $1 - \log_4 9$;

7) $8 - \lg 106$; 8) $\lg 90 - 2$;

9) $\lg\left(\frac{1}{4}\right)^{-26}$; 10) $\lg\left(\frac{3}{2}\right)^{-10}$.

Параўнайце лікі (**2.153—2.155**).

2.153°. 1) $\log_3 15$ і $\log_3 20$; 2) $\log_4 0,5$ і $\log_4 0,4$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} 6$ і $\log_{\frac{1}{2}} 8$; 4) $\log_{0,2} 1,7$ і $\log_{0,2} 1,8$;

5) $\log_2 3$ і $\log_2 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} 1$ і $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}$;

7) $\log_4 7$ і $\log_5 7$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} 10$ і $\log_{\frac{1}{3}} 10$.

2.154. 1) $\lg\sqrt{0,7}$ і $\lg\frac{8}{13}$; 2) $\lg\sqrt{5}$ і $\lg 3,5$;

3) $\lg^2 0,3$ і $\lg 0,3^2$; 4) $\log_{0,1} 0,6^2$ і $\log^2_{0,1} 0,6$;

5) $\lg(\sin 45°)$ і $\lg(\operatorname{tg} 45°)$; 6) $\lg(\cos 30°)$ і $\lg(\operatorname{tg} 30°)$.

2.155. 1) $\lg 4 + 3^{\log_7 11}$ і $\lg 3 + 11^{\log_7 3}$;

2) $\lg 0,2 + 7^{\log_3 11}$ і $\lg 0,5 + 11^{\log_3 7}$;

3) $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2;

4) 4 і $\log_2 5 + \log_5 3$.

2.156. Ці з'яўляецца спадальнай функцыя:

1) $y = \log_8 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;

3) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; 4) $y = \lg x$;

5) $y = \log_\pi x$; 6) $y = \log_{0,7} x$;

7) $y = \lg\frac{x}{3}$; 8) $y = \log_5 (x + 10)$;

9) $y = \log_3 (3 - x)$; 10) $y = \log_{\frac{1}{2}} (8 - x)$?

2.157. Ці з'яўляецца нарастальнай функцыя:

1) $y = \dfrac{1}{\log_5 x}$; 2) $y = \dfrac{4}{\log_{\frac{1}{6}} x}$;

3) $y = \log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}} x$; 4) $y = \log_{\sin 30^\circ} x$;

5) $y = \log_{\sin\frac{\pi}{3}} (2x)$; 6) $y = \log_{\mathrm{ctg}\, 30^\circ} \dfrac{x}{4}$;

7) $y = \log_{10\sin 60^\circ} (4 + x)$; 8) $y = \log_{\mathrm{ctg}^2 60^\circ} (x - 1)$?

2.158. Пры якіх значэннях a правільная роўнасць:

1) $\log_3 a = 8{,}1$; 2) $\log_2 a = -2{,}5$;

3) $\log_{\frac{1}{4}} a = -2{,}9$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} a = 6{,}7$;

5) $\log_a 8 = 2{,}7$; 6) $\log_a 10 = 0{,}3$;

7) $\log_a 0{,}14 = 5{,}3$; 8) $\log_a 9 = -7$?

2.159. Параўнайце лікі t і p, калі правільная роўнасць:

1) $\log_6 t < \log_6 p$; 2) $\log_9 t > \log_9 p$;

3) $\log_{\frac{1}{5}} t > \log_{\frac{1}{5}} p$; 4) $\log_{0,8} t < \log_{0,8} p$.

2.160. Вызначыце знак здабытку $\lg a \cdot \lg b$, калі:

1) $a > 1$, $b > 1$; 2) $0 < a < 1$, $b > 1$;

3) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$; 4) $a > 1$, $0 < b < 1$.

2.161. Вызначыце знак здабытку $\log_{0,1} a \cdot \log_{0,1} b$, выкарыстаўшы ўмову практыкавання 2.160.

2.162. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

1) $y = \log_2 (x - 2)$; 2) $y = \log_2 (x + 2)$;

3) $y = \log_2 x + 2$; 4) $y = \log_2 x - 2$;

5) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 3)$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x - 3)$;

7) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 3$; 8) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$;

9) $y = \log_2 (2 - x)$; 10) $y = \log_{\frac{1}{2}} (1 - x)$;

11) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$; 12) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1) - 1$.

2.163*. Для функцыі (гл. пр. 2.162) запішыце:

а) абсяг вызначэння;

б) мноства (абсяг) значэнняў;

в) прамежак нарастання;

г) прамежак спадання;

д) значэнні x, пры якіх $y > 0$;

е) значэнні x, пры якіх $y < 0$;

ж) каардынаты пункта перасячэння графіка з воссю Ox;

з) каардынаты пункта перасячэння графіка з воссю Oy.

2.164*. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі, ведаючы, што $a > 1$:

1) $y = \log_a x - 1$; 2) $y = \log_a x + 2$;

3) $y = \log_a (x+1)$; 4) $y = \log_a (x-2)$;

5) $y = \log_a (x-1) + 1$; 6) $y = \log_a (x+2) - 1$;

7) $y = -1 - \log_a x$; 8) $y = 1 - \log_a x$.

2.165*. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі (гл. пр. 2.164), ведаючы, што $0 < a < 1$.

Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі (**2.166—2.167**).

2.166*. 1) $y = \log_2 |x|$; 2) $y = \log_{0,5} |x|$;

3) $y = |\log_2 x|$; 4) $y = |\log_{0,5} x|$;

5) $y = \log_2 (|x| - 2)$; 6) $y = \log_{0,5} (|x| - 1)$;

7) $y = |\log_2 (x+1)|$; 8) $y = |\log_{0,5} (x-2)|$;

9) $y = |\log_2 |x||$; 10) $y = -|\log_{0,5} |x||$.

2.167*. 1) $y = \log_x 1$; 2) $y = \log_x x$;

3) $y = 5^{\log_5 x}$; 4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

5) $y = \log_2 (x^2 - 4) - \log_2 (x-2)$;

6) $y = \log_2 (x^2 + 2x + 1) - \log_2 (x+1)$;

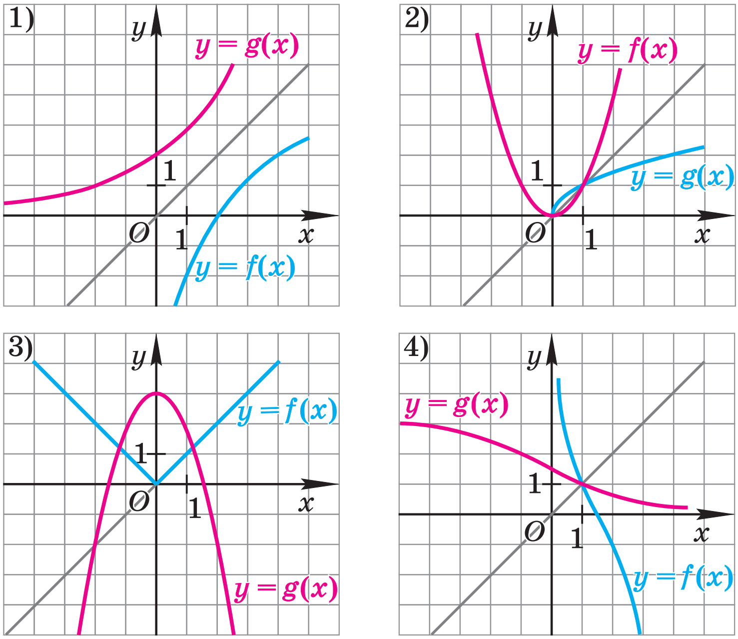
7) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$;

8) $y = \lg(\sin^2 x) + \lg(\cos^2 x)$.

2.168. Вызначыце лік каранёў ураўнення, выкарыстаўшы відарысы графікаў функцый:

1) $1 - x = \log_3 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 2$;

3) $x^2 + 2 = \log_2 x$; 4) $x^2 - 4 = \log_4 x$;



Рыс. 39

5) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$;

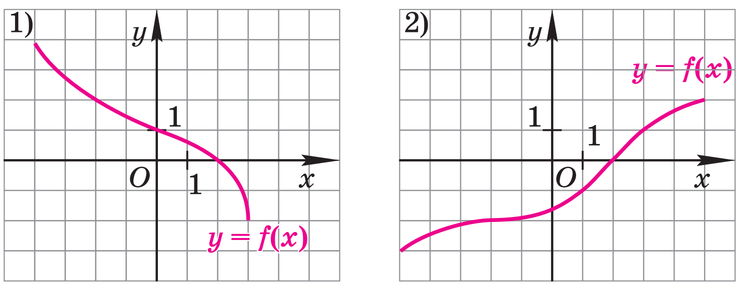
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$;

7) $\log_2 |x| = -0{,}5|x|$;

8) $\log_{0,2} |x| = x^2$.

2.169*. На якім рысунку (рыс. 39) паказаны відарысы графікаў узаемна адваротных функцый?

2.170*. На рысунку 40 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$; перачарціўшы яго ў сшытак, пакажыце відарыс графіка функцыі, адваротнай дадзенай.



Рыс. 40

2.8. Лагарыфмічныя ўраўненні

У гэтым пункце мы разгледзім некаторыя ўраўненні, у якіх зменная (невядомае) знаходзіцца пад знакам лагарыфма. Ураўненні такога выгляду прынята называць ***лагарыфмічнымі***.

Пры рашэнні лагарыфмічных ураўненняў часта будзе выкарыстоўвацца наступнае сцверджанне.

Вынік. Няхай $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$, $v > 0$. Калі $\log_a u = \log_a v$, то $u = v$.

Доказ. Выкарыстаўшы даныя ўмовы і асноўную лагарыфмічную тоеснасць, атрымаем:

$$u = a^{\log_a u} = a^{\log_a v} = v. \boxtimes$$

! Пры рашэнні ўраўненняў часта выкарыстоўваюць сцверджанні з доказанага выніку:

1) $\log_a f(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$

2)* $\log_{f(x)} b = \log_{f(x)} c \Leftrightarrow \begin{cases} b = c, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

Прыклад 1. Рашыць ураўненне $\log_{\sqrt{3}}(7x^2 + 2) = 4$.

Рашэнне. Па азначэнні лагарыфма маем ураўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$7x^2 + 2 = \left(\sqrt{3}\right)^4.$$

Рэшым гэтае ўраўненне:

$$7x^2 = 9 - 2,$$
$$x^2 = 1,$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Адказ: -1; 1.

Прыклад 2. Рашыць ураўненне $\log_5(2x) + \log_5 x = \log_5 8$.

Рашэнне. Дадзенае ўраўненне раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x > 0, & (1) \\ \log_5(2x^2) = \log_5 8. & (2) \end{cases}$$

Ураўненне (2) раўназначна ўраўненню $2x^2 = 8$ (патлумачце чаму).

Рашыўшы яго, атрымаем: $x = -2$ або $x = 2$.

З улікам няроўнасці (1) пакідаем $x = 2$.

Адказ: 2.

Прыклад 3. Рашыць ураўненне

$$\log_2^2(x-1) - 5\log_2(x-1) - 6 = 0.$$

Рашэнне. Абазначыўшы $\log_2(x-1) = t$, атрымаем ураўненне $t^2 - 5t - 6 = 0$, адкуль

$$t = -1 \text{ або } t = 6.$$

Такім чынам, дадзенае ўраўненне раўназначна сукупнасці двух ураўненняў:

$$\log_2(x-1) = -1 \qquad (3)$$

або

$$\log_2(x-1) = 6. \qquad (4)$$

Рашыўшы ўраўненне (3), атрымаем $x - 1 = 2^{-1}$, адкуль $x = 1{,}5$.

Рашыўшы ўраўненне (4), атрымаем $x - 1 = 2^6$, адкуль $x = 65$.

Адказ: 1,5; 65.

Прыклад 4. Рашыць ураўненне $\log_2 x + \log_8 x = -4$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы формулу пераходу да лагарыфма з іншай асновай, атрымаем раўназначнае дадзенаму ўраўненне

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = -4.$$

Рэшым яго:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} = -4 \Leftrightarrow 4\log_2 x = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = -3 \Leftrightarrow x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}.$$

Адказ: $\frac{1}{8}$.

Прыклад 5. Рашыць ураўненне $2^{x+1} = 3^{x-2}$.

Рашэнне. Паколькі $2^{x+1} > 0$ і $3^{x-2} > 0$ пры любых значэннях x, то можна пралагарыфмаваць абедзве часткі дадзенага ўраўнення, напрыклад, па аснове 10; у выніку атрымаем:

$$2^{x+1} = 3^{x-2} \Leftrightarrow (x+1)\lg 2 = (x-2)\lg 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lg 3 - \lg 2)x = 2\lg 3 + \lg 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\lg 3 + \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \Leftrightarrow x = \frac{\lg(3^2 \cdot 2)}{\lg 1{,}5} \Leftrightarrow x = \log_{1,5} 18.$$

Адказ: $\log_{1,5} 18$.

У прыкладзе 5 ураўненне можна пралагарыфмаваць і па іншай аснове, напрыклад па аснове 2 (зрабіце гэта). А можна рашыць яго і так:

$$2^{x+1} = 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 18 \Leftrightarrow x = \log_{1,5} 18.$$

Прыклад 6. Рашыць ураўненне

$$\log_7(x+1) - \log_7(12-2x) = \log_7(3-x). \qquad (5)$$

Рашэнне. *Спосаб* 1 (*захаванне раўназначнасці*).

$$\log_7(x+1) = \log_7(12-2x) + \log_7(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (12-2x)(3-x), \\ x+1 > 0, \\ 12-2x > 0, \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 19x + 35 = 0, \\ x > -1, \\ x < 6, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x = 7 \text{ або } x = \frac{5}{2}\right), \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2{,}5.$$

Адказ: 2,5.

Спосаб 2 (*выкарыстанне ўраўнення-выніку*). З дадзенага ўраўнення вынікае, што

$$\frac{x+1}{12-2x} = 3 - x.$$

Адкуль атрымаем:

$$2x^2 - 19x + 35 = 0,$$
$$x_1 = 7,\ x_2 = 2{,}5.$$

Праверка атрыманых значэнняў па зыходным ураўненні паказвае, што $x_1 = 7$ не з'яўляецца яго коранем. Сапраўды, пры гэтым значэнні выразы $\log_7(12-2x)$ і $\log_7(3-x)$ не маюць сэнсу. Значэнне $x_2 = 2{,}5$ — корань (пераканайцеся ў гэтым).

Прыклад 7. Рашыць ураўненне:

а) $\log_x 16 = 2$;
б) $\log_x 1 = 5$;
в) $\log_x 1 = 0$.

Р а ш э н н е. а) Па азначэнні лагарыфма для ўраўнення $\log_x 16 = 2$ маем: $x > 0$, $x \neq 1$ і $x^2 = 16$. Рашыўшы апошняе ўраўненне, знойдзем:

$$x = -4 \text{ або } x = 4,$$

а паколькі $x > 0$, то атрымаем $x = 4$.

б) Ураўненне $\log_x 1 = 5$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^5 = 1, \end{cases}$$

якая не мае рашэнняў.

Можна разважаць інакш. Паколькі пры $x > 0$, $x \neq 1$ правільная роўнасць $\log_x 1 = 0$, то ўраўненне $\log_x 1 = 5$ не мае рашэнняў.

в) Любы дадатны і адрозны ад 1 лік x з'яўляецца коранем ураўнення $\log_x 1 = 0$ (патлумачце чаму).

А д к а з: а) 4; б) няма рашэнняў; в) $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

П р ы к л а д 8. Рашыць ураўненне $\log_x (5x + 6) = 2$.

Р а ш э н н е:

$$\log_x (5x+6) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5x + 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x = -1 \text{ або } x = 6), \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

А д к а з: 6.

▲ **П р ы к л а д 9.** Рашыць ураўненне з невядомым x:

а) $\log_a x = 3$; б) $\log_2 x = a$.

Р а ш э н н е: а) Калі $a \leqslant 0$ або $a = 1$, то выраз $\log_a x$ не мае сэнсу.

Калі $a > 0$ і $a \neq 1$, то ўраўненне мае адзінае рашэнне $x = a^3$.

б) Пры любым рэчаісным значэнні a ўраўненне $\log_2 x = a$ мае адзінае рашэнне $x = 2^a$.

А д к а з: а) $x = a^3$ пры $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; няма рашэнняў пры $a \in (-\infty;\ 0] \cup \{1\}$; б) $x = 2^a$ пры любым $a \in \boldsymbol{R}$. ▲

1. Сфармулюйце тэарэму аб роўнасці лагарыфмаў з аднолькавымі асновамі.
2. Апішыце спосаб рашэння ўраўнення выгляду:
   а) $\log_a f(x) = b$;
   б) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.
3*. Апішыце спосабы рашэння ўраўнення выгляду
$$\log_a f(x) = \log_a g(x) + \log_a h(x).$$
4*. Апішыце спосабы рашэння ўраўнення выгляду
$$r_1 \log_a^2 f(x) + r_2 \log_a f(x) + r_3 = 0.$$
5*. Апішыце спосабы рашэння ўраўнення выгляду $\log_x f(x) = m$.
6*. Апішыце спосабы рашэння ўраўнення выгляду
$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \ (a > 0,\ b > 0).$$

Практыкаванні

Рашыце ўраўненне (**2.171—2.196**).

2.171°. 1) $\lg(4x + 1) = \lg x$;
2) $\lg(x - 4) = \lg(3x)$;
3) $\log_6(5x + 3) = \log_6(7x + 5)$;
4) $\log_{\frac{2}{3}}(6x + 8) = \log_{\frac{2}{3}}(3x - 1)$;
5) $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 1) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 + x - 3)$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3)$.

2.172°. 1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 1$;
3) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$; 4) $\log_{27} x = \frac{1}{3}$;
5) $\log_{0,1} x = 0$; 6) $\lg x = 0$;
7) $\log_2(-x) = -5$; 8) $\log_{\frac{1}{2}}(-x) = -1$.

2.173°. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 1) = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 5) = -1$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}(4x + 5) = -1$; 4) $\log_4(6x - 1) = 1$;
5) $\log_4(x^2 - 6x) = 2$; 6) $\log_3(x^2 - 8x) = 2$.

2.174. 1) $\lg x^2 = 0$; 2) $\lg x^2 = 2$; 3) $\log_4 x^2 = 3$;
4) $\log_6 x^2 = 0$; 5) $\log_3 x^3 = 0$; 6) $\log_4 x^3 = 6$;
7)* $\ln x^2 = 1$; 8)* $\ln x^7 = -1$.

2.175. 1) $\log_3(x^2-1)=1$; 2) $\log_5(x^2+1)=1$;
3) $\log_{0,5}(3-x^2)=-1$; 4) $\log_{0,2}(6-x^2)=-1$;
5) $\log_9(x-1)^2=1$; 6) $\log_{0,04}(x-2)^2=-1$;
7) $\log_2\left(\sqrt{x}-2\right)=1$; 8) $\log_3\left(\sqrt{x}+1\right)=1$.

2.176. 1) $\log_7\log_2\log_{13}x\ \ =0$; 2) $\log_5\log_4\log_3x\ \ =0$;
3) $\log_{2015}\log_3\log_2x\ \ =0$; 4) $\lg\lg\log_5x\ \ =0$.

2.177. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(3-\log_3(x-2))=0$;
3) $\log_{\frac{1}{3}}(1+\log_2(x-5))=-1$;
4) $\log_{\frac{1}{5}}(2+\log_{\frac{1}{3}}(3+x))=0$.

2.178. 1) $\lg(3x-17)=\lg(x+1)$;
2) $\lg(4x+5)=\lg(5x+2)$;
3) $\lg(2x^2+3x)-\lg(6x+2)=0$;
4) $\log_3(x^2-4x-5)-\log_3(7-3x)=0$;
5) $\lg(5x^2)-\lg(x^3+6x)=0$;
6) $\lg(x^3+6x^2)-\lg(2x^2+12x)=0$.

2.179. 1) $2\lg(x-1)=\lg(5x+1)$;
2) $\log_{0,5}(6-x)=2\log_{0,5}x$;
3) $\lg(4x-3)=2\lg x$;
4) $2\log_{0,2}x=\log_{0,2}(5x^2-x)$;
5) $2\lg(x-1)=\lg(1,5x+1)$;
6) $\lg(12x-x^2-19)=2\lg(x-1)$.

2.180. 1) $\lg(x+1)+\lg(x-1)=\lg 3$;
2) $\log_2(x-5)+\log_2(x+3)=\log_2 9$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;
4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$;
5) $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$;
6) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$.

2.181. 1) $\lg(x-1)=\lg 2+\lg(2x-11)$;
2) $\lg(3x-1)=\lg 5+\lg(x+5)$;
3) $\log_7 x+\log_7(x-2)=\log_7(2x^2-7x+6)$;
4) $\log_3(x^2-x)=\log_3 3+\log_3 x$;

5) $\lg(5x)+\lg\frac{1}{5x}=\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)$;

6) $\lg(8x)-\lg(4x)=\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)$.

2.182. 1) $\log_5 x-\log_{0,2} x=1$; 2) $\log_2 x+\log_8 x=8$;

3) $\log_2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x=9$; 4) $\log_4 x-\log_{16} x=\frac{1}{2}$;

5) $\log_9 x^2+\log_{\sqrt{3}} x=3$; 6) $\log_5 x-\log_{\sqrt{5}} x=1$.

2.183. 1) $\log_5^2 x-\log_5 x=2$;

2) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$;

3) $\lg^2 x-3\lg x-4=0$;

4) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$;

5) $\log_2 4\cdot\log_3^2 x-\log_3 x=0$;

6) $\log_3 9\cdot\log_4^2 x+\log_4 x=0$.

2.184. 1) $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4$;

2) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$;

3) $4\log_4^2(-x)+2\log_4 x^2=-1$;

4) $5\log_{32}^2(-x)=1+2\log_{32} x^2$.

2.185. 1) $2\log_5(\lg x)=\log_5(10-9\lg x)$;

2) $2\log_{0,1}(\lg x)=\log_{0,1}(3-2\lg x)$;

3) $\lg^2 x=\lg(100x)$;

4) $2\log_{16}^2 x=\log_{16}(16x)$;

5) $\lg^2 x+\lg\frac{5}{x}+\lg\frac{2}{x}-4=0$;

6) $\lg^2 x+\lg\frac{25}{x}+\lg\frac{4}{x}-5=0$;

7) $\lg^2(10x)+\lg x=5$;

8) $\log_{\frac{1}{3}}^2\frac{x}{9}+\log_{\frac{1}{3}}^2\frac{x}{3}=1$.

2.186. 1) $5\log_4 x+3\log_x 4=8$;

2) $\log_5 x-\log_x 5=1,5$;

3) $\log_4 x+\log_x\frac{1}{16}=1$;

4) $\log_3 x+\log_x 9=3$;

5) $4\log_{25}(x-1)-\log_3 27+2\log_{x-1}5=1$;

6) $\log_2(1-3x)+\log_3\frac{1}{27}+16\log_{1-3x}2=5$.

2.187. 1) $\log_x 4 = 2$; 2) $\log_x 16 = 4$;
3) $\log_x 1 = 6$; 4) $\log_x 1 = 2$;
5) $\log_x 1 = 3$; 6) $\log_x 1 = 5$;
7) $\log_{x+1} 16 = 4$; 8) $\log_{x-1} 4 = 2$.

2.188*. 1) $\log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2$;
2) $\log_{2x-1}(3{,}5x^2 - 2{,}5x) = 2$;
3) $\log_{x+1}(3x^2 + 2x - 1) = 2$;
4) $\log_{x-2}(2x^2 - 13x + 18) = 1$;
5) $\log_{\frac{1}{x+2}}(2x^2 + 6x - 4) = -2$;
6) $\log_{\frac{1}{1-x}}(2x^2 - 3x - 1) = -2$;
7) $\log_{\sqrt{x+5}}(3x^2 + 16x + 5) = 4$;
8) $\log_{\sqrt{x-4}}(3x^2 - 28x + 64) = 4$.

2.189. 1)° $3^{\log_3 x} = 6$; 2)° $7^{\log_7 x} = 4$;
3)° $8^{\log_8 x^2} = 49$; 4)° $11^{\log_{11} x^2} = 25$;
5) $6^{\log_6 |x+1|} = 10$; 6) $5^{\log_5 |x-1|} = 18$;
7) $5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10$; 8) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;
9) $2^{\lg x} = 16 - x^{\lg 2}$; 10) $7^{\lg x} + x^{\lg 7} - 98 = 0$.

2.190*. 1) $5^x = 7^x$; 2) $13^x = 9^x$;
3) $3^{x-1} = 10^{x-1}$; 4) $4^{x+1} = 7^{x+1}$;
5) $3^x = 2 \cdot 3^{x-1}$; 6) $3^{x+1} = 3 \cdot 7^x$;
7) $8^{|x|-2} = 6^{|x|-2}$; 8) $3^{|x|-4} = 2^{|x|-4}$;
9) $8^{|x-1|-5} = 14^{|1-x|-5}$; 10) $0{,}17^{x^2-1} = 4{,}2^{x^2-1}$.

2.191*. 1) $2^{x^2-1} = 5^{x-1}$; 2) $3^{x+2} = 7^{x^2-4}$;
3) $0{,}1^{9-x^2} = 23^{x+3}$; 4) $6{,}7^{25-x^2} = 0{,}24^{x-5}$.

2.192. 1) $2^x = 3$; 2) $3^x = 18$; 3) $10^x = 20$;
4) $10^x = \frac{1}{5}$; 5) $2^{x+1} = 0{,}2$; 6) $2^{x-1} = 0{,}1$.

2.193*. 1) $x^{\lg x - 3} = 0{,}01$; 2) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;
3) $x^{\log_5 x - 3} = \frac{1}{25}$; 4) $x^{\lg x - 1} = 100$;
5) $x^{\lg x} = 100x$; 6) $x^{\lg x} = 1000x^2$;
7) $x^{\log_3 x^2} = 3x$; 8) $x^{2\lg x} - 10x = 0$.

2.194*. 1) $4^x = 5^{x+7}$; 2) $6^x = 11^{x-1}$;
3) $3^{x-1} = 5^x$; 4) $10^{x-1} = 2^x$;
5) $3^{x-2} = 2^{x+1}$; 6) $7^{x-1} = 5^{x+2}$.

2.195*. 1) $\log_5((x+19)\cos x) = \log_5\left(\frac{x+19}{\cos x}\right)$;

2) $\log_4((x-8)\sin x) = \log_4\left(\frac{x-8}{\sin x}\right)$;

3) $\log_3(2\sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0$;

4) $\log_6(\sin 2x) + \log_{\frac{1}{6}}\left(\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}\right) = 0$;

5) $\log_2(3\cos x - \sin x) + \log_2 \sin x = 0$;

6) $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$.

2.196*. 1) $\left| \log_5 3 \cdot \log_3 x^4 - 2\log_x x^3 \right| = 2\log_x 25$;

2) $\left| 3\log_7 2 \cdot \log_2 x^2 - 3\log_x x^4 \right| = -24\log_x 49$.

2.197*. Рашыце ўраўненне з невядомым x:

1) $\log_a x = 2$; 2) $\log_a(x+1) = 4$;
3) $\lg x = a$; 4) $\log_4(x-1) = a$.

2.198*. Вызначыце, пры якіх значэннях a ўраўненне мае два рашэнні:

1) $\log_2(4^x - a) = x$; 2) $\log_3(9^x + 9a^2) = x$;
3) $x + \log_{\frac{1}{2}}(4^x + a^2) = 0$; 4) $x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - 2a) = 0$.

2.199. Рашыце сістэму ўраўненняў:

1) $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} = 4, \\ \log_x y = \frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0{,}5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^{\log_3(2x-9)} = 9, \\ \lg(x^2 - y^2) - \lg(x-y) = 1. \end{cases}$

2.9. Лагарыфмічныя няроўнасці

У гэтым пункце мы разгледзім некаторыя няроўнасці, у якіх зменная (невядомае) знаходзіцца пад знакам лагарыфма. Няроўнасці такога выгляду прынята называць ***лагарыфмічнымі***.

Пры рашэнні лагарыфмічных няроўнасцей часта будзе выкарыстоўвацца сцверджанне, якое вынікае з уласцівасцей лагарыфмічнай функцыі.

Вынік. Няхай $a > 1$, $u > 0$, $v > 0$. Калі $\log_a u > \log_a v$, то $u > v$.

Няхай $0 < a < 1$, $u > 0$, $v > 0$. Калі $\log_a u > \log_a v$, то $u < v$.

Доказ. Няхай $a > 1$. Паколькі па ўмове $\log_a u > \log_a v$, то, выкарыстаўшы асноўную лагарыфмічную тоеснасць і вынік з пункта 2.4, маем:

$$u = a^{\log_a u} > a^{\log_a v} = v.$$

Доказ сцверджання пры $0 < a < 1$ аналагічны доказу пры $a > 1$. Правядзіце яго самастойна. ☒

! Пры рашэнні няроўнасцей часта выкарыстоўваюцца сцверджанні з даказанага выніку:

1) *Няхай* $a > 1$, *тады*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) *Няхай* $0 < a < 1$, *тады*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

▲ 3) $\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \\ h(x) > 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x), \\ g(x) > 0 \end{cases} \right). \ ▲$$

Прыклад 1. Рашыць няроўнасць:

а) $\log_{0,29}(7x^2 + 2) > \log_{0,29} 9;$

б) $\log_{5,7}(3x-4) < \log_{5,7}(4-x)$;

в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x^2+2) < -4$;

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x+2) > -4$.

Рашэнне. а) Заўважым, што ў няроўнасці

$$\log_{0,29}(7x^2+2) > \log_{0,29} 9$$

выраз $7x^2+2$ прымае дадатныя значэнні пры любых значэннях зменнай x.

Паколькі з двух лагарыфмаў з аднолькавай асновай 0,29 большы той, які бярэцца ад меншага ліку, маем няроўнасць $7x^2+2<9$, раўназначную дадзенай. Рашыўшы яе, маем $x^2<1$, г. зн. $-1<x<1$.

б) Паколькі з двух лагарыфмаў з аднолькавай асновай 5,7 меншы той, што бярэцца ад меншага ліку, то з няроўнасці

$$\log_{5,7}(3x-4) < \log_{5,7}(4-x)$$

вынікае няроўнасць $3x-4<4-x$.

Акрамя таго, павінны выконвацца няроўнасці $3x-4>0$ і $4-x>0$ (патлумачце, чаму няроўнасць $4-x>0$ можна і не запісваць).

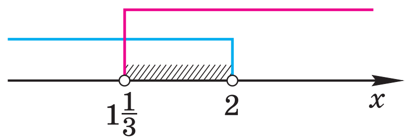
Такім чынам, дадзеная няроўнасць раўназначна сістэме

$$\begin{cases} 3x-4<4-x, \\ 3x-4>0. \end{cases}$$

Рашыўшы гэтую сістэму, атрымаем

$$1\frac{1}{3}<x<2.$$

Рашэнне сістэмы праілюстравана на рысунку 41.



Рыс. 41

Рашэнне гэтага прыкладу можна аформіць так:

$$\log_{5,7}(3x-4) < \log_{5,7}(4-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4<4-x, \\ 3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ x>1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1\frac{1}{3}<x<2.$$

Параўнайце рашэнні прыкладаў а) і б). Чаму ў прыкладзе а) дастаткова рашыць адну няроўнасць $7x^2+2<9$, а не сістэму няроўнасцей, як у прыкладзе б)?

в) Адзначым, што для любых значэнняў x выконваецца няроўнасць $7x^2+2>0$. Паколькі з двух лагарыфмаў з аднолькавай асновай $0<a<1$ большы той, што бярэцца ад меншага ліку, то атрымаем няроўнасць

$$7x^2+2>\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4},$$

раўназначную дадзенай. Рэшым яе:

$$x^2>1,$$
$$|x|>1,$$
$$x<-1 \text{ або } x>1.$$

г) Няроўнасць $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x+2)>-4$ раўназначна няроўнасці

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(7x+2)>\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}.$$

Паколькі $0<\frac{1}{\sqrt{3}}<1$, то $7x+2<\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$, і з улікам абсягу вызначэння лагарыфмічнай функцыі маем раўназначную дадзенай няроўнасці сістэму

$$\begin{cases} 7x+2<9, \\ 7x+2>0. \end{cases}$$

Рашыўшы яе, атрымаем $-\frac{2}{7}<x<1$.

Адказ: а) $(-1;\ 1)$;

б) $\left(1\frac{1}{3};\ 2\right)$;

в) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$;

г) $\left(-\frac{2}{7};\ 1\right)$.

Прыклад 2. Рашыць няроўнасць

$$\log_5(2x) + \log_5 x \geqslant \log_5 8.$$

Рашэнне.

$$\log_5(2x) + \log_5 x \geqslant \log_5 8 \Leftrightarrow \log_5 2 + \log_5 x + \log_5 x \geqslant 3\log_5 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_5 x \geqslant 3\log_5 2 - \log_5 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\log_5 x \geqslant 2\log_5 2 \Leftrightarrow x \geqslant 2.$$

Адказ: $[2; +\infty)$.

Прыклад 3. Рашыць няроўнасць

$$\log^2_{0,5}(x-1) - 5\log_{0,5}(x-1) - 6 \leqslant 0.$$

Рашэнне. *Спосаб* 1. Няхай $\log_{0,5}(x-1) = t$, тады маем $t^2 - 5t - 6 \leqslant 0$, адкуль знаходзім $-1 \leqslant t \leqslant 6$.

Такім чынам, з улікам абазначэння маем:

$$-1 \leqslant \log_{0,5}(x-1) \leqslant 6,$$
$$\log_{0,5} 0,5^{-1} \leqslant \log_{0,5}(x-1) \leqslant \log_{0,5} 0,5^6.$$

Паколькі з двух лагарыфмаў з асновай 0,5 большы той, што бярэцца ад меншага ліку, то атрымаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geqslant x-1 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow \frac{1}{64} \leqslant x-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow 1\frac{1}{64} \leqslant x \leqslant 3.$$

Адказ: $\left[1\frac{1}{64};\ 3\right]$.

