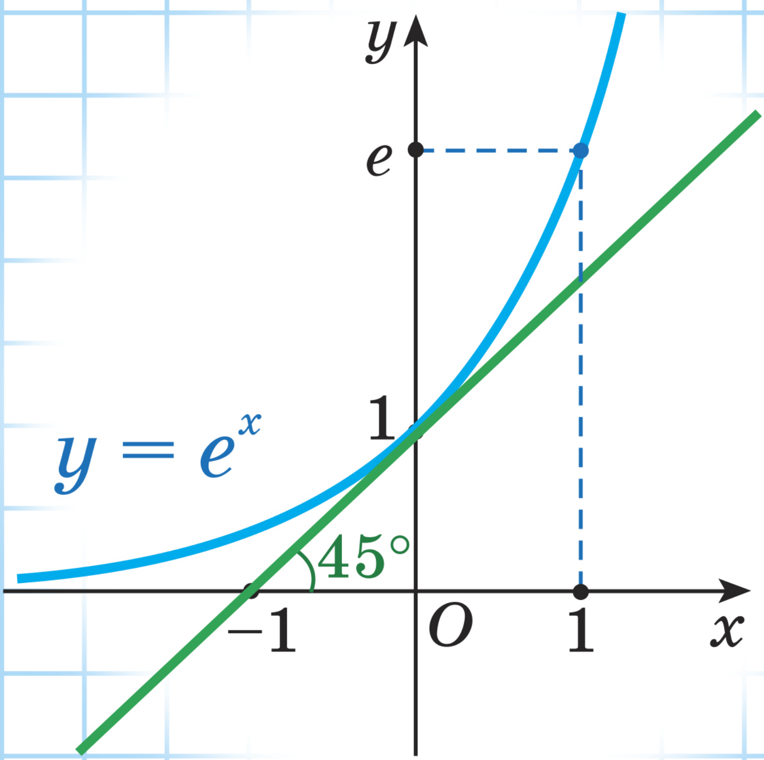
І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

ЗБОРНІК ЗАДАЧ

па алгебры



11

І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

ЗБОРНІК ЗАДАЧ па алгебры

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2020

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.14я721
А89

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:
кафедра вышэйшай алгебры і абароны інфармацыі механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры *В. В. Беняш-Крывец*);
настаўнік матэматыкі кваліфікацыйнай катэгорыі «настаўнік-метадыст» ліцэя Беларускага нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта *А. Я. Цыбулька*

ISBN 978-985-03-3255-4

Шаноўныя адзінаццацікласнікі!

Гэты дапаможнік спатрэбіцца вам для падрыхтоўкі да ўрокаў, экзаменаў і ўступных іспытаў па матэматыцы, а таксама для паглыблення ведаў па алгебры.

Кніга складаецца з 5 раздзелаў, кожны з якіх падзелены на параграфы.

У раздзелах 1, 2 і 3 размешчаны заданні па тэмах, якія адпавядаюць вучэбнаму дапаможніку «Алгебра, 11». Сярод іх вы сустрэнеце таксама і заданні з нестандартнымі ўмовамі.

Раздзелы 4 і 5 прапануюцца для вывучэння матэматыкі на павышаным узроўні. Кожны параграф у гэтых раздзелах уключае:

- новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення; алгарытмы;
- важныя правілы і асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;
- трэніровачныя практыкаванні і ўзоры прымянення тэорыі ў заданнях з нестандартнымі ўмовамі.

У кнізе вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

— новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення;

— алгарытмы;

— матэрыял павышанага ўзроўню;

— трэніровачныя практыкаванні;

— дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў.

Для абагульнення вывучанага раней матэрыялу ў вучэбным дапаможніку размешчаны раздзел «Паўтарэнне. Тэматычныя тэсты».

Дадатковыя матэрыялы да кнігі, а таксама адказы да трэніровачных практыкаванняў можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка».

Жадаем поспехаў!

Раздзел 1. Абагульненне паняцця ступені

§ 1. Ступень з рацыянальным паказчыкам. Ступень з рэчаісным паказчыкам

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$
$$\left(ab\right)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(a : b\right)^n = a^n : b^n$$

Прыклад 1. Запішыце выраз $\dfrac{x\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2}$ у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам.

Рашэнне.

$$\frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2} = \frac{x \cdot x^{\frac{2}{5}}}{\left(x^{\frac{1}{10}}\right)^2} = \frac{x^{1+\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}} = x^{\frac{6}{5}}.$$

Адказ: $x^{\frac{6}{5}}$.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу

$$81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} + 256^{0,5}.$$

Рашэнне.

$$81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} + 256^{0,5} = \left(3^4\right)^{0,75} \cdot \left(2^5\right)^{-0,4} - \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 + \left(16^2\right)^{0,5} =$$
$$= 3^3 \cdot 2^{-2} - 2^{-2} \cdot 3 + 16 = \frac{27}{4} - \frac{3}{4} + 16 = 22.$$

Адказ: 22.

Прыклад 3. Скараціце дроб $\dfrac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}}$.

Рашэнне.

$$\frac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}} = \frac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5x^{\frac{1}{2}} - 15x^{\frac{3}{10}}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}\left(3 - x^{\frac{1}{5}}\right)}{5x^{\frac{3}{10}}\left(x^{\frac{1}{5}} - 3\right)} = -\frac{x^{\frac{4}{5}}}{5x^{\frac{3}{10}}} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{5} = -0,2\sqrt{x}.$$

Адказ: $-0,2\sqrt{x}$.

Прыклад 4. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{x - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 1} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3\right) : \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}.$$

Рашэнне.

$$\left(\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right):\left(\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}=\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)}{x^{\frac{2}{3}}-1}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}=\left(x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=\left(3x^{\frac{1}{3}}-3\right)\cdot\frac{1}{1-x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{1-x^{\frac{1}{3}}}=-3.$$

Адказ: -3.

Прыклад 5. Спрасціце выраз

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right).$$

Рашэнне.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right)=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)+4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{a^{\frac{1}{3}}-2\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)+\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^2+4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+2b+a^{\frac{1}{3}}+b}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=\frac{3b^2}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{3b}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=$$

$$=\frac{3b^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}{3b\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=b\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right).$$

Адказ: $b\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)$.

Прыклад 6. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу

$$\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right).$$

Рашэнне.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{9\cdot 3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}\right)^2\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(4-2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left|\sqrt{3}-1\right|}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-3$$ — рацыянальны лік.

Адказ: значэнне выразу з'яўляецца рацыянальным лікам.

Прыклад 7. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}-7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3.$$

Рашэнне.

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}-7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3=\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}\right)}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}\right)}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3=$$

$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^6+\left(7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^3=6^2+35=71.$$

Адказ: 71.

Прыклад 8. Спрасціце выраз $\dfrac{\sqrt{5}x^{0,5}-3x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-\sqrt{5}x^{-0,5}}{\sqrt{5x+6\sqrt{5}x^{\frac{5}{6}}+9x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$, калі $x\in(0;\,1)$.

Рашэнне.

$$\frac{\sqrt{5}x^{0,5}-3x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-\sqrt{5}x^{-0,5}}{\sqrt{5x+6\sqrt{5}x^{\frac{5}{6}}+9x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}=\frac{\sqrt{5}x^{0,5}\left(1-x^{-1}\right)+3x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{-1}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(1-x^{-1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}x^{0,5}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-x^{-1}\right)}{\left(\sqrt{5}x^{0,5}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\left|1-x^{-1}\right|}=\left.\frac{1-x^{-1}}{\left|1-x^{-1}\right|}\right|_{x\in(0;\,1)}=\frac{1-x^{-1}}{-\left(1-x^{-1}\right)}=-1.$$

Адказ: -1.

Прыклад 9. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt[4]{5^{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}\cdot 25^{\sqrt{7}}}$.

Рашэнне.

$$\sqrt[4]{5^{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}\cdot 25^{\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^{8-2\sqrt{7}}\cdot 5^{2\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^{8-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^8}=25.$$

Адказ: 25.

Прыклад 10. Вылічыце: $\left(3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}\right):3^{\sqrt{5}}$.

Рашэнне.

$$\left(3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}\right):3^{\sqrt{5}}=\frac{3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}}{3^{\sqrt{5}}}=\frac{3^{\sqrt{5}}\left(1-3^{-1}\right)}{3^{\sqrt{5}}}=1-3^{-1}=\frac{2}{3}.$$

Адказ: $\frac{2}{3}$.

Прыклад 11. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\cdot b+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}+1}}+\frac{b^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}}{b^{0,25\sqrt{5}}+a^{0,25\sqrt{5}}}\right):\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-0,5\sqrt{5}}}\right)^{-1}.$$

Рашэнне.

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}+\frac{b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}\right)\cdot\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}\cdot\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\cdot a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=\frac{a^{\sqrt{5}}}{b}.$$

Адказ: $\frac{a^{\sqrt{5}}}{b}$.

1.1. Вылічыце:

а) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}81^{-0{,}5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 2^{-3}$; б) $125^{-\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{2}} + 343^{-\frac{1}{3}} - 3$.

1.2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(2 - 15^{\frac{1}{4}}\right)\left(2 + 15^{\frac{1}{4}}\right) : \left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$; б) $\left(16^{-0{,}25} - 3^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}} + 4^{-0{,}5}\right)$.

1.3. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і вылічыце значэнне выразу:

а) $\left(9\sqrt{3}\right)^{0{,}2} : \left(27\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{7}}$; б) $\left(12^{-\frac{1}{3}} \cdot 18^{-\frac{4}{3}} \cdot 6^{3{,}5}\right)^{2} - 3^{0{,}25} \cdot 9^{\frac{3}{8}}$.

1.4. Спрасціце выраз і знайдзіце яго значэнне:

а) $\left(\dfrac{9a^{-\frac{5}{24}}}{a^{\frac{1}{8}} a^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ пры $a = 24$; б) $\left(a^{3}\sqrt[3]{a}\right)^{0{,}2} \cdot \left(a^{2}\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{1}{7}}$ пры $a = 3$.

1.5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $3^{\sqrt{18}} \cdot 27^{1-\sqrt{2}}$; б) $5^{1+\sqrt{17}} : 5^{3+\sqrt{17}}$; в) $2^{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}} : 2^{2\sqrt{3}}$;

г) $\left(\left(\sqrt[4]{6}\right)^{2\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$; д) $\left(\left(2\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[6]{9^{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}} \cdot 81^{\sqrt{2}}}$.

1.6. Параўнайце значэнні выразаў $12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{\sqrt{192}}$ і $4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{48}}$.