Спосаб 2 (*метад інтэрвалаў*). Няхай левая частка няроўнасці абазначана $f(x)$. Знойдзем прамежкі, дзе функцыя $f(x) = \log^2_{0,5}(x-1) - 5\log_{0,5}(x-1) - 6$ прымае недадатныя значэнні. Для гэтага ў абсягу вызначэння функцыі $D(f) = (1; +\infty)$ знойдзем яе нулі: $x_1 = 1\frac{1}{64}$, $x_2 = 3$ (пераканайцеся ў правільнасці вылічэнняў самастойна).

Затым на кожным з прамежкаў $\left(1; 1\frac{1}{64}\right)$ і $\left(1\frac{1}{64}; 3\right)$ вызначым знакі значэнняў функцыі $f(x)$, напрыклад, у пунктах $1\frac{1}{128}$ і 2:

$$f\left(1\frac{1}{128}\right) = 49 - 35 - 6 = 8 > 0,$$
$$f(2) = 0 - 5 \cdot 0 - 6 = -6 < 0.$$

Прыклад 4. Рашыць няроўнасць $\log_2 x + \log_8 x > -4$.

Рашэнне. Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} > -4.$$

Рэшым яе:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{3} > -4 \;\Leftrightarrow\; 4\log_2 x > -12 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \log_2 x > -3 \;\Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 2^{-3}.$$

Паколькі з двух лагарыфмаў з асновай 2 большы той, што бярэцца ад большага ліку, то $x > \frac{1}{8}$.

Адказ: $\left(\frac{1}{8};\ +\infty\right)$.

▲ **Прыклад 5.** Рашыць няроўнасць $\log_x(2 + x) < 1$.

Рашэнне. *Спосаб* 1.

$$\log_x(2 + x) < \log_x x \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{cases} x > 1, \\ 2 + x < x, \\ 2 + x > 0 \end{cases} \text{або} \; \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 + x > x \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ 2 < 0, \\ x > -2 \end{cases} \text{або} \; \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow\; x \in (0;\ 1).$$

Адказ: $(0;\ 1)$.

Спосаб 2.

$$\log_x(2 + x) < 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2 + x)}{\log_2 x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2 + x) - \log_2 x}{\log_2 x} < 0 \Leftrightarrow$$

паколькі функцыя $y = \log_2 x$ нарастальная, лічнік дробу ў левай частцы апошняй няроўнасці прымае толькі дадатныя значэнні, значыць, назоўнік гэтага дробу павінен быць адмоўны

$$\Leftrightarrow \log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Спосаб 3.

$$\log_x(2 + x) < 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2 + x)}{\log_2 x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(2 + x) - \log_2 x}{\log_2 x} < 0.$$

Рэшым апошнюю няроўнасць метадам інтэрвалаў. Няхай

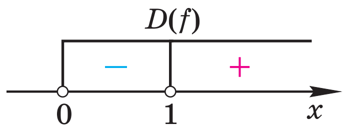
$$f(x) = \frac{\log_2(2 + x) - \log_2 x}{\log_2 x}.$$

Знойдзем $D(f)$: $\begin{cases} 2 + x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$

Такім чынам, $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Знойдзем нулі функцыі f. Паколькі пры любым значэнні x правільная няроўнасць $\log_2 (2 + x) - \log_2 x > 0$ (патлумачце чаму), то функцыя нулёў не мае.

Высветлім і адзначым над каардынатнай прамой (рыс. 42) знакі значэнняў функцыі f на яе абсягу вызначэння. ▲



Рыс. 42

1. Як параўнаць значэнні лагарыфмаў з аднолькавымі асновамі?
2. Апішыце спосабы рашэння няроўнасці выгляду:
а) $\log_5 f(x) \leqslant \log_5 g(x)$; б) $\log_{0,2} f(x) > \log_{0,2} g(x)$.

Практыкаванні

Рашыце няроўнасць (**2.200—2.217**).

2.200°. 1) $\log_2 x \leqslant 1$; 2) $\log_3 x < 2$; 3) $\log_2 x \leqslant \frac{1}{2}$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$; 5) $\log_{0,3} x < 0$; 6) $\log_{0,9} x \leqslant 2$;
7) $\log_3 x > 4$; 8) $\log_{0,4} x > 0$; 9) $\log_{0,5} x \geqslant 0$.

2.201°. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < 0$; 2) $\log_{\frac{2}{3}}\left(3x - \frac{1}{3}\right) < 1$;
3) $\log_{\frac{1}{4}}(3 - 4x) \geqslant -1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(6 - 2x) > -2$;
5) $\log_{16}(4x + 3) > \frac{1}{2}$; 6) $\log_{27}(3x - 4) < \frac{1}{3}$;
7) $\lg(12 - 5x) \leqslant 0$; 8) $\lg(8 - 2x) \geqslant 0$.

2.202. 1) $\log_4(x^2 - 6x + 10) \geqslant 0,5$; 2) $\log_5(x^2 + 2x - 3) \leqslant 1$;
3) $\log_{0,2}(x^2 - 2x - 3) \geqslant -1$; 4) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 4x + 3) \leqslant -1$;
5) $\log_2(x^2 + 3x) < 2$; 6) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) > -1$;
7) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) > -1$; 8) $\log_2(x^2 + x) < 1$.

2.203. 1) $\lg(x^2+2x+2)<\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;

2) $\log_3(x^2+7x-15)>\cos(2016\pi)$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)>\cos\frac{2017\pi}{2}$;

4) $\lg(x^2-8x+13)<\operatorname{ctg}\frac{111\pi}{2}$.

2.204. 1) $\log_3\frac{2-3x}{x}\geqslant-1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{35-x}{x}\geqslant-\frac{1}{2}$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-1}{2-x}<-1$; 4) $\log_3\frac{3x-5}{x+1}<1$;

5) $\lg\frac{3x-17}{x+1}\leqslant 0$; 6) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-4}{x-2}\geqslant 1$.

2.205. 1) $\log_{\sqrt{27}}\log_{\frac{1}{2}}(2+x)>0$; 2) $\log_{81}\log_{\frac{1}{4}}(x-2)<0$;

3) $\log_2\log_{\sqrt{5}}(x-1)<1$; 4) $\log_4\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x)<0{,}5$;

5) $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\sqrt{5}}(x-4)>-1$; 6) $\log_4\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+1)>0{,}5$;

7) $\log_6\log_2\frac{x}{x+4}<0$; 8) $\log_{\frac{1}{6}}\log_3\frac{x}{x+2}>0$.

2.206*. 1) $0{,}4^{\log_{\sqrt{3}}\lg\frac{1}{x}}\geqslant 1$;

2) $40^{\log_{0,1}\log_5\left(-\frac{1}{x}\right)}<1$;

3) $0{,}9^{\log_{\sqrt{2}}\lg(-x)}>1$;

4) $0{,}1^{\lg\log_2\frac{2}{x}}\leqslant 1$.

2.207. 1) $\log_2(3-2x)<\log_2 13$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(1-3x)>\log_{\frac{1}{3}}4$;

3) $\log_{0,7}(2x-7)>\log_{0,7}5$;

4) $\log_{2,7}(3x+8)<\log_{2,7}5$;

5) $\log_2\left(4-\frac{x}{2}\right)-\log_2 8<0$;

6) $\log_{0,25}\left(2-\frac{x}{3}\right)-\log_{0,25}2>0$;

7) $\log_{\sin 2}(x^2+x-2)\geqslant\log_{\sin 2}(6-x)$;

8) $\log_{\cos 1,5}(x^2-x-2)\leqslant\log_{\cos 1,5}(6+x)$.

2.208. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{2}}12>\log_{\frac{1}{2}}10+\log_{\frac{1}{2}}6$;

2) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6)-\log_{\frac{4}{3}}9<\log_{\frac{4}{3}}2-\log_{\frac{4}{3}}6$;

3) $\lg(x-12)+2\lg 4\leqslant\lg 24+\lg 2$;

4) $\log_{\frac{1}{6}}(2x+8)+\log_{\frac{1}{6}}8\geqslant\log_{\frac{1}{6}}12+2\log_{\frac{1}{6}}2$.

2.209. 1) $\log_5(x+13)<\log_5(x+3)+\log_5(x-5)$;

2) $\log_4(x+32)>\log_4(1-x)+\log_4(8-x)$;

3) $\lg(x-3)+\lg x<\lg\left(\frac{9}{2}x+4\right)$;

4) $\log_9(x+1)-\log_9(5-x)>\log_9(2x-3)$.

2.210. 1) $\lg(x+2)+\log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x+2)>-1$;

2) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-1)\geqslant-2$;

3) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2)+3\log_5(x-2)\leqslant 1$;

4) $2\log_2(x+1)+\log_{0,5}(x+1)<2$;

5) $\log_4(x-1)+\log_{\sqrt{2}}(x-1)>2{,}5$;

6) $\log_4(x-3)+\log_2(x-3)\leqslant 1{,}5$.

2.211. 1) $\log^2_{0,2}(x-1)>4$; 2) $\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)\geqslant 1$;

3) $\log^2_3(4-x)<1$; 4) $\log^2_5(5-x)\leqslant 4$.

2.212. 1) $\log^2_3 x-\log_3 x-6<0$;

2) $\log^2_2 x-3\log_2 x-4>0$;

3) $\log^2_3 x-2\log_3 x<3$;

4) $\log^2_{0,2} x-5\log_{0,2} x<-6$;

5) $\log^2_2 x+3\log_2 x>4$;

6) $\lg^2 x-3\lg x>4$;

7) $\lg^2(-x)+\lg x^2<3$;

8) $3\lg^2(-x)-5\lg x^2+3>0$.

2.213. 1) $\log_3^2(5-x)-6\log_3(5-x)+5<0$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2(4-x)-10\log_{\frac{1}{3}}(4-x)+9>0$;

3) $\log_2^2(x-x^2+2)+3\log_{0,5}(x-x^2+2)>-2$;

4) $\log_{0,5}^2(3x-x^2+4)-6\log_2(3x-x^2+4)<-8$.

2.214. 1) $\log_3 x-\log_x 3\geqslant\frac{3}{2}$; 2) $\log_2 x-\log_x 2\leqslant\frac{8}{3}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\frac{5}{2}$; 4) $\log_3 x+\log_x 9<2$.

2.215*. 1) $\log_x(x+2)\leqslant\log_x(3-x)$;

2) $\log_{x-1}(2x-1)\geqslant\log_{x-1}(x+6)$;

3) $\log_{x+3}\frac{x-1}{x+2}\leqslant\log_{x+3}2$;

4) $\log_{x+4}\frac{x-2}{x+3}\leqslant\log_{x+4}2$;

5) $\log_{4-x}(x^2-x-2)\leqslant\log_{4-x}(x+6)$;

6) $\log_{10-x}(x^2+x-2)\leqslant\log_{10-x}(7x-7)$.

2.216*. 1) $\log_{x-5}8>3$; 2) $\log_{x-5}\frac{1}{8}<3$;

3) $\log_{x+1}(5-x)>1$; 4) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;

5) $\log_x(2x-3)<1$; 6) $\log_{x-1}(4-x)>1$.

2.217*. 1) $\log_{x+1}(11x^2+8x-3)>2$; 2) $\log_{2+x}(7x^2+11x-6)<2$;

3) $\log_{2x}(x^2-5x+6)\leqslant 1$; 4) $\log_{4+2x}(x^2+x-2)\geqslant 1$;

5) $\log_{|x-2|}(2x^2-3x+1)\leqslant 0$; 6) $\log_{|x-2|}(2x^2+3x+1)\geqslant 0$;

7) $\log_{x^2}(9-8x)\leqslant 9^{\lg\cos 32\pi}$; 8) $\log_{x^2}(8-7x)>12^{\lg\sin 2,5\pi}$.

Знайдзіце натуральны абсяг вызначэння выразу (**2.218—2.223**).

2.218. 1) $\lg\frac{x^2-6x+8}{x^2-9x+20}$; 2) $\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}$;

3) $\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$; 4) $\lg\frac{x^2-4}{x^2-x-2}+\sqrt[3]{x-6}$.

2.219. 1) $\sqrt{\lg(x^2-7x+13)}$; 2) $\sqrt{\lg(x^2-5x+7)}$;

3) $\sqrt[10]{\log_{0,5}(3x^2-2x)}$; 4) $\sqrt[8]{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)}$;

5) $\sqrt[6]{\log_{\frac{2}{3}}(7-x)-1}$; 6) $\sqrt[4]{1+\log_{0,5}(2-x)}$;

7) $\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$; 8) $\sqrt[12]{\log_{0,1}\frac{x+1}{x-4}}$.

2.220. 1) $\log_{x-1}(7-x)$; 2) $\log_{x+2}(5-x)$;

3) $\log_x(x^2+3x+2)$; 4) $\log_{-x}(x^2+6x-16)$;

5) $\sqrt{\log_{5-x}(x^2-9)}$; 6) $\sqrt{\log_{1-x}(x^2-16)}$.

2.221. 1) $\sqrt{\frac{x^2+4x-5}{\lg(x+2)}}$; 2) $\sqrt{\frac{20-x^2-x}{\lg(x+4)}}$;

3) $\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{\log_2 x-1}$; 4) $\frac{\sqrt{30+x-x^2}}{\log_2(x+2)}$;

5) $\sqrt{\frac{1-\log_3(x^2-2x)}{\sqrt{2x-3}}}$; 6) $\sqrt{\frac{1+\log_{0,5}(x^2+x)}{\sqrt{2x+1}}}$.

2.222. 1) $\sqrt{(\log_{\frac{1}{4}}7-\log_{\frac{1}{3}}7)\cdot\log_3(x-15)}$;

2) $\sqrt{(\log_{\frac{1}{7}}6-\log_{\frac{1}{8}}6)\cdot\log_3(x+12)}$;

3) $\sqrt{\frac{\log_2\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_3\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}}}$; 4) $\sqrt{\frac{\log_3\left(\frac{4x}{3}-5\right)}{\log_2\log_5\frac{13}{4}}}$.

2.223. 1) $\frac{1}{\lg(6-x)}+\sqrt{x-1}$;

2) $\frac{1}{\lg(5x+4)}+\sqrt{3-21x}$;

3) $\lg(x^3-x)+\frac{3}{4-x^2}$;

4) $\lg(x^3+x)-\frac{2}{9-x^2}$;

5) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}+\lg(6-x)$;

6) $\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x+4}}+\lg(x+8)$.

2.224*. Рашыце сістэму няроўнасцей:

1) $\begin{cases} \log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1), \\ x^2 - 4x + 3 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_{0,1}(x+1) > \log_{0,1}(5-x), \\ x^2 - 2x - 3 < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{0,3}(x^2+4) > 0, \\ 3x^2 - 16x + 21 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_2(x^2+8) < 0, \\ -x^2 + 10x - 16 < 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2^{\log_{0,5} x} \leqslant 3, \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 6x + 8} \geqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5^{\log_5 \log_2 (x+2)} \leqslant 3, \\ \dfrac{x^2 - 13x + 40}{x^2 - x - 6} \geqslant 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \lg(x-1) > 0, \\ x^2 + |x-1| + 3 > 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \lg(x+1) < 0, \\ x^2 + |2x-4| + 3 < 0. \end{cases}$

2.225*. Рашыце няроўнасць:

1) $\log_2 \sin\frac{x}{2} < -1;$ 2) $\log_2 \cos\frac{x}{2} > -1;$

3) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1;$ 4) $\log_{\frac{1}{2}} \sin 2x < 1;$

5) $\lg \operatorname{tg} 2x > 0;$ 6) $\log_3 \operatorname{ctg}\frac{x}{2} < 0.$

2.226*. Дакажыце няроўнасць:

1) $\log_5(2 - \cos^2 x) \geqslant 0;$ 2) $\log_3(1 + \cos^4 x) \geqslant 0;$

3) $\log_{0,3}(1 + \sin^6 x) \leqslant 0;$ 4) $\log_{\frac{2}{7}}(3 - \sin^4 x) < 1.$

2.227*. Дакажыце, што пры любых значэннях x, што ўваходзяць у натуральны абсяг вызначэння выразаў, правільная няроўнасць:

1) $\log_{7,4}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - \cos x\right) \geqslant \log_{\frac{4}{7}}(4 - \sin^2 x);$

2) $\log_{0,13}(1 - \sin^4 x) \geqslant \log_{1,3}\left(2\sin^2\frac{x}{2} + \cos x\right);$

3) $\log_{0,6}(2\sin^2 x + \cos 2x) \geqslant \log_{2,8}(1 - \cos^6 x);$

4) $\log_{4,1}(3 - \cos^2 x) \geqslant \log_{\frac{3}{17}}(\sin^2 x + \cos^2 x).$

Матэрыялы для паўтарэння тэарэтычных пытанняў арыфметыкі і алгебры курса матэматыкі 5—11-х класаў

ЛІКІ

Натуральныя і цэлыя лікі

Лікі 1, 2, 3, 4, 5, ..., якія ўзнікаюць пры лічэнні, называюць ***натуральнымі*** або ***цэлымі дадатнымі***. ***Мноства натуральных лікаў*** абазначаецца літарай $\boldsymbol{N}$.

Няхай a і b — натуральныя лікі. Гавораць, што ***a дзеліцца на b***, калі існуе такі натуральны лік s, што $a = bs$. Лік b называецца ***дзельнікам*** ліку a, лік a называецца ***кратным*** ліку b, лік s называецца ***дзеллю*** лікаў a і b.

Натуральны лік, большы за 1, які не мае дзельнікаў, акрамя 1 і самога сябе, называецца ***простым***. Натуральны лік, большы за 1, які мае дзельнік, што адрозніваецца ад 1 і самога сябе, называецца ***састаўным***. Састаўны лік можна раскласці на простыя множнікі, г. зн. выявіць у выглядзе здабытку розных яго простых дзельнікаў, узятых у адпаведных ступенях.

Найбольшым агульным дзельнікам **(*НАД*)** двух натуральных лікаў a і b называецца найбольшы натуральны лік, на які дзеляцца a і b. Калі НАД$(a, b) = 1$, то лікі a і b называюцца ***ўзаемна простымі***.

Найменшым агульным кратным **(*НАК*)** двух натуральных лікаў a і b называецца найменшы натуральны лік, які дзеліцца на a і на b.

Натуральныя лікі называюць таксама ***дадатнымі цэлымі лікамі***.

Лікі выгляду $(-m)$, дзе m — натуральны лік, называюць ***адмоўнымі цэлымі лікамі***. Мноства, якое складаецца з усіх натуральных лікаў, нуля і ўсіх адмоўных лікаў, называецца ***мноствам цэлых лікаў*** і абазначаецца літарай $\boldsymbol{Z}$.

Падзяліць цэлы лік a на натуральны лік b з астачай — гэта значыць выявіць a ў выглядзе

$$a = bs + r,$$

дзе s і r — цэлыя лікі, $0 \leqslant r < b$.

Для любога цэлага ліку a і натуральнага ліку b дзяленне з астачай магчыма, і прычым адназначна.

Дробы. Рацыянальныя лікі

Няхай $n > 1$ — натуральны лік; n-я частка адзінкі абазначаецца $\frac{1}{n}$. Гэтая частка, узятая k разоў (k — натуральны лік), абазначаецца $\frac{k}{n}$ і называецца ***дадатным дробам***.

Дроб $\frac{k}{n}$ называюць яшчэ ***звычайным***. Калі $k < n$, то дроб $\frac{k}{n}$ называецца ***правільным***, а калі $k \geqslant n$, то — ***няправільным***. Усякі натуральны лік можна лічыць дробам з назоўнікам 1.

Дроб $\frac{a}{10^m}$, дзе $m \in \boldsymbol{Z}$, $m \geqslant 0$, запісаны ў выглядзе

$$a_0,\ a_1\ a_2\ a_3 \dots a_m,$$

дзе a_0 — цэлы неадмоўны лік, а $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ — лічбы, называецца ***канечным дзесятковым дробам***.

Дробы са знакам «мінус», г. зн. лікі выгляду $-\frac{k}{n}$, дзе k і n — натуральныя лікі, называюцца ***адмоўнымі дробамі***. Мноства, якое складаецца з усіх дадатных дробаў, нуля і ўсіх адмоўных дробаў, называецца ***мноствам рацыянальных лікаў*** і абазначаецца літарай $\boldsymbol{Q}$.

Азначэнне роўнасці дробаў:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ калі } ad = bc.$$

Асноўная ўласцівасць дробу:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} \quad (k \neq 0).$$

Дроб $\frac{a}{b}$ называецца ***нескарачальным***, калі a і b узаемна простыя.

Правілы дзеянняў над дробамі:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Кожны рацыянальны лік можна выявіць у выглядзе дробу $\frac{m}{n}$, дзе m — цэлы лік, а n — натуральны лік. Калі пры гэтым m —

дадатны, то рацыянальны лік называецца ***дадатным***, а калі m — адмоўны, то рацыянальны лік называецца ***адмоўным***.

Бясконцы дзесятковы дроб, які змяшчае, пачынаючы з нейкага месца пасля коскі, групу лічбаў, што перыядычна паўтараюцца, называецца ***перыядычным***, а гэта група лічбаў называецца ***перыядам***. Колькасць лічбаў у перыядзе называецца ***даўжынёй перыяду***.

Рэчаісныя лікі

Для патрэб матэматыкі рацыянальных лікаў недастаткова і ўводзяцца новыя лікі — ***ірацыянальныя***. Кожны ірацыянальны лік можна выявіць у выглядзе бясконцага неперыядычнага дзесятковага дробу.

Мноства, якое складаецца з усіх рацыянальных і ўсіх ірацыянальных лікаў, называецца ***мноствам рэчаісных лікаў*** і абазначаецца літарай $\boldsymbol{R}$.

Асноўныя ўласцівасці складання і множання рэчаісных лікаў

Перамяшчальны закон:

$$a + b = b + a,$$
$$ab = ba.$$

Спалучальны закон:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$(ab)c = a(bc).$$

Існуюць лікі 0 і 1 такія, што для любога ліку a маюць месца роўнасці:

$$a + 0 = a,$$
$$a \cdot 1 = a.$$

Для любога ліку a існуе ***процілеглы яму лік*** $-a$ і для любога ліку $a \neq 0$ існуе ***адваротны яму лік*** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ такія, што маюць месца роўнасці:

$$a + (-a) = 0,$$
$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Параўнанне рэчаісных лікаў. Рэчаісны лік можа быць або дадатным, або адмоўным, або нулём.

Лік a большы за лік b (a > b), калі рознасць $a - b$ дадатны лік; ***лік a меншы за лік b (a < b)***, калі рознасць $a - b$ адмоўны лік.

Уласцівасці лікавых няроўнасцей (сфармуляваны ў асноўным для строгіх няроўнасцей, але правільныя і для нястрогіх):

1) *калі* $a < b$, *то* $b > a$; *калі* $b > a$, *то* $a < b$;

2) *калі* $a < b$ *і* $b < c$, *то* $a < c$;

3) *калі* $a < b$, *то* $a + c < b + c$;

4) *калі* $a < b$ *і* $c < d$, *то* $a + c < b + d$;

5) *калі* $a < b$ *і* $c > 0$, *то* $ac < bc$;

6) *калі* $a < b$ *і* $c < 0$, *то* $ac > bc$;

7) *калі* $0 < a < b$ *і* $0 < c < d$, *то* $ac < bd$;

8) *калі* $0 < a < b$ *і* n — *натуральны лік, то* $a^n < b^n$;

9) *калі* $0 < a < b$, *то* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

10) *калі* $0 < a < b$, *то* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;

11) *калі* $a \geqslant 0$ *і* $b \geqslant 0$, *то* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ *(сярэдняе арыфметычнае двух неадмоўных лікаў не меншае за іх сярэдняе геаметрычнае)*;

12) $|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Двайныя няроўнасці — гэта няроўнасці выгляду

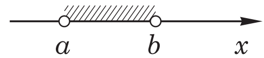
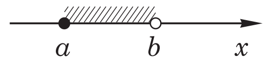
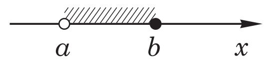
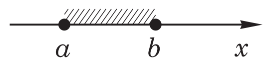
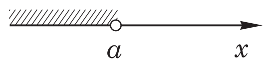
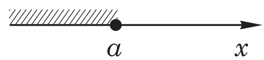
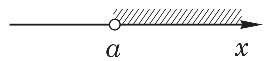
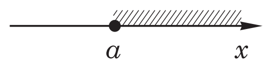
$$a < c < b.$$

Няроўнасць $a < c < b$ азначае, што $c > a$ і $c < b$; гэта можна запісаць і так:

$$\begin{cases} c > a, \\ c < b. \end{cases}$$

Двайныя няроўнасці чытаюць, як правіла, пачынаючы з сярэдняй часткі. Напрыклад, няроўнасць $a < c < b$ чытаецца так: «c большы за a і меншы за b».

Мноства ўсіх лікаў x, якія задавальняюць адну з няроўнасцей $x < a$, $x > a$, $a < x < b$, $x \leqslant a$, $x \geqslant a$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, называецца ***лікавым прамежкам***. У наступнай табліцы прыводзяцца абазначэнні розных лікавых прамежкаў.

Умова, якую задавальняе лік x	Абазначэнне мноства ўсіх лікаў, якія задавальняюць гэтую ўмову	Відарыс гэтага мноства на каардынатнай прамой
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	

Прамежкі $(a;\ b)$, $(-\infty;\ a)$, $(a;\ +\infty)$ называюцца ***інтэрваламі***; прамежак $[a;\ b]$ называецца ***адрэзкам***.

Кожнаму пункту на каардынатнай прамой адпавядае пэўны рэчаісны лік — каардыната гэтага пункта. Наадварот, кожнаму рэчаіснаму ліку a адпавядае пэўны пункт на каардынатнай прамой — пункт з каардынатай a.

Модуль рэчаіснага ліку a (абазначаецца $|a|$) вызначаецца так:

$$|a| = a, \text{ калі } a \geqslant 0, \text{ і } |a| = -a, \text{ калі } a < 0.$$

Рэчаісныя лікі прыбліжаюцца канечнымі дзесятковымі дробамі з дакладнасцю да 10^{-n} з недахопам і з лішкам. Напрыклад, 3,14 — прыбліжэнне ліку $\pi = 3{,}14159...$ з дакладнасцю да 10^{-2} з недахопам, а 3,15 — прыбліжэнне ліку $\pi = 3{,}14159...$ з дакладнасцю да 10^{-2} з лішкам, г. зн. $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

АЛГЕБРАІЧНЫЯ ВЫРАЗЫ

Прапорцыя

Дзель $\frac{a}{b}$ лікаў a і b называецца ***адносінай гэтых лікаў***.

Роўнасць $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ дзвюх адносін $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ называецца ***прапорцыяй***. Прапорцыю можна запісаць і так: $a : b = c : d$. Лікі a і d называюцца ***крайнімі членамі прапорцыі***, b і c — ***сярэднімі членамі прапорцыі*** $\boldsymbol{a : b = c : d}$.

Асноўная ўласцівасць прапорцыі: *здабытак крайніх членаў прапорцыі роўны здабытку сярэдніх членаў*, г. зн. $\boldsymbol{ad = bc}$.

Працэнты

Працэнтам называюць адну сотую:

$$1\% = \frac{1}{100}.$$

Знаходжанне ліку x, роўнага p % ліку A:

$$x = A \cdot p\% = A \cdot \frac{p}{100} = \frac{Ap}{100}.$$

Знаходжанне ліку x, калі p % яго роўны B (г. зн. $x \cdot p\% = B$):

$$x = B : p\% = B : \frac{p}{100} = \frac{100B}{p}.$$

Алгебраічныя выразы. Роўнасці і тоеснасці

Выраз, састаўлены з лікаў або літар, знакаў дзеянняў складання, аднімання, множання, дзялення, узвядзення ў цэлую ступень і здабывання арыфметычнага кораня, а таксама дужак, якія паказваюць на парадак выканання гэтых дзеянняў, называецца ***алгебраічным***. Алгебраічныя выразы бываюць ***цэлымі***, ***рацыянальнымі***, ***ірацыянальнымі***.

Калі ў алгебраічным выразе сустракаецца *дзяленне на нуль, здабыванне кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку* або *ўзвядзенне нуля ў нулявую ці адмоўную ступень*, то гавораць, што такі выраз ***не мае сэнсу***.

Калі ў алгебраічным выразе сустракаюцца літары, якія могуць прымаць розныя значэнні, то гэтыя літары называюцца ***зменнымі***. Наборы значэнняў, якія могуць прымаць зменныя, утвараюць ***абсяг вызначэння выразу***. У абсяг вызначэння выразу могуць уваходзіць толькі такія наборы значэнняў зменных, пры якіх выраз мае сэнс. Усе такія наборы значэнняў утвараюць ***натуральны абсяг вызначэння выразу*** (або, інакш кажучы, *абсяг дапушчальных значэнняў зменных*, якія ўваходзяць у выраз).

Калі ў выраз замест зменных падставіць які-небудзь набор іх значэнняў з абсягу вызначэння выразу і выканаць усе запісаныя ў гэтым выразе дзеянні, то атрыманы ў выніку лік называецца ***значэннем выразу*** пры гэтым наборы зменных.

Калі два выразы A і B злучыць знакам «=», то атрымаецца запіс $A = B$, які называецца ***роўнасцю***. Выраз A называюць ***левай часткай***, а выраз B — ***правай часткай*** роўнасці.

Калі абедзве часткі роўнасці абазначаюць лікі, то яна называецца ***лікавай***. ***Правільная лікавая роўнасць*** — гэта такая роўнасць, у якой абедзве часткі абазначаюць адзін і той жа лік.

Уласцівасці правільнай лікавай роўнасці

1. *Калі да абедзвюх частак правільнай лікавай роўнасці дадаць адзін і той жа лік, то атрымаецца правільная лікавая роўнасць.*

2. *Калі ў правільнай лікавай роўнасці перанесці складаемае з адной часткі ў другую з процілеглым знакам, то атрымаецца правільная лікавая роўнасць.*

3. *Калі абедзве часткі правільнай лікавай роўнасці памножыць або падзяліць на адзін і той жа лік, адрозны ад нуля, то атрымаецца правільная лікавая роўнасць.*

Няхай A і B — выразы. Роўнасць $A = B$ называецца ***тоеснасцю***, калі яна ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць пры любых значэннях зменных, для якіх абодва выразы A і B вызначаны, г. зн. маюць сэнс.

Правільная лікавая роўнасць таксама з'яўляецца тоеснасцю.

Калі $A = B$ — тоеснасць, то выразы A і B называюцца ***тоесна роўнымі***.

Няроўнасці

Калі два выразы A і B злучыць адным са знакаў «>» або «<», то атрымаецца запіс $A > B$ або $A < B$, якія называюць ***няроўнасцю***. Выраз A называюць ***левай часткай няроўнасці***, а выраз B — ***правай часткай няроўнасці***.

Няроўнасці $A < B$ і $C < D$ ($A > B$ і $C > D$) называюць ***няроўнасцямі аднаго знака***, а няроўнасці $A < B$ і $C > D$ называюць ***няроўнасцямі розных знакаў***. Знакі няроўнасцей «<» і «>» называюць ***процілеглымі***.

Калі абедзве часткі няроўнасці абазначаюць лікі, яна называецца ***лікавай***. Лікавая няроўнасць $A < B$ называецца ***правільнай***, калі яе левая частка абазначае лік, меншы, чым правая.

Няроўнасці са знакамі «<» і «>» называюць ***строгімі***.

Нястрогія няроўнасці ўтвараюцца, калі выразы A і B злучаюцца адным са знакаў «⩽» або «⩾». Знак «⩽» чытаецца «менш або роўна» або «не больш», а знак «⩾» чытаецца «больш або роўна» або «не менш».

СТУПЕНІ І КАРАНІ

Ступень з цэлым паказчыкам

Азначэнне ступені. Няхай n — натуральны лік, a — рэчаісны лік. Тады

$$a^n = \underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{n \text{ разоў}} \text{ пры } n \geqslant 2; \quad a^1 = a.$$

Няхай $n \leqslant 0$ — цэлы лік, $a \neq 0$ — рэчаісны лік. Тады

$$a^0 = 1;$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ пры } n < 0.$$

Выраз a^n называецца ***n-й ступенню ліку a***, лік a — ***асновай ступені***, лік n — ***паказчыкам ступені***.

Уласцівасці ступеней. *Для любых рэчаісных лікаў $a \neq 0$, $b \neq 0$ і любых цэлых m і n маюць месца тоеснасці*:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Корань *n*-й ступені (гл. п. 1.2).

Ступень з рацыянальным паказчыкам (гл. п. 1.8).

Дзеянні над ступенямі з рацыянальнымі паказчыкамі (гл. п. 1.9); **параўнанне ступеней з рацыянальнымі паказчыкамі** (гл. п. 1.10).

Ступень з ірацыянальным паказчыкам, ступень з рэчаісным паказчыкам (гл. п. 2.1).

Лагарыфмы (гл. п. 2.5); **асноўныя ўласцівасці лагарыфмаў** (гл. п. 2.6).

Мнагачлены

Адначленам называецца здабытак лікаў і ступеней зменных. Лік 0 (нуль) называецца ***нулявым адначленам***.

Ступенню адначлена называецца сума паказчыкаў ступеней усіх зменных, якія ён змяшчае. Калі адначлен не змяшчае зменных, то яго ступенню лічыцца лік 0.

Ступень нулявога адначлена не вызначана.

Мнагачленам называецца сума адначленаў. Адначлен таксама лічыцца мнагачленам. Адначлены, з якіх складаецца мнагачлен, называюцца яго ***членамі***.

Алгебраічны выраз, які складаецца з мнагачленаў, злучаных знакамі складання, аднімання і множання, называецца ***цэлым***. Алгебраічныя выразы, дзе, акрамя таго, выкарыстана і дзяленне мнагачлена на мнагачлен, называецца ***рацыянальным***.

Формулы скарочанага множання

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$\blacktriangle\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).\ \blacktriangle$$

Алгебраічныя (рацыянальныя) дробы

Алгебраічным (рацыянальным) дробам называецца выраз выгляду $\frac{A}{B}$, дзе A і B — мнагачлены, $B \neq 0$.

Усялякі мнагачлен з'яўляецца алгебраічным (рацыянальным) дробам.

Роўнасць алгебраічных (рацыянальных) дробаў, асноўная ўласцівасць дробу, правілы дзеянняў над алгебраічнымі (рацыянальнымі) дробамі вызначаюцца гэтак жа, як для звычайных дробаў.

УРАЎНЕННІ І СІСТЭМЫ ЎРАЎНЕННЯЎ

Ураўненні з адной зменнай

Роўнасць, якая змяшчае адну зменную, называецца ***ўраўненнем з адной зменнай*** (***адным невядомым***). Значэнне зменнай (невядомага), пры якім ураўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, называецца ***коранем (рашэннем) ураўнення***. ***Рашыць ураўненне*** — гэта значыць знайсці ўсе яго карані (рашэнні) або даказаць, што іх няма.

Два ўраўненні называюцца ***раўназначнымі***, калі кожны корань першага ўраўнення з'яўляецца коранем другога, і наадварот, кожны корань другога ўраўнення з'яўляецца коранем першага. Раўназначнымі лічацца і ўраўненні, якія не маюць рашэнняў.

Уласцівасці ўраўненняў:

1) калі ва ўраўненні перанесці складаемае з адной часткі ў другую з процілеглым знакам, то атрымаецца ўраўненне, раўназначнае дадзенаму;

2) калі абедзве часткі ўраўнення памножыць або падзяліць на адзін і той жа лік, адрозны ад нуля, то атрымаецца ўраўненне, раўназначнае дадзенаму.

Лінейнае ўраўненне

Ураўненне выгляду $ax = b$, дзе a і b — лікі, x — невядомае, называецца ***лінейным***.

Калі $a \neq 0$, то ўраўненне мае адзінае рашэнне $x = \frac{b}{a}$.

Калі $a = b = 0$, то коранем ураўнення з'яўляецца любы лік.

Калі $a = 0$, $b \neq 0$, то ўраўненне не мае каранёў.

Квадратнае ўраўненне

Ураўненне $ax^2 + bx + c = 0$, дзе a, b, c — лікі, $a \neq 0$, x — зменная (невядомае), называецца ***квадратным***. Лік a называецца ***старшым каэфіцыентам***, b — ***сярэднім каэфіцыентам***, c — ***свабодным членам*** квадратнага ўраўнення. (Квадратнае ўраўненне называюць яшчэ *ўраўненнем другой ступені*.)

Дыскрымінант квадратнага ўраўнення $D = b^2 - 4ac$.

Калі $D > 0$, то ўраўненне мае два карані

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Калі $D = 0$, то ўраўненне мае адзіны корань

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Калі $D < 0$, то ўраўненне не мае каранёў.

Квадратнае ўраўненне са старшым каэфіцыентам, роўным 1, называецца ***прыведзеным***.

Квадратны трохчлен — гэта левая частка квадратнага ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$. Карані гэтага ўраўнення называюцца ***каранямі квадратнага трохчлена***, а дыскрымінант — ***дыскрымінантам квадратнага трохчлена***.

Квадратны трохчлен $ax^2 + bx + c$ з дыскрымінантам $D \geqslant 0$ раскладаецца на лінейныя множнікі:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

дзе x_1, x_2 — карані гэтага трохчлена, прычым калі $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, калі $D = 0$, то $x_1 = x_2$.

Калі $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, то x_1 называюць ***кратным коранем квадратнага трохчлена*** $ax^2 + bx + c$ (кратным коранем квадратнага ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$).

У наступнай тэарэме, гаворачы аб суме і здабытку каранёў квадратнага ўраўнення, улічваюць і выпадак кратнага кораня: калі квадратны трохчлен мае кратны корань, тады гэты корань бяруць двойчы.

Тэарэма Віета. Калі x_1 і x_2 — карані прыведзенага квадратнага ўраўнення $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

І наадварот, калі для лікаў x_1 і x_2 правільныя роўнасці $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 і x_2 — карані прыведзенага квадратнага ўраўнення $x^2 + px + q = 0$.

Рацыянальныя ўраўненні

Ураўненне выгляду $\frac{A}{B} = 0$, дзе A і B — мнагачлены ад адной і той жа зменнай, называецца ***рацыянальным***. Рацыянальнае ўраўненне раўназначна сістэме $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$

Ураўненне з дзвюма зменнымі

Роўнасць, якая змяшчае дзве зменныя, называецца ***ўраўненнем з дзвюма зменнымі***. Зменныя ва ўраўненні называюцца таксама ***невядомымі***.

Упарадкаваная пара значэнняў зменных, пры якіх ураўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, называецца ***рашэннем ураўнення з дзвюма зменнымі***.

Два ўраўненні з дзвюма зменнымі называюцца ***раўназначнымі***, калі кожнае рашэнне аднаго ўраўнення з'яўляецца рашэннем другога, і наадварот, г. зн. калі яны маюць адны і тыя ж рашэнні. Раўназначнымі лічацца і ўраўненні, якія не маюць рашэнняў.

Пры рашэнні ўраўненняў з дзвюма зменнымі выкарыстоўваюцца тыя ж уласцівасці, што і пры рашэнні ўраўненняў з адной зменнай.

Графікам ураўнення з дзвюма зменнымі называецца множства ўсіх пунктаў на каардынатнай плоскасці, каардынаты якіх з'яўляюцца рашэннямі гэтага ўраўнення.

Формула адлегласці паміж пунктамі $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Ураўненне акружнасці з цэнтрам у пункце $M(a; b)$ і радыусам R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Сістэмы двух лінейных ураўненняў з дзвюма зменнымі

Калі залежнасць паміж дзвюма зменнымі x і y апісваецца пры дапамозе двух ураўненняў $a_1x + b_1y = c_1$ і $a_2x + b_2y = c_2$, то гавораць аб ***сістэме двух лінейных ураўненняў з дзвюма зменнымі (двума невядомымі)***. Звычайна такая сістэма запісваецца ў выглядзе

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Аналагічна вызначаецца і запісваецца сістэма двух адвольных ураўненняў з дзвюма зменнымі.

Упарадкаваная пара значэнняў зменных, якая адначасоваператварае кожнае ўраўненне сістэмы ў правільную лікавую роўнасць, называецца ***рашэннем сістэмы ўраўненняў***.

Дзве сістэмы ўраўненняў называюцца ***раўназначнымі***, калі кожнае рашэнне адной сістэмы з'яўляецца рашэннем другой, і наадварот, г. зн. калі яны маюць адны і тыя ж рашэнні. Раўназначнымі лічацца і сістэмы, якія не маюць рашэнняў.

Колькасць рашэнняў сістэмы двух лінейных ураўненняў з дзвюма зменнымі:

1) сістэма мае адзінае рашэнне, калі $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

2) сістэма мае бясконца многа рашэнняў, калі $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

3) сістэма не мае рашэнняў, калі $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Няроўнасці з адной зменнай

Няроўнасць, якая змяшчае адну зменную, называецца ***няроўнасцю з адной зменнай*** або ***няроўнасцю з адным невядомым***.

Рашэннем няроўнасці з адной зменнай называецца такое значэнне зменнай (невядомага), пры якім гэтая няроўнасць ператвараецца ў правільную лікавую няроўнасць. ***Рашыць няроўнасць*** — гэта значыць знайсці ўсе яе рашэнні або даказаць, што іх няма.

Дзве няроўнасці называюцца ***раўназначнымі***, калі кожнае рашэнне адной няроўнасці з'яўляецца рашэннем другой, і наадварот, г. зн. калі яны маюць адны і тыя ж рашэнні. Раўназначнымі лічацца і няроўнасці, якія не маюць рашэнняў.

Уласцівасці няроўнасцей:

1) калі ў няроўнасці перанесці складаемае з адной часткі ў другую з процілеглым знакам, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай;

2) калі абедзве часткі няроўнасці памножыць або падзяліць на адзін і той жа дадатны лік, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай;

3) калі абедзве часткі няроўнасці памножыць або падзяліць на адзін і той жа адмоўны лік і памяняць знак няроўнасці на процілеглы, то атрымаецца няроўнасць, раўназначная дадзенай.

Лінейнай няроўнасцю з адным невядомым называецца няроўнасць выгляду $ax > b$ $(ax \geqslant b,\ ax < b,\ ax \leqslant b)$, дзе a і b — лікі, x — невядомае.

Квадратнай няроўнасцю (няроўнасцю другой ступені) з адным невядомым называецца няроўнасць выгляду $ax^2 + bx + c > 0$ $(ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leqslant 0)$, дзе $a \neq 0,\ b, c$ — лікі, x — невядомае.

Рацыянальнай няроўнасцю называецца няроўнасць выгляду $\frac{A}{B} > 0$ $\left(\frac{A}{B} \geqslant 0,\ \frac{A}{B} < 0,\ \frac{A}{B} \leqslant 0\right)$, дзе A і B — мнагачлены ад адной і той жа зменнай.

ФУНКЦЫІ

Функцыяй, зададзенай на лікавым мностве D, называецца закон, па якім кожнаму значэнню x з мноства D ставіцца ў адпаведнасць адзін пэўны лік y.

Пры гэтым x называецца ***незалежнай зменнай*** або ***аргументам***, y — ***залежнай зменнай*** або ***функцыяй ад x***, а мноства D — ***абсягам вызначэння функцыі***.

У алгебры асноўным ***спосабам задання функцыі*** з'яўляецца *формула*, левая частка якой — гэта залежная зменная, а правая — выраз з незалежнай зменнай.

Функцыя можа быць зададзена таксама *табліцай, графікам, апісаннем*.

Звычайна функцыя абазначаецца якой-небудзь літарай, напрыклад f, тады яе значэнне ў пункце x абазначаецца $f(x)$, а той факт, што y з'яўляецца функцыяй ад x, запісваецца так: $y = f(x)$.

Абсяг вызначэння функцыі f абазначаецца $D(f)$.

Калі функцыя зададзена формулай $y = f(x)$, а яе абсяг вызначэння не названы, то лічыцца, што абсяг вызначэння складаецца з усіх тых значэнняў x, пры якіх выраз $f(x)$ мае сэнс.

Мноства ўсіх значэнняў, якія можа прымаць функцыя f, называецца ***мноствам (абсягам) значэнняў*** гэтай ***функцыі***; яно абазначаецца $E(f)$.

Графікам функцыі f называецца мноства ўсіх пунктаў $(x; f(x))$ каардынатнай плоскасці, дзе $x \in D(f)$.

Нулём функцыі f называецца тое значэнне x, пры якім правільная роўнасць $f(x) = 0$.

Інтэрвал, на якім значэнні функцыі маюць пастаянны знак (яны або толькі дадатныя, або толькі адмоўныя), называецца інтэрвалам ***знакапастаянства функцыі***.

Функцыя f называецца ***нарастальнай у некаторым прамежку***, калі ў гэтым прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае большае значэнне функцыі, г. зн.

$$\text{калі } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1).$$

Функцыя f называецца ***спадальнай у некаторым прамежку***, калі ў гэтым прамежку большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне функцыі, г. зн.

$$\text{калі } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1).$$

Функцыя f называецца ***няцотнай***, калі яе абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля і для любога $x \in D(f)$ правільная роўнасць

$$f(-x) = -f(x).$$

Графік няцотнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат.

Функцыя f называецца ***цотнай***, калі яе абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля і для любога $x \in D(f)$ правільная роўнасць

$$f(-x) = f(x).$$

Графік цотнай функцыі сіметрычны адносна восі Оу каардынатнай плоскасці.

Функцыя f называецца ***перыядычнай*** з перыядам $T \neq 0$, калі для любога значэння x з абсягу вызначэння функцыі лікі $x + T$ і $x - T$ таксама належаць абсягу вызначэння і пры гэтым правільная роўнасць $f(x + T) = f(x)$.

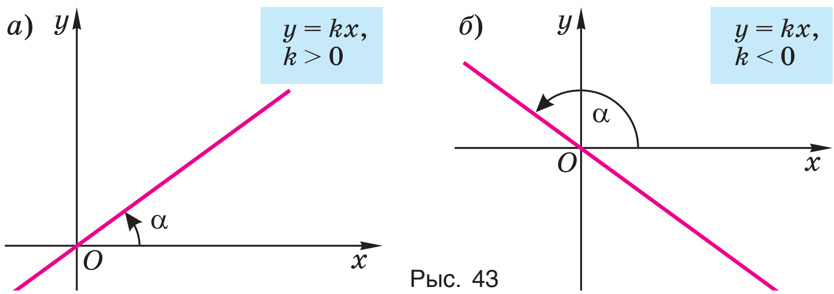
Калі лік T — перыяд функцыі f, то перыядам функцыі f з'яўляецца лік kT пры любым цэлым $k \neq 0$.

Калі $y = f(x)$ — перыядычная функцыя з перыядам T, то $y = f(px)$ — перыядычная функцыя з перыядам $\frac{T}{p}$.

Прамая прапарцыянальнасць

Прамой прапарцыянальнасцю называецца функцыя выгляду $y = kx$, дзе $k \neq 0$.

Графікам прамой прапарцыянальнасці з'яўляецца прамая, якая праходзіць праз пачатак каардынат і ўтварае з воссю Ox вугал α такі, што $\operatorname{tg} \alpha = k$ (рыс. 43).



Рыс. 43

Прамая прапарцыянальнасць з'яўляецца прыватным выпадкам лінейнай функцыі.

Уласцівасці прамой прапарцыянальнасці — функцыі, зададзенай формулай $y = kx$, дзе $k \neq 0$

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$.

3. Функцыя не прымае ні найбольшага, ні найменшага значэнняў.

4. Графік функцыі мае з восямі каардынат адзіны пункт перасячэння (0; 0) — пачатак каардынат.

5. Значэнне $x = 0$ з'яўляецца нулём функцыі.

6. Пры $k > 0$: калі $x \in (0; +\infty)$, то $y > 0$;
калі $x \in (-\infty; 0)$, то $y < 0$.
Пры $k < 0$: калі $x \in (0; +\infty)$, то $y < 0$;
калі $x \in (-\infty; 0)$, то $y > 0$.
Такім чынам, $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ — прамежкі знакапастаянства функцыі.

7. Функцыя з'яўляецца няцотнай.

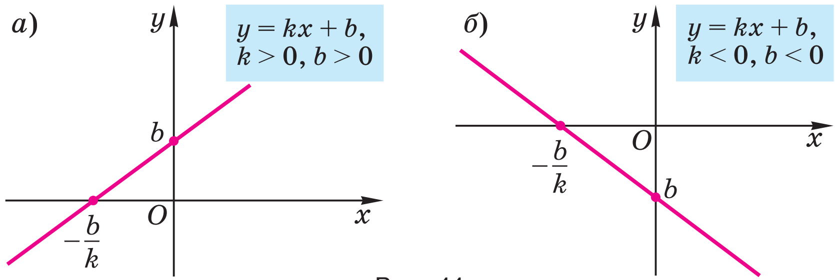
8. Пры $k > 0$ функцыя нарастальная ў абсягу вызначэння.
Пры $k < 0$ функцыя спадальная ў абсягу вызначэння.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Лінейная функцыя

Лінейнай функцыяй называецца функцыя выгляду $y = kx + b$, дзе k і b — лікі.

Графікам лінейнай функцыі $y = kx + b$ пры $k \neq 0$ з'яўляецца прамая, якая праходзіць праз пункты $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$ і $(0;\ b)$ (рыс. 44).



Рыс. 44

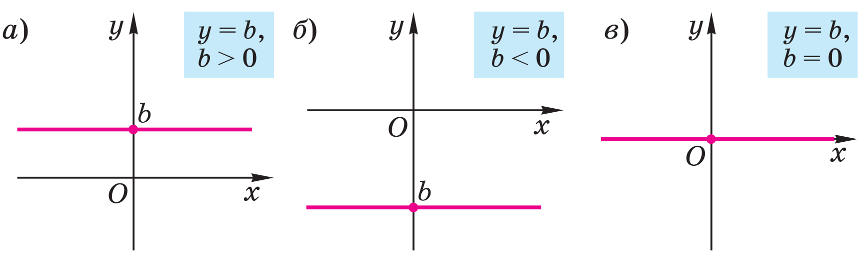
Графікам лінейнай функцыі $y = kx + b$ пры $k = 0$ з'яўляецца прамая $y = b$, якая праходзіць праз пункт $(0;\ b)$ і паралельна восі Ox. Пры $b = 0$ графік функцыі супадае з воссю Ox (рыс. 45).

Любая прамая, не паралельная восі Oy, з'яўляецца графікам лінейнай функцыі.

Каэфіцыент k ва ўраўненні прамой $y = kx + b$ называецца ***вуглавым каэфіцыентам прамой***.

Ураўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам k, якая праходзіць праз пункт $(x_0;\ y_0)$**:** $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Формула вуглавога каэфіцыента прамой, якая праходзіць праз два пункты $(x_1;\ y_1)$ і $(x_2;\ y_2)$: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Рыс. 45

Уласцівасці лінейнай функцыі $y = kx + b$

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі пры $k \neq 0$ з'яўляецца мноства $\boldsymbol{R}$. Пры $k = 0$ мноства значэнняў функцыі складаецца з аднаго ліку b.

3. Пры $k \neq 0$ функцыя не прымае ні найбольшага, ні найменшага значэнняў; пры $k = 0$ значэнне $y = b$ — адзінае.

4. Пры $k \neq 0$ графік функцыі перасякае восі Ox і Oy у пунктах $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$ і $(0;\ b)$. Пры $k = 0$ ёсць толькі пункт перасячэння з воссю Oy (пры $b \neq 0$) — $(0;\ b)$. Пры $k = b = 0$ графік супадае з воссю Ox.

5. Пры $k \neq 0$ значэнне $x = -\frac{b}{k}$ з'яўляецца нулём функцыі.

Пры $k = 0$ *і* $b \neq 0$ функцыя нулёў не мае.

Пры $k = 0$ *і* $b = 0$ кожны рэчаісны лік з'яўляецца нулём функцыі.

6. Пры $k \neq 0$ прамежкамі знакапастаянства з'яўляюцца $\left(-\infty;\ -\frac{b}{k}\right)$, $\left(-\frac{b}{k};\ +\infty\right)$. Пры $k = 0$ і $b \neq 0$ прамежкам знакапастаянства з'яўляецца $(-\infty;\ +\infty)$.

7. Пры $k \neq 0$ *і* $b \neq 0$ функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

Пры $k = 0$ і $b \neq 0$ функцыя цотная.

Пры $k = 0$ і $b = 0$ функцыя адначасова і цотная, і няцотная.

8. Пры $k > 0$ функцыя нарастальная ў абсягу вызначэння.

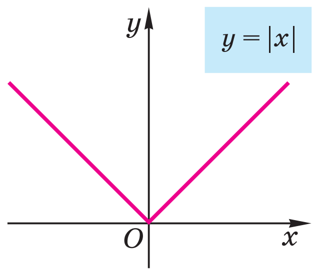
Пры $k < 0$ функцыя спадальная ў абсягу вызначэння.

Пры $k = 0$ функцыя пастаянная ў абсягу вызначэння.

9. Пры $k \neq 0$ функцыя не з'яўляецца перыядычнай. Пры $k = 0$ функцыя $y = b$ перыядычная з любым перыядам $T \neq 0$.

Функцыя $y = |x|$

Графік функцыі $y = |x|$ складаецца з часткі прамой $y = x$ пры $x \geqslant 0$ і з часткі прамой $y = -x$ пры $x < 0$. Ён паказаны на рысунку 46.



Рыс. 46

Уласцівасці функцыі $y = |x|$

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца прамежак $[0;\ +\infty)$.

3. Найменшае значэнне функцыя прымае ў пункце $x = 0$ — яно роўна нулю. Найбольшага значэння функцыі не існуе.

4. Графік функцыі мае з восямі каардынат адзіны пункт перасячэння $(0; 0)$ — пачатак каардынат.

5. Нулём функцыі з'яўляецца значэнне $x = 0$.

6. Усе пункты графіка функцыі, акрамя пачатку каардынат, ляжаць над воссю абсцыс, значыць, $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ — прамежкі знакапастаянства.

7. Функцыя цотная.

8. На прамежку $[0; +\infty)$ функцыя нарастае. На прамежку $(-\infty; 0]$ функцыя спадае.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. п. 1.11).

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. п. 1.11).

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$, $r > 1$ (гл. п. 1.11).

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r \in \boldsymbol{Q}$, $0 < r < 1$ (гл. п. 1.11).

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r = -2k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. п. 1.12).

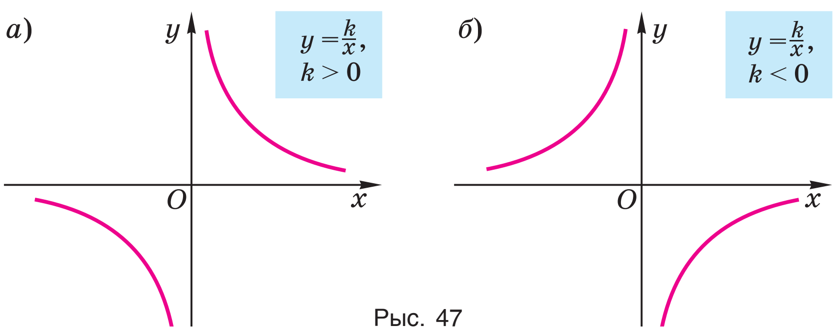
Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r = -2k$, $k \in \boldsymbol{N}$ (гл. п. 1.12).

Функцыя $\boldsymbol{y = x^r}$, дзе $r < 0$, $r \in \boldsymbol{Q}$, $r \notin \boldsymbol{Z}$ (гл. п. 1.12).

Адваротная прапарцыянальнасць

Адваротнай прапарцыянальнасцю называецца функцыя выгляду $y = \frac{k}{x}$, дзе $k \neq 0$.

Графік адваротнай прапарцыянальнасці называецца ***гіпербалай*** (рыс. 47).



Рыс. 47

Уласцівасці адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Мноствам (абсягам) значэнняў функцыі з'яўляецца ўся лікавая прамая, акрамя пункта $y = 0$, г. зн. $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. Найбольшага і найменшага значэнняў функцыі не існуе.

4. Пры любым значэнні аргумента x значэнне функцыі $y \neq 0$, г. зн. гіпербала не перасякае вось абсцыс.

5. Нулёў функцыя не мае.

6. Калі $k > 0$, то галіны гіпербалы размяшчаюцца ў I і III каардынатных вуглах; калі $k < 0$, то галіны гіпербалы размяшчаюцца ў II і IV каардынатных вуглах. Такім чынам, $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ — прамежкі знакапастаянства.

7. Функцыя няцотная.

8. Пры $k > 0$ функцыя спадальная на прамежку $(-\infty;\ 0)$ і спадальная на прамежку $(0;\ +\infty)$.

Пры $k < 0$ функцыя нарастальная на прамежку $(-\infty;\ 0)$ і нарастальная на прамежку $(0;\ +\infty)$.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Квадратная (квадратычная) функцыя

Квадратнай (***квадратычнай***) ***функцыяй*** называецца функцыя выгляду $y = ax^2 + bx + c$, дзе a, b, c — лікі, $a \neq 0$.

Графік квадратнай функцыі называецца ***парабалай***.

Графікам функцыі з'яўляецца парабала з воссю сіметрыі $x = -\frac{b}{2a}$, вяршыняй у пункце з каардынатамі $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ і галінамі, накіраванымі ўверх, калі $a > 0$, і ўніз, калі $a < 0$.

Уласцівасці квадратнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

1. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$.

2. Калі $a > 0$, то мноства (абсяг) значэнняў функцыі — прамежак $\left[\frac{4ac - b^2}{4a};\ +\infty\right)$;

калі $a < 0$, то мноства (абсяг) значэнняў функцыі — прамежак $\left(-\infty;\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

3. Калі $a > 0$, то пры $x = -\frac{b}{2a}$ функцыя прымае сваё найменшае значэнне $y_{\text{найм}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$;

калі $a < 0$, то пры $x = -\frac{b}{2a}$ функцыя прымае сваё найбольшае значэнне $y_{\text{найб}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

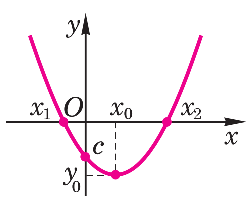
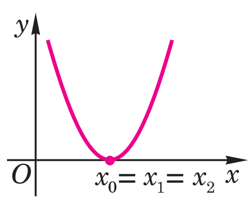
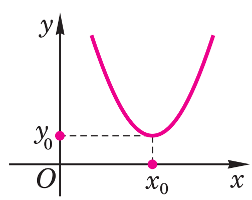
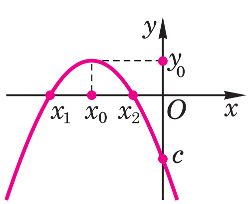
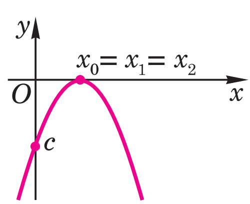
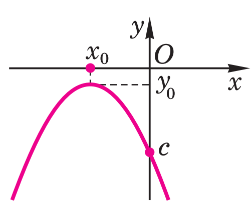
4. Графік функцыі мае адзіны пункт перасячэння з воссю Oy — $(0; c)$.

Калі $D = b^2 - 4ac > 0$, то вось Ox парабала перасякае ў двух пунктах $\left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; 0\right)$ і $\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; 0\right)$; калі $D = 0$, то пункт $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ — адзіны пункт перасячэння з воссю Ox; калі $D < 0$, то пунктаў перасячэння парабалы з воссю Ox няма.

5. Пры $D > 0$ нулямі функцыі з'яўляюцца значэнні $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; пры $D = 0$ нулём функцыі з'яўляецца значэнне $x = -\frac{b}{2a}$; пры $D < 0$ функцыя не мае нулёў.

6. Калі $D \geqslant 0$, то прамежкі $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ з'яўляюцца прамежкамі знакапастаянства.

Калі $D < 0$, то прамежкам знакапастаянства з'яўляецца ўвесь абсяг вызначэння $\boldsymbol{R}$.

D / a	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

7. Калі $b \neq 0$, то функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай. Калі $b = 0$, то функцыя цотная.

8. Калі $a > 0$, то функцыя спадае на прамежку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і нарастае на прамежку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Калі $a < 0$, то функцыя спадае на прамежку $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ і нарастае на прамежку $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$.

9. Функцыя не з'яўляецца перыядычнай.

Паказальная функцыя — функцыя выгляду $\boldsymbol{y = a^x}$, дзе a — лік, $a > 0$, $a \neq 1$ (гл. п. 2.2).

Лагарыфмічная функцыя — функцыя выгляду $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (гл. п. 2.7).

ЛІКАВЫЯ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ

Няхай па некаторым законе кожнаму натуральнаму ліку n ставіцца ў адпаведнасць пэўны рэчаісны лік a_n. Тады гавораць, што зададзена ***лікавая паслядоўнасць*** $a_1, a_2, ..., a_n, ...$; яе абазначаюць (a_n). Лік a_n называецца ***n-м членам*** паслядоўнасці (a_n).

Лікавая паслядоўнасць — гэта функцыя, зададзеная на мностве натуральных лікаў з абсягам значэнняў, што змяшчаюцца ў мностве рэчаісных лікаў.

Арыфметычная прагрэсія з рознасцю d — гэта такая лікавая паслядоўнасць (a_n), што $a_{n+1} = a_n + d$ для любога натуральнага n.

Формула n-га члена арыфметычнай прагрэсіі

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формулы сумы першых n членаў арыфметычнай прагрэсіі:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.$$

Геаметрычная прагрэсія з назоўнікам q — гэта такая паслядоўнасць адрозных ад нуля лікаў (b_n), што $b_{n+1} = b_n q$ для любога натуральнага n.

Формула n-га члена геаметрычнай прагрэсіі

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы сумы першых n членаў геаметрычнай прагрэсіі:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ калі } q \neq 1;$$

$$S_n = nb_1, \text{ калі } q = 1.$$

Геаметрычная прагрэсія з назоўнікам $|q| < 1$ называецца ***бясконца спадальнай***.

Формула сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

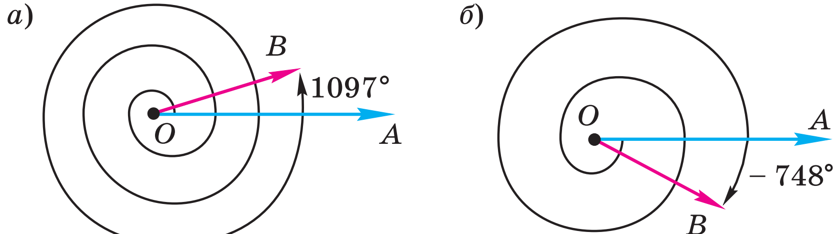
ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ВЫРАЗЫ

Вугал як мера павароту. Радыянная мера вуглоў і дуг

Няхай дадзены плоскасць і на ёй прамень з пачаткам у пункце O, які верціцца ад пачатковага становішча — праменя OA — да канечнага становішча — праменя OB. Велічыню павароту, зробленага гэтым праменем, вымяраюць велічынёй вугла, які ўтвараюць прамяні OA і OB у канцы вярчэння. Напрыклад, на рысунку 48, *а* паказаны паварот праменя на вугал 1097°, а на рысунку 48, *б* паказаны паварот праменя на вугал –748°. (Калі паварот праменя выкананы супраць гадзіннікавай стрэлкі, то вугал павароту прынята лічыць дадатным, а калі па ходзе гадзіннікавай стрэлкі — адмоўным.)

Радыянам называецца велічыня цэнтральнага вугла, які адпавядае дузе акружнасці даўжынёй адзін радыус (абазначаецца 1 рад). Адпаведна дуга велічынёй адзін радыян — гэта дуга, даўжыня якой роўна радыусу:

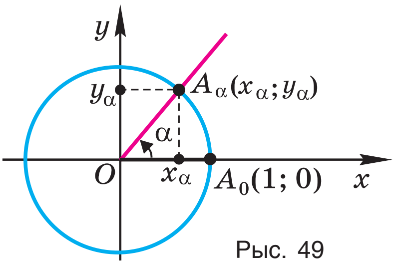
$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \qquad 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$



Рыс. 48

Сінус, косінус, тангенс і катангенс адвольнага вугла. Адносіны паміж імі

Разгледзім на каардынатнай плоскасці акружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным адзінцы. Такую акружнасць будзем называць ***адзінкавай*** або ***трыганаметрычнай акружнасцю***, а круг, які яна абмяжоўвае, — ***трыганаметрычным кругам***.



Рыс. 49

Дадатную паўвось абсцыс прымем за пачатак адліку для любога вугла α. Пункт яе перасячэння з адзінкавай паўакружнасцю абазначым A_0, а пункт перасячэння з адзінкавай акружнасцю праменя, які вызначае вугал α, абазначым A_α (рыс. 49).

Няхай α — адвольны вугал.

Сінусам вугла α называецца ардыната пункта A_α, г. зн. $\sin\alpha = y_\alpha$.

Косінусам вугла α называецца абсцыса пункта A_α, г. зн. $\cos\alpha = x_\alpha$.

Няхай $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ***Тангенсам*** вугла α называецца адносіна $\sin\alpha$ да $\cos\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Няхай $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ***Катангенсам*** вугла α называецца адносіна $\cos\alpha$ да $\sin\alpha$: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Асноўная трыганаметрычная тоеснасць $\mathbf{sin}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1}$ і вынікі з яе:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Арксінусам ліку b ($b \in [-1;\ 1]$) называецца лік з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, сінус якога роўны b:

$$\sin(\arcsin b) = b.$$

Арккосінусам ліку b ($b \in [-1; 1]$) называецца лік з прамежку $[0; \pi]$, косінус якога роўны b:

$$\cos(\arccos b) = b.$$

Арктангенсам ліку b ($b \in \boldsymbol{R}$) называецца лік з прамежку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якога роўны b:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = b.$$

Арккатангенсам ліку b ($b \in \boldsymbol{R}$) называецца лік з прамежку $(0; \pi)$, катангенс якога роўны b:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b.$$

b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin b$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos b$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

b	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} b$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} b$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Маюць месца тоеснасці:

$\arcsin(-b) = -\arcsin b$, $\quad \operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$,

$\arccos(-b) = \pi - \arccos b$, $\quad \operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$.

Формулы прывядзення

Трыганаметрычны выраз / Велічыня вугла β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Правілы формул прывядзення

1) *Правіла знака*: у правай частцы формулы ставіцца той знак, які мае левая частка пры ўмове, што вугал α належыць I чвэрці.

2) *Правіла назваў*: калі ў левай частцы формулы вугал роўны $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то сінус мяняецца на косінус, тангенс на катангенс, а калі вугал роўны $\pi \pm \alpha$ або $2\pi - \alpha$, то назва выразу захоўваецца.

Формулы складання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Вынікі з формул складання

Формулы двайнога вугла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Пераўтварэнне здабытку ў суму (рознасць)

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пераўтварэнне сумы (рознасці) у здабытак

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x - y}{2}\cos\frac{x + y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні

Калі $a \in [-1;\ 1]$, то:

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$
$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Калі $a \in \boldsymbol{R}$, то:

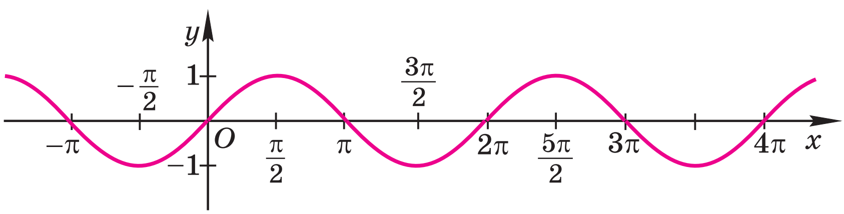
$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$
$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ

Функцыя $y = \sin x$

Кожнаму рэчаіснаму ліку x паставім у адпаведнасць вугал, радыяннай мерай якога з'яўляецца гэты лік, а гэтаму вуглу паставім у адпаведнасць яго сінус. Тым самым кожнаму рэчаіснаму ліку x ставіцца ў адпаведнасць пэўны лік $\sin x$, г. зн. на мностве $\boldsymbol{R}$ вызначаецца функцыя $y = \sin x$.