1.7. Вылічыце:

а) $10^{3\sin^{2}\frac{\pi}{12}} \cdot 10^{3\cos^{2}\frac{\pi}{12}}$; б) $\left(17^{\operatorname{tg} 89^\circ}\right)^{2\operatorname{ctg} 89^\circ}$;

в) $\left(25^{\cos\frac{\pi}{6}}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$; г) $49^{\sin\frac{2\pi}{3}} : 7^{\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}}$.

1.8. Спрасціце выраз $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} : a^{\frac{1}{3}}$.

1.9. Спрасціце выраз $1 - \left(c^{-0{,}1} - c^{0{,}3}\right)\left(c^{0{,}6} + c\right)c^{-0{,}5}$.

1.10. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\dfrac{a^{0{,}5}}{\sqrt{3}} - 1\right) \cdot \dfrac{\left(a^{0{,}25} + \sqrt[4]{3}\right)^{2} - 2\sqrt[4]{3a}}{\sqrt{3}}$ пры $a = \frac{3}{5}$.

1.11. Спрасціце выраз $\dfrac{ab^{-1}-4}{b^{-1}\sqrt{a}+2b^{-\frac{1}{2}}}+2\sqrt{b}$.

1.12. Спрасціце выраз:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(b^{\frac{1}{3}}-2a+\dfrac{4a^2-4\sqrt[3]{b^2}}{2a+\sqrt[3]{b}}\right):\left(\dfrac{2a}{b^{\frac{2}{3}}-4a^2}-\dfrac{2}{b^{\frac{1}{3}}-2a}-\dfrac{1}{2a+b^{\frac{1}{3}}}\right)$;

в) $\left(m+\dfrac{n^{1,5}}{m^{0,5}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{m^{0,5}-n^{0,5}}{m^{0,5}}+\dfrac{n^{0,5}}{m^{0,5}-n^{0,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $\left(\dfrac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\cdot\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$.

1.13. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{2^{0,25}}\right)^{2}\cdot\left(1,5-2^{0,5}\right)^{-1}$.

1.14. Спрасціце выраз

$\left(\dfrac{2\sqrt[3]{3}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{9}}+\dfrac{xy-\sqrt[3]{3}}{2xy+2\sqrt[3]{3}}\right)\cdot\dfrac{2xy}{xy+\sqrt[3]{3}}-\dfrac{xy}{xy-\sqrt[3]{3}}+0,1$ і знайдзіце яго значэнне пры $x=\dfrac{1}{11}$, $y=3$.

1.15. Спрасціце выраз $\left(a^{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}:a^{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

1.16. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-36}{a^{\sqrt{2}}+6}$;

б) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\sqrt{20}}-b^{\sqrt{28}}}$;

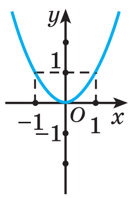
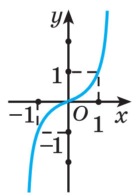
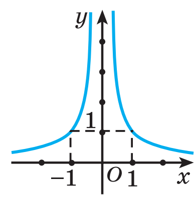
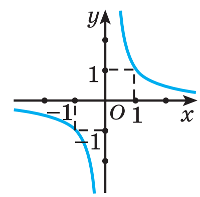
в) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}+2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}+b^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}+a^{\sqrt{3}}b^{2\sqrt{2}}}$;

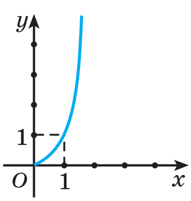
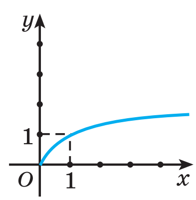
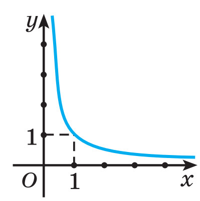
г) $\dfrac{x^{\frac{\sqrt{7}}{3}}-25}{x^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+10x^{\frac{\sqrt{7}}{6}}+25}$.

1.17. Спрасціце выраз

$$\left(\dfrac{n^{\frac{\sqrt{3}}{4}}-m^{\frac{\sqrt{3}}{4}}}{m^{-0,5\sqrt{3}}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{m^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-n^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{n\cdot m^{\frac{\sqrt{3}}{4}}-n^{\frac{\sqrt{3}}{4}+1}}-\dfrac{n^{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}}{n^{0,25\sqrt{3}}-m^{0,25\sqrt{3}}}\right).$$

§ 2. Ступенная функцыя $y = x^n$ і яе графік

***n* > 0, натуральны**		***n* < 0, цэлы**	
n — цотны	n — няцотны	n — цотны	n — няцотны
$D(y) = \boldsymbol{R}$		$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	
$E(y) = [0;\ +\infty)$	$E(y) = \boldsymbol{R}$	$E(y) = (0;\ +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ +\infty)$
 Цотная функцыя	 Няцотная функцыя	 Цотная функцыя	 Няцотная функцыя

***n* — няцэлы лік**		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0;\ +\infty)$ $E(y) = [0;\ +\infty)$		$D(y) = (0;\ +\infty)$ $E(y) = (0;\ +\infty)$
		

Прыклад 1. Вызначце, ці праходзіць графік функцыі $f(x) = x^{0,6}$ праз пункт $A(32;\ 8)$.

Рашэнне.

Пры $x = 32$ атрымаем $f(32) = 32^{0,6} = 32^{\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$.

Адказ: праходзіць.

Прыклад 2. Параўнайце лікі:

а) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi}$ і $(1,2)^{\pi}$; б) $(1,7)^{-\sqrt{2}}$ і $(2,3)^{-\sqrt{2}}$.

Рашэнне.

а) Функцыя $y = x^{\pi}$ нарастае на абсягу вызначэння. Паколькі $\frac{5}{6} < 1{,}2$, то $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi} < (1{,}2)^{\pi}$.

Адказ: $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi} < (1{,}2)^{\pi}$.

б) Функцыя $y = x^{-\sqrt{2}}$ спадае на абсягу вызначэння. Паколькі $1{,}7 < 2{,}3$, то $(1{,}7)^{-\sqrt{2}} > (2{,}3)^{-\sqrt{2}}$.

Адказ: $(1{,}7)^{-\sqrt{2}} > (2{,}3)^{-\sqrt{2}}$.

2.1. Выберыце пункты, праз якія праходзіць графік функцыі $f(x) = x^{-0{,}75}$:

а) $A(1; -1)$; б) $B(16; 0{,}125)$; в) $C\left(\frac{1}{81}; 27\right)$; г) $D\left(\sqrt[3]{2}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

2.2. Вызначце знак значэння выразу:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $(5{,}1)^{-\pi} - (7{,}9)^{-\pi}$.

2.3. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \left(x^2 - 6\right)^{-1{,}8}$; б) $y = \left(7x - 3x^2\right)^{\frac{1}{7}}$;

в) $y = \left(x^3 - 2x^2 + x\right)^{-0{,}8}$; г) $y = \left(x^4 - 5x^2 + 4\right)^{\sqrt{3}}$;

д) $y = \left(x - 4x^3\right)^{-\sqrt{2}}$; е) $y = \left(\frac{9x^4 - 8x^2 - 1}{4x^2 - 1}\right)^{\sqrt{5}}$.

2.4. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = 2 - x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$;

г) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; д) $y = |x - 1|^{\frac{1}{3}}$; е) $y = (|x| - 2)^{\frac{1}{3}}$.

2.5. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $y = x^{-0{,}4}$; б) $y = 1 - x^{-0{,}4}$; в) $y = (x - 1)^{-0{,}4}$;

г) $y = |x|^{-0{,}4}$; д) $y = |x + 3|^{0{,}4}$; е) $y = (|x| + 2)^{-0{,}4}$.

2.6. Знайдзіце функцыю, адваротную для функцыі:

а) $y = x^{\frac{1}{7}}$; б) $y = x^{-1{,}2}$.

2.7. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $y = x^{-\sqrt{2}}$; б) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$.

2.8. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $y = |x-1|^{\sqrt{3}} + 2$; б) $y = \left||x+2|^{-\pi} - 3\right|$.

2.9. Для функцыі $f(x) = x^{\sqrt{3}}$ вядома, што $f(a) = n$. Знайдзіце:

а) $f(a^3)$; б) $f(a^{-2})$.

2.10. Дакажыце, што графікі функцый $f(x) = x^{\sqrt{5}}$ і $f(x) = x^{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ сіметрычныя адносна прамой $y = x$.

2.11. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$; б) $f(x) = |x|^{-\sqrt{7}} - 2$.

§ 3. Азначэнне лагарыфма ліку. Асноўная лагарыфмічная тоеснасць

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$
$$b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$a^{\log_a b} = b,$$
$$b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Рашэнне.

$$\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4} = \log_3 \log_4 4^{\frac{1}{9}} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2.$$

Адказ: -2.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу $\log_5^2 \sqrt[4]{5}$.

Рашэнне.

$$\log_5^2 \sqrt[4]{5} = \left(\log_5 \sqrt[4]{5}\right)^2 = \left(\log_5 5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Адказ: $\frac{1}{16}$.

Прыклад 3. Знайдзіце значэнне выразу

$$3^{0,5\log_3 7} \cdot 3^{\log_3^2 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25}.$$

Рашэнне.

Выкарыстаем уласцівасці ступені і асноўную лагарыфмічную тоеснасць і атрымаем: $3^{0,5\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$;

$3^{\log_3^2 8} = \left(3^{\log_3 8}\right)^{\log_3 8} = 8^{\log_3 8}$; $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_3 25} = \left(3^{\log_3 25}\right)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5.$

Знойдзем значэнне зыходнага выразу:

$\sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + 5 = 5.$

Адказ: 5.

Прыклад 4. Вылічыце: $3^{-2\log_3 \sin 510°}$.

Рашэнне.

$\sin 510° = \sin\left(360° + 150°\right) = \sin 150° = \sin\left(180° - 30°\right) = \sin 30° = \frac{1}{2},$

тады $3^{-2\log_3 \sin 510°} = 3^{-2\log_3 \frac{1}{2}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

Адказ: 4.

3.1. Выберыце правільныя роўнасці:

а) $\log_5 25 = \frac{1}{2}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$; в) $\log_{0,2} 5 = -1$;

г) $\log_6 \frac{1}{216} = \frac{1}{3}$; д) $\log_2 0{,}125 = -3$; е) $\lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$;

ж) $\log_7 \sqrt[3]{7} = 3$; з) $\log_{0,75} \frac{3}{4} = 0$.

3.2. Знайдзіце $\log_a 16$, калі:

а) $a = 2$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = \sqrt{2}$;

г) $a = 256$; д) $a = 256$; е) $a = 16$.

3.3. Запішыце ў выглядзе дзесятковага лагарыфма лік:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) -1; е) -2;

ж) -3; з) $\frac{1}{2}$; і) $\frac{1}{3}$; к) $-0{,}5$; л) $\frac{2}{3}$.

3.4. Вылічыце:

а) $\log_{\sqrt{6}} 36$; б) $\log_3\left(81\sqrt{3}\right)$; в) $\log_2\left(16\sqrt[4]{2}\right)$;

г) $\log_3 \log_7 \sqrt[9]{7}$; д) $\log^2_{27\sqrt{3}} 9$; е) $\log^3_{8\sqrt{2}} 2$.

3.5. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 8 : \lg 0{,}1$; б) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right) : \log_{\frac{1}{6}} 36 \cdot \log_7 \sqrt{7}$.

3.6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_4 64 - \log_5 0{,}2 + \log_{13} \sqrt[4]{13} + \log_{36}^2 \sqrt{6}$;

б) $\lg \sqrt[5]{100} - \log_{14} \log_4 \log_{\sqrt{5}} 25$.

3.7. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $4^{1 - 2\log_3 9 + \log_5 \sqrt{5}}$; б) $16^{2 - \log_4 64 + 3\log_3 \sqrt{3}}$.

3.8. Запішыце лік π у выглядзе ступені з асновай:

а) 2; б) 5; в) 0,8; г) $\sqrt{7}$.

3.9. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(5^{\log_5 \sqrt[4]{7}}\right)^4$; б) $\left(7^{\log_7 \sqrt[5]{3}}\right)^5$; в) $\left(7^{\log_2 7}\right)^{\log_7 2}$;

г) $\left(3^{\lg 3}\right)^{\log_3 10}$; д) $\dfrac{4^{\log_2 7}}{3^{\log_9 16}}$; е) $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 36}}{100^{\lg 5}}$;

ж) $\sqrt{49^{\log_7 6} - 10^{\lg 32}}$; з) $\sqrt[4]{3^{\log_9 625} - 4^{\log_2 3}}$.

3.10. Вылічыце:

а) $7^{\log_7 2} : \log_{\frac{1}{3}} 9$; б) $0{,}25^{\log_4 3} \cdot \lg 0{,}01$;

в) $\log_7 \sqrt[6]{7} \cdot \left(10^{\lg 11} - \log_{\sqrt{2}} 2\right)$; г) $\left(\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_{\sqrt[3]{3}} 9\right) \cdot \left(\log_6 216 + 3^{\log_3 7}\right)$;

д) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_2 7}$; е) $36^{\log_6 5 - \log_{\sqrt{6}} 3}$;

ж) $25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21}$; з) $\left(2^{\log_{\sqrt{2}}\left(2\log_2 \sqrt{2}\right)}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$.

3.11. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\lg\left(49^{\log_7 0{,}6} + 4^{\log_2 0{,}8}\right)$; б) $\log_{15}\left(100^{\lg 7} + 2^{\log_2 11 + 4}\right)$;

в) $625^{\log_5 \sqrt{3}} + 16\log_3 \sqrt[4]{3\sqrt{3}}$; г) $27^{\log_3 \sqrt[3]{5}} - 10\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[5]{2}}$;

д) $0{,}6 \cdot \left(\log_2 16 + 25^{\log_5 4}\right)^{\log_{20} 25}$; е) $\dfrac{1}{3} \cdot \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} + 100^{\lg 6}\right)^{\log_{37} 9}$.

3.12. Вылічыце:

а) $81^{1 - \log_9 2} + 10^{\lg 13}$; б) $7^{\log_7 11} + 25^{1 - \log_5 2}$.

3.13. Дакажыце, што значэнне выразу з'яўляецца рацыянальным лікам:

а) $\log_{0{,}4}\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{50}\right)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{54}\right)$.

3.14. Вылічыце:

а) $\log_2 \sin \frac{3\pi}{4}$; б) $\log_{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4}$; в) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; д) $\log_{0,75} \cos \frac{11\pi}{6}$; е) $\log_5 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$.

3.15. Вылічыце: $9^{2 + \log_9 \cos 660^\circ}$.

3.16. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_{7-4\sqrt{3}}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$; б) $\log_{9+4\sqrt{5}}\left(9 - 4\sqrt{5}\right)$;

в) $\log_{\sqrt{2}+1}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$; г) $\log_{4-2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - 1\right)$;

д) $\log_{2+\sqrt{3}}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)$; е) $\log_{\sqrt{3}-1}\left(6\sqrt{3} - 10\right)$.

3.17. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 2^{\log_2(x-1)}$; б) $y = 3^{\log_3 x^2}$;

в) $y = \log_{x-2}(x-2)^3$; г) $y = 36^{\log_6 x}$;

д) $y = 7^{\log_{49} x}$; е) $y = 0{,}1^{\lg x}$.

3.18. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 4^{\log_4(\sin x)}$; б) $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(\operatorname{tg} x)}$.

3.19. Дакажыце, што значэнне выразу з'яўляецца цэлым лікам:

а) $9^{\log_3\left(5-\sqrt{6}\right)} + 25^{\log_5\left(5+\sqrt{6}\right)}$; б) $7^{\log_{49}\left(6-2\sqrt{5}\right)} + 6^{\log_{36}\left(6+2\sqrt{5}\right)}$.

3.20. Знайдзіце значэнне выразу
$\log_{1,(3)}\left(\sin 251^\circ \cdot \cos 191^\circ + \cos 101^\circ \cdot \cos 71^\circ\right)$.

§ 4. Паказальная функцыя. Вытворная паказальнай функцыі

Прыклад 1. Размясціце ў парадку нарастання значэнні паказальнай функцыі $y_1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}}$; $y_2 = \left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$; $y_3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{1,3}$; $y_4 = \left(\frac{1}{9}\right)^{0,8}$.

Рашэнне.

Функцыя $y = \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$ з’яўляецца спадальнай, бо $a = \frac{1}{9} \in (0; 1)$.

Паколькі $1,5 > \sqrt{2} > 1,3 > 0,8$, то $\left(\frac{1}{9}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{9}\right)^{1,3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{0,8}$.

Адказ: y_2; y_1; y_3; y_4.

Прыклад 2. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = 4^{|x-3|+2}$.

Рашэнне.

Выраз $|x-3| \geqslant 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, тады $|x-3| + 2 \geqslant 2$ пры $x \in \boldsymbol{R}$. Паколькі функцыя $y = 4^t$ нарастае на ўсёй лікавай прамой, то $4^{|x-3|+2} \geqslant 4^2$; $4^{|x-3|+2} \geqslant 16$. Такім чынам, найменшым значэннем функцыі $y = 4^{|x-3|+2}$ з’яўляецца лік 16.

Адказ: 16.

Прыклад 3. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = \left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$.

Рашэнне.

$y = \left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$; $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-x^2+4x-4+6}$; $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$.

Паколькі $-(x-2)^2 + 6 \leqslant 6$ пры $x \in \boldsymbol{R}$ і $\sqrt{3} > 1$,

то $\left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6} \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^{6} = 27$.

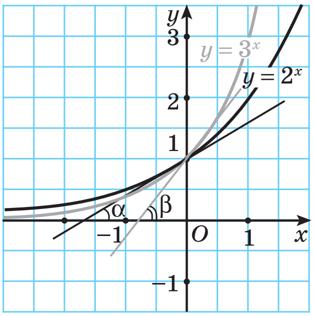
Найбольшым значэннем функцыі $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$ з’яўляецца лік 27.

Адказ: 27.

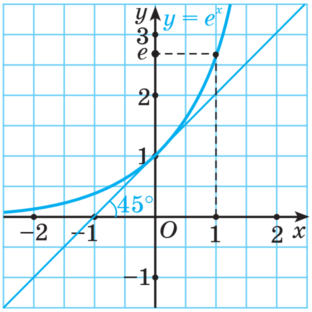
Вытворная паказальнай функцыі

Разгледзім датычныя да графікаў паказальнай функцыі з асновай $a > 1$ у пункце (0; 1) (рыс. 1).

Заўважым, што для $a = 2$ датычная ўтварае з воссю абсцыс вугал α, меншы за 45°, для $a = 3$ — вугал β, большы за 45°. Існуе такая паказальная функцыя з асновай, большай за 2, але меншай за 3, датычная да графіка якой у пункце (0; 1) утварае з воссю абсцыс вугал 45° (рыс. 2). Аснова гэтай



Рыс. 1



Рыс. 2

функцыі з'яўляецца ірацыянальным лікам, роўным бясконцаму дзесятковаму неперыядычнаму дробу 2,7182818284590... . Абазначаецца гэты лік літарай e.

$$e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Выкарыстаем геаметрычны сэнс вытворнай (вытворная функцыі ў пункце роўна тангенсу вугла нахілу датычнай да графіка функцыі ў гэтым пункце) і атрымаем, што вытворная паказальнай функцыі $y = e^x$ у пункце $x = 0$ роўна 1, паколькі $\operatorname{tg} 45° = 1$.

Выведзем формулу вытворнай паказальнай функцыі $y = e^x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - e^0\right)}{\Delta x}.$$

Заўважым, што выраз $\frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$ ёсць адносіна прырашчэння функцыі $y = e^x$ у пункце $x = 0$ да прырашчэння аргумента, а пры $\Delta x \to 0$ гэта адносіна роўна вытворнай функцыі $y = e^x$ у пункце $x = 0$ і роўна 1. Тады $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - e^0\right)}{\Delta x}$ пры $\Delta x \to 0$ роўна e^x. Такім чынам, $\left(e^x\right)' = e^x$.

Лагарыфм ліку з асновай e называецца **натуральным лагарыфмам** і абазначаецца $\ln b$, напрыклад, $\ln 5 = \log_e 5$.

Выведзем формулу вытворнай паказальнай функцыі $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці: $a^x = e^{(\ln a)x}$. Па правіле знаходжання вытворнай складанай функцыі атрымаем: $\left(a^x\right)' = \left(e^{(\ln a)x}\right)' = (\ln a)e^{(\ln a)x} = a^x \ln a$.

Такім чынам, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. Напрыклад, $\left(5^x\right)' = 5^x \ln 5$.

Прыклад 4. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = e^x + x^2$; б) $y = e^{-3x}$; в) $y = e^x \cdot \sqrt{x}$; г) $y = \frac{e^{5x-1}}{\sin x}$.

Рашэнне.