Графік функцыі $y = \sin x$ (рыс. 50) называецца ***сінусоідай***.



Рыс. 50

Уласцівасці функцыі $\boldsymbol{y = \sin x}$

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \sin x$ — мноства $\boldsymbol{R}$.
2. Мноства (абсяг) значэнняў функцыі $y = \sin x$ — $[-1;\ 1]$.
3. Функцыя $y = \sin x$ перыядычная з перыядам 2π.
4. Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя $y = \sin x$ прымае ў пунктах $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя $y = \sin x$ прымае ў пунктах $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Графік функцыі праходзіць праз пункт (0; 0) — пачатак каардынат і перасякаецца з воссю Ox у пунктах $(\pi k;\ 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \sin x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функцыя $y = \sin x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $(\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функцыя $y = \sin x$ няцотная.

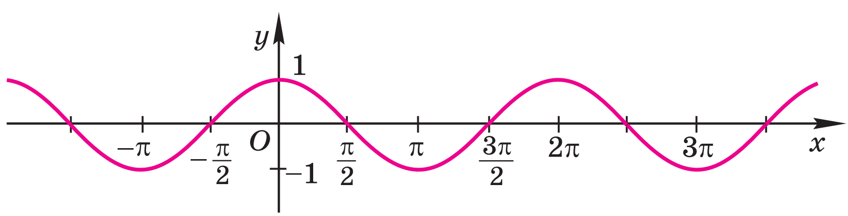
9. Функцыя $y = \sin x$ нарастае на кожным з прамежкаў $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і спадае на кожным з прамежкаў $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Функцыя $\boldsymbol{y = \cos x}$

Функцыя $y = \cos x$ вызначаецца аналагічна функцыі $y = \sin x$. Графік функцыі $y = \cos x$ (рыс. 51) называецца ***косінусоідай***.

Уласцівасці функцыі $\boldsymbol{y = \cos x}$

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \cos x$ — мноства $\boldsymbol{R}$.
2. Мноства (абсяг) значэнняў функцыі $y = \cos x$ — $[-1;\ 1]$.



Рыс. 51

3. Функцыя $y = \cos x$ перыядычная з перыядам 2π.

4. Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя $y = \cos x$ прымае ў пунктах $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя $y = \cos x$ прымае ў пунктах $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Графік функцыі перасякае вось Oy у адзіным пункце $(0;\ 1)$, а з воссю Ox перасякаецца ў пунктах $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \cos x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функцыя $y = \cos x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функцыя $y = \cos x$ цотная.

9. Функцыя косінус спадае на кожным з прамежкаў $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і нарастае на кожным з прамежкаў $[\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

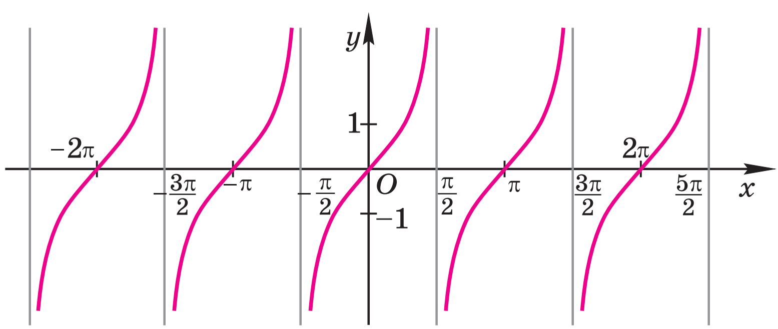
Функцыя $y = \operatorname{tg} x$

Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ вызначаецца аналагічна функцыі $y = \sin x$.

Графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (рыс. 52) называецца ***тангенсоідай***.

Уласцівасці функцыі $y = \operatorname{tg} x$

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \operatorname{tg} x$ — мноства рэчаісных лікаў $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.



Рыс. 52

2. Мноства (абсяг) значэнняў функцыі $y = \operatorname{tg} x$ — усе рэчаісныя лікі.

3. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ перыядычная з перыядам π.

4. Найбольшага і найменшага значэнняў функцыя $y = \operatorname{tg} x$ не мае.

5. Графік функцыі праходзіць праз пункт $(0; 0)$ — пачатак каардынат і перасякаецца з воссю Ox у пунктах $(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \operatorname{tg} x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ няцотная.

9. Функцыя тангенс нарастае на кожным з прамежкаў выгляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$

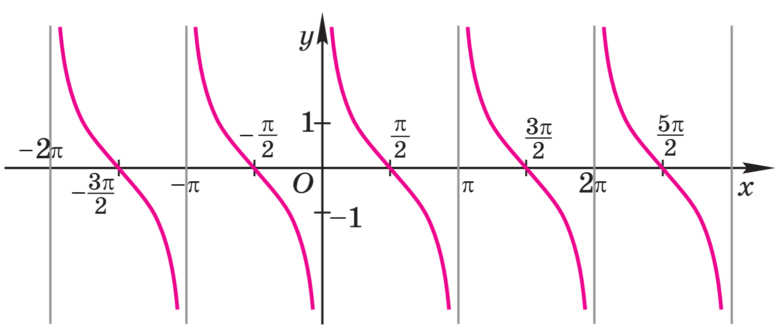
Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ вызначаецца аналагічна функцыі $y = \sin x$.

Графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ (рыс. 53) называецца ***катангенсоідай***.

Уласцівасці функцыі $y = \operatorname{ctg} x$

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ — мноства рэчаісных лікаў $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Мноства (абсяг) значэнняў функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ — мноства $\boldsymbol{R}$.



Рыс. 53

3. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ перыядычная з перыядам π.

4. Найбольшага і найменшага значэнняў функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ не мае.

5. Графік функцыі не мае агульных пунктаў з воссю Oy, а з воссю Ox перасякаецца ў пунктах $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Нулямі функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляюцца значэнні аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае адмоўныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і дадатныя значэнні на кожным з прамежкаў $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ няцотная.

9. Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ спадае на кожным з прамежкаў выгляду $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ВЫТВОРНАЯ

Прырашчэнне функцыі

Наваколлем пункта x_0 называецца любы інтэрвал, які змяшчае гэты пункт.

Няхай $y = f(x)$ — некаторая функцыя, x_0 — фіксаваны пункт з абсягу вызначэння гэтай функцыі, x — адвольны пункт з некаторага наваколля пункта x_0, $x \neq x_0$.

Рознасць $\Delta x = x - x_0$ называецца ***прырашчэннем аргумента ў пункце*** x_0.

Рознасць $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$ называецца ***прырашчэннем функцыі ў пункце*** x_0.

Вытворная функцыі

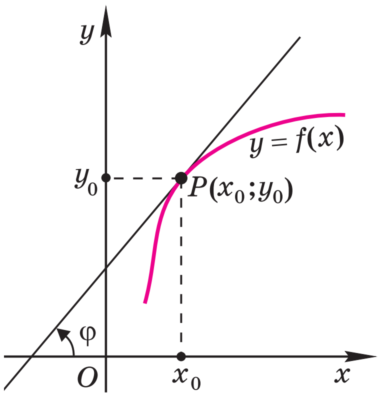
Вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 называецца лік, да якога імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ пры Δx, што імкнецца да нуля. Вытворная ў пункце x_0 абазначаецца $f'(x_0)$.

Няхай функцыя $y = f(x)$ мае вытворную ў кожным пункце x з нейкага прамежку. Паставіўшы ў адпаведнасць кожнаму ліку x з гэтага прамежку лік $f'(x)$, мы атрымаем новую функцыю, якая называецца вытворнай функцыі f і абазначаецца f' або y'.

Механічны сэнс вытворнай

Няхай пункт рухаецца прамалінейна, $s(t)$ — шлях, які прайшоў пункт за час t, $v(t)$ — скорасць пункта ў момант часу t. Тады $v(t) = s'(t)$, г. зн. скорасць ёсць вытворная ад пройдзенага шляху па часе.

Геаметрычны сэнс вытворнай



Рыс. 54

Няхай $y = f(x)$ — функцыя, $P(x_0;\ y_0)$ — пункт на яе графіку, φ — вугал нахілу да восі Ox датычнай у пункце $P(x_0;\ y_0)$ да графіка функцыі $y = f(x)$.

Тады $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, г. зн. вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі ў пункце з абсцысай x_0 роўны вытворнай гэтай функцыі ў пункце x_0 (рыс. 54).

Ураўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $(x_0;\ f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Правілы вылічэння вытворнай

$$c' = 0,\ c \text{ — const},$$

$$(cf(x))' = cf'(x),\ c \text{ — const},$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Для любога цэлага k правільная формула:

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Прымяненне вытворных пры даследаванні функцый
Нарастанне і спаданне функцыі

Калі ў кожным пункце x нейкага прамежку $f'(x) > 0$, то функцыя f нарастае на гэтым прамежку.

Калі ў кожным пункце x нейкага прамежку $f'(x) < 0$, то функцыя f спадае на гэтым прамежку.

Максімумы і мінімумы функцыі

Функцыя f мае ў пункце x_0 ***максімум***, калі існуе такое наваколле пункта x_0, што для любога x з гэтага наваколля правільная няроўнасць $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Пры гэтым пункт x_0 называецца ***пунктам максімуму функцыі f***.

Функцыя f мае ў пункце x_0 ***мінімум***, калі існуе такое наваколле пункта x_0, што для любога x з гэтага наваколля правільная няроўнасць $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Пры гэтым пункт x_0 называецца ***пунктам мінімуму функцыі f***.

Функцыя можа мець адзін, некалькі, а можа зусім не мець пунктаў максімуму (мінімуму).

Пункты максімуму і мінімуму функцыі называюцца ***пунктамі экстрэмуму***.

Пункт x_0 называецца ***ўнутраным пунктам мноства D***, калі існуе такое наваколле пункта x_0, якое змяшчаецца ў мностве D.

Неабходная ўмова экстрэмуму для ўнутранага пункта x_0 абсягу вызначэння функцыі f:

калі пункт x_0 з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі f і ў пункце x_0 існуе вытворная, то $f'(x_0) = 0$.

Дастатковая ўмова экстрэмуму для ўнутранага пункта x_0 абсягу вызначэння функцыі f:

калі $f'(x_0) = 0$ і пры пераходзе праз пункт x_0 значэнні вытворнай змяняюць знак з «+» на «–», то x_0 з'яўляецца пунктам максімуму;

калі $f'(x_0) = 0$ і пры пераходзе праз пункт x_0 значэнні вытворнай змяняюць знак з «–» на «+», то x_0 з'яўляецца пунктам мінімуму.

Практыкаванні для паўтарэння арыфметычнага і алгебраічнага матэрыялу курса матэматыкі 5—11-х класаў

Практыкаванні для паўтарэння падзелены на 13 тэматычных раздзелаў: «Рэчаісныя лікі», «Прапорцыі. Працэнты», «Арыфметычная і геаметрычная прагрэсіі», «Алгебраічныя выразы», «Трыганаметрычныя выразы», «Лагарыфмічныя выразы», «Рацыянальныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Рацыянальныя няроўнасці», «Тэкставыя задачы», «Ірацыянальныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Ірацыянальныя няроўнасці», «Трыганаметрычныя ўраўненні», «Паказальныя і лагарыфмічныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Паказальныя і лагарыфмічныя няроўнасці», «Вытворная», «Функцыі» — у кожным з якіх заданні падзяляюцца на дзве групы па складанасці: I і II (у групе II прапанаваны больш цяжкія заданні).

Спадзяёмся, што работа над гэтым матэрыялам дапаможа паўтарыць, абагульніць і замацаваць вывучанае.

Жадаем поспехаў!

1. Рэчаісныя лікі

I

Знайдзіце значэнне выразу (**1—2**).

1. 1) $\left(6{,}72 : \frac{3}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0{,}8\right) : 1{,}21 - 8\frac{3}{8}$;

2) $3{,}075 : 1{,}5 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{25} + 3{,}26\right) - 1{,}025$.

2. 1) $0{,}756^2 - 0{,}241 \cdot 0{,}756 - 0{,}415 \cdot 0{,}756$;

2) $23 \cdot 17{,}8 - 3 \cdot 7{,}2 + 23 \cdot 7{,}2 - 17{,}8 \cdot 3$;

3) $\frac{956^2 - 44^2}{456} + \frac{38^2 - 17^2}{9^2 - 2^2}$;

4) $\frac{62^2 - 32^2}{71^2 - 23^2 + 94 \cdot 42}$.

3. 1) Дакажыце, што здабытак трох паслядоўных цотных лікаў дзеліцца на 24.

2) Дакажыце, што сума двухзначнага ліку і ліку, атрыманага з яго перастаноўкай лічбаў, кратна 11.

4. 1) Дакажыце, што пры любым няцотным значэнні a рознасць $a^2 - 1$ дзеліцца на 8.

2) Дакажыце, што пры любым натуральным значэнні n лік $n^5 - 5n^3 + 4n$ дзеліцца на 120.

5. 1) Дакажыце, што значэнне выразу

$$\left(\sqrt{10 + 5\sqrt{3}} + \sqrt{10 - 5\sqrt{3}}\right)^2$$

з'яўляецца рацыянальным лікам.

2) Дакажыце, што значэнне выразу

$$\sqrt{17 + 6\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

з'яўляецца ірацыянальным лікам.

6. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt{75} + 0{,}5\sqrt{48} - 0{,}2\sqrt{300}$;

2) $\left(5\sqrt{8} - \frac{1}{3}\sqrt{10} - 2\sqrt{18}\right) : \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$.

7. Спрасціце выраз:

1) $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \dfrac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{70} - \sqrt{30}}{\sqrt{35} - \sqrt{15}}$.

8. Спрасціце выраз:

1) $\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{12 - 4\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$.

9. Спрасціце выраз:

1) $1000^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} - 625^{-0{,}75}$;

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{4}{3}} + (5^0)^4 \cdot 5$.

II

10. Дакажыце, што:

1) няцотная натуральная ступень ліку 11, павялічаная на 13, кратна 12;

2) цотная натуральная ступень ліку 9, паменшаная на 1, кратна 40.

11. Дакажыце, што пры цотным натуральным n:

1) $7^n - 5^n$ дзеліцца на 24;
2) $5^n - 3^n$ дзеліцца на 16.

12. Спрасціце выраз:

1) $2^{\log_2 6} + 2\sqrt{12,5} + \dfrac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{7} + \sqrt{14}}$;

2) $8\sqrt{4,5} - \dfrac{5\sqrt{10}}{2\sqrt{5} - \sqrt{10}} + 3^{\log_3 5}$.

13. Вылічыце:

1) $\left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\sqrt{50 + \sqrt{384}}$;

2) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{17}\right)\sqrt{20 + \sqrt{204}}$.

14. Вылічыце:

1) $\dfrac{\left(8^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(4^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)}{32^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{16}}$; 2) $\dfrac{5^{0,5}}{5^{0,5} - 3^{0,5}} - \dfrac{15^{0,5} - 3}{8 - 2 \cdot 15^{0,5}}$.

15. Вылічыце:

1) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2,5\right)^2} - \sqrt[3]{\left(1,5 - \sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\sin\dfrac{15\pi}{4}$;

2) $2^{-1,5} \cdot \cos\dfrac{11\pi}{4} + \left(\sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{2}\right)^3} - \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1,5\right)^2}\right)^2$.

16. 1) Спрасціце выраз $(m^{1,5} - m^{-0,5}) : (m^3 - m) \cdot m^{0,5}$ і знайдзіце яго значэнне пры $m = 4^{-\log_4 49}$.

2) Спрасціце выраз $(t^{2,5} + t^{-1,5}) : (t^5 + t) \cdot t^{1,5}$ і знайдзіце яго значэнне пры $t = 7^{-\log_7 64}$.

2. Прапорцыі. Працэнты

I

Знайдзіце x з прапорцыі (**17—18**).

17. 1) $\dfrac{x}{\dfrac{186}{25} - 0,48} = \dfrac{4,1 + \dfrac{63}{60}}{\dfrac{70}{6} + 2\dfrac{1}{15}}$; 2) $\dfrac{14 + \dfrac{7}{4}}{\dfrac{25}{2} - \dfrac{184}{15}} = \dfrac{x}{0,1 : 90 : 0,05 + \dfrac{2}{9}}$.

18. 1) $\dfrac{\left(\frac{4}{15}+\frac{10}{75}\right):0{,}04}{0{,}3+\frac{8}{15}}=\dfrac{0{,}75-\frac{1}{6}}{x}$; 2) $\dfrac{x}{\left(1{,}25+\frac{5}{6}\right):\frac{1}{3}}=\dfrac{\left(6{,}8-\frac{16}{5}\right):\frac{35}{6}}{11-\frac{19}{2}}$.

19. 1) Знайдзіце вуглы трохвугольніка, калі яны адносяцца як $1:2:15$.
2) Перыметр трохвугольніка роўны 7,2 см. Знайдзіце стораны гэтага трохвугольніка, калі яны адносяцца як 11 : 12 : 13.

20. 1) Раздзяліце лік 434 на часткі адваротна прапарцыянальна лікам 2; 3; 5.
2) Раздзяліце лік 172,8 на часткі адваротна прапарцыянальна лікам 4; $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{3}$.

21. 1) Знайдзіце лік, калі 6,5 % ад яго складаюць 34 % ад 31,2.
2) Знайдзіце лік, калі 11 % ад яго складаюць 14,5 % ад 22.

22. 1) Колькі працэнтаў солі ўтрымліваецца ў растворы, калі ў 200 г раствору ўтрымліваецца 150 г вады?
2) За змену токар вытачыў 81 дэталь пры норме 45 дэталей. На колькі працэнтаў ён перавыканаў план?

23. 1) Кветкі рамонку пры сушцы губляюць 72 % ад сваёй масы. Колькі кілаграмаў кветак трэба ўзяць, каб атрымаць з іх 12,25 кг сухіх кветак?
2) Марская вада ўтрымлівае 5 % солі. Колькі трэба ўзяць марской вады, каб атрымаць пры выпарванні 17,25 кг солі?

24. 1) На колькі працэнтаў паменшыцца здабытак двух лікаў, калі адзін з іх паменшыць на 25 %, а другі — на 50 %?
2) На колькі працэнтаў зменіцца дроб, калі яго лічнік паменшыць на 20 %, а назоўнік — на 60 %?

II

25. 1) Знайдзіце дадатны лік, калі 45 % ад яго складаюць столькі ж, колькі складаюць 20 % ад ліку, яму адваротнага.
2) Знайдзіце дадатны лік, калі 27 % ад яго роўны 90 % ад яго квадрата.

26. 1) Адзін сплаў складаецца з двух металаў, што ўваходзяць у яго ў адносіне $1:2$, а другі сплаў утрымлівае тыя ж металы ў адносіне $2:3$. У якой адносіне трэба ўзяць гэтыя сплавы, каб атрымаць новы сплаў, які ўтрымлівае тыя ж металы ў адносіне $17 : 27$?

2) Ёсць два сплавы золата і серабра. У першым сплаве колькасці гэтых металаў знаходзяцца ў адносіне $1 : 2$, а ў другім — $2 : 3$. Колькі трэба ўзяць першага сплаву, каб атрымаць 19 кг сплаву, у якім золата і серабро знаходзяцца ў адносіне $7 : 12$?

27. 1) Ёсць два сплавы, што складаюцца з медзі, цынку і волава. Вядома, што першы сплаў утрымлівае 40 % волава, а другі — 26 % медзі. Працэнтнае ўтрыманне цынку ў першым і другім сплавах аднолькавае. Сплавіўшы 150 кг першага сплаву і 250 кг другога, атрымалі новы сплаў, у якім аказалася 30 % цынку. Колькі кілаграмаў волава ўтрымліваецца ў новым сплаве?

2) Ёсць два сплавы, што складаюцца з медзі, цынку і волава. Вядома, што першы сплаў утрымлівае 25 % цынку, а другі — 50 % медзі. Працэнтнае ўтрыманне волава ў першым сплаве ў 2 разы большае, чым у другім. Сплавіўшы 200 кг першага сплаву і 300 кг другога, атрымалі новы сплаў, у якім аказалася 28 % цынку. Колькі кілаграмаў медзі ўтрымліваецца ў новым сплаве?

28. 1) З бутлі з 12-працэнтным растворам солі адлілі 1 л і далілі бутлю 1 л вады, затым адлілі яшчэ 1 л раствору і зноў далілі 1 л вады. У бутлі аказаўся 3-працэнтны раствор солі. Якая ўмяшчальнасць бутлі?

2) Пляшка напоўнена 96-працэнтным растворам солі. З яе адлілі 12 л раствору і далілі пляшку вадой. Затым з пляшкі адлілі яшчэ 18 л раствору і зноў далілі вадой, пасля чаго канцэнтрацыя солі ў пляшцы склала 32 %. Знайдзіце аб'ём пляшкі.

3. Арыфметычная і геаметрычная прагрэсіі

I

29. Сума трох паслядоўных членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 72. Другі член большы за першы ў 5 разоў. Знайдзіце гэтыя тры члены прагрэсіі (a_n).

30. Сума трох паслядоўных членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 87. Трэці член меншы за суму першых двух на 5. Знайдзіце гэтыя тры члены прагрэсіі (a_n).

31. Сума сёмага і дзясятага членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 5. Знайдзіце суму першых шаснаццаці членаў прагрэсіі.

32. Знайдзіце першы член a_1 і рознасць d арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі вядома, што сума пятага і дзявятага членаў роўна 40, а сума сёмага і трынаццатага членаў роўна 58.

33. Знайдзіце першы член b_1 і назоўнік q геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі сума першых трох членаў роўна 7, а іх здабытак роўны 8.

34. Назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n) роўны 0,5, чацвёрты член роўны 10, а сума ўсіх членаў роўна 155. Знайдзіце лік членаў прагрэсіі.

35. Знайдзіце назоўнік нарастальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі рознасць пятага і першага членаў прагрэсіі ў пяць разоў большая за рознасць трэцяга і першага яе членаў.

36. Паміж лікамі 7 і 56 устаўце два лікі так, каб разам з дадзенымі лікамі яны ўтварылі геаметрычную прагрэсію (b_n).

37. Тры лікі з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі. Калі другі лік паменшыць на 2, а астатнія два пакінуць без змяненняў, то атрыманыя лікі складуць геаметрычную прагрэсію з назоўнікам 3. Знайдзіце гэтыя лікі.

38. Тры лікі з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі. Калі першыя два з іх пакінуць без змяненняў, а ад апошняга ліку адняць першы, то атрыманыя лікі складуць арыфметычную прагрэсію. Знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі, калі другі з узятых лікаў роўны 6.

II

39. Вылічыце:

1) $39 + 33 + 27 + ... - 45$;

2) $-12\frac{1}{2} - 11\frac{5}{6} - 11\frac{1}{6} - ... - 6\frac{1}{2}$.

40. Знайдзіце суму першых пяцідзесяці супадаючых членаў дзвюх арыфметычных прагрэсій: 2; 7; 12; ... і 3; 10; 17; ... .

41. Пры якіх значэннях a карані ўраўнення $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі?

42. Пры якіх значэннях a тры карані ўраўнення $x^3 - 9x^2 + ax + 24 = 0$ з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі?

43. Пры якіх значэннях α лікі $2\cos\frac{\pi}{6}$, $4\sin\alpha$, $-6\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі (a_n)?

44. Знайдзіце x, калі $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ з'яўляюцца паслядоўнымі, не роўнымі адзін аднаму членамі арыфметычнай прагрэсіі (a_n).

45. Вызначыце, пры якіх значэннях x лікі a, b, c з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі:

1) $a = \lg 3$; $b = \lg(9^x + 9)$; $c = \lg(9^x + 99)$;

2) $a = \lg 5$; $b = \lg(5^{-x} - 5)$; $c = \lg(5^{-x} + 55)$.

46. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\log_b 5\left(\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a}\right)}{\log_a 25 - 2\log_c 5}$, калі лікі a, b, c з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі.

47. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + ... + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

48. Пры якіх значэннях m і n паслядоўнасць

$$\frac{m-n}{m+n};\ \ \frac{m+n}{m-n};\ \ \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^3;\ ...$$

з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй?

4. Алгебраічныя выразы

I

Раскладзіце на множнікі (**49—50**).

49. 1) $4mn - 9kt - 9mt + 4nk$; 2) $7ax - 8bx - 7ay + 8by$;
3) $12a^2 - 12$; 4) $7a^3 - 7a$;
5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$; 6) $ak^4 - k^4 - ak^2 + k^2$;
7) $m^2 - n^2 + 2nk - k^2$; 8) $4m^4 - 4m^2 + 1 - n^2$.

50. 1) $(a+b)(a-b)^3 - (a-b)(a+b)^3$;
2) $(a-b)^2(a+b)^5 + (a+b)^2(a-b)^5$;
3) $a^4 - 18a^2 + 81$;
4) $a^4 + 10a^2 + 25$.

Скараціце дроб (**51—53**).

51. 1) $\dfrac{a^3 - ab^2}{ab - a^2}$; 2) $\dfrac{b^2 - ab}{a^2b - ab^2}$.

52. 1) $\dfrac{49c - c^3}{c^3 - 14c^2 + 49c}$; 2) $\dfrac{16c^4 - 9c^2}{16c^3 - 24c^2 + 9c}$.

53. 1) $\dfrac{a^2 - 9a + 14}{a^2 - 10a + 16}$; 2) $\dfrac{p^2 - 13p + 30}{p^2 - 12p + 27}$.

Спрасціце выраз (**54—57**).

54. 1) $\dfrac{a^2 - a}{a^2 - ab + am - mb} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 1} \cdot \dfrac{a^3 - am^2 + a^2 - m^2}{a^2 + ab}$;

2) $\dfrac{3a^2 - 6a}{a^2 + ab - am - mb} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 4} \cdot \dfrac{a^3 - am^2 + 2a^2 - 2m^2}{a^2 - ab}$.

55. 1) $\dfrac{m^2 - n^2 - m + n}{a^2 - b^2 + b + a} : \dfrac{4m - 4n}{5b + 5a}$;

2) $\dfrac{m^2 - n^2 + m + n}{a^2 - b^2 - b + a} : \dfrac{2m + 2n}{3b - 3a}$.

56. 1) $\left(\dfrac{2a}{a-1}\right)^2 \cdot \dfrac{1 + a^2 - 2a}{2a} - a$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+1} - \dfrac{3}{1-a}\right) : \dfrac{4a^2 + 6 + 2a}{a^2 - 1}$.

57. 1) $\left(\dfrac{a+a^2}{a+1}+\sin\dfrac{\pi}{2}\right):\left(\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{a}{1+2a+a^2}\right)^{-1}$;

2) $\left(\dfrac{6}{2a^2-2}+\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{3+a}{2+2a}\right):\left(\dfrac{4a^2-4}{3}\right)^{-1}-\left(\sqrt[8]{\dfrac{4}{9}}\right)^4$.

58. 1) Пры $a=2$ знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{a}+1}\right)\left(5\sqrt{a}-5\right)\left(\sqrt{a}+2\right).$$

2)* Пры $a=8$ знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{7}{\sqrt{a}-1}+\frac{7}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{\left(2-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{a\sqrt{a}}{4}.$$

II

Раскладзіце на множнікі (**59—60**).

59. 1) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$;

2) $m^2-2mn+n^2-p^2+2pq-q^2$.

60. 1) $(2a-3)^3+1$; 2) $(3a-2)^3-27$.

Скараціце дроб (**61—63**).

61*. 1) $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^2+b^2-2ab}$; 2) $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2-b^2}$.

62*. 1) $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}{2a^2+4ab+2b^2}$; 2) $\dfrac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{5a^2-10ab+5b^2}$.

63. 1) $\dfrac{-5x-2x^2-3}{2x^2+3x}$; 2) $\dfrac{2+x-3x^2}{9x^2-4}$.

Спрасціце выраз (**64—66**).

64*. 1) $\left(\dfrac{m-3}{m^2-3m+9}+\dfrac{18-6m}{27+m^3}\right):\dfrac{5(3-m)^2}{54+2m^3}$;

2) $\left(\dfrac{m+1}{m^3-1}-\dfrac{1}{m^2+m+1}-\dfrac{2}{1-m}\right):\dfrac{m+2+m^2}{m^3-1}$.

65. 1) $\dfrac{a+6\sqrt{a}+5}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+6\sqrt{a-1}+4}{\sqrt{a-1}+1}$;

2) $\dfrac{a+6\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}+4}-\dfrac{a+6\sqrt{a-2}+6}{\sqrt{a-2}+4}$.

66. 1) $\dfrac{|a-1|(a^2+a+2)(a+1)a}{a^3-1-|a-1|}$;

2) $\dfrac{|a+1|(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^4+a^3+|a+1|}$.

67. 1) Ведаючы, што $\dfrac{a+b}{a-2b}=\dfrac{2}{3}$, знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{a^2-2b^2}{2a^2+5ab+3b^2}$.

2) Ведаючы, што $\dfrac{ab-b^2}{a^2-ab+4b^2}=\dfrac{1}{5}$, знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{2a+5b}{b-7a}$.

68*. 1) Ведаючы, што $a+\dfrac{2}{a}=-4$, знайдзіце значэнне выразу $a^3+2a^2+\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{8}{a^3}$.

2) Ведаючы, што $m-\dfrac{1}{m}=3$, знайдзіце значэнне выразу $2m^3+3m^2+\dfrac{3}{m^2}-\dfrac{2}{m^3}$.

69. 1) Пры якіх цэлых n значэнне выразу $\dfrac{2n^2+9n+13}{n+2}$ з'яўляецца натуральным лікам?

2) Пры якіх цэлых n значэнне выразу $\dfrac{3n^2+5n+3}{n+2}$ з'яўляецца натуральным лікам?

5. Трыганаметрычныя выразы

I

70. 1) Вядома, што $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$ і $\dfrac{35\pi}{2}<\alpha<\dfrac{37\pi}{2}$. Знайдзіце $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

2) Вядома, што $\cos\alpha=\dfrac{21}{29}$ і $9\pi<\alpha<10\pi$. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

71. 1) Вядома, што $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{5}{12}$ і $\cos\alpha<0$. Знайдзіце $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

2) Вядома, што $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{12}{5}$ і $\sin\alpha<0$. Знайдзіце $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

72. 1) Вядома, што $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. Вылічыце $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\cos\alpha}$.

2) Вядома, што $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. Вылічыце $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha}$.

73. 1) Знайдзіце $\sin\alpha\cos\alpha$, калі $\sin\alpha + \cos\alpha = 1\frac{1}{3}$.

2) Знайдзіце $\sin\alpha + \cos\alpha$, калі $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Спрасціце выраз (**74—77**).

74. 1) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

75. 1) $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\sin^3 4\alpha\cos 4\alpha - \cos^3 4\alpha\sin 4\alpha$.

76. 1) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}+\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}-\alpha\right)$;

2) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}-\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}+\alpha\right)$.

77. 1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

Дакажыце тоеснасць (**78—81**).

78. 1) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

79. 1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

80. 1) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $1 - \sqrt{2}\sin\alpha = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

81. 1) $\frac{\sin 4\alpha + \sin 9\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 4\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

2) $\frac{\cos 15\alpha + \cos 7\alpha + \cos\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha + \sin 15\alpha} = \operatorname{ctg} 7\alpha$.

II

Вылічыце (**82—85**).

82. 1) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, калі $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 4\alpha$, калі $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

83. 1) $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, калі $\cos \alpha = \frac{2}{7}$;

2) $\sin \alpha \sin 3\alpha$, калі $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$.

84. 1) $\frac{\cos 2\alpha + 3}{2\sin 2\alpha - 1}$, калі $\operatorname{ctg} \alpha = 3$;

2) $\frac{5 - 4\cos \alpha}{\sin \alpha - 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, калі $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$.

85. 1) $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \sin^4 \frac{7\pi}{12} + \sin^4 \frac{5\pi}{12} + \sin^4 \frac{11\pi}{12}$;

2) $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{9\pi}{8}$.

Спрасціце выраз (**86—88**).

86. 1) $\frac{4\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg}\alpha} - \cos\alpha$.

87. 1) $\cos(\arccos x + \arccos y)$;

2) $\sin(\arccos x + \arcsin y)$.

88. 1) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$; 2) $\sin(2\operatorname{arcctg} x)$.

Дакажыце тоеснасць (**89—92**).

89. 1) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$; 2) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$.

90. 1) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$;

2) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \cos^{-1} 2\alpha$.

91. 1) $\frac{\sin \alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$;

2) $\frac{\sin(\beta + 2\alpha)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

92. 1) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1 - x}{2}}$; 2) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \sqrt{\frac{1 + x}{2}}$.

Вылічыце (**93—94**).

93. 1) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

94. 1) $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{8}{15} - \arcsin\frac{8}{17}\right)$;

2) $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$.

95. Ці правільна, што:

1) $\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \mathrm{arctg}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$?

6. Лагарыфмічныя выразы

I

Знайдзіце значэнне выразу (**96—102**).

96. 1) $\log_5^2 25$; 2) $\log_4^3 64$;

3) $\log_3^4 \frac{1}{9}$; 4) $\log_{0,5}^2 32$.

97. 1) $\sqrt{\log_2 16}$; 2) $\sqrt{\lg 10\,000}$;

3) $\sqrt[3]{\log_2 256}$; 4) $\sqrt{\left(-2\log_6 \frac{1}{36}\right)}$.

98. 1) $\left(6^{\log_6 \sqrt[3]{4}}\right)^3$; 2) $\left(3^{\log_3 \sqrt[7]{6}}\right)^7$;

3) $2^{\log_8 125}$; 4) $9^{\log_3 \sqrt{10}}$.