а) $y' = \left(e^x + x^2\right)' = \left(e^x\right)' + \left(x^2\right)' = e^x + 2x$;

б) $y' = \left(e^{-3x}\right)' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x}$;

в) $y' = \left(e^x \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(e^x\right)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = e^x \cdot \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$;

г) $y' = \left(\frac{e^{5x-1}}{\sin x}\right)' = \frac{\left(e^{5x-1}\right)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot e^{5x-1}}{(\sin x)^2} = \frac{5e^{5x-1} \cdot \sin x - \cos x \cdot e^{5x-1}}{\sin^2 x} =$

$= \frac{e^{5x-1} \cdot (5\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$.

Прыклад 5. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = 6^x + \cos x$; б) $f(x) = 3^{x^2-4}$;

в) $f(x) = x^3 \cdot 2^x$; г) $f(x) = \frac{7x-1}{7^x}$.

Рашэнне.

а) $f'(x) = \left(6^x + \cos x\right)' = 6^x \ln 6 - \sin x$;

б) $f'(x) = \left(3^{x^2-4}\right)' = 3^{x^2-4} \cdot \ln 3 \cdot \left(x^2 - 4\right)' = 2x \cdot 3^{x^2-4} \cdot \ln 3$;

в) $f'(x) = \left(x^3 \cdot 2^x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot 2^x + \left(2^x\right)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 2^x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^3 =$

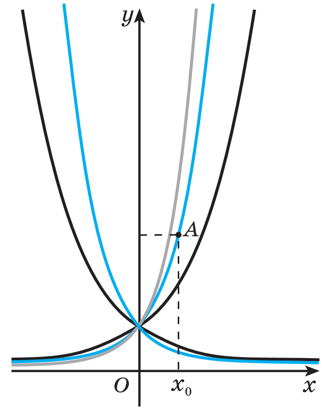
$= 2^x \cdot x^2 (3 + x\ln 2)$;

г) $f'(x) = \left(\frac{7x-1}{7^x}\right)' = \frac{(7x-1)' \cdot 7^x - \left(7^x\right)'(7x-1)}{\left(7^x\right)^2} = \frac{7 \cdot 7^x - 7^x \cdot \ln 7 \cdot (7x-1)}{7^{2x}} =$

$= \frac{7^x(7 - \ln 7 \cdot (7x-1))}{7^{2x}} = \frac{7 - \ln 7 \cdot (7x-1)}{7^x}$.

4.1. Параўнайце значэнні $y_1 = 3^{\sqrt{3}}$; $y_2 = 3^{1,9}$; $y_3 = 3^{1,7}$; $y_4 = 3^{0,98}$ паказальнай функцыі $y = 3^x$ і размясціце іх у парадку спадання.

4.2. На рысунку 3 паказаны відарысы графікаў функцый $y = 2^x$; $y = 0,5^x$; $y = 4^x$; $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Рыс. 3

Пункт A мае каардынаты:

а) $\left(x_0;\ 2^{x_0}\right)$; б) $\left(x_0;\ 0{,}5^{x_0}\right)$; в) $\left(x_0;\ 4^{x_0}\right)$;

г) $\left(x_0;\ 3^{x_0}\right)$; д) $\left(x_0;\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x_0}\right)$.

Выберыце правільны адказ.

4.3. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 25^x$. Знайдзіце:

а) $f(-2)$; б) $f(0)$;

в) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; г) $f(\log_5 2)$.

4.4. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім функцыя $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ прымае значэнне, роўнае:

а) $\frac{1}{4}$; б) 64; в) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; г) $32\sqrt{2}$.

4.5. Вызначце, якая з дадзеных функцый з'яўляецца нарастальнай на ўсім абсягу вызначэння, а якая — спадальнай:

а) $f(x) = 0{,}25^x - 35$; б) $f(x) = 4 \cdot (0{,}25)^{7-x}$;

в) $f(x) = 3^{1{,}5x-4} \cdot 4^{4x+1}$; г) $f(x) = 10^{2x-5} + x$;

д) $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; е) $f(x) = 6^x + 4^x$.

4.6. Запішыце функцыю $y = f(x)$ у выглядзе $y = a^x$:

а) $f(x) = 5^{2x} \cdot 25^{-\frac{x}{2}}$ і знайдзіце $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

б) $f(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^{2x} \cdot 4^{-0{,}5x}$ і знайдзіце $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $f(x) = \dfrac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{2^{2x+4} - 2^{2x+2}}$ і знайдзіце $f(-1)$.

4.7. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = -3^x$; б) $y = 5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{x-4}$; в) $y = 3 - 2^x$; г) $y = 5^{|x|}$.

4.8. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3^{|x|}$; б) $y = \left|3^x - 1\right|$; в) $y = 3^{|x|-2}$;

г) $y = 3^{|x-1|}$; д) $y = \left|3^{|x+2|} - 3\right|$; е) $y = \left|\dfrac{1}{3^{|x|}} - 1\right|$.

4.9. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = 5^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{\cos x}$; в) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{|\sin x|} - 5$; г) $y = 2^{|\cos x|} + 3$.

4.10. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = 2^{\arccos x}$.

4.11. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 2^{2\sin x - 3}$; б) $y = 5^{\sin x \cos x}$;

в) $y = 3^{(\sin x - \cos x)^2}$; г) $y = 4^{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

4.12. Знайдзіце здабытак найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x) = 4^{\sin^2 x - \cos^2 x + 2}$.

4.13. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$;

б) $y = 2^{x + \frac{1}{x}}$;

в) $y = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$;

г) $y = \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right)^{\sin x}$.

4.14. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 2^{x - |x|}$; б) $y = 2^{|x - 1|} \cdot 0{,}5^{-x}$.

4.15. Ці праўда, што графік функцыі $f(x) = 10^x + 0{,}1^x$ сіметрычны адносна восі ардынат?

4.16. Даследуйце на цотнасць (няцотнасць) функцыю:

а) $y = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^x + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x$; б) $y = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$.

4.17. Вызначце колькасць каранёў ураўнення:

а) $2^x = 1 - 3x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$; в) $3^x = 4 - \sqrt{x}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \operatorname{arctg} x$.

4.18. Запішыце ў выглядзе натуральнага лагарыфма лік:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1; е) –2;

ж) –3; з) $\frac{1}{2}$; і) $\frac{1}{3}$; к) –0,5; л) $\frac{2}{3}$.

4.19. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\ln e^3$; б) $e^{\ln 7}$; в) $\ln \frac{1}{e}$; г) $e^{2\ln 5}$.

4.20. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = e^x - 3x$; б) $y = e^{9x + 2}$; в) $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$; г) $y = \frac{e^{x^2 - 1}}{x^5}$.

4.21. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = 3^x + 5x^4$; б) $f(x) = 5^{x^3 - 7x^2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 7^x$; г) $f(x) = \dfrac{\sin x}{6^x}$.

4.22. Вылічыце $f'(0)$:

а) $f(x) = e^x \cdot \left(3x^2 + 2x\right)$; б) $f(x) = e^{-x} + \sin x$;

в) $f(x) = 3^{x^2 - 3x - 1}$; г) $f(x) = 3^x - x^4 + 8$.

4.23. Знайдзіце $f'(1)$, калі $f(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x} - e^{-1}$.

4.24. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0:

а) $f(x) = e^{4x - 1}$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$.

4.25. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = e^{-x}$ у пункце з абсцысай $x_0 = 0$.

4.26. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = e^x - x$; б) $f(x) = x^3 e^{-x}$;

в) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; г) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

4.27. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{2-x}}{\ln 3}$ на адрэзку $[-1; 2]$.

§ 5. Паказальныя ўраўненні

Выканаем некалькі трэніровачных практыкаванняў на прымяненне тоесных пераўтварэнняў пры рашэнні ўраўненняў і няроўнасцей.

1. Знайдзіце значэнне выразу 6^{x+1}, калі $6^x = 2{,}1$.

Рашэнне.

$6^{x+1} = 6 \cdot 6^x = 6 \cdot 2{,}1 = 12{,}6.$

Адказ: 12,6.

2. Спрасціце выраз $2^{14x} \cdot 2^{-2x} + 2^{36x} : 4^{12x}$.

Рашэнне.

$$2^{14x} \cdot 2^{-2x} + 2^{36x} : 4^{12x} = 2^{14x + (-2x)} + 2^{36x} : \left(2^2\right)^{12x} = 2^{12x} + 2^{36x} : 2^{24x} =$$

$$= 2^{12x} + 2^{36x - 24x} = 2^{12x} + 2^{12x} = 2 \cdot 2^{12x} = 2^{12x + 1}.$$

Адказ: 2^{12x+1}.

3. Скараціце дроб $\dfrac{3^{3x}-6^x}{2^x-9^x}$.

Рашэнне.

$$\frac{3^{3x}-6^x}{2^x-9^x}=\frac{3^{3x}-(2\cdot 3)^x}{2^x-(3^2)^x}=\frac{3^{3x}-3^x\cdot 2^x}{2^x-3^{2x}}=\frac{3^x\left(3^{2x}-2^x\right)}{2^x-3^{2x}}=-\frac{3^x\left(3^{2x}-2^x\right)}{3^{2x}-2^x}=-3^x.$$

Адказ: -3^x.

4. Знайдзіце значэнне выразу $0{,}75^x$, калі $\dfrac{3^x+4^{x+1}}{3^{x-1}-2\cdot 4^{x+1}}=-\dfrac{4}{7}$.

Рашэнне.

Пераўтворым роўнасць

$$\frac{3^x+4^{x+1}}{3^{x-1}-2\cdot 4^{x+1}}=-\frac{4}{7};\qquad \frac{3^x+4^x\cdot 4}{\frac{3^x}{3}-2\cdot 4^x\cdot 4}=-\frac{4}{7};\qquad \frac{4^x\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x+4\right)}{4^x\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-8\right)}=-\frac{4}{7};$$

$$\frac{0{,}75^x+4}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}75^x-8}=-\frac{4}{7};\qquad 7\cdot\left(0{,}75^x+4\right)=-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0{,}75^x-8\right);$$

$$7\cdot 0{,}75^x+28=-\frac{4}{3}\cdot 0{,}75^x+32;\qquad \frac{25}{3}\cdot 0{,}75^x=4;\qquad 0{,}75^x=\frac{12}{25}.$$

Адказ: $\dfrac{12}{25}$.

5. Спрасціце выраз $\dfrac{4\cdot\left(a\cdot b^2\right)^x-3\cdot\left(b\sqrt{a}\right)^{2x}+a^x\cdot\left(b^4\right)^{\frac{x}{2}}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}$.

Рашэнне.

$$\frac{4\cdot\left(a\cdot b^2\right)^x-3\cdot\left(b\sqrt{a}\right)^{2x}+a^x\cdot\left(b^4\right)^{\frac{x}{2}}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}=\frac{4\cdot a^x\cdot b^{2x}-3\cdot b^{2x}\cdot a^x+a^x\cdot b^{2x}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}=\frac{2\cdot a^x\cdot b^{2x}}{a\cdot a^x\cdot b^{2x}}=\frac{2}{a}.$$

Адказ: $\dfrac{2}{a}$.

6. Спрасціце выраз $2^x\cdot 3^{2-x}-\dfrac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}}+\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2x-2}}$.

Рашэнне.

$$2^x\cdot 3^{2-x}-\frac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2x-2}}=2^x\cdot 3^{2-x}-\frac{\left(2^3\right)^{\frac{x+1}{3}}}{\left(3^2\right)^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+4}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-2}}=$$

$$=\frac{9\cdot 2^x}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^{x-2}}+\frac{2^{x+2}}{3^{x-1}}=\frac{9\cdot 2^x}{3^x}-\frac{2\cdot 9\cdot 2^x}{3^x}+\frac{4\cdot 3\cdot 2^x}{3^x}=\frac{2^x}{3^x}\cdot(9-18+12)=$$

$$=\frac{2^x}{3^x}\cdot 3=2^x\cdot 3^{1-x}.$$

Адказ: $2^x\cdot 3^{1-x}$.

7. Знайдзіце значэнне выразу $2^x + 2^{-x}$, калі $16^x + 16^{-x} = 527$.

Рашэнне.

Узвядзём абедзве часткі роўнасці $A = 2^x + 2^{-x}$ у квадрат і атрымаем $A^2 = (2^x + 2^{-x})^2$; $A^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x}$; $A^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$, або $A^2 - 2 = 4^x + 4^{-x}$.

Тады $(A^2 - 2)^2 = (4^x + 4^{-x})^2$; $(A^2 - 2)^2 = 4^{2x} + 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x} + 4^{-2x}$; $(A^2 - 2)^2 = 16^x + 2 + 16^{-x}$. Адкуль $(A^2 - 2)^2 - 2 = 16^x + 16^{-x}$.

Па ўмове $16^x + 16^{-x} = 527$. Тады $(A^2 - 2)^2 - 2 = 527$; $(A^2 - 2)^2 = 529$.

Паколькі $A^2 - 2 = 4^x + 4^{-x}$, то $A^2 - 2 > 0$, значыць, $A^2 - 2 = 23$; $A^2 = 25$.

Паколькі $A = 2^x + 2^{-x}$, то $A > 0$, значыць, $A = 5$.

Адказ: 5.

8. Знайдзіце значэнне выразу 7^{a-b}, калі $\dfrac{7^a + 3 \cdot 7^b}{7^a + 7^b} = 2$.

Рашэнне.

Падзелім лічнік і назоўнік дробу $\dfrac{7^a + 3 \cdot 7^b}{7^a + 7^b}$ на 7^b і атрымаем $\dfrac{\frac{7^a}{7^b} + 3}{\frac{7^a}{7^b} + 1} = 2$;

$$\frac{7^{a-b} + 3}{7^{a-b} + 1} = 2; \quad 7^{a-b} + 3 = 2\left(7^{a-b} + 1\right); \quad 7^{a-b} + 3 = 2 \cdot 7^{a-b} + 2; \quad 7^{a-b} = 1.$$

Адказ: 1.

9. Запішыце выраз $\dfrac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+2} - 4^{x+1}}$ у выглядзе a^x. У адказ запішыце $16a$.

Рашэнне.

$$\frac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+2} - 4^{x+1}} = \frac{3^x\left(3 + 3^2\right)}{4^x\left(4^2 - 4\right)} = \frac{3^x \cdot 12}{4^x \cdot 12} = \frac{3^x}{4^x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x; \quad a = \frac{3}{4}; \; 16a = 12.$$

Адказ: 12.

10. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1}{\sqrt{49^x - 7^x \cdot 2^{y+1} + 4^y} - 2^y}$ пры $x = -2$; $y = 103$.

Рашэнне.

$$\frac{1}{\sqrt{49^x - 7^x \cdot 2^{y+1} + 4^y} - 2^y} = \frac{1}{\sqrt{7^{2x} - 2 \cdot 7^x \cdot 2^y + 2^{2y}} - 2^y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(7^x - 2^y\right)^2} - 2^y} = \left.\frac{1}{\left|7^x - 2^y\right| - 2^y}\right|_{x=-2;\; y=103} =$$

$$= \frac{1}{\left|7^{-2} - 2^{103}\right| - 2^{103}} = \frac{1}{2^{103} - 7^{-2} - 2^{103}} = \frac{1}{-7^{-2}} = -49.$$

Адказ: –49.

11. Знайдзіце значэнне выразу $3\cdot 6^x + 4\cdot 6^y$, калі $6^{\frac{x+y}{2}} = 10;\ 6^{\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{3}$.

Рашэнне.

Разгледзім здабытак і дзель выразаў $6^{\frac{x+y}{2}} = 10$ і $6^{\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{3}$:

$$6^{\frac{x+y}{2}}\cdot 6^{\frac{x-y}{2}} = 10\cdot\frac{1}{3};\ 6^{\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}} = \frac{10}{3};\ 6^x = \frac{10}{3};$$

$$6^{\frac{x+y}{2}} : 6^{\frac{x-y}{2}} = 10 : \frac{1}{3};\ 6^{\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}} = 30;\ 6^y = 30.$$

Тады значэнне шуканага выразу $3\cdot 6^x + 4\cdot 6^y = 3\cdot\frac{10}{3} + 4\cdot 30 = 130.$

Адказ: 130.

Разгледзім некалькі прыкладаў рашэння паказальных ураўненняў.

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне $\left(\sqrt{7}\right)^{x+3,5} : 3^{x+3,5} = \frac{7}{9}$.

Рашэнне.

$$\left(\sqrt{7}\right)^{x+3,5} : 3^{x+3,5} = \frac{7}{9};\ \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{x+3,5} = \frac{7}{9};\ \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{x+3,5} = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2;\ x+3,5 = 2;\ x = -1,5.$$

Адказ: $-1,5$.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне $\left(5\sqrt[4]{5}\right)^{\frac{x^2-x}{5}-2} - \sqrt[6]{125} = 0$.

Рашэнне.

$$\left(5\cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{x^2-x}{5}-2} = \sqrt[6]{5^3};\quad 5^{\frac{5}{4}\left(\frac{x^2-x}{5}-2\right)} = 5^{\frac{1}{2}};\quad \frac{5}{4}\left(\frac{x^2-x}{5}-2\right) = \frac{1}{2};\quad \frac{1}{4}\left(x^2-x\right) - \frac{5}{2} = \frac{1}{2};$$

$$x^2 - x - 12 = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = -3,\\ x = 4.\end{array}\right.$$

Адказ: -3; 4.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Рашэнне.

$$2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x;\quad 2^{x+3} + 2^x = 3^{x+1} + 3^x;\quad 2^x\left(2^3+1\right) = 3^x\left(3^1+1\right);$$

$$2^x\cdot 9 = 3^x\cdot 4;\quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9};\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2;\quad x = 2.$$

Адказ: 2.

Прыклад 4. Знайдзіце корань ураўнення $3\cdot 16^x + 36^x = 2\cdot 81^x$.

Рашэнне.

$$3\cdot 16^x + 36^x = 2\cdot 81^x;\quad 3\cdot 4^{2x} + (4\cdot 9)^x - 2\cdot 9^{2x} = 0.$$

Падзелім абедзве часткі ўраўнення на 9^{2x}, $9^{2x} > 0$, і атрымаем $3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 2 = 0.$

Няхай $t = \left(\frac{4}{9}\right)^{x}$, $t > 0$, тады $3t^2 + t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Паколькі $t > 0$, то $t = \frac{2}{3}$, г. зн. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Адказ: 0,5.

Прыклад 5. Знайдзіце суму каранёў ураўнення

$\left(2\cdot 4^{2x} - 17\cdot 4^{x} + 8\right)\cdot\sqrt{1-2x} = 0.$

Рашэнне.

Дадзенае ўраўненне раўназначна сукупнасці

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cdot 4^{2x} - 17\cdot 4^{x} + 8 = 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0, \end{cases} \\ 1 - 2x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cdot 4^{2x} - 17\cdot 4^{x} + 8 = 0, \\ x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Рэшым ураўненне $2\cdot 4^{2x} - 17\cdot 4^{x} + 8 = 0$. Няхай $t = 4^{x}$, $t > 0$, тады $2t^2 - 17t + 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Атрымаем: $\left[\begin{array}{l} 4^{x} = 8, \\ 4^{x} = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^{3}, \\ 2^{2x} = 2^{-1}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = 3, \\ 2x = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1{,}5, \\ x = -0{,}5. \end{array}\right.$ Умову $x \leqslant \frac{1}{2}$ задавальняе $x = -0{,}5$.

Такім чынам, каранямі ўраўнення з'яўляюцца лікі 0,5 і –0,5. Іх сума роўна нулю.

Адказ: 0.

Прыклад 6. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення

$\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = \sqrt{33 - 2\sqrt{32}} + 1.$

Рашэнне.

Спросцім выраз $\sqrt{33 - 2\sqrt{32}} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{32}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{32}\right| = \sqrt{32} - 1.$

Тады ўраўненне прымае выгляд $\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = \sqrt{32}$; $2^{x^2-2x-10} = 32$; $2^{x^2-2x-10} = 2^{5}$; $x^2 - 2x - 10 = 5$; $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Здабытак каранёў дадзенага ўраўнення роўны –15.

Адказ: –15.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $(\lg 3)^{3x+1} = 16^{\log_2 \lg 3}$.

Рашэнне.

$(\lg 3)^{3x+1} = 16^{\log_2 \lg 3}$; $(\lg 3)^{3x+1} = 2^{4\log_2 \lg 3}$; $(\lg 3)^{3x+1} = \left(2^{\log_2 \lg 3}\right)^4$;

$(\lg 3)^{3x+1} = (\lg 3)^4$; $3x + 1 = 4$; $x = 1$.

Адказ: 1.

Прыклад 8. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 6^x \cdot 5^y = 180. \end{cases}$

Рашэнне.

Падзелім першае ўраўненне сістэмы на другое і атрымаем:

$\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^y = \frac{5}{6}, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-y} = \frac{5}{6}, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 1, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^{y+1} \cdot 5^y = 180; \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^y \cdot 6 \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^y \cdot 5^y = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 30^y = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Адказ: (2; 1).

Прыклад 9. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 4^{\sin 2x} + 2^{\sin 2x}$ і $y = 2$.

Рашэнне.