99. 1) $\left(6^{\log_2 6}\right)^{\log_6 2}$; 2) $\left(5^{\log_{16} 7}\right)^{\log_5 4}$;

3) $25^{\frac{1}{\log_3 5}}$; 4) $3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

100. 1) $\sqrt{\log_{25} 5 + \log_{25} 60 - \log_{25} 12}$;

2) $\sqrt{\log_{18} 54 + \log_{18} 2 - \log_{18} 6}$.

101. 1) $\log_{0,5} \sin\frac{\pi}{4} - \log_{2013} \mathrm{tg}\frac{17\pi}{4}$;

2) $\log_{0,75} \cos\frac{25\pi}{6} + \log_{2013} \sin\frac{17\pi}{2}$.

102. 1) $\log_{0,5}\log_{36}6 - 8^{\frac{1}{\log_6 8}}$;

2) $\log_{0,25}\log_{256}4 - 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$.

Спрасціце выраз (**103—105**).

103. 1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}\log_5(x^2-10x+25)}$; 2) $3^{-\log_9(x^2-16x+64)}$.

104. 1) $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$; 2) $7^{\sqrt{\log_7 8}} - 8^{\sqrt{\log_8 7}}$.

105. 1) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)}$.

106. 1) Знайдзіце значэнне $\lg 112$, калі $\lg 2 = m$, $\lg 7 = n$.
2) Знайдзіце значэнне $\lg 24$, калі $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$.

II

Спрасціце выраз (**107—111**).

107. 1) $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} m} + 4^{1+4\log_4 m}\right) \cdot 6^{-\frac{1}{\log_m 6}}$;

2) $\left(\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} m} + 2^{1+3\log_2 m}\right) \cdot 8^{-\frac{1}{\log_m 8}}$.

108*. 1) $\log_8\left(15\sqrt{3}+26\right) + \log_4\left(7-4\sqrt{3}\right)$;

2) $\log_9\left(2\sqrt{2}+3\right) + \log_{27}\left(5\sqrt{2}-7\right)$.

109. 1) $\dfrac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 14 + 2\log_2 7}$;

2) $\dfrac{\log_3^2 12 + 2\log_3 12 + 4\log_3 2 - 4\log_3^2 2}{3\log_3 12 + 6\log_3 2}$.

110. 1) $3^{\frac{1}{\log_5 3}} \cdot 3^{\log_3^2 4} - 5 \cdot 4^{\log_3 4} + \lg 0{,}1$;

2) $2^{\frac{1}{2\log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 25}$.

111. 1) $(\log_3 4 + 9\log_4 3 + 6)(\log_3 4 - 3\log_{108} 4)\log_4 3 - \log_3 4$;

2) $(\log_7 3 + \log_3 7 + 2)(\log_7 3 - \log_{21} 3)\log_3 7 - \log_7 3$.

112. 1) Спрасціце выраз $\log_{ab}\frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b}$ і знайдзіце яго значэнне, калі $\log_a b = 2$.

2) Спрасціце выраз $\log_{\sqrt[3]{b}} \frac{b}{\sqrt[3]{a}} - \frac{3}{\log_{\sqrt[3]{ab}}\left(a\sqrt{b}\right)} + 2\log_a \sqrt{b}$ і знайдзіце яго значэнне, калі $\log_b a = 2$.

7. Рацыянальныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Рацыянальныя няроўнасці

I

Рашыце ўраўненне (**113—119**).

113. 1) $49 - 16x^2 = 0$; 2) $x^2 - 27 = 0$.

114. 1) $\frac{1}{7}x + 49x^2 = 0$; 2) $y^3 - 64y = 0$.

115. 1) $x^2 - 10x + 9 = 0$; 2) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{25} = 0$;

3) $x^2 + 4x - \sqrt{3} + 1 = 0$; 4) $x^2 + 2\left(1 + \sqrt{8}\right)x + 8\sqrt{2} = 0$.

116. 1) $x^2 + (x + 3)(x - 2) = 2(x^2 - 4)$;

2) $3(x^2 - 1) = 2x^2 + (x + 2)(x - 1)$.

117. 1) $x^2 + 12|x| + 35 = 0$; 2) $x^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 20 = 0$;

3) $x^2 - \left(\sqrt{x + 3}\right)^2 - 8 = 0$; 4) $x^2 - 4x \cdot \frac{|x - 10|}{x - 10} + 2 = 0$.

118. 1) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{10x - 3} = 0$; 2) $\frac{3x^2 + x^3}{x^2 - 4} = 0$.

119. 1) $\frac{x}{x^2 - 16} + \frac{x - 1}{x + 4} = 0$; 2) $\frac{1}{x^2 - 16} + \frac{12}{(x + 4)^2} - \frac{1}{(x - 4)^2} = 0$.

120. Знайдзіце карані ўраўнення $\frac{2x - 2}{x + 3} - \frac{x + 3}{3 - x} = 5$, што задавальняюць умову $-\sqrt{47} \leqslant x < 5$.

Рашыце ўраўненне (**121—124**).

121. 1) $\left|x^2-4x\right|=5;$ 2) $\left|2x-x^2\right|+9=0;$

3) $\left|3x^2-5x+6\right|=4;$ 4) $\left|7x^2-3x-2\right|=-11.$

122. 1) $|x-2|=|x+3|;$ 2) $\left|x^2-1\right|=|x+5|;$

3) $x^2-2|x|-3=0;$ 4) $2x^2+|x|-3x=0.$

123. 1) $(x^2-7x+12)\sqrt{x-4}=0;$

2) $(4x^2-3x-2)\sqrt{2x}=0;$

3) $(x^2-\sqrt{2}x-4)\sqrt{5x+10}=0;$

4) $(x^2-x-3+\sqrt{3})\sqrt{6+3x}=0.$

124. 1) $\dfrac{-3x^2+6}{\sqrt{x-1}}=0;$ 2) $\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+2}}=0.$

Рашыце сістэму ўраўненняў (**125—127**).

125. 1) $\begin{cases}xy=6,\\x+y=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=8,\\x+y=6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-2y=6,\\x^2-4y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x-4y=-6,\\6x-y^2=3.\end{cases}$

126. 1) $\begin{cases}x^2+y^2=17,\\x^2-y^2=15;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+xy=15,\\y^2+xy=10.\end{cases}$

127. 1) $\begin{cases}4x^2-20xy+25y^2=64,\\16x^2+24xy+9y^2=100;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+6xy+9y^2=4,\\9x^2-6xy+y^2=256.\end{cases}$

128. 1) Запішыце корань ураўнення $x^2-7x-8=0$, што задавальняе няроўнасць $3x-14>0$.

2) Запішыце корань ураўнення $-x^2+7x-10=0$, што задавальняе няроўнасць $10-3x>0$.

Рашыце няроўнасць (**129—139**).

129. 1) $\dfrac{3x+7}{5}-\dfrac{2x+1}{3}\leqslant\dfrac{7-x}{6};$ 2) $\dfrac{2x+5}{3}-\dfrac{6x-1}{4}\geqslant x+1.$

130. 1) $\dfrac{7x-12}{1-6x}>0;$ 2) $\dfrac{0{,}6x+1}{5x+2}<0.$

131. 1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $2x^2 - 7x + 3 > 0$.

132. 1) $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{x} < \frac{1}{4}$.

133. 1) $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{x+3} < \frac{1}{5}$.

134. 1) $\frac{3}{x} \leqslant \frac{x}{27}$; 2) $\frac{36}{x} \geqslant \frac{x}{4}$.

135. 1) $\frac{2}{x} - \frac{5}{6-x} < 0$; 2) $\frac{2}{10-x} - \frac{7}{x} > 0$.

136. 1) $\frac{7x+1}{x^2+4x+3} < 1$; 2) $\frac{5x+3}{x^2+x-2} > 1$.

137. 1) $\left(\frac{2x+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{12-x}{4}\right)^2 \geqslant 0$; 2) $\left(\frac{3x-5}{4}\right)^2 - \left(\frac{8-x}{5}\right)^2 \leqslant 0$.

138. 1) $x^2(x-4)^3(x+2) > 0$; 2) $x^4(x+1)^2(3x-15) < 0$.

139. 1) $|4+2x| < 5$; 2) $|3-2x| > 4$.

140. Рашыце сістэму няроўнасцей:

1) $\begin{cases} 2x - 23 > 0, \\ 3x - 40 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 2 - 5x < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0, \\ x > 0. \end{cases}$

II

Рашыце ўраўненне (**141—143**).

141. 1) $|x-6| = x-6$; 2) $\sqrt{x^2-10x+25} = 5-x$;

3) $|x-1| + |x+1| = 8$; 4) $|x+5| - |x-3| = 8$.

142. 1) $3x^2 - x - \frac{8}{3x^2-x} = 2$; 2) $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$.

143. 1) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1) = 28$;
2) $(x^2+x-2)(x^2+x) = 24$;
3) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$;
4) $(x-1)(x-7)(x-4)(x+2) = 40$.

Рашыце сістэму ўраўненняў (**144—146**).

144. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 2, \\ y^3 + x^2y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + x - y = 33, \\ 2xy - 4x^2 + 3x + 5y = -37; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$

145. 1) $\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 = 0, \\ 3x^2 - 2xy = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 3xy - 4x^2 = 0, \\ 4xy - x^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 + 2xy - 15x^2 = 0, \\ y^2 + 3xy = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^2 - 3xy + 2x^2 = 0, \\ 5xy - 2y^2 = 18. \end{cases}$

146. 1) $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + 3x = 27, \\ 4\frac{x + y}{x - y} - 5x = -11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x - y}{x + y} = 11 + 2y, \\ \frac{x - y}{x + y} + 8y = -29. \end{cases}$

147. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(a - 3)x^2 + 8x - 2 = 0$:

1) мае два карані;
2) мае адзін корань;
3) не мае каранёў?

148. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(a + 5)x^2 - 4x + 3 = 0$:
1) мае два карані;
2) мае адзін корань;
3) не мае каранёў?

149. Пры якіх значэннях a дадзенае ўраўненне мае адзін корань:

1) $3x^2 - 6x + 2a = 0$;
2) $2x^2 - 12x + 3a = 0$?

150. Пры якіх значэннях a модуль рознасці каранёў ураўнення $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ роўны 6?

151. Пры якім значэнні a карані ўраўнення $(a + 2)x^2 - ax - a = 0$ сіметрычны адносна $x = 1$?

152. Пры якіх значэннях a сума квадратаў каранёў ураўнення $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ роўна 7?

Рашыце ўраўненне адносна x (**153—155**).

153. 1) $(6 - a)x = -4$; 2) $(a + 7)x = -7$;

3) $3x + a = 2a - 3$; 4) $a - 4x = 3a + 1$.

154. 1) $x^2 + 10kx + 9k^2 = 0$;

2) $x^2 + (2k - 3)x - 6k = 0$;

3) $x^2 - (3k - 2)x + 2k^2 - k - 3 = 0$;

4) $x^2 - 4kx + 3k^2 - 4k - 4 = 0$.

155. 1) $2ax^2 - (a + 1)x + \frac{1}{8}a = 0$;

2) $\frac{1}{2}ax^2 - (3 - 2a)x + 2a = 0$.

156. Знайдзіце ўсе значэнні a, пры кожным з якіх сістэма ўраўненняў мае адзінае рашэнне:

1) $\begin{cases} ax - 2a^2y = a, \\ a^2x + 3ay = a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a^2x + 3a^5y = 2a, \\ -5a^3x + 8a^2y = 7a^4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax + (a - 4)y = 3 - 6a, \\ 6x - 2y = a - 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (5a + 2)x - 8y = 19 - a, \\ (2a + 11)x + 7y = a + 13. \end{cases}$

157. Знайдзіце ўсе значэнні a, пры кожным з якіх сістэма ўраўненняў не мае рашэнняў:

1) $\begin{cases} ax - 10y = 16, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2ay = 11, \\ 5x - 10y = 23; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax + 7y = a - 3, \\ 5x - 2ay = a + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 11x - 4ay = 19, \\ 12ax + 7y = 15. \end{cases}$

Рашыце няроўнасць (**158—159**).

158. 1) $(x^2 - 3x - 1)^2 \leqslant (x^2 + 7x + 1)^2$;

2) $(x^2 + 2x - 2)^2 \geqslant (x^2 - 5x + 2)^2$.

159. 1) $\dfrac{(x^2 - 7x - 8)(x - 8)^3}{(x + 2)^2(5 - x)} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{(x^2 + 5x - 24)(x + 2)^5}{(x - 5)^4(12 - 6x)} \leqslant 0$.

8. Тэкставыя задачы

I

160. Калі лічнік дробу паменшыць на 1, а назоўнік дробу павялічыць на 1, то атрымаецца дроб, роўны $\frac{1}{2}$, а калі лічнік дробу паменшыць на 5, а назоўнік дробу павялічыць на 5, то атрымаецца дроб $\frac{1}{3}$. Знайдзіце дроб.

161. Лічнік дробу на 3 меншы за яго назоўнік. Сума дробу і адваротнага яму дробу ў 7,25 раза большая за зыходны дроб. Знайдзіце зыходны дроб.

162. Сума лічбаў двухзначнага ліку роўна 7. Калі лічбу дзясяткаў павялічыць на 3, а лічбу адзінак паменшыць на 3, то атрыманы лік будзе запісаны тымі ж лічбамі, што і зыходны. Знайдзіце зыходны лік.

163. У разрадзе дзясяткаў двухзначнага ліку стаіць лічба, на 3 большая за лічбу, што стаіць у разрадзе адзінак. Сума квадратаў лічбаў ліку, складзеная з квадратам самога ліку, роўна 2733. Знайдзіце лік.

164. Маторная лодка прайшла па цячэнні ракі 14 км, а затым 9 км супраць цячэння, затраціўшы на ўвесь шлях 5 г. Знайдзіце скорасць цячэння ракі, калі скорасць маторнай лодкі ў стаячай вадзе роўна 5 км/г.

165. Юра і Ігар, што адначасова выехалі на веласіпедах насустрач адзін аднаму з вёсак Залатухіна і Жукі, збліжаюцца са скорасцю 40 км/г. Калі яны павялічаць скорасць збліжэння на 10 км/г, то сустрэнуцца на 18 мін раней. Якая адлегласць паміж вёскамі Залатухіна і Жукі?

166 Матацыкліст Косця едзе з вёскі Ануфрына са скорасцю 60 км/г. Калі ён паменшыць скорасць руху ў два разы, то прыедзе ў пасёлак Ананічы на 4 г пазней, чым планаваў. Які шлях трэба праехаць Косцю ад Ануфрына да Ананічаў?

167. Брыгада будаўнікоў здала ў эксплуатацыю аб’ект на 4 дні раней, чым другая брыгада, што працавала на такім жа аб’екце. За колькі дзён кожная брыгада можа пабудаваць аб'ект, калі, працуючы да гэтага разам, за 24 дні яны пабудавалі 5 такіх аб'ектаў?

168. У басейн праведзены дзве трубы. Праз першую трубу ён напаўняецца на 12 г хутчэй, чым праз другую. Пасля таго як першая труба дзейнічала 10 г, яе закрылі і адкрылі другую, праз якую басейн напоўніўся за 16 г. За колькі гадзін праз кожную трубу асобна можна напоўніць пусты басейн?

169. Цеплаход загружаецца пры дапамозе пад'ёмных кранаў. Спачатку працавалі краны аднолькавай магутнасці. Праз 2 г да іх далучыліся краны меншай магутнасці, і пасля гэтага загрузка цеплахода была скончана праз 3 г. Калі б усе краны пачалі працаваць адначасова, то загрузка была б скончана праз 4 г 30 мін. За колькі гадзін краны кожнай магутнасці выканалі б усю загрузку, працуючы асобна?

170. Два рабочыя, з якіх другі пачынае працаваць на $1\frac{1}{2}$ дня пазней, могуць выканаць работу за 7 дзён. Калі б гэтую работу выконваў кожны асобна, то першаму спатрэбілася б на 3 дні больш, чым другому. Колькі дзён трэба кожнаму рабочаму, каб выканаць работу асобна?

171. На машынабудаўнічым заводзе распрацавалі новы тып дэталі для генератараў. З 875 кг металу сталі рабіць на 3 дэталі больш, чым рабілі дэталей старога тыпу з 900 кг. Вызначыце масы дэталей новага і старога тыпаў, калі дзве дэталі новага тыпу лягчэйшыя за адну дэталь старога тыпу на 0,1 т.

172. Для прамывання фатаграфічных негатываў выкарыстоўваюць ванну, што мае форму прамавугольнага паралелепіпеда памерам $20 \times 90 \times 25$ см. Для пастаяннага абнаўлення вада паступае ў ванну праз адзін кран і адначасова выцякае праз другі. Каб пры дапамозе другога крана зусім апаражніць ванну, спатрэбіцца на 5 мін менш часу, чым для напаўнення яе праз першы кран пры закрытым другім. Калі ж адкрыць абодва краны, то поўная ванна апаражніцца за 1 г. Знайдзіце колькасць вады, прапускаемую кожным кранам за 1 мін.

173. 20 % узросту бабулі Веры Аляксандраўны на 12 гадоў большыя за 30 % узросту ўнучкі Ганны, а 10 % узросту бабулі на 3 гады меншыя за 60 % узросту Ганны. Колькі гадоў Веры Аляксандраўне і колькі гадоў Ганне?

174. 40 % ліку самастойна зробленых Антонам дамашніх заданняў па алгебры на 11 большыя за 20 % ліку спісаных заданняў, а 10 % ліку самастойна зробленых заданняў на 6 меншыя за 40 % ліку спісаных. Знайдзіце лік дамашніх заданняў па алгебры, выкананых Антонам самастойна, і лік спісаных.

175. Ёсць 15-працэнтны і 35-працэнтны растворы солі. Колькі трэба ўзяць кожнага раствору, каб атрымаць 600 г 30-працэнтнага раствору?

176. У адным сплаве ўтрымліваецца 60 % волава, а ў другім — 80 %. Колькі трэба ўзяць кожнага сплаву, каб атрымаць з іх 170 кг новага сплаву, у якім волава складае 65 %?

177. Ёсць 600 г серабра 835-й пробы. Колькі чыстага серабра трэба дадаць да гэтых 600 г, каб атрымаць серабро 875-й пробы?

178. На першай паліцы было на 15 кніг больш, чым на другой. Пасля таго як на першай паліцы стала на 10 % больш кніг, а на другой — на 20 %, лік кніг на першай паліцы склаў $\frac{11}{20}$ ад ліку кніг на абедзвюх паліцах. Колькі кніг стала на кожнай паліцы?

II

179. Два двухзначныя лікі па чарзе прыпісваюць адзін да аднаго. Рознасць атрыманых чатырохзначных лікаў роўна 2178. Знайдзіце гэтыя двухзначныя лікі, калі іх сума роўна 68.

180. Сума лічбаў чатырохзначнага ліку роўна 15. Адносіна двухзначнага ліку, запісанага першымі дзвюма лічбамі, да ліку, запісанага апошнімі дзвюма лічбамі, роўна $\frac{8}{21}$. Знайдзіце чатырохзначны лік.

181. Пры дзяленні трэцяга ліку на першы ў дзелі атрымалі 2, а ў астачы 3. Пры дзяленні другога ліку на першы ў дзелі атрымалі 1, а ў астачы 2. Знайдзіце гэтыя тры лікі, калі сума другога і трэцяга лікаў на 1 большая за квадрат першага ліку.

182. Заработная плата павысілася на 5 %, а цэны на тавар знізіліся на 16 %. На колькі працэнтаў павысілася пакупніцкая здольнасць спажыўцоў?

183. Праз тры краны цыстэрна можа быць вызвалена ад вадкасці, што змяшчаецца ў ёй, за 4 г 48 мін. Каб вызваліць цыстэрну толькі з дапамогай першага і другога кранаў, спатрэбіцца ў 1,5 раза больш часу, чым з дапамогай трэцяга крана. З дапамогай другога і трэцяга кранаў цыстэрна будзе вызвалена ад змесціва ў 6,5 раза хутчэй, чым з дапамогай толькі першага крана. За які час цыстэрна можа быць вызвалена ад змесціва з дапамогай кожнага крана асобна?

184. Бак напаўняецца вадой з двух кранаў, прычым першы кран адкрылі на 5 г раней за другі. Калі б першы кран быў адкрыты столькі часу, колькі быў адкрыты другі, а другі — столькі, колькі быў адкрыты першы, то з першага крана ў бак папала б у два разы менш вады, чым з другога. Калі адкрыць абодва краны адначасова, то бак напоўніцца за 17 г. Колькі часу быў адкрыты другі кран?

185. З пункта A ў пункт B выехаў веласіпедыст і рухаўся з пастаяннай скорасцю 20 км/г. Калі ён праехаў $8\frac{1}{3}$ км, яго дагнаў аўтамабіль, які выехаў з пункта A праз 15 мін пасля веласіпедыста. Пасля гэтага веласіпедыст праехаў яшчэ 25 км і сустрэў аўтамабіль, які даехаў да пункта B, адпачыў 0,5 г, развярнуўся і паехаў у пункт A. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B, калі скорасць аўтамабіля пастаянная.

186. Два паязды выехалі з горада A ў горад B з інтэрвалам 5 г і адначасова прыбылі ў горад B. Калі першы поезд быў на сярэдзіне шляху, другі адставаў ад яго на 225 км, а за гадзіну да прыбыцця адлегласць паміж паяздамі была роўна 30 км. Знайдзіце скорасці паяздоў і адлегласць паміж гарадамі.

187. Пункт C размешчаны на адлегласці 12 км ад пункта B уніз па цячэнні ракі. Рыбак адправіўся на лодцы ў пункт C з пункта A, размешчанага вышэй за пункт B. Праз 2,5 г ён прыбыў у пункт C. На адваротны шлях было затрачана 5 г. Паставіўшы на лодку рухавік, рыбак павялічыў уласную скорасць лодкі ў 3 разы і прыплыў з пункта A ў пункт B за 24 мін. Знайдзіце скорасць цячэння ракі.

9. Ірацыянальныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Ірацыянальныя няроўнасці

I

Рашыце ўраўненне (**188—194**).

188. 1) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5;$ 2) $\sqrt{9x^2-12x+85}=9;$

3) $\sqrt[4]{5x^2+23x+246}=4;$ 4) $\sqrt[4]{7x^2-52x+102}=3.$

189. 1) $\sqrt[9]{\dfrac{x+7}{3x+17}}=1;$ 2) $\sqrt[7]{\dfrac{x+2}{5x+22}}=-1.$

190. 1) $\sqrt{5x+1}=\sqrt{7x-9};$

2) $\sqrt{4x-7}=\sqrt{3x-4};$

3) $\sqrt{-x^2-13x-9}=\sqrt{-7x-9};$

4) $\sqrt{-x^2-16x-3}=\sqrt{-8x-3}.$

191. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{25-x}=5;$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt{16-x}=4;$

3) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2;$ 4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=2.$

192. 1) $\sqrt[3]{2x-1}=1-\sqrt[3]{x-1};$ 2) $\sqrt[3]{13-x}-\sqrt[3]{22+x}=-1;$

3) $\sqrt[9]{x^2+4x}\cdot\sqrt[6]{x-3}=0;$ 4) $\sqrt[7]{x^2-1}\cdot\sqrt[4]{2x+1}=0;$

5) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}=4;$ 6) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1.$

Рашыце няроўнасць (**193—194**).

193. 1) $\sqrt{0{,}4x+1}<3;$ 2) $\sqrt{1-0{,}1x}\leqslant 5;$

3) $\sqrt[3]{2x+5}\geqslant 3;$ 4) $\sqrt[5]{x+5}>-2.$

194. 1) $5\sqrt{x}-4x\geqslant 1;$ 2) $11\sqrt{x}-4x\geqslant 6;$

3) $\sqrt{x+7}>\sqrt{-1-x};$ 4) $\sqrt[4]{5x+4}<\sqrt[4]{2+9x}.$

Рашыце сістэму ўраўненняў (**195—196**).

195. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ x+y=26;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=7,\\ x+y=25.\end{cases}$

196. 1) $\begin{cases}\sqrt{x^2+5x-6}=y,\\ \sqrt{y^2+5y-6}=x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-7}=y,\\ \sqrt{y^2+4y-7}=x.\end{cases}$

II

Рашыце ўраўненне (**197—200**).

197. 1) $\sqrt{7-x}-\sqrt[3]{2+x}=-1;$ 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=5.$

198. 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12};$

2) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}=\sqrt{5x-10};$

3) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x};$

4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}.$

199. 1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3;$ 2) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3};$

3) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3;$ 4) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$

200. 1) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}-2\cdot\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{7}{3};$ 2) $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=2\dfrac{1}{6};$

3) $\dfrac{(x^2+3x-10)\sqrt{x+6}}{4x+20}=0;$ 4) $\dfrac{(x^2-6x-27)\sqrt{20-2x}}{18-2x}=0.$

201. Рашыце няроўнасць:

1) $\sqrt{2x^2-15x+28}\leqslant x-2;$

2) $\sqrt{-x^2-5x-4}\leqslant x+4;$

3) $(x^2-8x+12)\sqrt{-2x^2+11x-15}\leqslant 0;$

4) $(x^2-7x+6)\sqrt{4-3x^2-4x}\leqslant 0.$

Рашыце сістэму ўраўненняў (**202—206**).

202. 1) $\begin{cases}\sqrt{y-x+1}=5,\\ \sqrt{-y-x-15}=2y-3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{2y-x+3}=1,\\ \sqrt{-2y-x+6}=3y-2.\end{cases}$

203*. 1) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=32,\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=32;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=351,\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=378.\end{cases}$

204*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ xy=8.\end{cases}$

205*. 1) $\begin{cases}2x-\sqrt{xy}+9y=71,\\ 2x+\sqrt{xy}-9y=73;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x-\sqrt{xy}+4y=79,\\ 5x+\sqrt{xy}-4y=81.\end{cases}$

206*. 1) $\begin{cases}|y|\sqrt{y^2-4x^2}=0,\\ x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}|x|\sqrt{4x^2-y^2}=0,\\ x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1.\end{cases}$

207. Рашыце ўраўненне з невядомым x:

1) $\sqrt{x-4}=a;$ 2) $\sqrt{x+1}=-a;$

3) $a^2\cdot\sqrt{x-4}+\sqrt{x}=0;$ 4) $\sqrt{x-6}+a^2|x|=0;$

5) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3;$ 6) $\sqrt{x-a}-\sqrt{x+1}=4.$

10. Трыганаметрычныя ўраўненні

I

Рашыце ўраўненне (**208—214**).

208. 1) $\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=1;$ 2) $3+\cos 2x+3\sqrt{2}\cos x=0;$

3) $6\cos^2 x-5\sin x+5=0;$ 4) $\sin^2(\pi+x)-\sin x-2=0.$

209. 1) $\sin^3 x=2\sin 2x;$

2) $\operatorname{tg} x-5\operatorname{tg}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=6\sin\frac{13\pi}{2}.$

210. 1) $\frac{1}{\cos^2 x}-4\operatorname{tg} x+2=0;$ 2) $\cos 2x+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=0;$

3) $7 + 4\sin x\cos x + \frac{3}{\cos(270° + 2x)} = 0;$

4) $\frac{2 - 3\sin x + \cos(2x + \pi)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$

211. 1) $\sin 3x - \sin x = 0;$ 2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x;$

3) $\mathrm{tg}\, 2x - \mathrm{tg}\, 4x = 0;$ 4) $\mathrm{tg}\, 3x = \mathrm{tg}(90° - 4x).$

212. 1) $\cos 4x + \sin 4x = \sqrt{2};$ 2) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1;$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2};$ 4) $\sqrt{3}\sin 2x = \cos 2x + 2.$

213. 1) $\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x;$

2) $\sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = \cos 3x - \sin x;$

3) $2\sin 2x\cos 3x + \sin x + \cos 2x = 0;$

4) $2\cos 5x\cos 8x - \cos 13x = 0;$

5) $2\sin x\sin 8x = \cos 7x;$

6) $2\sin x\cos 2x = \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2};$

7) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0{,}5;$

8) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

214. 1) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = \frac{4}{\sqrt{3}};$

2) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sin 2x;$

3) $\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x = 4 + 2\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\, x + 1} + \frac{1}{\mathrm{tg}\, x - 1}\right);$

4) $\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{tg}^2 x - 8\,\mathrm{ctg}^2 2x = 0;$

5) $\sin 2x + \mathrm{tg}\, x = 0;$

6) $2\sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x = 2.$

215. Рашыце сістэму ўраўненняў:

1) $\begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x + \sin y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x\cos y = -\frac{1}{4}, \\ \cos x\sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos 2x + \cos y = 0. \end{cases}$

II

Рашыце ўраўненне (**216—220**).

216. 1) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$;
2) $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

217. 1) $\sin^6 x - \cos^6 x + 1 = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)$;
2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{13}{14}(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

218. 1) $4^{|\sin x - 1|} = 16$;
2) $5^{|x-2|\sin x} = \left(\sqrt{5}\right)^{x|\sin x|}$.

219. 1) $\lg\left(3\sin x - \cos x\right) + \lg\cos x = 0$;
2) $\lg(2\sin x - 1 + 10\sin^2 x) = \lg(12 - \sin x)$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \cos^2 x = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{7 - \operatorname{tg} x}$;
4) $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

220. 1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;
2) $\sin(\arcsin(x - 1)) = x^2 - 4x + 5$;
3) $\arccos x = \pi + (x^2 - 1)^2$;
4) $-2\arcsin x = \pi + (x + 1)^2$;
5) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$;
6) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;
7) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;
8) $4\operatorname{arctg}\left(x\,\frac{3x-1}{x+8}\right) = \pi$.

221. Рашыце ўраўненне адносна x:

1) $\sin x = a$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + 1$;
3) $\sin^4 x - \cos^4 x = a$;
4) $\sin^4 x + \cos^4 x = a$.

222*. Рашыце сістэму ўраўненняў:

1) $\begin{cases} \cos 2y\sqrt{\sin x} = 0, \\ 4\sin^2 x + \cos 2y = 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$

223*. Рашыце сістэму ўраўненняў з дзвюма зменнымі x і y:

1) $\begin{cases}\sin x\cos y = a^2,\\ \cos x\sin y = a;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin^2 x - \sin^2 y = a,\\ x + y = \frac{3\pi}{2}.\end{cases}$

11. Паказальныя і лагарыфмічныя ўраўненні і сістэмы ўраўненняў. Паказальныя і лагарыфмічныя няроўнасці

I

Рашыце ўраўненне (**224—225**).

224. 1) $16^{x-0,5} - 5\cdot 4^{x-1} + 2 = 0$; 2) $25^{x+1,5} - 9\cdot 5^x + 1 = 0$;

3) $2{,}5^{\cos x}\cdot\left(\sqrt{10}\right)^{2\cos x} = 25^{0,5}$; 4) $36^{\sin x}\cdot 4^{\sin x} = 144^{-0,5}$;

5) $\sqrt{64^{5-3x}} = \sqrt[3]{16^{8+x}}$; 6) $\sqrt{27^{9-5x}} = \sqrt[3]{9^{7+x}}$;

7) $2^{2x+1} - 7\cdot 2^x = 2^{2x} + 8$;

8) $6^{2x+1} - 3\cdot 6^x = 2\cdot 6^{2x} + 126$.

225. 1) $\left(\frac{27}{8}\right)^x\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1} = \frac{\lg 125}{\lg 25}$;

2) $\left(\frac{9}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x+1} = \frac{\lg 64}{\lg 16}$;

3) $\lg(x+3) = -\lg(2x+5)$;

4) $\lg(x+8) = -\lg(3x+22)$;

5) $3\lg^2(3x+79) = 14\lg(3x+79) - 16$;

6) $3\lg^2(5x+89) + 20 = 16\lg(5x+89)$.

Рашыце сістэму ўраўненняў (**226—227**).

226. 1) $\begin{cases}2^{x+1}\cdot 3^{y+2} = 2,\\ x - y = 2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^{x+3}\cdot 2^{y-3} = 3,\\ x - y = -5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^x\cdot 7^y = 63,\\ 3^x + 7^y = 16;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3^x\cdot 25^y = 5625,\\ 5^x\cdot 9^y = 2025.\end{cases}$

227. 1) $\begin{cases}\lg x(\lg x + \lg y) = 2,\\ \lg x - \lg y = 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2(x^2 + y^2) = 5,\\ \log_2 x = 4 - \log_2 y.\end{cases}$

Рашыце няроўнасць (**228—230**).

228. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2,5-0,5x^2} > \frac{1}{16}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-0,5x^2} \leqslant 27$;

3) $2^{3x-2} + 2^{3x-1} \geqslant 6$; 4) $4^{3x-2} + 4^{3x-1} \leqslant 80$;

5) $2 \cdot 3^x - 9^x + 3 > 0$; 6) $2^{4x-2} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 \leqslant 0$;

7) $\frac{9^x - 81}{x^2 + 10x + 21} > 0$; 8) $\frac{11^x - 121}{x^2 + 14x + 45} < 0$.

229. 1) $\log_4 x + \log_4 (x - 12) \geqslant 3$; 2) $\log_3 x + \log_3 (x - 24) \geqslant 4$;

3) $\lg \frac{9 - 2x}{x + 2} < 0$; 4) $\lg \frac{7 - 2x}{x + 4} \leqslant 0$;

5) $\log_{0,1} \frac{x + 4}{x - 9} \geqslant 0$; 6) $\log_{0,2} \frac{x + 2}{x + 9} \leqslant 0$.

230. 1) $\log_8 \left(1 + \frac{9}{x}\right) + \log_{\frac{1}{8}} \left(1 - \frac{x}{6}\right) < 1$;

2) $\log_3 \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x}{4}\right) > 1$;

3) $(x + 4)(8 - x) \lg (x - 1) < 0$;

4) $(x + 8)(6 - x) \log_{0,1} (x - 1) > 0$.

II

Рашыце ўраўненне (**231—235**).