$4^{\sin 2x} + 2^{\sin 2x} = 2$; $2^{2\sin 2x} + 2^{\sin 2x} - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} 2^{\sin 2x} = -2, \\ 2^{\sin 2x} = 1. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў. Рэшым другое ўраўненне сукупнасці: $2^{\sin 2x} = 1$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 10. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y. \end{cases}$

Рашэнне.

$\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y; \end{cases}$ $\begin{cases} 7 + 3^{2x} = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 6 \cdot 2^y = 3^x - 2^{2y}. \end{cases}$

Няхай $a = 3^x$, $b = 2^y$, тады сістэма прымае выгляд $\begin{cases} 7 + a^2 = b + 4a, \\ 11 - 6b = a - b^2; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 4a - b + 7 = 0, \\ b^2 - a - 6b + 11 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - 4a + 4 - b + 3 = 0, \\ b^2 - 6b + 9 - a + 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (a-2)^2 - (b-3) = 0, \\ (b-3)^2 - (a-2) = 0. \end{cases}$

Няхай $m = a - 2$, $n = b - 3$, тады $\begin{cases} m^2 - n = 0, \\ n^2 - m = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} n = m^2, \\ m^4 - m = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} n = m^2, \\ m(m^3 - 1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = m^2, \\ \left[\begin{array}{l} m = 0, \\ m = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 1, \\ n = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} m = 0, \\ n = 0. \end{cases} \end{array}\right. \text{ Адкуль } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 2 = 1, \\ b - 3 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a - 2 = 0, \\ b - 3 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3, \\ b = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Такім чынам $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x = 3, \\ 2^y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x = 2, \\ 2^y = 3; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \log_3 2, \\ y = \log_2 3. \end{cases} \end{array}\right.$

Адказ: $(1;\ 2)$; $(\log_3 2;\ \log_2 3)$.

Прыклад 11. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 14.$

Рашэнне.

Заўважым, што $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\left(7 + 4\sqrt{3}\right) \cdot \left(7 - 4\sqrt{3}\right)} =$ $= \sqrt{49 - 48} = 1$, тады $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} = \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{-1}$ і ўраўненне прымае выгляд $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} + \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\cos x}} = 14.$

Няхай $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = t$, тады $t + t^{-1} = 14$; $t^2 - 14t + 1 = 0$; $t_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 7 - 4\sqrt{3}, \\ \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 7 + 4\sqrt{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2\cos x}} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-1}, \\ \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2\cos x}} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{1}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\cos x} = -1, \\ \dfrac{1}{2\cos x} = 1; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны $-60°$.

Адказ: $-60°$.

Прыклад 12. Рашыце ўраўненне $3^x + 2x - 5 = 0$.

Рашэнне.

$3^x + 2x - 5 = 0$; $3^x = -2x + 5$.

Функцыя $y = 3^x$ нарастае, а функцыя $y = -2x + 5$ спадае на мностве рэчаісных лікаў, значыць, ураўненне $3^x = -2x + 5$ мае не больш за адзін корань. Пры $x = 1$ дадзенае ўраўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, г. зн. лік 1 з'яўляецца адзіным коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1.

Прыклад 13. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$.

Рашэнне.

Ацэнім левую і правую часткі ўраўнення $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$.

Па ўласцівасці двух узаемна адваротных лікаў $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ пры $a > 0$, тады $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

Паколькі $-1 \leqslant \cos\frac{x}{3} \leqslant 1$, то $-2 \leqslant 2\cos\frac{x}{3} \leqslant 2$. Такім чынам, ураўненне мае карані, толькі калі яго левая і правая часткі адначасова роўны двум, г. зн. $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2, \\ 2\cos\frac{x}{3} = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x = 1, \\ \cos\frac{x}{3} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ \cos\frac{x}{3} = 1; \end{cases}$ $x = 0$.

Адказ: 0.

Прыклад 14. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\pi^{|x^2-9|} = \sin\frac{\pi x}{2}$.

Рашэнне.

Ацэнім левую і правую часткі дадзенага ўраўнення.

Паколькі $|x^2 - 9| \geqslant 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$ і $\pi > 1$, то $\pi^{|x^2-9|} \geqslant 1$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

З другога боку, $-1 \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} \leqslant 1$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

Такім чынам, роўнасць магчыма толькі ў тым выпадку, калі левая і правая часткі ўраўнення роўны адзінцы, г. зн.

$\begin{cases} \pi^{|x^2-9|} = 1, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x^2 - 9| = 0, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 3, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1. \end{cases}$

Пры $x = 3$ атрымаем, што $\sin\frac{3\pi}{2} = -1 \neq 1$, а пры $x = -3$ маем $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

Такім чынам, ураўненне мае адзіны корань, роўны -3.

Адказ: -3.

Прыклад 15. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення
$4 \cdot 4^x + (4x - 13) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$

Рашэнне.

Разгледзім дадзенае ўраўненне як квадратнае адносна $2^x = t$, г. зн. $4 \cdot t^2 + (4x - 13) \cdot t + 3 - x = 0$, тады $D = (4x - 13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (3 - x) =$
$= 16x^2 - 104x + 169 - 48 + 16x = 16x^2 - 88x + 121 = (4x - 11)^2.$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(4x-13)+(4x-11)}{8}, \\ t = \dfrac{-(4x-13)-(4x-11)}{8}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4}, \\ t = -x + 3. \end{array}\right. \quad \text{Тады} \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{1}{4}, \\ 2^x = -x + 3. \end{array}\right.$$

Коранем першага ўраўнення сукупнасці з'яўляецца лік -2.

Рэшым другое ўраўненне сукупнасці.

Паколькі функцыя $y = 2^x$ нарастае, а функцыя $y = -x + 3$ спадае на множстве рэчаісных лікаў, то ўраўненне $2^x = -x + 3$ мае не больш за адзін корань. Коранем дадзенага ўраўнення з'яўляецца лік 1.

Здабытак каранёў дадзенага ўраўнення роўны -2.

Адказ: -2.

Прыклад 16. Знайдзіце колькасць цэлых значэнняў a, пры якіх ураўненне $9^x - 5 = 4a^2 - a^4$ мае карані.

Рашэнне.

$9^x - 5 = 4a^2 - a^4; \quad 9^x = 4a^2 - a^4 + 5.$

Паколькі $9^x > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то ўраўненне мае карані, калі
$4a^2 - a^4 + 5 > 0;\ a^4 - 4a^2 - 5 < 0;\ (a^2 - 5)(a^2 + 1) < 0;\ a^2 - 5 < 0;\ a \in (-\sqrt{5};\ \sqrt{5}).$

Цэлымі значэннямі a, пры якіх ураўненне мае карані, з'яўляюцца лікі -2; -1; 0; 1; 2. Іх колькасць роўна 5.

Адказ: 5.

Прыклад 17. Рашыце ўраўненне
$\cos 4^{x+0,5} - \cos^2 4^x + \cos(2,5\pi + 4^{x+0,5}) = 0.$

Рашэнне.

$\cos 4^{x+0,5} - \cos^2 4^x + \cos(2,5\pi + 4^{x+0,5}) = 0;$

$\cos(2 \cdot 4^x) - \cos^2 4^x - \sin(2 \cdot 4^x) = 0.$

Няхай $t = 4^x$, тады ўраўненне мае выгляд $\cos 2t - \cos^2 t - \sin 2t = 0;$

$$\sin^2 t + 2\sin t \cos t = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin t = 0, \\ 2\cos t + \sin t = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ t = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4^x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 4^x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \log_4(\pi n),\ n \in \boldsymbol{N},\\ x = \log_4(-\operatorname{arctg} 2 + \pi k),\ k \in \boldsymbol{N}.\end{array}\right.$$

Адказ: $\log_4(\pi n)$, $n \in \boldsymbol{N}$; $\log_4(-\operatorname{arctg} 2 + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{N}$.

5.1. Рашыце ўраўненне:

а) $25^x = 5^{3-x}$; б) $0{,}5^{x-12} = 16$; в) $5^{4x-7} = 1$;

г) $(0{,}04)^{2-x} = 25^{-1}$; д) $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; е) $\sqrt{5^{x+2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

5.2. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $5^{x^2-2x-1} = 25$; б) $0{,}1^{x^2+x-12} = 1$;

в) $27^{5-x^2} = 3^{x^2-1}$; г) $4^{x^2-8x+12} = \frac{1}{64}$.

5.3. Рашыце ўраўненне:

а) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$; б) $10^{x-\sqrt{x^2+5x+1}} = 1000$;

в) $27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$; г) $\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+6}} = 64$.

5.4. Выкарыстайце ўласцівасці ступені і рашыце ўраўненне:

а) $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; б) $1000 \cdot 2^x = 5^{-x} \cdot \left(10^{x-1}\right)^x$;

в) $\left(2^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3x}{4}} : 4^{-8} = \frac{12^{16}}{3^{0{,}25x^2}}$; г) $9^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = \sqrt{27^x} \cdot \sqrt[3]{81^{x+3}}$.

5.5. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $(0{,}(3))^{x^2} \cdot 3^{2-2x} = \frac{1}{27}$.

5.6. Рашыце ўраўненне $\sqrt[12]{9} - \left(3\sqrt[6]{3}\right)^{\frac{x^2+2x}{7}-1} = 0$.

5.7. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\left(\frac{25^x}{125}\right)^x - \frac{125^x}{625} = 0$.

5.8. Рашыце ўраўненне:

а) $\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^{12x-1} = \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^{3-4x}$;

б) $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{x^2-2} - \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{4x+3} = 0$.

5.9. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = 7^x - 3$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$; в) $y = 6^{\frac{x}{2}} - 3$; г) $y = 10^{2x} - 11$.

5.10. Рашыце ўраўненне:

а) $9^x = 9 + 8 \cdot 3^x$; б) $4^x + 7 \cdot 2^{x-1} = 4{,}5$;

в) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; г) $3^{2x}\left(3^{2x+1} + 2\right) = 1$;

д) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 3^{1-x} - 54 = 0$; е) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

5.11. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} = 7 \cdot 5^x$.

5.12. Рашыце ўраўненне $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

5.13. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{5}{2 \cdot 3^{2x+3} - 3^{2x+1} - 51}$.

5.14. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $3^x + 3^{3-x} = 12$; б) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

в) $2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 7 + 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$; г) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

5.15. Рашыце ўраўненне $15 \cdot \left(2^x + 2^{-x}\right) = 17 \cdot \left(2^x - 2^{-x}\right)$.

5.16. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі $y = 3 \cdot 2^{5-3x} - 5 \cdot 2^{3x-3}$ і прамой $y = 7$.

5.17. Рашыце ўраўненне:

а) $4^{x-2} + 4^{x-1} = 80$; б) $5^x - 3 \cdot 5^{x-2} = 110$;

в) $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = 36$;

д) $4^{x+1} - 2^{2x-2} = 60$; е) $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 30$.

5.18. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $5 \cdot 2^{x^2-x-1} - 5^{x^2-x} = 0$; б) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6 \cdot 3^{2-x}$.

5.19. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = 2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} - 896$;

б) $y = 4^x - 3^{x-0,5} - 3^{x+0,5} + 2^{2x-1}$;

в) $y = 81^{x-1} - 5^{2x-2} + 4 \cdot 9^{2x-3} - 4 \cdot 5^{2x-3}$.

5.20. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{3x+3} + 8 \cdot 3^{\frac{3x+1}{2}} = 1$; б) $6^{4x+6} - 5 \cdot 6^{\frac{4x+5}{2}} = 1$.

5.21. Рашыце аднароднае ўраўненне:

а) $0{,}6^{3-x} = 2^{x-3}$;
б) $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 10^{x} + 5 \cdot 2^{2x} = 0$;
в) $27 \cdot 16^{x} - 6 \cdot 36^{x} = 8 \cdot 81^{x}$;
г) $3^{2x^2-9} + 25 \cdot 15^{x^2-5} = 2 \cdot 5^{2x^2-8}$;
д) $3 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$;
е) $27^{x} + 12^{x} = 2 \cdot 8^{x}$.

5.22. Знайдзіце значэнне выразу $1{,}5^{x_1+x_2}$, дзе $4^{x+1{,}5} + 9^{x} = 6^{x+1}$.

5.23. Рашыце ўраўненне $(\lg 5)^{2x-1} = 9^{\log_3 \lg 5}$.

5.24. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-12+\sqrt{x^2-6}} = 1$.

5.25. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $7^{\sqrt{x+5}} \cdot 7^{\sqrt{2x+8}-7} = \ln e$.

5.26. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{|\sin x-2|} = 27$;
б) $5^{|\cos x-2|} = 125$;
в) $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$;
г) $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$.

5.27. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 9^{\cos x} + 2 \cdot 3^{\cos x}$ і $y = 15$.

5.28. Знайдзіце найменшы дадатны корань ураўнення $5^{\cos^2 x-\sin^2 x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.29. Рашыце ўраўненне $2^{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x} = 8$.

5.30. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - \log_2 16$, якія належаць прамежку $[0;\ 2\pi]$.

5.31. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{3^{x}-5} = 11 - 3^{x}$;
б) $\sqrt{2 \cdot 5^{x}+6} = 5^{x} - 1$;
в) $\sqrt{5^{x}-1} = 7 - 5^{x}$;
г) $\sqrt{2^{x+1}-7} = 9 - 2^{x+1}$;
д) $\sqrt{4^{x}-2^{x}-2} = \sqrt{4 \cdot 2^{x}-6}$;
е) $\sqrt{3^{x}-9^{x}} = \sqrt{3-3^{x+1}}$.

5.32. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\sqrt{4 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{3x} + 3^{4x}} = 6 \cdot 3^{x} + 9$.

5.33. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $7^{x} + 24^{x} = 25^{x}$;
б) $12^{x} + 5^{x} = 13^{x}$;
в) $5^{x} = 27 - x$;
г) $3^{x} + 5x - 1 = 0$;
д) $2^{x+1} = -x - 1{,}5$;
е) $3^{\frac{x}{2}} = -0{,}5x + 4$.

5.34. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x$ і прамой $y = 10$;

б) $y = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x$ і прамой $y = 4$.

5.35. Рашыце ўраўненне $\left(\sqrt{5} + 2\right)^{\sin x} - \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\sin x} = 4$.

5.36. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення
$\left(\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{x - 5} + \left(\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{x - 5} = 4$.

5.37. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $x \cdot 5^{x - 1} + 5 \cdot 5^{\sqrt{7 - x}} = 5^x + x \cdot 5^{\sqrt{7 - x}}$.

5.38. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[7]{2^{x - 5}} = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + 1\right)^{3x + 1}$; б) $\sqrt[10]{6^{7x - 1}} - \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - 1\right)^{2x - 5} = 0$.

5.39. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення:

а) $2^{2x^2 - 2x - 4} - 15 \cdot 2^{x^2} - 2^{2x + 8} = 0$; б) $3^{2x^2 - 4x - 3} - 8 \cdot 3^{x^2} - 3^{4x + 5} = 0$;

в) $9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2 + 2x + 3} + 3^{4x + 7} = 0$; г) $5^{2x^2} - 6 \cdot 5^{(x + 1)(x + 3)} = -5^{8x + 7}$.

5.40. Рашыце ўраўненне:

а) $2^{x^2 - 4x + 5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$; б) $3^x + 3^{-x} = 2\left(1 - \sin^2 \pi x\right)$.

5.41. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення
$4^{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} + 4^{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} = \sqrt{13 + 6x - 3x^2}$.

5.42. Знайдзіце значэнне выразу 3^m, дзе m — сума каранёў ураўнення $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$.

5.43. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30$; б) $15 \cdot 3^{|x|} + 9 \cdot 3^x = 32$.

5.44. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 4 \cdot 5^x - 3 \cdot 2^y = -4, \\ 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2^y = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^y = -6, \\ 4^x + 2 \cdot 3^y = 22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 49^{2x + y} = 7, \\ x + 6 = 2y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 16^{2x - y} = 4, \\ x + 2 = 2y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 4, \\ 2^x \cdot 3^y = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{3^{x - y}}{3^{xy}} = \frac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32. \end{cases}$

5.45. Знайдзіце значэнне выразу $2^x - y$, калі $(x;\ y)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

5.46. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

5.47. Знайдзіце значэнне выразу $3^{2x_0} + 2y_0$, дзе $(x_0;\ y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0, \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11. \end{cases}$

5.48. Знайдзіце ўсе значэнні ліку a, пры якіх ураўненне $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4a^2 = \frac{1}{4}$ мае карані.

5.49. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення
$\sqrt{6x - x^2 - 5} \cdot \left(3 \cdot 5^{2\sin x - 1} - 2 \cdot 5^{\sin x - 1} - 0{,}2\right) = 0.$

5.50. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення
$9^x - (14 - x) \cdot 3^x - 3x + 33 = 0.$

5.51. Рашыце ўраўненне $\mathrm{tg}^2\, 2^x - 3\mathrm{tg}\, 2^x + 4 = 3\mathrm{ctg}\, 2^x - \mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2^x\right).$

5.52. Рашыце ўраўненне $f'(x) = a$, калі:

а) $f(x) = 7e^{x+4}$, $a = \frac{7}{e}$; б) $f(x) = 5e^{7-3x}$, $a = -15$.

5.53. Рашыце ўраўненне:

а) $3^x + 5^x = 2^{3x}$; б) $2^x + 3^x + 4^x = 29$.

5.54. Знайдзіце 3^x, дзе x — найменшы корань ураўнення $3^x \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} = 36$.

5.55. Рашыце ўраўненне:

а) $2^{-x+2} - 2^{-2+x} = 2^{x^2-1} - 2^{1-x^2}$; б) $2^{x^2-3x+1} - 3^{3x-x^2-1} = 4^x - 9^{-x}$.

5.56. Знайдзіце суму каранёў ураўнення
$\left(26 + 15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 5.$

§ 6. Паказальныя няроўнасці

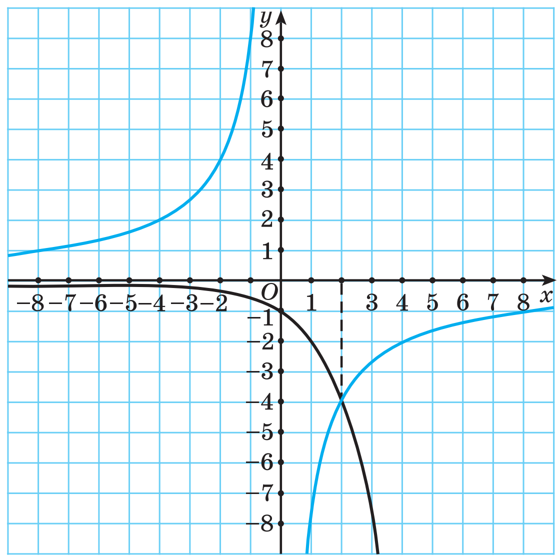
Прыклад 1. Рашыце няроўнасць $0{,}5^x < 7$.

Рашэнне.

Запішам лік 7 у выглядзе ступені з асновай 0,5 і атрымаем: $0{,}5^x < 7$; $0{,}5^x < 0{,}5^{\log_{0{,}5} 7}$. Функцыя $y = 0{,}5^t$ спадае на абсягу вызначэння $(a = 0{,}5 \in (0;\, 1))$, значыць, $x > \log_{0{,}5} 7$.

Адказ: $(\log_{0{,}5} 7;\, +\infty)$.

Прыклад 2. На рысунку 4 паказаны графікі функцый $y = -2^x$ і $y = -\dfrac{8}{x}$. Рашыце няроўнасць $-2^x > -\dfrac{8}{x}$.



Рыс. 4

Рашэнне.

Графік функцыі $y = -2^x$ размешчаны вышэй графіка функцыі $y = -\dfrac{8}{x}$ для $x \in (0;\, 2)$. Значыць, рашэннем няроўнасці $-2^x > -\dfrac{8}{x}$ з'яўляецца прамежак (0; 2).

Адказ: (0; 2).

Прыклад 3. Рашыце няроўнасць $\left(\sqrt{2}\cos 1\right)^{x^2 - 2x} \leqslant \left(\sqrt{2}\cos 1\right)^{8}$.

Рашэнне.

Паколькі 1 рад $\approx 57°$, $57° > 45°$ і $\cos 1 < \cos 45°$, то $\cos 1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і $\sqrt{2}\cos 1 < 1$. Значыць, функцыя $y = \left(\sqrt{2}\cos 1\right)^t$ з'яўляецца спадальнай, і зыходная няроўнасць раўназначна няроўнасці $x^2 - 2x \geqslant 8$; $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$; $x \in (-\infty;\, -2] \cup [4;\, +\infty)$.

Адказ: $(-\infty;\, -2] \cup [4;\, +\infty)$.

Прыклад 4. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[14]{1 - 7^{x^2 - x}}$.

Рашэнне.

$1 - 7^{x^2 - x} \geqslant 0$; $7^{x^2 - x} \leqslant 1$; $7^{x^2 - x} \leqslant 7^0$. Функцыя $y = 7^t$ нарастае на абсягу вызначэння $(a = 7 > 1)$, значыць, $x^2 - x \leqslant 0$; $x(x - 1) \leqslant 0$; $x \in [0;\, 1]$.