231. 1) $27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 2^{3x} = 0$;

2) $8^x - 2 \cdot 20^x + 3 \cdot 50^x - 6 \cdot 5^{3x} = 0$;

3) $7^x + 24^x = 25^x$;

4) $12^x + 5^x = 13^x$.

232. 1) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$; 2) $5^{-x} \cdot 8^{\frac{x}{x-1}} = 100$;

3) $x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}$; 4) $x^{2\log_{16} x} = \frac{64}{\sqrt{x}}$.

233. 1) $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}} (x - 1) = 2$;

2) $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}} (x - 2) = 2$;

3) $\log_3 (5x + 1) + \log_{5x+1} 3 = 4,25$;

4) $\log_4 (3x + 1) + \log_{3x+1} 4 = 3\frac{1}{3}$.

234. 1) $\log_{2014}\sqrt{16-5x}=\log_{2014}(2x-5)$;

2) $\log_{2013}\sqrt{11x-18}=\log_{2013}(2x-9)$.

235. 1) $\log_{\sin(2\pi-x)}(\cos^2 x+0{,}5\sin 2x+1)=0$;

2) $\log_{\cos(2\pi-x)}(\cos 2x+\sin x)=0$.

236. 1) Пры якіх значэннях a ўраўненне $4^x-(a+1)\cdot 2^x+2a-2=0$ мае адзін корань?

2) Пры якіх значэннях a ўраўненне $4^{(a-1)x^2+2(a+3)x+a}=\frac{1}{16}$ мае адзін корань?

237. Рашыце ўраўненне адносна x:

1) $\lg(x-3)=\lg(2x+a)$;

2) $\log_{0,25}(x^2-7x-a)=\log_{0,5}(x+3)$.

Рашыце сістэму ўраўненняў (**238—239**).

238. 1) $\begin{cases}0{,}5\log_x y+2\log_y x=2,\\5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5,\\3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2.\end{cases}$

239. 1) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=1152,\\\log_{\sqrt{5}}(y-x)=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

Рашыце няроўнасць (**240—242**).

240. 1) $\dfrac{(\log_2 5)^x-(\log_2 5)^2}{(\log_2 5)^{-x}+x\log_{2^x}5}>0$;

2) $\dfrac{(\log_3 2)^x-(\log_3 2)^2}{(\log_3 2)^{-x}+x\log_{3^x}2}>0$.

241. 1) $(2+\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2<0$;

2) $(2+\sqrt{5})^{x-1}>(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

242. 1) $\left|3^{9x^2-2}-6\right|>3$;

2) $\left|2^{4x^2-5}-9\right|<7$.

12. Вытворная

I

243. Знайдзіце вытворную функцыі f:

1) $f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x - 6$;
2) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x + 45$;
3) $f(x) = (x-2)\left(x^2 + 5x - \frac{25}{6}\right)$;
4) $f(x) = (x+1)\left(x^2 - 4x + \frac{7}{3}\right)$;
5) $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - x\sqrt{5} + 2}$;
6) $f(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 1}{x^2 + x\sqrt{2} - 1}$.

244. Цела рухаецца па законе $s(t)$ (t — час у секундах, s — шлях у метрах). Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 4$ с, калі:

1) $s(t) = 2t^3 - 6t^2 + t + 3$;
2) $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t - 4$.

245. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 - 2t - 5$. У які момант часу скорасць руху роўна:

1) 12; 2) 0?

246. Два матэрыяльныя пункты рухаюцца прамалінейна па законах $s_1(t)$ і $s_2(t)$ (t — час у секундах, s — шлях у метрах). У які момант часу іх скорасці роўныя, калі:

1) $s_1(t) = 7{,}5t^2 - 8t - 7$ і $s_2(t) = 2{,}5t^2 + 2t - 9$;
2) $s_1(t) = 12{,}5t^2 - 10t$ і $s_2(t) = 4{,}5t^2 + 6t + 11$?

247. Знайдзіце тангенс вугла нахілу α да восі Ox датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ у пункце з абсцысай x_0, роўнай -2; -1; 2; 3.

248. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ у пункце графіка $(x_0;\ y_0)$, калі:

1) $x_0 = 4$; 2) $x_0 = -2$; 3) $y_0 = -5$; 4) $y_0 = 1$.

249. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі $f(x)$ і каардынаты яе пункта экстрэмуму, калі:

1) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$; 2) $f(x) = 2x^4 - x^3$;

3) $f(x) = x^2(2x - 1) - 9$; 4) $f(x) = x^2(2x - 3) - 7$.

250. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x)$ на адрэзку $I = [0,1;\ 1]$, калі:

1) $f(x) = \frac{16x - 4x^2 - 3}{5x^2}$; 2) $f(x) = \frac{18x - 2x^2 - 3}{5x^2}$.

II

251. У якім пункце датычная, праведзеная да графіка функцыі $y = f(x)$, нахілена да восі абсцыс пад вуглом α:

1) $f(x) = -2x^3 - 12x^2 - 23x - 8,\ \ \alpha = 45°$;

2) $f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 37x - 2,\ \ \alpha = \frac{\pi}{4}$?

252. Датычная да крывой $y = g(x)$ паралельна прамой $y = f(x)$. Знайдзіце каардынаты пункта дотыку і запішыце ўраўненне гэтай датычнай, калі:

1) $f(x) = -5x$ і $g(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$;

2) $f(x) = 6x$ і $g(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 9$.

253. Знайдзіце вугал нахілу да восі Ox датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$, што праходзіць праз пункт P, калі:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 0{,}5,\ \ P(1;\ 2)$;

2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6,\ \ P(2;\ 4)$.

254. Прамавугольны ўчастак зямлі плошчай 8 га агароджваецца плотам. Якія павінны быць памеры ўчастка, каб даўжыня плота была найменшай, калі ўчастак агароджваюць:

1) з трох бакоў;

2) з усіх бакоў?

255. 1) Лік 28 расклалі на 2 складаемыя так, каб сума кубоў была найменшай. Знайдзіце гэтыя лікі.

2) Лік 49 запісалі ў выглядзе здабытку двух дадатных сумножнікаў так, каб сума іх была найменшай. Знайдзіце гэтыя лікі.

256. Пры якіх значэннях a функцыя f мае адзіны крытычны пункт:

1) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5;$
2) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 75x - 13?$

257. 1) Пры якіх значэннях a функцыя $f(x) = 2ax^3 + 5ax$ нарастае на абсягу вызначэння?

2) Пры якіх значэннях a функцыя $f(x) = 8ax^3 + 3ax$ спадае на абсягу вызначэння?

13. Функцыі

I

258. Запішыце абсяг вызначэння функцыі f:

1) $f(x) = \sqrt{16 - x^2};$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2};$
3) $f(x) = \frac{1}{x^3 - x};$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x};$
5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}};$ 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}.$

259. Запішыце абсяг вызначэння функцыі f:

1) $f(x) = \lg(53 - 3x);$ 2) $f(x) = \lg^2(27 + 4x);$
3) $f(x) = \lg^3(-3x - 15);$ 4) $f(x) = \log_2(4x - 3 - x^2);$
5) $f(x) = \frac{1}{\lg(36 - 5x)};$ 6) $f(x) = \lg\lg x.$

260. Запішыце абсяг вызначэння функцыі f:

1) $f(x) = 2^{\sqrt{16 - 8x}};$ 2) $f(x) = 2^{-\sqrt{25x - 4}};$
3) $f(x) = (13 - x)^{-0,5};$ 4) $f(x) = (2x + 21)^{0,5}.$

261. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

1) $y = 5(x - 8)^2 + 2;$ 2) $y = -2(x + 3)^2 - 5;$
3) $y = x^2 - x - 1;$ 4) $y = -x^2 + 2x + 3.$

262. Дакажыце, што лік $\frac{3\pi}{2}$ з'яўляецца перыядам функцыі f:

1) $f(x) = \sin\left(\frac{4x}{3} - 2\right)$;

2) $f(x) = \cos\frac{4x+15}{3}$.

263. Дакажыце, што лік π з'яўляецца перыядам функцыі f:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \log_2\frac{1}{32}$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \lg\sqrt[5]{100}$.

264. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца цотнай:

1) $f(x) = x^2 + \cos 5x$;
2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 4x + x\sin 2x$;
3) $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2} + 6 + \frac{1}{x^4} + \lg x^6$.

265. Дакажыце, што функцыя f з'яўляецца няцотнай:

1) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} 2x$;
2) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + x\cos 6x$;
3) $f(x) = x^3\lg(x^2 + 16)$;
4) $f(x) = \sin x(1 - \cos x)$.

266. Запішыце мноства значэнняў функцыі, зададзенай формулай $y = f(x)$, калі:

1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;
2) $f(x) = x - |x|$;
3) $f(x) = |x| + 4$;
4) $f(x) = \sqrt{25 - |x - 6|}$.

267. Запішыце мноства значэнняў функцыі f:

1) $f(x) = x^2 - 12x + 29$;
2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$;
3) $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x - 3}$;
4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$;
5) $f(x) = -\pi^x + 2$;
6) $f(x) = 0{,}1^x - \sqrt{3^2 + 4^2}$.

268. Знайдзіце найбольшае (найменшае) значэнне функцыі, зададзенай формулай:

1) $f(x) = 7 - x^2$;
2) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$;
3) $f(x) = 9 - |x|$;
4) $f(x) = |10 - x|$.

269. Запішыце прамежкі, на якіх прымае дадатныя (адмоўныя) значэнні функцыя, зададзеная формулай:

1) $f(x) = 0{,}25x - 5$;
2) $f(x) = 12 - 0{,}3x$;

3) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 5;$ 4) $f(x) = -\frac{4}{6-x} - 3;$

5) $f(x) = -5x^2 + 13x + 6;$ 6) $f(x) = 3x^2 - 13x + 12;$

7) $f(x) = \log_{0,2}(x-5) + 2;$ 8) $f(x) = \log_3(x+20) - 3;$

9) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{x}{6}} - 6;$ 10) $f(x) = 4^{\frac{3x}{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

270. Дакажыце, што на прамежку $(0; +\infty)$ з'яўляецца спадальнай функцыя:

1) $y = -4x^2;$ 2) $y = -\sqrt{x};$ 3) $y = 2 - 3x;$

4) $y = \frac{13}{x};$ 5) $y = -|x|;$ 6) $y = 1 - x^3.$

271. Пры якіх значэннях x графік функцыі $y = 2x^2 - 10x + 9$ ляжыць не ніжэй за графік функцыі $y = x - 3$?

272. Пры якіх значэннях p графіку функцыі $y = 3(x+p)^2 - 43$ належыць пункт A:

1) $A(-3; 5);$ 2) $A(2; -16)$?

II

273. Вядома, што функцыя зададзена формулай $y = f(x)$, дзе:

1) $f(x) = 2x - 1;$ 2) $f(x) = 4 - x;$

3) $f(x) = \frac{2}{x};$ 4) $f(x) = -\frac{4}{x};$

5) $f(x) = x^2;$ 6) $f(x) = x^3;$

7) $f(x) = \sqrt{x};$ 8) $f(x) = |x|;$

9) $f(x) = 2^x;$ 10) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x;$

11) $f(x) = \log_2 x;$ 12) $f(x) = \log_{0,5} x.$

Пакажыце відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай:

а) $y = f(x-1) + 2;$ б) $y = f(2x-2) - 1;$

в) $y = 3f(x-2) + 2;$ г) $y = -3f(x-2) - 2.$

274. Вядома, што функцыя зададзена формулай $y = f(x)$, дзе:

1) $f(x) = \sin x;$ 2) $f(x) = \cos x;$

3) $f(x) = \operatorname{tg} x;$ 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x.$

Пакажыце відарыс графіка функцыі, зададзенай формулай:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = 2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = 2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$; г) $y = -2f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$.

275. Запішыце абсяг вызначэння функцыі:

1) $f(x) = \lg(2x + 12) - \sqrt{-2x - 10}$;

2) $f(x) = \lg(4x + 12) + x\sqrt{-x - 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{x + 1}{\lg(2 + x)}$;

4) $f(x) = \frac{\lg(x - 1)}{\sqrt{3{,}5 - x}} - \sin x$.

276. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = ax^2 + bx - 4$, калі каранямі ўраўнення $ax^2 + bx - 4 = 0$ з'яўляюцца лікі 1 і 4.

277. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = ax^2 + bx + c$, калі гэтаму графіку належаць пункты $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 0)$, $C(-2;\ 15)$.

278. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = x^2 - 8x + a$, калі яе найменшае значэнне роўна 2.

279. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = x^2 + ax + a + 2$, калі карані ўраўнення $x^2 + ax + a + 2 = 0$ адносяцца як $1 : 2$.

280. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = x^2 - 2x + c$, калі карані ўраўнення $x^2 - 2x + c = 0$ задавальняюць роўнасць $7x_2 - 4x_1 = 47$ і $x_1 < x_2$.

АДКАЗЫ

Раздзел 1

1.1. 1) –24; 3) 152.

1.2. 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0 > 0$; 4) $-10^0 < 0$; 6) $-13^0 < 0$; 8) $\frac{1}{2^0} > 0$.

1.3. 1) 6^8; 3) $(-5)^{21}$; 5) 2^{10n+4}.

1.4. 2) a^{10}; 4) $(-m)^{22}$; 6) $(6t)^{14}$.

1.5. Напрыклад, 1) $2^8 \cdot 2^8$; 3) $a^2 \cdot a^3$; 5) $4^3 \cdot 4^8$; 7) $13^a \cdot 13^{2a}$; 9) $(7p)^9 \cdot (7p)^{10}$; 11) $(-p)^{10} \cdot (-p)^{10}$.

1.6. 2) 3^3; 4) x^8; 6) a^4; 8) 17^{2n-1}; 10) $(-0,8)^{t-6}$.

1.7. Напрыклад, 1) $4^8 : 4^4$; 3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{16} : \left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) $a^{3t} : a^{2t}$; 7) $\left(\frac{2}{7}b\right)^8 : \left(\frac{2}{7}b\right)^5$.

1.8. 2) 5^6; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-10}$; 6) $(-5)^{16}$; 8) $(-3)^{4p}$.

1.9. 1) Няправільная.

1.10. 2) $\frac{1}{32}y^5$; 4) $-512a^3$; 6) $1000x^6y^{15}$.

1.11. 1) $\frac{x^4}{y^4}$; 3) $\frac{x^4}{y^6}$; 5) $\frac{a^4b^{14}}{25c^8}$.

1.12. 2) $\frac{1}{6^5}$; 4) $\frac{1}{(-8)^{13}}$; 6) $\frac{1}{y^{12}}$; 8) $\frac{1}{(-4y)^{16}}$.

1.13. 1) $\frac{1}{8}$; 3) 16; 5) $-\frac{1}{64}$; 7) $\frac{1}{15}$; 9) 1; 11) 1.

1.14. 2) 21^{-12}; 4) $(-a)^{-27}$; 6) 19^{-1}; 8) 4^{-3}.

1.15. 1) $\frac{27}{2}x^6y^{16}$; 3) $\frac{4}{5}a^3y^2$.

1.16. 2) $-4a^{k-6}b^{8-2k}c^{2k-3}$; 4) $\frac{1}{8}x^{-6}y^{-18}$.

1.17. 1) –2048.

1.18. 2) $\frac{67}{131}$.

1.19. 1) $\sqrt{103} > 10$; 3) $-17 > -\sqrt{290}$; 5) $5\sqrt{3} > \sqrt{74}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{80} < \frac{2}{3}\sqrt{45}$.

1.20. 2) Правільная; 4) не заўсёды; 6) правільная.

1.21. 1) Не заўсёды; 3) не заўсёды.

1.22. 2) Не заўсёды; 4) правільна; 6) не заўсёды.

1.23. 1) 0,05.

1.25. 1) Правільна.

1.26. 2) Няправільна; 4) правільна.

1.27. 1) 4; 3) 0; 5) 0,9; 7) 1,5; 9) $\frac{6}{13}$; 11) $\frac{13}{10}$.

1.28. 2) 0; 4) 2; 6) 0,3; 8) 0,8.

1.29. 1) 0; 3) 2; 5) $\frac{2}{3}$; 7) 0,1.

1.30. 2) 0,4; 0,3; 0,1; 0,2; 0,05; 0,01; 4) 2; 5; 10; 0,3; 0,02; 7; 6) 2; 7; 5; 4; 0,6; 10.

1.31. 1) –10; 3) –4; 5) $-\frac{1}{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 9) –0,2.

1.32. 2) –14; 4) –15; 6) –99.

1.33. 1) $31\frac{4}{5}$.

1.34. 2) 0,001; 4) $12\frac{19}{27}$; 6) $\frac{16}{81}$.

1.35. 1) 3; 3) 49; 5) 10.

1.36. 2) 5; 4) –12; 6) 54; 8) –15; 10) 3; 12) –4.

1.37. 1) 0; 3) 9; 5) –6; 7) –2.

1.38. 2) 4; 4) 0,1; 6) 9; 8) 0.

1.39. 1) –1; 3) –4; 5) 4.

1.40. 2) 8; 4) 0,75.

1.41. 1) $-8\frac{72}{119}$; 3) 1,5.

1.42. 2) a^{-6}; 4) $\frac{56}{3}a^{12}b^{35}$.

1.43. 1) $[-4; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0] \cup [1,2; +\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 7) $\boldsymbol{R}$.

1.44. 2) $(-\infty; 0,375)$; 3) $(1,8; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 7) $\left(-\infty; \frac{11}{17}\right)$.

1.45. 1) 3 см; 3) 0,5 дм.

1.46. 2) ±11; 4) 10; 6) 6; 8) няма каранёў.

1.47. 1) –3; 3) –1; 5) –0,3.

1.48. 2) $\pm\sqrt[4]{19}$; 4) $\sqrt[3]{25}$; 6) $-\sqrt[9]{2}$; 8) $\sqrt[17]{4}$.

1.49. 1) ±160; 3) ±0,04; 5) няма каранёў; 7) 0; 9) ±3.

1.50. 2) –1,5; 4) ±1,5; 6) ±2.

1.51. 1) $\pm\sqrt[4]{7-\sqrt{2}}$; 3) $\pm\sqrt[6]{19+\sqrt{7}}$.

1.52. 2) 0; 4; 4) 1.

1.53. 1) –1; 2; 3) $\pm\sqrt{3}$; ±3; 5) ±1; ±3.

1.54. 2) $[0; +\infty)$; 4) $\boldsymbol{R}$; 6) $[-2; +\infty)$; 8) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

1.55. 1) m; 3) $-m$; 5) $0,3t$; 7) t.

1.56. 2) p; 4) $-k$; 6) $-b$.

1.57. 1) $-a$; 3) b.

1.58. 2) $4|a|$; 4) $0,6|a|$; 6) $|a|$; 8) $|a-b|$.

1.59. 1) 100; 36; $22\frac{2}{3}$; 0; $22\frac{2}{3}$; 36; 100; 3) 150; 54; 34; 0; –34; –54; –150.

1.60. 2) 9; 4) 5.

1.61. 1) 11,92.

1.62. 2) $|x-2y|$; 4) $|p+5|$.

1.63. 1) а) $-x-1$; б) $x+1$.

1.64. 2) Правільна.

1.65. 1) 5; 3) няма каранёў; 5) 3; 7) няма каранёў.

1.66. 2) 2; 4) 15; 6) 27; 8) 27.

1.67. 1) $\sqrt{|x|}$; 3) $\sqrt{|a|}$; 5) $\sqrt[3]{2|m|n^2}$; 7) $5m^2|n|$; 9) $\frac{4ab^4}{5c^7}$.

1.68. 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$; 4) $\sqrt[5]{4-\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

1.69. 1) 100; 3) 2^{16}; 5) 0,125; 7) $\frac{1}{8}$; 9) $\frac{4}{9}$.

1.70. 2) $\sqrt[8]{8}$; 4) $\sqrt[15]{-3}$; 6) $\sqrt[9]{-243}$; 8) $\sqrt[18]{9}$; 10) $\sqrt[30]{6}$; 12) $\sqrt[16]{13}$.

1.71. 1) 2; 3) 4.

1.72. 2) $\sqrt[6]{2} < \sqrt[18]{10}$; 4) $\sqrt[6]{4} = \sqrt[9]{8}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}} > \sqrt[4]{3}$.

1.73. 1) Павялічыць у $\sqrt[3]{2}$ раза; 3) павялічыць у $\sqrt[3]{5}$ раза.

1.74. 2) 8; 4) –64; 6) 1.

1.75. 1) 0; 625; 3) 16; 81; 5) 1; 1024.

1.76. 2) 2; 4) 84; 6) $-\frac{2}{3}$; 8) 14.

1.77. 1) 2; 3) 3.

1.78. 2) 68; 4) 2.

1.79. 1) 2; 3) 3; 5) 15.

1.80. 2) $2\frac{2}{3}$; 4) 15,5.

1.81. 1) $\frac{a}{2\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $\frac{x}{a}\sqrt[9]{\frac{27}{a^7x^3}}$; 5) $-\sqrt[3]{50}\,xy^5$; 7) $a^4b^5\sqrt[5]{b^2}$.

1.82. 2) $\sqrt[3]{2}a^2$; 4) $3\sqrt[5]{a}$; 6) $\frac{5}{2a}$.

1.83. 1) $2a\sqrt[3]{b^2m} - \sqrt[3]{m^2}$; 3) $a - b + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}$.

1.84. 2) $a\sqrt[5]{a}$; 4) $32\sqrt[3]{2}$; 6) $a^6\sqrt[5]{a^2x^4}$; 8) $-\frac{27}{a^8}\sqrt[5]{\frac{8}{a^2}}$.

1.85. 1) 2.

1.86. 2) $2\sqrt[3]{3}$; 4) $-7\sqrt[3]{2}$; 6) $10\sqrt[5]{3}$; 8) $-2\sqrt[7]{3}$.

1.87. 1) $x^2\sqrt[3]{bx}$; 3) $\frac{ax}{by^2}\sqrt[5]{\frac{a}{b^2y^2}}$; 5) $\frac{3x^2y^3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 7) $\frac{\sqrt[3]{m^3-n^3}}{n}$; 9) $\frac{1}{xy}\sqrt[3]{\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}}$.

1.88. 2) $\sqrt[5]{1024x^6y^5}$; 4) $\sqrt[3]{-12m^5n^2}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{b^2}{a^3}}$; 8) $\sqrt[3]{\frac{m^5+1}{m^3}}$.

1.89. 1) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; 3) $-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; 7) $6\sqrt[5]{2}$.

1.90. 2) $\frac{\sqrt[3]{m}}{n}$; 4) $(t^2-1)\sqrt[3]{(t^2+1)^2}$; 6) $\sqrt[5]{x+4}$.

1.91. 1) $\frac{k\left(\sqrt[3]{k}-1\right)}{k-1}$; 3) $\frac{m\left(m\sqrt[3]{m}+3\sqrt[3]{m^2}+9\right)}{m^2-27}$; 5) $3\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)$; 7) $\frac{2+\sqrt[3]{2}}{40}$.

1.92. 2) –15; 4) 57,5; 6) няма каранёў; 8) –11; 7.

1.93. 1) 3; 3) –2,36; 5) –2; 5.

1.94. 2) 150; 4) 24; 6) 0,2; 8) 1,5.

1.95. 1) 200; 3) 4; 5) 0,24.

1.96. 2) 49; 4) 36; 6) $7x^2$; 8) $2c^2$; 10) $a^4|c|$; 12) $3|x|y^2$.

1.97. 1) $2\frac{1}{2}|a^3|c^{2m}$; 3) $\frac{2}{3}a^{2m}b^4$.

1.98. 2) $4\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt[4]{2}$; 8) $2\sqrt[6]{5}$; 10) $1\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}$; 12) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{8}$.

1.99. 1) $x\sqrt{x}$; 3) $\frac{a}{3}\sqrt[4]{a}$; 5) $2a\sqrt{\frac{5a}{2}}$; 7) $\frac{|b|}{2|x|y}\sqrt[4]{\frac{2ab^2}{3y^3}}$.

1.100. 2) $\sqrt{54}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{32}{27}}$; 6) $\sqrt[6]{64x^7y^4}$; 8) $\sqrt[4]{\frac{ab^2}{4}}$.

1.101. 1) $-t\sqrt{-t}$; 3) $m^2n^2\sqrt{n}$; 5) $-4m\sqrt{n}$; 7) $m^2n^5\sqrt{m}$; 9) $mn\sqrt{mn}$; 11) $-mn^2\sqrt{-m}$.

1.102. 2) $-\sqrt{-m^3}$; 4) $-\sqrt[4]{m^4n}$; 6) $\sqrt[6]{3m^6}$; 8) $-\sqrt{\frac{2(m-4)^2}{1-m}}$.

1.103. 1) 3; 3) 4; 5) 6; 7) $\frac{5}{3}$; 9) 2,5.

1.104. 2) $\frac{121}{x^4y^8}$; 4) $\frac{4}{\sqrt{a^2b^3}}$.

1.105. 1) 2; 3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{2}+1$.

1.106. 2) $2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[6]{125}$; 6) $-\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$; 8) $\frac{9\sqrt[4]{8}}{8}$.

1.107. 1) $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$; 3) $(a+b)\sqrt[4]{(a-b)^3}$; 5) $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$.

1.108. 2) $-\frac{\sqrt{6}+1}{5}$; 4) $-\frac{7+\sqrt{7}}{6}$; 6) $\sqrt{14}-\sqrt{6}$; 8) $16\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^4$;

10) $-9\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$.

1.109. 1) $\frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{15}-2\right)}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{30}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)}{2}$;

5) $-4\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; 7) $\frac{\left(2+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}\right)\left(7-2\sqrt{3}\right)}{37}$.

1.110. 2) $t \geqslant 0$; 4) $t \geqslant 0$; 6) $t \leqslant 0$.

1.111. 1) $k \geqslant 4$; 3) $k \geqslant 2$.

1.112. 2) –1,5; 4) няма каранёў; 6) 3; 8) –1,4; 2.

1.113. 1) 7; 3) 2; 5) 26.

1.114. 2) 625; 4) 84.

1.115. 1) –2; 3) 0,5; 5) 12.

1.117. 1) З'яўляецца; 3) не; 5) не; 7) з'яўляецца.

1.118. 2) $\frac{25}{4}$; 4) $-\frac{64}{7}$; 6) $-\frac{6}{7}$.

1.119. 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

1.120. 2) 13,5; 4) $2\frac{2}{3}$; 6) $2\sqrt{2}-2$.

1.121. 1) $\frac{1}{2}$; 3) 12.

1.122. 2) $b_n = 200\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 50\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

1.123. 1) Няправільна; 3) правільна.

1.124. 2) 1,5.

1.125. 1) a^2.

1.126. 2) 3; 4) 5; 6) 1.

1.127. 1) 0,(1); 3) 0,(001); 5) 0,(00001).

1.129. 1) 0,(7); 3) 0,(4); 5) 0,(5).

1.130. 2) $3\frac{8}{33}$; 4) $\frac{451}{999}$; 6) $31\frac{49}{90}$; 8) $8\frac{1159}{4950}$.

1.131. 1) 0,(66); 3) 0,9(2).

1.132. 2) 1,6; 4) 2,5.

1.134. 2) $x^{\frac{4}{5}}$; 4) $c^{-\frac{3}{7}}$; 6) $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$; 8) $a^{-\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}}$; 10) $(m-n)^{-\frac{2}{3}}$; 12) $(a^4-b^3)^{\frac{1}{7}}$.

1.135. 1) $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[3]{9a^2}$, $\sqrt[4]{32b^5}$, $5\sqrt{t^{-1}}$, $8\sqrt[3]{d^{-2}}$;

3) $\sqrt[5]{m+n}$, $\sqrt[4]{(m^2+n^2)^3}$, $\sqrt[4]{(m^3+n^3)^{-5}}$, $\sqrt[3]{(m+2n)^{-2}}$,

$\sqrt{-(m+n)^{-1}}$, $6\sqrt[5]{(m+n)^{-4}}$.

1.136. 2) $1\frac{1}{2}$, $1\frac{9}{16}$, $-\frac{4}{9}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{8}{125}$, $\frac{3}{8}$; 4) 0,5, 1000, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{27}$, 64, 125.

1.137. 1) Мае; 3) мае; 5) не; 7) не; 9) мае.

1.138. 2) $-\frac{44}{225}$; 4) $2\frac{10}{27}$; 6) 1; 8) $\frac{3}{32}$.

1.139. 1) $-\frac{3}{4}$; 3) 1,8; 5) 15.

1.140. 2) 29; 4) $8\frac{13}{48}$; 6) 12.

1.141. 1) 182; 3) $4\frac{1}{7}$.

1.142. 2) Правільна; 4) няправільна; 6) правільна; 8) правільна.

1.143. 1) $[0; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 7) $(0; +\infty)$; 9) $\boldsymbol{R}$; 11) $[0; +\infty)$.

1.144. 2) $[-3; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 6) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 8) $[-3; +\infty)$; 10) $[-2; +\infty)$;
12) $(5; +\infty)$.

1.145. 1) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$;

7) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 9) $\left(-1; \frac{6}{7}\right)$.

1.146. 2) $(-\infty; 1)$; 4) $(-\infty; -1{,}5) \cup (1; +\infty)$.

1.147. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) не існує;

7) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $[2\pi n; \pi + 2\pi n],\ n \in \boldsymbol{Z}$.

1.148. 2) $\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{3}{5}} > 1$; 4) $\left(\frac{9}{7}\right)^{-\frac{3}{5}} < 1$.

1.149. 1) $a^{\frac{5}{6}}$; 3) $a^{\frac{7}{9}}$; 5) $a^{-0{,}2}$; 7) $a^{\frac{1}{4}}$; 9) $a^{\frac{3}{4}}$.

1.150. 2) $b^{\frac{1}{3}}$; 4) $b^{\frac{3}{10}}$; 6) $b^{\frac{8}{15}}$; 8) $b^{-\frac{49}{12}}$.

1.151. 1) $t^{\frac{1}{6}}$; 3) $t^{-\frac{1}{5}}$; 5) $t^{\frac{1}{4}}$.

1.152. 2) t^{-4}; 4) $t^{\frac{31}{7}}$.

1.153. 1) $a^{\frac{17}{12}} b^{\frac{19}{15}}$; 3) $a^{-\frac{1}{12}} b^{\frac{1}{12}}$.

1.154. 2) $b^{3{,}25}$; 4) b^{-1}.

1.155. 1) 27; 3) 3; 5) 10; 7) 4; 9) $\frac{1}{3}$.

1.156. 2) 20; 4) $\frac{2}{3}$; 6) $2\frac{2}{3}$.

1.157. 1) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{16}{25}$; 5) $\frac{7}{12}$; 7) $\frac{1}{6}$; 9) 25.

1.158. 2) 147; 4) 847.

1.159. 1) 1; 3) 16.

1.160. 2) $2x^{\frac{1}{2}} + x$; 4) $a^2 b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} b^2$.

1.161. 1) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 3) $a^{\frac{5}{6}}\left(a^{\frac{1}{6}} + 1\right)$; 5) $a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)$; 7) $a^{\frac{1}{6}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)$;

9) $a^{\frac{2}{9}}\left(a^{\frac{7}{9}} + a^{\frac{11}{18}} - 1\right)$.

1.162. 2) $a^{\frac{5}{8}}\left(a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{5}{8}}\right)$; 4) $5a^{\frac{1}{6}} c^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}} c + 3\right)$; 6) $2^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{10}} b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{3}{10}} b^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)$.

1.164. 2) $3^{-1} + 2 \cdot 3^{-\frac{7}{6}} + 3^{-\frac{4}{3}}$; 4) $m^5 + n^{-\frac{1}{2}} - 2m^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{1}{4}}$;

6) $16t^3 + 25d^{\frac{10}{3}} + 40t^{\frac{3}{2}} d^{\frac{5}{3}}$.

1.165. 1) $a^2 - b$; 3) $a - c^{-2}$; 5) $16a^{\frac{4}{5}} - t^{-\frac{1}{2}}$; 7) $9b$; 9) $-40b^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{2}}$.

1.166. 2) $\frac{2}{63}$; 4) $\frac{1}{2}$.

1.167. 1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-11\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+11\right)$; 3) $(n-\sqrt{13})(n+\sqrt{13})$; 5) $(\sqrt{7}-b^2)(\sqrt{7}+b^2)$.

1.168. 2) $\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)$; 4) $\left(2-n^{\frac{1}{4}}\right)\left(2+n^{\frac{1}{4}}\right)$;

6) $\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}-0{,}3n^{\frac{1}{4}}\right)\left(0{,}1m^{\frac{1}{12}}+0{,}3n^{\frac{1}{4}}\right)$; 8) $\left(\sqrt{6}-x^{\frac{1}{5}}\right)\left(\sqrt{6}+x^{\frac{1}{5}}\right)$;

10) $\left(x^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{8}}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{8}}\right)$; 12) $\left(m^{-\frac{5}{2}}-n^{\frac{1}{10}}\right)\left(m^{-\frac{5}{2}}+n^{\frac{1}{10}}\right)$.

1.169. 1) $m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}$; 3) $a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{2}{5}}$; 5) $\frac{a^{\frac{1}{7}}+5b^{\frac{2}{7}}}{2}$; 7) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}+\sqrt{b}$;

9) $3-a^{\frac{1}{3}}$.

1.170. 2) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$; 4) $\frac{a^{-0{,}25}-b^{-0{,}25}}{a^{-0{,}25}+b^{-0{,}25}}$; 6) $b^{0{,}25}-a^{0{,}25}$.

1.171. 1) $\left|a^{\frac{3}{4}}b^{-1}-3b^{\frac{2}{3}}\right|$.

1.172. 2) $2n^{\frac{1}{4}}$; 4) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 6) $-6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 8) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$.

1.173. 1) $2\sqrt[3]{a}+1$; 3) $a^{\frac{1}{3}}+1$.

1.174. 2) $\frac{1}{2\sqrt{a}(a-b)}$; 4) $\frac{4ab}{(a-b)^2}$.

1.175. 1) $2^{-\frac{1}{2}}<2^{-\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{7}}<\left(\frac{5}{4}\right)^{0{,}7}$; 5) $0{,}001^{-1{,}3}<0{,}001^{-1{,}5}$;

7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}251}$; 9) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{8}{3}}<\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{3}{8}}$.

1.176. 2) $8^{\frac{13}{6}}<0{,}125^{-2{,}5}$; 4) $1{,}6^0<1{,}6^{\frac{3}{2}}$; 6) $0{,}81^{\frac{4}{5}}<1$; 8) $1>\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;

10) $\frac{3}{5}\sqrt[8]{1\frac{2}{3}}<\frac{5}{3}\sqrt[8]{0{,}6}$.

1.177. 1) $\frac{3^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{0{,}5}}{\sqrt[6]{3}}<\frac{3^{1\frac{1}{3}}\cdot 3^{0{,}5}}{\sqrt[6]{3^5}}$; 3) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(\sqrt{3})^4<\left(\frac{81}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot(\sqrt[3]{3})^9$.

1.178. 2) $0{,}357^{-\frac{1}{3}}>0{,}3571^{-\frac{1}{3}}$; 4) $(\sqrt{21})^{-\frac{2}{7}}<(2\sqrt{5})^{-\frac{2}{7}}$.

1.179. 1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}>\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$; 3) $\sqrt[8]{\left(1-\left(1\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right)^{\frac{9}{16}}}<\sqrt[12]{\left(1-\left(1\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right)^{\frac{7}{24}}}$.

1.180. 2) $\sqrt{7}-1>9-3\sqrt{7}$; 4) $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2>\left(2\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

1.181. 1) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; 3) $\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{8}}$;
5) $(\sqrt{5}-1)^2$, $\sqrt{0,3}$, $0,3$.

1.182. 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}>1$; 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}>1$; 6) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{7}{3}}<1$; 8) $(\pi-1)^{\frac{1}{3}}>1$;
10) $\left(\frac{\pi-3}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>1$; 12) $(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{8}}<1$.

1.183. 1) $m^{7,1}>m^{9,3}$; 3) $m^{-23,5}<m^{-30}$; 5) $m^{0,74}>m^{0,9}$; 7) $m^{\frac{3}{2}}<m^{\frac{2}{3}}$;
9) $m^{-2,8}>m^{-0,28}$.

1.184. 2) $a^{-18}<a^{-17,99}$; 4) $a^{1,63}<a^{1,82}$; 6) $a^{-\frac{7}{10}}>a^{-\frac{8}{9}}$; 8) $a^{-\frac{4}{5}}>a^{-\frac{5}{4}}$;
10) $a^{5,3}>a^{5,001}$.

1.185. 1) $a>b$; 3) $a>b$; 5) $a>b$.

1.186. 2) $a>b$; 4) $a>b$; 6) $a<b$; 8) $a>b$.

1.187. 1) $m<1$; 3) $m>1$; 5) $m<1$; 7) $m>1$.

1.188. 2) $m>1$; 4) $m>1$; 6) $m<1$.

1.189. 1) Не; 3) з'яўляецца; 5) з'яўляецца; 7) з'яўляецца; 9) не.

1.190. 2) $0,23^r<0,34^r$; 4) $4,52^r<6,9^r$; 6) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^r=\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^r$.

1.191. 1) $0,47^r<0,51^r$; 3) $3,14^r<4,73^r$; 5) $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^r>(\operatorname{tg}0)^r$.

1.192. 2) 64; 4) 4; 6) 2.

1.193. 1) 4; 3) 5.

1.194. 2) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -3)\cup\left[\frac{6}{13};\ +\infty\right)$; 6) $(-\infty;\ -4]\cup[-2;\ 2]$;
8) $(0;\ 1]$.

1.195. 1) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{4}$; 9) $\frac{1}{5}$.

1.196. 2) $[0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ +\infty)$; 6) $[0;\ +\infty)$.

1.197. 1) 0 — найбольшае значэнне; –20 — найменшае значэнне;
3) –0,05 — найбольшае значэнне; –125 — найменшае значэнне.

1.198. 2) (0; 0), (1; 1); 4) не перасякаюцца.

1.206. Да **1.201.** 1) а) $[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0); 3) а) $\boldsymbol{R}$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\neq0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0); 5) а) $[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0).

Да **1.202.** 2) а) $[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0); 4) а) $[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0); 6) а) $[0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x > 0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 0).

Да **1.203.** 1) а) $[0; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x \in [0; +\infty)$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 2); 3) а) $[0; +\infty)$; б) $[-3; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x > \sqrt[15]{9}$, $y < 0$ пры $x \in \left[0; \sqrt[15]{9}\right)$; г) $(0; -3)$, $\left(\sqrt[15]{9}; 0\right)$; 5) а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $y > 0$ пры $x > \sqrt[9]{2}$, $y < 0$ пры $x < \sqrt[9]{2}$; г) $(0; -2)$, $\left(\sqrt[9]{2}; 0\right)$.

Да **1.204.** 2) а) $[1; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x > 1$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (1; 0); 4) а) $\boldsymbol{R}$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x \neq 2$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) $(0; 2^{26})$, (2; 0); 6) а) $[3; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x > 3$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (3; 0).

Да **1.205.** 1) а) $\boldsymbol{R}$; б) $[-1; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$, $y < 0$ пры $x \in (-3; -1)$; г) $(0; 2^{12} - 1)$, $(-3; 0)$; $(-1; 0)$; 3) а) $[-1; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x \neq -1$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) (0; 3); 5) а) $[-3; +\infty)$; б) $[-3; +\infty)$; в) $y > 0$ пры $x > -3 + 3^{\frac{7}{29}}$, $y < 0$ пры $x \in \left[-3; -3 + 3^{\frac{7}{29}}\right)$; г) $\left(0; 3^{\frac{29}{7}} - 3\right)$, $\left(-3 + 3^{\frac{7}{29}}; 0\right)$.

1.208. 2) 5; 6; 4) 1; 6) няма каранёў.

1.209. 1) 5; 3) 0; 5) 3; 7) 3; 9) 3.

1.210. 2) 25; 4) няма каранёў; 6) –3; 8) няма каранёў.

1.211. 1) $[0; 8)$; 3) $[0; 3]$; 5) $[0; 3)$.

1.212. 2) $0{,}17^r > 0{,}23^r$; 4) $2{,}78^r > 6{,}9^r$; 6) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{13}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{13}\right)^r > \left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^r$.

1.213. 1) $x^{-2} < x^{-8}$; 3) $x^{-5,3} > x^{-3,4}$; 5) $x^{-0,58} < x^{-5,8}$; 7) $x^{-\frac{2}{3}} < x^{-\frac{3}{2}}$.

1.214. 2) $x^{-12} < x^{-10}$; 4) $x^{-6,1} < x^{-3,8}$; 6) $x^{-0,12} > x^{-4,5}$; 8) $x^{-\frac{9}{4}} < x^{-\frac{4}{9}}$.

1.215. 1) $2\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{81}$; 5) $\frac{1}{25}$.

1.216. 2) 8; 4) 0.

1.217. 1) $x \neq 40$; 3) $(0; 2) \cup (6; 7)$; 5) $(-3; -2) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0) \cup (1; 3)$.

1.218. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{1}{3}$; 8) $-\frac{1}{5}$.

1.219. 1) Прамежкаў нарастання няма, прамежкі спадання $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;
3) прамежкаў нарастання няма; $(0; +\infty)$ — прамежак спадання;
5) прамежкаў нарастання няма; $(0; +\infty)$ — прамежак спадання.

1.220. 2) $-\frac{1}{8}$ — найменшае значэнне, $-\frac{1}{27}$ — найбольшае значэнне;
4) $-37\frac{1}{27}$ — найменшае значэнне, $-\frac{1}{125}$ — найбольшае значэнне.

1.221. 1) (1; 1); 3) (0; 1).

1.229. Да **1.224.** 2) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\neq 0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) няма; 4) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, $y<0$ пры $x<0$; г) няма; 6) а) $(0;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў.

Да **1.225.** 1) а) $[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) $(0;\ 0)$; 3) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>0$, $y<0$ пры $x<0$; г) няма; 5) а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $y>0$ пры $x>0$, $y<0$ пры $x<0$; г) $(0;\ 0)$.

Да **1.226.** 2) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\ +\infty)$, $y<0$ пры $x\in(-1;\ 0)$; г) $(-1;\ 0)$;
4) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(-1;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$, $y<0$ пры $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; г) $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$; 6) а) $(0;\ +\infty)$; б) $(-3;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\in\left(0;\ \frac{\sqrt[5]{27}}{3}\right)$, $y<0$ пры $x\in\left(\frac{\sqrt[5]{27}}{3};\ +\infty\right)$; г) $\left(\frac{\sqrt[5]{27}}{3};\ 0\right)$.

Да **1.227.** 1) а) $(-1;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>-1$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) $(0;\ 1)$; 3) а) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; б) $y>0$ пры $x>2$, $y<0$ пры $x<2$; в) $\left(0;\ (-2)^{-11}\right)$; 5) а) $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; б) $y>0$ пры $x>3$, $y<0$ пры $x<3$; г) $\left(0;\ (-3)^{-14}\right)$.

Да **1.228.** 2) а) $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ +\infty)$; б) $(-1;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x\in(-3;\ -2)$, $y<0$ пры $x\in(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ +\infty)$; г) $(-2;\ 0)$; 4) а) $(-2;\ +\infty)$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>-2$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) $\left(0;\ 3+2^{-\frac{9}{2}}\right)$; 6) а) $(1;\ +\infty)$; б) $(2;\ +\infty)$; в) $y>0$ пры $x>1$, y не прымае адмоўных значэнняў; г) няма.

1.230. 2) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;+\infty)$; б) $(0;+\infty)$; в) прамежак нарастання $(-\infty;\ 0)$, прамежак спадання $(0;\ +\infty)$; 4) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$; в) прамежак нарастання $(-\infty;\ 0)$, прамежак спадання $(0;\ +\infty)$; 6) а) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$; б) $(0;\ +\infty)$, в) прамежак нарастання $(-\infty;\ -1)$, прамежак спадання $(-1;\ +\infty)$; 8) а) $(-\infty;\ 2)\cup(2;+\infty)$; б) $(0;+\infty)$; в) прамежак нарастання $(-\infty;\ 2)$, прамежак спадання $(2;\ +\infty)$; 10) а) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; б) $(-2;+\infty)$; в) прамежак нарастання $(-\infty;\ 3)$; прамежак спадання $(3;\ +\infty)$; 12) а) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;+\infty)$; б) $(-4;+\infty)$; в) прамежак нарастання $(-\infty;\ -2)$; прамежак спадання $(-2;\ +\infty)$.

1.231. 1) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{3}$; 7) ± 3; 9) ± 2.

1.232. 2) $x>\frac{1}{5}$; 4) $\left(0;\ \frac{1}{5}\right)$; 6) $\left(0;\ \frac{1}{27}\right)$.

1.233. 1) Няма каранёў; 3) няма каранёў; 5) няма каранёў; 7) няма каранёў.

1.234. 2) 6; 4) –5; 3; 6) –3; 8.

1.235. 1) 2; 3) ±9; 5) –21; 7) 4.

1.236. 2) $-\frac{2}{5}$; 1; 4) –8; –6.

1.237. 1) 1; 3) ±2; 5) –7; 3.

1.238. 2) 10; 4) 2; 3; 6; –8.

1.239. 1) 2; 3) –2; 5) 3; 7) 3.

1.240. 2) Няма каранёў; 4) 0.

1.241. 1) $\frac{1}{4}$; 3) 2.

1.242. 2) 6; 4) $\frac{2}{3}$; 6) 17.

1.243. 1) 3; 3) –1; 2; 5) 2; 5; 8.

1.244. 2) –6; 9; 4) –8; 5; 6) ±5.

1.245. 1) –1; 2; 4; 3) –6; 7.

1.246. 2) 16; 4) 1; 6) 1.

1.247. 1) $a \geqslant -4$; 3) $a \geqslant 2$; 5) $a < 1$; 7) $a \leqslant 2$.

1.248. 2) $x = a^2 - 1$, калі $a \leqslant 0$; няма каранёў, калі $a > 0$; 4) $x = 3$, $x = a$, калі $a \geqslant 3$; $x = 3$, калі $a < 0$; 6) $x = 0$, калі $a \leqslant 0$; $x = a$, калі $a \geqslant 0$; 8) $x = 2$, калі $a > -2$; няма каранёў, калі $a \leqslant -2$.

1.249. 1) 3; 3) 8; 5) 1.

1.250. 2) 2; 4) 4; 6) –1,5; 8) 2.

1.251. 1) –1; 0; 1; 3) –2; 4; 5) –3; 5.

1.252. 2) 4; 4) –1.

1.253. 1) Няма каранёў; 3) –1; 5) –2; 4.

1.254. 2) 1.

1.255. 1) 5; 3) 7; 5) –7.

1.256. 2) 2; 4) –3.

1.257. 1) Няма каранёў; 3) няма каранёў.

1.258. 2) $x > 7$; 4) няма рашэнняў; 6) $x \geqslant -2$; 8) $-2 \leqslant x < 7$.

1.259. 1) Няма рашэнняў; 3) $\pm 2\sqrt{2}$; 5) $x \neq 0$; 7) $-2 < x < 2$; 9) $\boldsymbol{R}$.

1.260. 2) $0 < x \leqslant 1$; $4 \leqslant x < 5$; 4) $-4 \leqslant x \leqslant 1$.

1.261. 1) $0 \leqslant x < 1$; 3) $0 \leqslant x < 25$.

1.262. 2) $x > 1$; 4) $x > 4$; 6) $0 \leqslant x < 9$; 8) няма рашэнняў.

1.263. 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $x \geqslant 1$, $x = 0$; 5) $0 < x < 1$; 7) $x > 1$.

1.264. 2) 2; 4) $1 \leqslant x < 6$; 6) 3; 8) $x \leqslant -7$; $-4 \leqslant x \leqslant -1$.

1.265. 1) $x \geqslant 1$; 3) $-1 < x \leqslant 1$; 5) няма рашэнняў; 7) $2 \leqslant x \leqslant 5$.

1.266. 2) Няма рашэнняў; 4) [–6; 3); 6) (4; 5]; 8) $\left(-\infty; \frac{2}{11}\right)$.

Раздзел 2

2.1. 1) $0{,}7^2$; $0{,}7^{1,5}$; $0{,}7^{\sqrt{2}}$; $0{,}7^{0,2}$; 3) $4{,}1^{2,2}$; $4{,}1^3$; $4{,}1^{\sqrt{10}}$; $4{,}1^{3,5}$; 5) $2^{-0,5}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$; $4^{\frac{2}{3}}$.

2.2. Напрыклад, 2) $0{,}7^2 < 0{,}7^{\sqrt{3}} < 0{,}7^1$; $0{,}7^{1,8} < 0{,}7^{\sqrt{3}} < 0{,}7^{1,7}$;

$0{,}7^{1,74} < 0{,}7^{\sqrt{3}} < 0{,}7^{1,73}$; 4) $5^1 < 5^{\frac{\pi}{2}} < 5^2$; $5^{1,5} < 5^{\frac{\pi}{2}} < 5^{1,6}$; $5^{1,57} < 5^{\frac{\pi}{2}} < 5^{1,58}$;

6) $\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{7}} < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

$\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2,7} < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{7}} < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2,6}$;

$\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2,65} < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{7}} < \left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2,64}$.

2.3. 1) $2^{\sin\frac{\pi}{3}} < 2^{\sqrt{3}}$; 3) $3{,}5^{-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}} < 1$; 5) $3^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} > 3^{\sin\frac{\pi}{4}}$; 7) $0{,}11^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}} = 0{,}11^{\operatorname{tg}0}$.

2.4. 2) 25; 4) 27; 6) 8; 8) 81.

2.5. 1) 2; 3) 2; 5) $\sqrt{5}$; 7) 0,008; 9) 7.

2.6. 2) $7^{-\frac{7\pi}{12}}$; 4) 1.

2.7. 1) $\frac{2m^{\sqrt{2}}}{m^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{2}}}$; 3) -1; 5) $m^{2\sqrt{3}} - n^{2\sqrt{3}}$.

2.8. 2) $m^{\sqrt{10}} + n^{\sqrt{10}}$; 4) $m^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - n^{\frac{\sqrt{5}}{3}}$; 6) $(m^{\sqrt{7}} + 3)(1 - m^{\sqrt{7}})$.

2.9. 1) 4; 3) $\frac{1}{a^{\sqrt{2}} + 1}$; 5) $4a^{2\sqrt{3}}$.

2.10. 2) Не; 4) з’яўляецца; 6) не; 8) з’яўляецца.

2.11. 1) 1,8; 3) 0,3; 5) 0,8; 7) 3,1.

2.14. 2) 3; 4) 0,5; 6) 2.

2.15. 1) 5.

2.16. 2) 5.

2.17. 1) (3; 8); 3) (–2; 9).

2.18. 2) Не; 4) мае.

2.19. 1) Мае; 3) мае.

2.20. 2) Не; 4) мае.

2.21. 1) $1{,}8^0 = 1$; 3) $4{,}3^{1,5} < 4{,}3^{1,6}$; 5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{7}\right)^{1,6}$; 7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2\pi}{3}}$; 9) $\sqrt{3}^{\sin\sqrt{3}} > \left(\frac{2\pi}{5}\right)^{\sin\sqrt{3}}$.

2.22. 2) Спадальная; 4) спадальная; 6) спадальная; 8) спадальная; 10) спадальная; 12) нарастальная.

2.23. 1) а) 3; б) $[-2;\ 1]$; в) $\left[\frac{1}{9};\ 3\right]$; г) нарастае на прамежку $[-2;\ 1]$, прамежкаў спадання няма; д) $(0;\ 1)$; е) $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 3$; ж) найбольшае значэнне 3, найменшае значэнне $\frac{1}{9}$; 3) а) $\frac{1}{2}$; б) $[-2;\ -1]$; в) $[2;\ 4]$; г) прамежкаў нарастання няма, спадае на прамежку $[-2;\ -1]$; д) няма; е) $y_1 = 2$, y_2 няма; ж) найбольшае значэнне 4, найменшае значэнне 2.

2.24. 2) $[0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -8] \cup [8;\ +\infty)$.

2.25. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.26. 2) Няма; 4) найбольшае значэнне 1, найменшага значэння няма.

2.27. 1) Найменшае значэнне 2,5; найбольшае значэнне 10; 3) абодва значэнні роўны 0,3; 5) абодва значэнні роўны 11; 7) найменшае значэнне 6, найбольшае значэнне 36.

2.28. 2) Найменшае значэнне $6^{-\frac{9}{4}}$, найбольшага значэння няма; 4) найменшага значэння няма, найбольшае значэнне $5^{12,25}$.

2.29. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{R}$.

2.30. 2) $x < 0$; 4) $x < 0$; 6) $x \geqslant 0$.

2.39. 1) 3; 3) 4; 5) –3; 7) $-\frac{1}{2}$; 9) няма каранёў.

2.40. 2) –1,6; 4) –1; 0; 6) –5; 5; 8) –2; 2; 8.

2.41. 1) 3; 3) 3,5; 5) –1,5; 7) 3; 9) няма каранёў.

2.42. 2) 2,6; 4) –7; 6) 0; 0,5.

2.43. 1) 1; 3) 1; 5) 0.

2.44. 2) 2,5; 4) 9; 6) –1.

2.45. 1) –0,2; 3) –4; 5) 26,5; 7) 6.

2.46. 2) 2,5; 4) 6,5; 6) 2; 8) 45.

2.47. 1) –2; 4; 3) –2; 5.

2.48. 2) 5; 4) 35.

2.49. 1) 2; 3) 3; 5) 2.

2.50. 2) 1; 5; 4) ±2.

2.51. 1) 3; 3) 4; 5) 0; 7) 2.

2.52. 2) 2; 4) 2; 6) –5.

2.53. 1) 0; 3) 2; 5) 0; 1; 7) 1.

2.54. 2) –1; 1; 4) 3.

2.55. 1) 1; 3) 1; 5) 2.

2.56. 2) –1; 4; 4) 1; 2; 6) 2; 8) ±1.

2.57. 1) 1; 3) 2.

2.58. 2) 6.

2.59. 1) 2.

2.60. 2) –2.

2.61. 1) 0; 4; 3) $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$; 5) –4; 0.

2.62. 2) –1; 4) –0,6.

2.63. 1) 1; 3) –3.

2.64. 2) $-\pi$.

2.65. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.66. 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\frac{5\pi}{12}+\frac{5\pi n}{2},\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.67. 1) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n}\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{6},\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.68. 2) 7.

2.69. 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.70. 2) $-\frac{5}{2}<a\leqslant\frac{2}{3},\ \ a=7$; 4) $0<a<\frac{1}{2},\ \ a\neq\frac{1}{3}$.

2.71. 1) (3; 3), (4; 2), (5; 1), (7; –1); 3) (4; 1).

2.72. 2) $(-\infty;\ 2)$; 4) $(-\infty;\ 1)$; 6) $(-\infty;\ -0{,}5]$; 8) $[-1;\ +\infty)$.

2.73. 1) $(-0{,}5;\ +\infty)$; 3) $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 5) $\left[\frac{1}{60};\ +\infty\right)$; 7) $(-\infty;\ 3{,}5]$.

2.74. 2) $[-4;\ 4]$; 4) $(-2;\ 2)$; 6) $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$; 8) $[1;\ 2]$.

2.75. 1) $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -7{,}5)\cup(-0{,}5\ +\infty)$; 5) $[1;\ 2]$.

2.76. 2) $[-2;\ 0{,}2]$; 4) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$; 6) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$.

2.77. 1) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$; 3) $(-\infty;\ 3)$; 5) $[-2;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$.

2.78. 2) $(-\infty;\ -2]\cup(0;\ 4]$; 4) $(-1;\ 0)$; 6) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 2)$; 8) $(-3;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

2.79. 1) $(-\infty;\ -6)\cup(2;\ +\infty)$; 3) няма рашэнняў; 5) $\left[-\frac{1}{3};\ 2\right]$.

2.80. 2) $(2{,}5;\ +\infty)$; 4) $(-1;\ 0)$.

2.81. 1) $[-1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -4]$.

2.82. 2) $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n),\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\ \ n\in \boldsymbol{Z}$;

6) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.83. 1) $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $x=2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ \ n\in \boldsymbol{Z}$;

7) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right),\ \ n\in \boldsymbol{Z}$.

2.84. 2) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1]$; 6) $(-\infty; 3]$; 8) $(3; +\infty)$; 10) $(-\infty; -2] \cup (0; 1]$.

2.85. 1) $[0; 1]$; 3) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1]$; 7) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

2.86. 2) $(-2; 2)$; 4) $(-10; 13)$; 6) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; 8) $(0{,}5; 1{,}75)$.

2.87. 1) $(-\infty; -2)$; 3) $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$; 5) $(2; +\infty)$.

2.88. 2) $\left[-\sqrt{10}; 0\right) \cup \left[\sqrt{10}; +\infty\right)$; 4) $[1; +\infty)$.

2.90. 2) $a \leqslant 1$.

2.91. 1) 2; 3) 3; 5) 0; 7) -3; 9) -7; 11) $-0{,}2$.

2.92. 2) $4 = \log_3 81$; 4) $\frac{1}{3} = \log_{64} 4$; 6) $0 = \log_6 1$; 8) $2 = \log_{2,1} 4{,}41$;
10) $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$; 12) $-1 = \log_{\frac{9}{20}} \frac{20}{9}$.

2.93. 1) $0 = \log_7 1$, $-1 = \log_7 \frac{1}{7}$, $1 = \log_7 7$, $-2 = \log_7 \frac{1}{49}$, $2 = \log_7 49$;
$-0{,}3 = \log_7 7^{-0,3}$, $0{,}3 = \log_7 7^{0,3}$, $-\sqrt{2} = \log_7 7^{-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} = \log_7 7^{\sqrt{2}}$;
3) $0 = \log_{\frac{1}{4}} 1$, $-1 = \log_{\frac{1}{4}} 4$, $1 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$, $-2 = \log_{\frac{1}{4}} 16$, $2 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$,
$-0{,}3 = \log_{\frac{1}{4}} 4^{0,3}$, $0{,}3 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4^{0,3}}$, $-\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{4}} 4^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4^{\sqrt{2}}}$;
5) $0 = \log_{0,11} 1$, $-1 = \log_{0,11} \frac{100}{11}$, $1 = \log_{0,11} 0{,}11$, $-2 = \log_{0,11} 0{,}11^{-2}$,
$2 = \log_{0,11} 0{,}11^2$, $-0{,}3 = \log_{0,11} 0{,}11^{-0,3}$, $0{,}3 = \log_{0,11} 0{,}11^{0,3}$,
$-\sqrt{2} = \log_{0,11} 0{,}11^{-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} = \log_{0,11} 0{,}11^{\sqrt{2}}$; 7) $0 = \log_{2,5} 1$, $-1 = \log_{2,5} 0{,}4$,
$1 = \log_{2,5} 2{,}5$, $-2 = \log_{2,5} 0{,}16$, $2 = \log_{2,5} 6{,}25$, $-0{,}3 = \log_{2,5} 2{,}5^{-0,3}$,
$0{,}3 = \log_{2,5} 2{,}5^{0,3}$, $-\sqrt{2} = \log_{2,5} 2{,}5^{-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} = \log_{2,5} 2{,}5^{\sqrt{2}}$.

2.94. 2) $-3 = \log_{0,1} 1000$, $-3 = \log_2 0{,}125$, $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$, $-3 = \log_x \frac{1}{x^3}$,
$-3 = \log_{x-2} \frac{1}{(x-2)^3}$, $-3 = \log_{m^2} \frac{1}{m^6}$; 4) $-\frac{1}{2} = \log_{0,1} \sqrt{10}$; $-\frac{1}{2} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$,
$-\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} = \log_x \frac{1}{\sqrt{x}}$, $-\frac{1}{2} = \log_{x-2} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $-\frac{1}{2} = \log_{m^2} \frac{1}{|m|}$;
6) $2 = \log_{0,1} 0{,}01$, $2 = \log_2 4$, $2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$, $2 = \log_x x^2$, $2 = \log_{x-2} (x-2)^2$,
$2 = \log_{m^2} m^4$; 8) $1 = \log_{0,1} 0{,}1$, $1 = \log_2 2$, $1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, $1 = \log_x x$,
$1 = \log_{x-2} (x-2)$, $1 = \log_{m^2} m^2$; 10) $\frac{1}{3} = \log_{0,1} \sqrt[3]{0{,}1}$, $\frac{1}{3} = \log_2 \sqrt[3]{2}$,
$\frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\frac{1}{3} = \log_x \sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3} = \log_{x-2} \sqrt[3]{x-2}$, $\frac{1}{3} = \log_{m^2} \sqrt[3]{m^2}$;

12) $10 = \log_{0,1} 0{,}1^{10}$, $10 = \log_2 1024$, $10 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^{10}}$, $10 = \log_x x^{10}$, $10 = \log_{x-2}(x-2)^{10}$, $10 = \log_{m^2} m^{20}$.

2.95. 1) 2; 3) –3; 5) –0,5; 7) 0,4.

2.96. 2) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 6) 27; 8) $\sqrt[4]{3}$.

2.97. 1) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{2}$; 5) 16; 7) 256.

2.98. 2) 1; 4) 0; 6) –3; 8) –9.

2.99. 1) 4; 3) –1; 5) –2; 7) 5; 9) 1,2.

2.100. 2) 0; 4) 1; 6) 5; 8) –0,125.

2.101. 1) 0; 3) 0,25; 5) –0,5; 7) 0,5.

2.102. 2) 1; 4) 0,75.

2.103. 1) 18; 3) 1; 5) 1; 7) 7; 9) 3,6.

2.104. 2) 16; 4) 36; 6) $\frac{1}{16}$; 8) 27.

2.105. 1) 20; 3) 2,5; 5) $6\frac{2}{3}$; 7) 8; 9) 40 000.

2.106. 2) 1; 4) 0,5; 6) 2; 8) 2.

2.107. 1) 22; 3) 5; 5) 1; 7) 10; 9) $\frac{5}{9}$.

2.108. 2) 10; 4) 1; 6) $\frac{1}{49}$; 8) 100.

2.109. 1) 4; 3) $\frac{1}{3}$; 5) 2; 7) 5; 9) няма каранёў; 11) няма каранёў.

2.110. 2) $\log_6 2$; 4) $-\log_2 12$; 6) $\log_{0,8} 64$; 8) $\lg 2$.

2.111. 1) Мае; 3) не; 5) не; 7) не.

2.112. 2) 2 і 3; 4) –3 і –2; 6) 0 і 1.

2.113. 1) 1; 3) 2; 5) 2.

2.114. 2) 2; 4) –3; 6) 0,5.

2.115. 1) $1\frac{1}{3}$; 3) –3; 5) 0,5.

2.116. 2) $\frac{3}{4}\log_7 4$; 4) $\frac{3}{2}\log_5 11$.

2.117. 1) $\frac{2}{7}$; 3) $-\frac{4}{3}$; 5) –0,375.

2.118. 2) 0,8; 4) –3,5; 6) 2; 8) –0,5.

2.119. 1) 6; 3) 2; 5) 1; 7) 4; 9) –2.

2.120. 2) 1,5; 4) –2; 6) –2.

2.121. 1) 0,5; 3) 2; 5) 0,5; 7) 1,125.

2.122. 2) –0,25; 4) $-\frac{2}{3}$; 6) 1.

2.123. 1) -1; 3) -1; 5) 2.

2.124. 2) 1,5; 4) -1; 6) 2.

2.125. 1) $\log_6 2$; 3) $\log_{\frac{4}{15}} 9$.

2.126. 2) Правільная; 4) правільная; 6) не; 8) не; 10) правільная; 12) не.

2.127. 1) 1; 3) 5; 5) 8; 7) -21.

2.128. 2) 5; 4) 2; 6) 5.

2.129. 1) 10; 3) 6.

2.130. 2) 11; 4) 8.

2.131. 1) 4; 3) 1.

2.132. 2) 6; 4) 10.

2.133. 1) $m+n$; 3) $3m+2n$; 5) $2m+n$.

2.134. 2) $\frac{m+2}{m}$.

2.135. 1) $\frac{2mn-3m-n+3}{mn+m-1}$; 3) $\frac{4-n}{mn+m-1}$.

2.136. 2) 33,75; 4) $2\frac{2}{3}$; 6) $-0{,}25$.

2.137. 1) 36; 3) 32; 5) 99.

2.138. 2) 0,5; 4) 4; 6) 3; 8) 2.

2.139. 1) $(0; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 3)$; 7) $(-\infty; 0)$.

2.140. 2) $(-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-0{,}5; 3)$; 6) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 8) няма.

2.141. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2.142. 2) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{2}{3}\right)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (0; 2)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$; 8) $(0; 16)$.

2.143. 1) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6) \cup (-3; -2\ ) \cup (1; +\infty)$;
5) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

2.144. 2) $(-4; 5) \cup (5; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{5}{3}; 5\right) \cup (5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$.

2.145. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $(0; 1]$.

2.146. 2) Пункт M.

2.147. 1) а) 4; б) $[0{,}5; 4]$; в) $[-0{,}5; 1]$; г) прамежак нарастання $[0{,}5; 4]$, прамежкаў спадання няма; д) $(1; 0)$; е) $(1; 4]$; ж) $[0{,}5; 1)$; 3) а) $\frac{1}{3}$; б) $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$; в) $[-2; 1]$; г) прамежкаў нарастання няма, прамежак спадання $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$; д) $(1; 0)$; е) $\left[\frac{1}{3}; 1\right)$; ж) $(1; 9]$.

2.148. 2) $\frac{1}{3}$; 4) 3.

2.149. Напрыклад, 1) $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(8; 3)$; 3) $(1; 0)$, $(4; -1)$, $(16; -2)$; 5) $(-1; 0)$, $(-2; 1)$, $(-4; 2)$.

2.150. 2) а) $(0;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(0;\ +\infty)$; г) няма; д) $(0;\ 1)$; е) $(1;\ +\infty)$; ж) 1; 4) а) $(0;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) няма; г) $(0;\ +\infty)$; д) $(1;\ +\infty)$; е) $(0;\ 1)$; ж) 1; 6) а) $(-\infty;\ 0)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) няма; г) $(-\infty;\ 0)$; д) $(-1;\ 0)$; е) $(-\infty;\ -1)$; ж) -1.

2.151. 1) $\log_3 8 > 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$; 5) $\lg 0{,}45 < 0$; 7) $\log_{0,3} 0{,}35 > 0$; 9) $\log_{0,1} 10 < 0$.

2.152. 2) $\log_{\frac{1}{5}} 10 - \log_{\frac{1}{5}} 7 < 0$; 4) $-\log_3 8 < 0$; 6) $1 - \log_4 9 < 0$; 8) $\lg 90 - 2 < 0$; 10) $\lg\left(\frac{3}{2}\right)^{-10} < 0$.

2.153. 1) $\log_3 15 < \log_3 20$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 8$; 5) $\log_2 3 > \log_2 1$; 7) $\log_4 7 > \log_5 7$.

2.154. 2) $\lg\sqrt{5} < \lg 3{,}5$; 4) $\log_{0,1} 0{,}6^2 > \log_{0,1}^2 0{,}6$; 6) $\lg(\cos 30°) > \lg(\operatorname{tg} 30°)$.

2.155. 1) $\lg 4 + 3^{\log_7 11} > \lg 3 + 11^{\log_7 3}$; 3) $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

2.156. 2) З'яўляецца; 4) не; 6) з'яўляецца; 8) не; 10) не.

2.157. 1) Не; 3) з'яўляецца; 5) не; 7) з'яўляецца.

2.158. 2) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 4) $5^{-6,7}$; 6) $1000\sqrt[3]{10}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[7]{9}}$.

2.159. 1) $t < p$; 3) $t < p$.

2.160. 2) Мінус; 4) мінус.

2.161. 1) Плюс; 3) плюс.