Адказ: [0; 1].

Прыклад 5. Рашыце няроўнасць $8^x - 4^x > 2^{x+1}$.

Рашэнне.

Паколькі $2^x > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то падзелім абедзве часткі няроўнасці на 2^x і атрымаем $4^x - 2^x > 2$; $4^x - 2^x - 2 > 0$.

Няхай $t = 2^x$, $t > 0$, тады $t^2 - t - 2 > 0$; $t \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Паколькі $t > 0$, то $t \in (2; +\infty)$, значыць, $t > 2$, г. зн. $2^x > 2$; $x > 1$.

Адказ: $(1; +\infty)$.

Прыклад 6. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}$.

Рашэнне.

Паколькі $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ і $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$, то няроўнасць $9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}$ прымае выгляд $9^x + 8 \cdot 9^x > 4^x + 5 \cdot 4^x$; $9 \cdot 9^x > 6 \cdot 4^x$; $9 \cdot \frac{9^x}{4^x} > 6$; $\frac{9^x}{4^x} > \frac{6}{9}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^x > \frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

Паколькі $\frac{3}{2} > 1$, то функцыя $y = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ нарастае на абсягу вызначэння, значыць, $x > -\frac{1}{2}$. Найменшае цэлае рашэнне няроўнасці роўна нулю.

Адказ: 0.

Прыклад 7. Знайдзіце найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне няроўнасці $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 49^x > 0$.

Рашэнне.

Падзелім абедзве часткі няроўнасці $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 49^x > 0$ на 49^x, $49^x > 0$, і атрымаем $2 \cdot \left(\frac{4}{49}\right)^x - 9 \cdot \left(\frac{14}{49}\right)^x + 7 > 0$; $2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 7 > 0$.

Няхай $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$, тады няроўнасць прымае выгляд $2t^2 - 9t + 7 > 0$. Нулямі функцыі $y = 2t^2 - 9t + 7$ з'яўляюцца лікі 1 і 3,5, значыць, $\left[\begin{array}{l} t > 3{,}5, \\ t < 1. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{7}\right)^x > 3{,}5, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x < 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{7}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^0. \end{array}\right.$

Паколькі $\frac{2}{7} \in (0; 1)$, то $\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 0; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне няроўнасці роўна -2.

Адказ: -2.

Прыклад 8. Вядома, што графік функцыі $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, праходзіць вышэй прамой $y = 1$ пры $x < 0$. Знайдзіце суму цэлых значэнняў аргумента з абсягу вызначэння функцыі $y = \sqrt{a^{x^2 - 6x + 8} - 1}$.

Рашэнне.

Паколькі графік функцыі $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, праходзіць вышэй прамой $y = 1$ пры $x < 0$, то функцыя $y = a^x$ спадае на абсягу вызначэння, значыць, $0 < a < 1$.

Знойдзем абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt{a^{x^2 - 6x + 8} - 1}$. $a^{x^2 - 6x + 8} - 1 \geqslant 0$; $a^{x^2 - 6x + 8} \geqslant 1$; $a^{x^2 - 6x + 8} \geqslant a^0$, паколькі $0 < a < 1$, то $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$; $x \in [2;\ 4]$.

Сума цэлых значэнняў аргумента з абсягу вызначэння функцыі роўна $2 + 3 + 4 = 9$.

Адказ: 9.

Прыклад 9. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $\left(\sqrt{5} - 2\right)^x \geqslant 9 - 4\sqrt{5}$ на прамежку [0; 18].

Рашэнне.

Заўважым, што $9 - 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$, і запішам няроўнасць у выглядзе $\left(\sqrt{5} - 2\right)^x \geqslant \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$. Паколькі $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$, то $x \leqslant 2$.

На прамежку [0; 18] няроўнасць мае тры цэлыя рашэнні.

Адказ: 3.

Прыклад 10. Знайдзіце здабытак найбольшага і найменшага рашэнняў няроўнасці $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} - \left(\sqrt{3 + \sqrt{8}} - 1\right)^x \leqslant 0$.

Рашэнне.

Спросцім выраз

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} - 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} - 1 = \left|\sqrt{2} + 1\right| - 1 = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}.$$

Тады няроўнасць прымае выгляд $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} - \left(\sqrt{2}\right)^x \leqslant 0$;

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^x$; $2^{\frac{x^2 + 4x + 1}{3}} \leqslant 2^{\frac{x}{2}}$; $\frac{x^2 + 4x + 1}{3} \leqslant \frac{x}{2}$; $2x^2 + 8x + 2 \leqslant 3x$; $2x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$; $x \in \left[-2;\ -\frac{1}{2}\right]$.

Здабытак найбольшага і найменшага рашэнняў няроўнасці роўны $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Адказ: 1.

Прыклад 11. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 2 < 3\left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

Рашэнне.

Паколькі $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$, то $\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Тады няроўнасць прымае выгляд $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 2 < \frac{3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}$. Няхай $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $t > 0$, тады $\begin{cases} t+2 < \frac{3}{t}, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t^2 + 2t - 3 < 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t \in (-3;\ 1), \\ t > 0; \end{cases}$ $t \in (0;\ 1)$.

Такім чынам, $\left(2+\sqrt{3}\right)^x < 1$. Паколькі $2+\sqrt{3} > 1$, то $x < 0$. Найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці роўна -1.

Адказ: -1.

Прыклад 12. Рашыце двайную няроўнасць $1 < 3^{\left|x^2-x\right|} < 9$.

Рашэнне.

Паколькі $3 > 1$, то няроўнасць $1 < 3^{\left|x^2-x\right|} < 9$ раўназначна няроўнасці

$0 < \left|x^2 - x\right| < 2$; $\begin{cases} \left|x^2-x\right| < 2, \\ \left|x^2-x\right| > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x < 2, \\ x^2 - x > -2, \\ x^2 - x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x + 2 > 0, \\ x(x-1) \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+1) < 0, \\ x \in \boldsymbol{R}, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-1;\ 2), \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Адказ: $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Прыклад 13. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $2^{x^2-4x+5} \leqslant 4x - 2 - x^2$.

Рашэнне.

Запішам няроўнасць $2^{x^2-4x+5} \leqslant 4x - 2 - x^2$ у выглядзе $2^{(x-2)^2+1} \leqslant -(x-2)^2 + 2$.

Ацэнім левую частку няроўнасці: $(x-2)^2 + 1 \geqslant 1$ пры $x \in \boldsymbol{R}$. Паколькі $2 > 1$, то $2^{(x-2)^2+1} \geqslant 2^1$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

Ацэнім правую частку няроўнасці: $-(x-2)^2 + 2 \leqslant 2$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

Такім чынам, левая частка няроўнасці большая або роўна двум пры любых значэннях зменнай, а правая частка гэтай няроўнасці меншая або роўна двум, г. зн. няроўнасць правільная, толькі калі яе абедзве часткі адначасова роўны двум. Такім чынам, няроўнасць $2^{(x-2)^2+1} \leqslant -(x-2)^2+2$ раўназначна сістэме $\begin{cases} 2^{(x-2)^2+1} = 2, \\ -(x-2)^2+2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ x=2; \end{cases}$ $x=2$.

Няроўнасць мае толькі адно рашэнне, якое з’яўляецца цэлым лікам.

Адказ: 1.

Разгледзім паказальныя няроўнасці, якія можна рашыць заменай выразаў на знакасупадальныя.

Заўважым, што знак выразу $a^{t_1} - a^{t_2}$ супадае са знакам выразу $(a-1)(t_1 - t_2)$ пры ўмове, што $a > 0$, $a \neq 1$. Пакажам гэта.

1. Няхай $a > 1$, тады функцыя $y = a^t$ нарастальная, і калі $t_1 > t_2$, то $a^{t_1} - a^{t_2} > 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $a^{t_1} - a^{t_2} < 0$. Пры $a > 1$, г. зн. $a - 1 > 0$, калі $t_1 > t_2$, то $(a-1)(t_1 - t_2) > 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $(a-1)(t_1 - t_2) < 0$, г. зн. знак выразу $a^{t_1} - a^{t_2}$ супадае са знакам выразу $(a-1)(t_1 - t_2)$.

2. Няхай $0 < a < 1$, тады функцыя $y = a^t$ спадальная, і калі $t_1 > t_2$, то $a^{t_1} - a^{t_2} < 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $a^{t_1} - a^{t_2} > 0$. Пры $a < 1$, г. зн. $a - 1 < 0$, калі $t_1 > t_2$, то $(a-1)(t_1 - t_2) < 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $(a-1)(t_1 - t_2) > 0$, г. зн. знак выразу $a^{t_1} - a^{t_2}$ супадае са знакам выразу $(a-1)(t_1 - t_2)$.

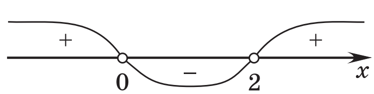
Прыклад 14. Рашыце няроўнасць $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Рашэнне.

$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$; $\quad 25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x - 25 > 0$; $\quad 2^x(25 - 5^x) - (25 - 5^x) > 0$; $(25 - 5^x)(2^x - 1) > 0$; $(5^x - 5^2)(2^x - 2^0) < 0$.

Паколькі знак рознасці $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ супадае са знакам здабытку $(a-1)(f(x) - g(x))$, то няроўнасць $(5^x - 5^2)(2^x - 2^0) < 0$ заменім раўназначнай ёй няроўнасцю $(5-1)(x-2)(2-1)(x-0) < 0$; $x(x-2) < 0$.

Рэшым атрыманую няроўнасць метадам інтэрвалаў.



$x \in (0; 2)$.

Адказ: (0; 2).

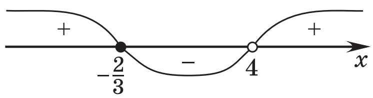
Прыклад 15. Рашыце няроўнасць $\dfrac{(5\sqrt{5})^x - 0{,}2}{x-4} \geqslant 0.$

Рашэнне.

$\dfrac{\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^x - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0;\quad \dfrac{5^{1{,}5x} - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0.$

Паколькі знак рознасці $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ супадае са знакам здабытку $(a-1)(f(x)-g(x))$, то няроўнасць $\dfrac{5^{1{,}5x} - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0$ заменім раўназначнай ёй няроўнасцю $\dfrac{(5-1)(1{,}5x-(-1))}{x-4} \geqslant 0;$ $\dfrac{1{,}5x+1}{x-4} \geqslant 0.$

Выкарыстаем метад інтэрвалаў:



$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (4; +\infty).$

Адказ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (4; +\infty).$

Прыклад 16. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці

$\left(