2.163. 1) а) $(2;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(2;\ +\infty)$; г) няма; д) $(3;\ +\infty)$; е) $(2;\ 3)$; ж) $(3;\ 0)$; з) няма; 3) а) $(0;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(0;\ +\infty)$; г) няма; д) $(0{,}25;\ +\infty)$; е) $(0;\ 0{,}25)$; ж) $(0{,}25;\ 0)$; з) няма; 5) а) $(-3;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) няма; г) $(-3;\ +\infty)$; д) $(-3;\ -2)$; е) $(-2;\ +\infty)$; ж) $(-2;\ 0)$; з) $\left(0;\ \log_2 \frac{1}{3}\right)$; 7) а) $(0;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) няма; г) $(0;\ +\infty)$; д) $(0;\ 0{,}125)$; е) $(0{,}125;\ +\infty)$; ж) $(0{,}125;\ 0)$; з) няма; 9) а) $(-\infty;\ 2)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) няма; г) $(-\infty;\ 2)$; д) $(-\infty;\ 1)$; е) $(1;\ 2)$; ж) $(1;\ 0)$; з) $(0;\ 1)$; 11) а) $(1;\ +\infty)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $(1;\ +\infty)$; г) няма; д) $\left(\frac{4}{3};\ +\infty\right)$; е) $\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$; ж) $\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$; з) няма.

2.168. 2) 1; 4) 2; 6) 1; 8) 2.

2.169. 1), 4).

2.171. 1) Няма каранёў; 3) няма каранёў; 5) 2.

2.172. 2) 5; 4) 3; 6) 1; 8) -2.

2.173. 1) 0,625; 3) $-0{,}5$; 5) -2; 8.

2.174. 2) ± 10; 4) ± 1; 6) 16; 8) $\frac{1}{\sqrt[7]{e}}$.

2.175. 1) ± 2; 3) ± 1; 5) -2; 4; 7) 16.

2.176. 2) 81; 4) 5^{10}.

2.177. 1) 3; 3) 9.

2.178. 2) 3; 4) –3; 6) 2.

2.179. 1) 7; 3) 1; 3; 5) 3,5.

2.180. 2) 6; 4) $\sqrt{2}$; 6) 4.

2.181. 1) 7; 3) 3; 5) 2.

2.182. 2) 64; 4) 4; 6) 0,2.

2.183. 1) 0,2; 25; 3) 0,1; 10 000; 5) 1; $\sqrt{3}$.

2.184. 2) 1000; 4) –0,5; –32.

2.185. 1) 10; 3) 0,1; 100; 5) 0,1; 1000; 7) 0,0001; 10.

2.186. 2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 25; 4) 3; 9; 6) –5.

2.187. 1) 2; 3) няма каранёў; 5) няма каранёў; 7) 1.

2.188. 2) 2; 4) 5; 6) –1; 8) 6.

2.189. 1) 6; 3) ±7; 5) –11; 9; 7) 2; 9) 1000.

2.190. 2) 0; 4) –1; 6) 0; 8) ±4; 10) ±1.

2.191. 1) 1; $\log_2 2{,}5$; 3) –3; $\lg 23\,000$.

2.192. 2) $\log_3 18$; 4) $-\lg 5$; 6) $-\log_2 5$.

2.193. 1) 10; 100; 3) 5; 25; 5) 0,1; 100; 7) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3.

2.194. 2) $\log_{\frac{11}{6}} 11$; 4) $\log_5 10$; 6) $\log_{1,4} 175$.

2.195. 1) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arcctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2.196. 2) $\frac{1}{49}$.

2.197. 1) a^2, $a > 0$, $a \neq 1$; 3) 10^a, a — любы.

2.198. 2) $-\frac{1}{6} < a < \frac{1}{6}$, $a \neq 0$; 4) $0{,}125 < a < 0$.

2.199. 1) (0,01; 0,1); (100; 10); 3) (4; 1).

2.200. 2) (0; 9); 4) (1; +∞); 6) [0,81; +∞); 8) (0; 1).

2.201. 1) (–2; +∞); 3) [–0,25; 0,75); 5) (0,25; +∞); 7) [2,2; 2,4).

2.202. 2) $[-4; -3) \cup (1; 2]$; 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; 6) $(-5; -4) \cup (0; 1)$;
8) $(-2; -1) \cup (0; 1)$.

2.203. 1) (–4; 2); 3) (2; 3).

2.204. 2) $\left[11\frac{2}{3};\ 35\right)$; 4) $\left(1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 6) $\left[1\frac{1}{5};\ 1\frac{1}{3}\right)$.

2.205. 1) (–2; –1,5); 3) (2; 6); 5) (5; 9); 7) (–∞; –8).

2.206. 2) (–0,2; 0); 4) (0; 1].

2.207. 1) $(-5;\ 1{,}5)$; 3) $(3{,}5;\ 6)$; 5) $(-8;\ 8)$; 7) $[-4;\ -2) \cup (1;\ 2]$.

2.208. 2) $(-6;\ -3)$; 4) $(-4;\ -2{,}5]$.

2.209. 1) $(7;\ +\infty)$; 3) $(3;\ 8)$.

2.210. 2) $(1;\ 5]$; 4) $(-1;\ 3)$; 6) $(3;\ 5]$.

2.211. 1) $(1;\ 1{,}04) \cup (26;\ +\infty)$; 3) $\left(1;\ 3\frac{2}{3}\right)$.

2.212. 2) $(0;\ 0{,}5) \cup (16;\ +\infty)$; 4) $(0{,}008;\ 0{,}04)$; 6) $(0;\ 0{,}1) \cup (10\,000;\ +\infty)$;

8) $(-\infty;\ -1000) \cup \left(-\sqrt[3]{10};\ 0\right)$.

2.213. 1) $(-238;\ 2)$; 3) $(-1;\ 0) \cup (1;\ 2)$.

2.214. 2) $\left(0;\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right] \cup (1;\ 8]$; 4) $(0;\ 1)$.

2.215. 1) $[0{,}5;\ 1)$; 3) $(-3;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$; 5) $(2;\ 3) \cup [-2;\ -1)$.

2.216. 2) $(5;\ 5{,}5) \cup (6;\ +\infty)$; 4) $(3{,}5;\ 5)$; 6) $(2;\ 2{,}5)$.

2.217. 1) $(0{,}4;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 0{,}5) \cup [1;\ 2) \cup (3;\ 6]$; 5) $[0;\ 0{,}5) \cup [1{,}5;\ 2) \cup (2;\ 3)$;
7) $(-\infty;\ -9] \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 1{,}125)$.

2.218. 2) $(4;\ 5) \cup (6;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -2) \cup (-1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

2.219. 1) $(-\infty;\ 3] \cup [4;\ +\infty)$; 3) $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 1\right]$; 5) $\left[6\frac{1}{3};\ 7\right)$; 7) $(1;\ +\infty)$.

2.220. 2) $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 5)$; 4) $(-\infty;\ -8)$; 6) $(-\infty;\ -4)$.

2.221. 1) $(-2;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 2) \cup (2;\ 3]$; 5) $(2;\ 3]$.

2.222. 2) $(-12;\ -11]$; 4) $(3{,}75;\ 4{,}5]$.

2.223. 1) $[1;\ 5) \cup (5;\ 6)$; 3) $(-1;\ 0) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$; 5) $[0;\ 2) \cup (2;\ 6)$.

2.224. 2) $(-1;\ 2)$; 4) няма рашэнняў; 6) $(3;\ 5]$; 8) няма рашэнняў.

2.225. 1) $\left(4\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n;\ 2\pi + 4\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказы да практыкаванняў для паўтарэння арыфметычнага і алгебраічнага матэрыялу курса матэматыкі 5—11-х класаў

1. 1) $1\frac{5}{8}$; 2) 0,2.

2. 1) 0,0756; 2) 500; 3) 2015; 4) $\frac{1}{3}$.

6. 1) $5\sqrt{3}$; 2) $12-\sqrt{5}$.

7. 1) $\frac{12\sqrt{2}}{7}$; 2) $\sqrt{2}$;

8. 1) 4; 2) 2.

9. 1) 81,002; 2) $-1\frac{11}{48}$.

12. 1) $11\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{2}$.

13. 1) 46; 2) −14.

14. 1) 9; 2) 1.

15. 1) 2; 2) 0.

16. 1) 49; 2) 64.

17. 1) 2,61; 2) 16,5.

18. 1) $\frac{7}{144}$; 2) $2\frac{4}{7}$.

19. 1) 10°, 20°, 150°; 2) 22 мм, 24 мм, 26 мм.

20. 1) 210; 140; 84; 2) 18; 100,8; 54.

21. 1) 163,2; 2) 29.

22. 1) 25 %; 2) 80 %.

23. 1) 43,75 кг; 2) 345 кг.

24. 1) 62,5 %; 2) павялічыцца на 100 %.

25. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{10}$.

26. 1) $\frac{9}{35}$; 2) 9 кг золата, 10 кг серабра.

27. 1) 170 кг; 2) 220 кг.

28. 1) 2 л; 2) 36 л.

29. 4,8; 24; 43,2.

30. 17; 29; 41.

31. 40.

32. $a_1=2$, $d=3$.

33. $b_1=1$, $q=2$ або $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$.

34. 5.

35. 2.

36. 14; 28.

37. 1; 5; 9.

38. 3.

39. 1) –45; 2) –95.

40. 43 725.

41. 10.

42. 26.

43. $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

44. $\frac{\pi n}{2}, \ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

45. 1) 1; 2) –2.

46. $\frac{1}{2}$.

47. $\frac{3^{4n+2} - 8 \cdot 3^{2n} - 1}{8 \cdot 3^{2n}} + 2n$.

48. $-1 < \frac{m+n}{m-n} < 1$.

49. 1) $(k+m)(4n-9t)$; 2) $(x-y)(7a-8b)$; 3) $12(a-1)(a+1)$; 4) $7a(a-1)(a+1)$; 5) $(a-3b)(a+3b+1)$; 6) $(a-1)k^2(k-1)(k+1)$; 7) $(m-n+k)(m+n-k)$; 8) $(2m^2-n-1)(2m^2+n-1)$.

50. 1) $4ab(a+b)(b-a)$; 2) $2a(a^2+3b^2)(a-b)^2(a+b)^2$; 3) $(a-3)^2(a+3)^2$; 4) $(a^2+5)^2$.

51. 1) $-a-b$; 2) $-\frac{1}{a}$.

52. 1) $\frac{7+c}{7-c}$; 2) $\frac{c(4c+3)}{4c-3}$.

53. 1) $\frac{a-7}{a-8}$; 2) $\frac{p-10}{p-9}$.

54. 1) $a-m$; 2) $3a+3m$.

55. 1) $\frac{5(m+n-1)}{4(a-b+1)}$; 2) $\frac{3(n-m-1)}{2(a+b+1)}$.

56. 1) a; 2) $\frac{1}{2}$.

57. 1) $\frac{1}{a+1}$; 2) 6.

58. 1) 20; 2) –12.

59. 1) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$; 2) $(m-n-p+q)(m-n+p-q)$.

60. 1) $2(a-1)(4a^2-14a+13)$; 2) $(3a-5)(9a^2-3a+7)$.

61. 1) $a-b$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$.

62. 1) $\frac{a^3-b^3}{2(a+b)}$; 2) $\frac{a^3+b^3}{5(a-b)}$.

63. 1) $-\frac{x+1}{x}$; 2) $\frac{1-x}{3x-2}$.

64. 1) 0,4; 2) 2.

65. 1) $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$; 2) $\sqrt{a}-\sqrt{a-2}$.

66. 1) Калі $a<1$, то $-a(a+1)$; калі $a>1$, то a^2+a+2; 2) калі $a<-1$, то $\frac{a^2-a+1}{1-a}$; калі $a>-1$, то $\frac{a^2+a+1}{a+1}$.

67. 1) $\frac{47}{66}$; 2) –0,55.

68. 1) –16; 2) 105.

69. 1) –1; 1; 2) –1; 3.

70. 1) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{15}{8}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{8}{15}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{20}{29}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{20}{21}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{21}{20}$.

71. 1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$; $\sin\alpha=\frac{5}{13}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$; $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$.

72. 1) $\frac{3(3\sqrt{5}-5)}{10}$; 2) $\frac{4(7-4\sqrt{7})}{21}$.

73. 1) $\frac{7}{18}$; 2) $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

74. 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$.

75. 1) –2; 2) $-\frac{1}{4}\sin 16\alpha$.

76. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha$.

77. 1) 1; 2) 1.

82. 1) $-\frac{9\sqrt{3}}{16}$; 2) –1,5.

83. 1) $-\frac{27}{98}$; 2) $\frac{2}{9}$.

84. 1) 19; 2) $-\frac{13}{12}$.

85. 1) 1,75; 2) 1,5.

86. 1) $-\sin^2\alpha$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

87. 1) $xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$; 2) $xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

88. 1) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 2) $\frac{2x}{1+x^2}$.

93. 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\frac{24}{25}$.

94. 1) 0; 2) $\frac{13}{85}$.

95. 1) Правільна; 2) правільна.

96. 1) 4; 2) 27; 3) 16; 4) 25.

97. 1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) 2.

98. 1) 4; 2) 6; 3) 5; 4) 10.

99. 1) 6; 2) $\sqrt{7}$; 3) 9; 4) 49.

100. 1) 1; 2) 1.

101. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

102. 1) –5; 2) –8.

103. 1) $\frac{1}{|x-5|}$; 2) $\frac{1}{|x-8|}$.

104. 1) 0; 2) 0.

105. 1) –1; 2) $\frac{1}{3}$.

106. 1) $4m+n$; 2) $3m+n$.

107. 1) $5m^5$; 2) $3m^4$.

108. 1) 0; 2) 0.

109. 1) 1; 2) 1.

110. 1) –1; 2) –0,04.

111. 1) 3; 2) 1.

112. 1) 2; 2) 0,3.

113. 1) ±1,75; 2) $\pm 3\sqrt{3}$.

114. 1) $-\frac{1}{343}$; 0; 2) –8; 0; 8.

115. 1) 1; 9; 2) –0,6; –0,2; 3) $-2 \pm \sqrt{3+\sqrt{3}}$; 4) $-4\sqrt{2}$; –2.

116. 1) –2; 2) –1.

117. 1) Няма каранёў; 2) 4; 3) $\frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 4) $-2 \pm \sqrt{2}$.

118. 1) 1; 1,5; 2) –3; 0.

119. 1) 2; 2) 2; $6\frac{2}{3}$.

120. –6.

121. 1) –1; 5; 2) няма каранёў; 3) $\frac{2}{3}$; 1; 4) няма каранёў.

122. 1) –0,5; 2) –2; 3; 3) ±3; 4) 0; 1.

123. 1) 4; 2) 0; $\frac{3+\sqrt{41}}{8}$; 3) –2; $-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 4) –2; $1-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

124. 1) $\sqrt{2}$; 2) –1; $\frac{1}{2}$.

125. 1) (2; 3), (3; 2); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 0), (4; 3); 4) (2; 3), $\left(4\frac{2}{3}; 5\right)$.

126. 1) (–4; –1), (–4; 1), (4; –1) (4; 1); 2) (–3; –2), (3; 2).

127. 1) $\left(-2\frac{11}{13}; \frac{6}{13}\right)$, (–1; –2), (1; 2), $\left(2\frac{11}{13}; -\frac{6}{13}\right)$; 2) (–5; 1), (–4,6; 2,2), (4,6; –2,2), (5; –1).

128. 1) 8; 2) 2.

129. 1) $x \leqslant 1$; 2) $x \leqslant 0{,}5$.

130. 1) $\frac{1}{6} < x < \frac{12}{7}$; 2) $-\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{5}$.

131. 1) $-1 < x < 2$; 2) $x < 0{,}5$, $x > 3$.

132. 1) $0 < x < 3$; 2) $x < 0$, $x > 12$.

133. 1) $1 < x < 15$; 2) $x < -3$, $x > 17$.

134. 1) $-9 \leqslant x < 0$, $x \geqslant 9$; 2) $x \leqslant -12$, $0 < x \leqslant 12$.

135. 1) $x < 0$, $\frac{12}{7} < x < 6$; 2) $x < 0$; $\frac{70}{9} < x < 10$.

136. 1) $x < -3$; $-1 < x < 1$, $x > 2$; 2) $-2 < x < -1$, $1 < x < 5$.

137. 1) $x \leqslant -14{,}4$, $x \geqslant 0$; 2) $-\frac{7}{11} \leqslant x \leqslant 3$.

138. 1) $x < -2$, $x > 4$; 2) $x < 5$, $x \neq -1$, $x \neq 0$.

139. 1) $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$; 2) $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{7}{2}$.

140. 1) $\frac{23}{2} < x < \frac{40}{3}$; 2) $x > \frac{2}{5}$; 3) няма рашэнняў; 4) $0 < x < 5$.

141. 1) $x \geqslant 6$; 2) $x \leqslant 5$; 3) ±4; 4) $x \geqslant 3$.

142. 1) –1; $\frac{4}{3}$; 2) –2; –1; 0; 1.

143. 1) 2; 3; $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 2) –3; 2; 3) –1; 12; 4) 2; 3; $\frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$.

144. 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 1); 3) $\left(-\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$, (2; –3); 4) (0; 1), (1; 1).

145. 1) (–1; 2), (1; –2); 2) (–1; –1), (1; 1); 3) (–1; 5), (1; –5), $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}; -\sqrt{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; \sqrt{5}\right)$; 4) (–3; –6), (3; 6), $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

146. 1) (7; 5); 2) (8; –4).

147. 1) $a > -5$, $a \neq 3$; 2) $a = -5$, $a = 3$; 3) $a < -5$.

148. 1) $a < -3\frac{2}{3}$, $a \neq -5$; 2) $a = 3\frac{2}{3}$, $a = -5$; 3) $a > 3\frac{2}{3}$.

149. 1) 1,5; 2) 6.

150. ±2.

151. –4.

152. ±1.

153. 1) $x = \frac{4}{a-6}$, калі $a \neq 6$; няма каранёў, калі $a = 6$; 2) $x = -\frac{7}{a+7}$, калі $a \neq -7$; няма каранёў, калі $a = -7$; 3) $x = \frac{a-3}{3}$; 4) $x = -\frac{2a+1}{4}$.

154. 1) $-k$; $-9k$; 2) $-2k$; 3; 3) $k+1$; $2k-3$; 4) $k-2$; $3k+2$.

155. 1) $\frac{a+1 \pm \sqrt{2a+1}}{4a}$; 2) $\frac{-2a+3 \pm \sqrt{-12a+9}}{a}$.

156. 1) $a \neq 0$; 2) $a \neq 0$; 3) $a \neq 3$; 4) $a \neq -2$.

157. 1) $a = -7{,}5$; $a = -3$; 3) няма такіх значэнняў a; 4) няма такіх значэнняў a.

158. 1) $-2 \leqslant x \leqslant -0{,}2$; $x \geqslant 0$; 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{7}$; $x \geqslant \frac{3}{2}$.

159. 1) $-1 \leqslant x < 5$; $x = 8$; 2) $x \leqslant -8$; $-2 \leqslant x < 2$; $3 \leqslant x < 5$; $x > 5$.

160. $\frac{17}{31}$.

161. $\frac{2}{5}$.

162. 25.

163. 52.

164. 2 км/г.

165. 60 км.

166. 240 км.

167. 8 г, 12 г.

168. 20 г, 32 г.

169. 6 г, 18 г.

170. 14 дз., 11 дз.

171. 175 кг, 450 кг.

172. Выцякае 3000 см^3 у мінуту, паступае 2250 см^3 у мінуту.

173. 90 гадоў, 20 гадоў.

174. Выканана 40 заданняў, спісана 25 заданняў.

175. 150 г 15-працэнтнага раствору, 450 г — 35-працэнтнага.

176. 127,5 кг сплаву, які ўтрымлівае 60 % волава, 42,5 кг сплаву, які ўтрымлівае 80 % волава.

177. 192 г.

178. 66 кніг і 54 кнігі.

179. 45 і 23.

180. 2463.

181. 4; 6; 11.

182. На 25 %.

183. 36 г, 18 г, 8 г.

184. 15 г.

185. $39\frac{7}{12}$ км.

186. 60 км/г, 90 км/г, 900 км.

187. 2 км/г.

188. 1) –0,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) –5; 0,4; 4) $\frac{3}{7}$; 7.

189. 1) –5; 2) –4.

190. 1) 5; 2) 3; 3) –6; 4) –8.

191. 1) 0; 25; 2) 0; 16; 3) 7; 4) 8.

192. 1) 1; 2) 5; 3) 3; 4) $-\frac{1}{2}$; 1; 5) $\frac{5}{3}$; 6) 2,5.

193. 1) $[-2{,}5;\ 20)$; 2) $[-240;\ 10]$; 3) $[11;\ +\infty)$; 4) $(-37;\ +\infty)$.

194. 1) $\left[\frac{1}{16};\ 1\right]$; 2) $\left[\frac{9}{16};\ 4\right]$; 3) $(-4;\ -1]$; 4) $(0{,}5;\ +\infty)$.

195. 1) (1; 25), (25; 1); 2) (9; 16), (16; 9).

196. 1) $\left(\frac{6}{5};\ \frac{6}{5}\right)$; 2) $\left(\frac{7}{4};\ \frac{7}{4}\right)$.

197. 1) 6; 2) 10.

198. 1) 7; 8; 2) 2; 3) 4; 4) 2.

199. 1) $-\frac{27}{8}$; 1; 2) 19; 84; 3) ±7; 4) ±5.

200. 1) 5; 2) $-\frac{30}{127}$; 5; 3) –6; 2; 4) –3; 10.

201. 1) $[3;\ 3{,}5] \cup [4;\ 8]$; 2) $\{-4\} \cup [-2{,}5;\ -1]$; 3) $[2{,}5;\ 3]$; 4) няма рашэнняў.

202. 1) (–21,5; 2,5); 2) $\left(\frac{34}{9};\ \frac{8}{9}\right)$.

203. 1) (1; 4); 2) (9; 4).

204. 1) (–1; –27); (27; 1); 2) (1; 8); (8; 1).

205. 1) $\left(36;\ \frac{1}{9}\right)$; 2) $\left(16;\ \frac{1}{4}\right)$.

206. 1) (–5; 10), $\left(\frac{5}{3};\ \frac{10}{3}\right)$; 2) (–1; –2), $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

207. 1) Няма каранёў, калі $a < 0$; $x = a^2 + 4$, калі $a \geqslant 0$; 2) няма каранёў, калі $a > 0$; $x = a^2 - 1$, калі $a \leqslant 0$; 3) $x = 0$, калі $a = 0$; няма каранёў, калі $a \neq 0$; 4) $x = 6$, калі $a = 0$; няма каранёў, калі $a \neq 0$; 5) $x = \frac{a^2 - 16a + 100}{36}$, калі $-10 \leqslant a \leqslant 8$; 6) $x = \frac{a^2 + 34a + 225}{64}$, калі $a \leqslant -17$.

208. 1) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

209. 1) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\arccos(\sqrt{5} - 2) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}\,5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

210. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}3+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ n\neq 0$.

211. 1) $\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

212. 1) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

213. 1) $2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi n}{7},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

214. 1) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

215. 1) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left((-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\left((-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}+\frac{n+2k}{2}\pi;\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{n-2k}{2}\pi\right),\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\left((-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ k\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

216. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $2\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $2\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$.

217. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

218. 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\frac{4}{3}$.

219. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}\,2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\mathrm{arctg}3+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}\,2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n\arcsin\left(2^{-\sqrt{\log_2\sqrt{3}}}\right)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

220. 1) 2; 2) 2; 3) -1; 4) -1; 5) 1; 6) $-\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{8}$; 8) -2; $\frac{4}{3}$.

221. 1) $(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, калі $|a|\leqslant 1$; няма каранёў, калі $|a|>1$; 2) $\pm\arccos(a+1)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, калі $-2\leqslant a\leqslant 0$; няма каранёў, калі $a<-2$ або $a>0$; 3) $\pm\frac{1}{2}(\pi-\arccos a)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, калі $|a|\leqslant 1$; няма каранёў, калі $|a|>1$; 4) $\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$, калі $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$; няма каранёў, калі $a<\frac{1}{2}$ або $a>1$.

222. 1) $\left((-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

223. 1) $\left(\frac{1}{2}\left((-1)^k\arcsin(a^2+a)+(-1)^n\arcsin(a^2-a)+\pi k+\pi n\right);\right.$

$\left.\frac{1}{2}\left((-1)^k\arcsin(a^2+a)+(-1)^{n+1}\arcsin(a^2-a)+\pi k-\pi n\right)\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos(-a)+\pi n;\ \frac{3\pi}{2}\pm\frac{\arccos(-a)}{2}-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

224. 1) Няма каранёў; 2) няма каранёў; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{13}{31}$; 6) $\frac{53}{49}$; 7) 3; 8) 1.

225. 1) 3; 2) –4; 3) –2; 4) –7; 5) 7; $\frac{10^{\frac{8}{3}}-79}{3}$; 6) $\frac{11}{5}$; $\frac{10^{\frac{10}{3}}-89}{5}$.

226. 1) (0; –2); 2) (–2; 3); 3) (2; 1), ($\log_3 7$; $\log_7 9$); 4) (2; 2).

227. 1) $\left(10^{-\frac{1}{2}};\ 10^{-\frac{7}{2}}\right)$, (100; 0,1); 2) (4; 4).

228. 1) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $[-3;\ 3]$; 3) $[1;\ +\infty)$; 4) $\left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right]$; 5) $(-\infty;\ 1)$; 6) $[0;\ 1]$; 7) $(-7;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -9)\cup(-5;\ 2)$.

229. 1) $[16;\ +\infty)$; 2) $[27;\ +\infty)$; 3) $\left(\frac{7}{3};\ \frac{9}{2}\right)$; 4) $\left[1;\ \frac{7}{2}\right)$; 5) $(-\infty;\ -4)$; 6) $(-\infty;\ -9)$.

230. 1) $(-\infty;-9)\cup\left(\frac{9}{4};\ 3\right)$; 2) $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)\cup(2;\ 4)$; 3) $(1;\ 2)\cup(8;\ +\infty)$; 4) $(1;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$.

231. 1) 0; $\log_{1,5}3$; 2) $\log_{0,4}2$; 3) 2; 4) 2.

232. 1) 2; $-\log_3 6$; 2) –2; $\log_5 10$; 3) $\frac{1}{8}$; 2; 4) $\frac{1}{16}$; 8.

233. 1) $\frac{5}{4}$; 2; 2) $\frac{9}{4}$; 3; 3) $\frac{\sqrt[4]{3}-1}{5}$; 16; 4) $\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}$; 21.

234. 1) 3; 2) 9.

235. 1) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

236. 1) $a<1$, $a=3$; 2) $a=-2{,}2$, $a=1$.

237. 1) $x=-a-3$, калі $a<-6$; няма рашэнняў, калі $a\geqslant-6$; 2) $x=-\frac{a+9}{13}$, калі $a<30$; няма каранёў, калі $a\geqslant 30$.

238. 1) (16; 256); 2) (4; 16).

239. 1) (2; 7); 2) (2; 6).

240. 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $x<2$.

241. 1) $x<0$; 2) $-2<x<-1$, $x>1$.

242. 1) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-1{,}5;\ -\sqrt{1{,}5}\right)\cup\left(\sqrt{1{,}5};\ 1{,}5\right)$.

243. 1) $f'(x) = 12x^2 - 40x + 25$; 2) $f'(x) = 6x^2 - 24x + 16$;

3) $f'(x) = x^2 + 5x - \frac{25}{6} + (x-2)(2x+5)$; 4) $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{7}{3} + (x+1)(2x-4)$;

5) $f'(x) = \dfrac{(4x^3 - 2x)(x^2 - x\sqrt{5} + 2) - (2x - \sqrt{5})(x^4 - x^2 + 4)}{(x^2 - x\sqrt{5} + 2)^2}$;

6) $f'(x) = \dfrac{(4x^3 - 8x)(x^2 + x\sqrt{2} - 1) - (2x + \sqrt{2})(x^4 - 4x^2 + 1)}{(x^2 + x\sqrt{2} - 1)^2}$.

244. 1) 49 м/с; 2) 23 м/с.

245. 1) 7; 2) 1.

246. 1) 1 с; 2) 1 с.

247. Калі $x_0 = 2$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; калі $x_0 = -1$, то $\operatorname{tg}\alpha = 0$; калі $x_0 = 2$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; калі $x_0 = 3$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{9}$.

248. 1) $y = -\frac{4}{25}x + \frac{11}{25}$; 2) $y = -4x - 13$; 3) $y = -4x - 13$; 4) $y = -x + 2$.

249. 1) Прамежкі нарастання $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$, прамежак спадання $[-1; 1]$, пункты экстрэмуму ±1; 2) прамежак нарастання $\left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$, прамежак спадання $\left(-\infty; \frac{3}{8}\right]$, пункт экстрэмуму $\frac{3}{8}$; 3) прамежкі нарастання $(-\infty; 0]$, $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, прамежак спадання $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, пункты экстрэмуму 0 і $\frac{1}{3}$; 4) прамежкі нарастання $(-\infty; 0]$, $[1; +\infty)$, прамежак спадання $[0; 1]$, пункты экстрэмуму 0 і 1.

250. 1) Найбольшае значэнне $3\frac{7}{15}$, найменшае значэнне $-28{,}8$; 2) найбольшае значэнне 5, найменшае значэнне $-24{,}4$.

251. 1) $(-2; 6)$; 2) $(-2; -28)$.

252. 1) $(2; 2)$, $y = -5x + 12$; 2) $(-1; -16)$, $y = 6x - 10$.

253. 1) $\operatorname{arctg} 3$; 2) $\operatorname{arctg} 2$.

254. 1) 200 м, 200 м, 400 м; 2) $200\sqrt{2}$ м, $200\sqrt{2}$ м.

255. 1) $28 = 14 + 14$; 2) $49 = 7 \cdot 7$.

256. 1) $a = \pm3$; 2) $a = \pm5$.

257. 1) $a > 0$; 2) $a < 0$.

258. 1) $[-4; 4]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 3) $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; 4) $x \neq -2$; $x \neq 0$; $x \neq 2$; 5) $(1; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

259. 1) $\left(-\infty; 17\frac{2}{3}\right)$; 2) $(-6{,}75; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(1; 3)$; 5) $(-\infty; 7) \cup (7; 7{,}2)$; 6) $(1; +\infty)$.

260. 1) $(-\infty; 2]$; 2) $[0{,}16; +\infty)$; 3) $(-\infty; 13)$; 4) $(-10{,}5; +\infty)$.

261. 1) $(8; 2)$; 2) $(-3; -5)$; 3) $(0{,}5; -1{,}25)$; 4) $(1; 4)$.

266. 1) $\{-1;\ 1\}$; 2) $(-\infty;\ 0]$; 3) $[4;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 5]$.

267. 1) $[-7;\ +\infty)$; 2) $[4;\ +\infty)$; 3) $[-1{,}25;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 4) 0; 5) $(-\infty;\ 2)$; 6) $(-5;\ +\infty)$.

268. 1) Найбольшае значэнне 7, найменшага значэння няма; 2) найбольшага значэння няма, найменшае значэнне 1; 3) найбольшае значэнне 9, найменшага значэння няма; 4) найбольшага значэння няма, найменшае значэнне 0.

269. 1) Дадатныя значэнні на прамежку $(20;\ +\infty)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(-\infty;\ 20)$; 2) дадатныя значэнні на прамежку $(-\infty;\ 40)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(40;\ +\infty)$; 3) дадатныя значэнні на прамежках $(-\infty;\ 1{,}8)$, $(2;\ +\infty)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(1{,}8;\ 2)$; 4) дадатныя значэнні на прамежку $\left(6;\ 7\frac{1}{3}\right)$, адмоўныя значэнні на прамежках $(-\infty;\ 6)$, $\left(7\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; 5) дадатныя значэнні на прамежку $(-0{,}4;\ 3)$, адмоўныя значэнні на прамежках $(-\infty;\ -0{,}4)$, $(3;\ +\infty)$; 6) дадатныя значэнні на прамежках $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right)$, $(3;\ +\infty)$, адмоўныя значэнні на прамежку $\left(1\frac{1}{3};\ 3\right)$; 7) дадатныя значэнні на прамежку $(5;\ 30)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(30;\ +\infty)$; 8) дадатныя значэнні на прамежку $(7;\ +\infty)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(-20;\ 7)$; 9) дадатныя значэнні на прамежку $(6;\ +\infty)$, адмоўныя значэнні на прамежку $(-\infty;\ 6)$; 10) дадатныя значэнні на прамежку $\left(-\frac{5}{9};\ +\infty\right)$, адмоўныя значэнні на прамежку $\left(-\infty;\ -\frac{5}{9}\right)$.

271. $1{,}5 < x < 4$.

272. 1) $p = -1$, $p = 7$; 2) $p = -5$, $p = 1$.

275. 1) $(-6;\ -5]$; 2) $(-3;\ -1]$; 3) $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0]$; 4) $(1;\ 3{,}5)$.

ПРАДМЕТНЫ ПАКАЗАЛЬНІК

ЗМЕСТ

(Назва і нумар установы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Кузняцова Алена Паўлаўна
Мураўёва Галіна Леанідаўна
Шнэперман Леў Барысавіч
Яшчын Барыс Юр'евіч

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Заг. рэдакцыі *В. Г. Бехціна.* Рэдактар *Н. М. Алганава.* Мастацкі рэдактар *А. А. Валатовіч.* Тэхнічны рэдактар *Г. А. Дудко.* Карэктары *К. І. Даніленка, Г. В. Алешка, В. С. Казіцкая, В. С. Бабеня, Д. Р. Лосік.*

Падпісана ў друк 01.03.2013. Фармат $60 \times 90^1/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура літаратурная. Афсетны друк. Умоўн. друк. арк. 18 + 0,25 форз. Ул.-выд. арк. 11,03 + 0,17 форз. Тыраж 16 100 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета»
Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 ад 03.02.2009.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 ад 11.03.2009.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск.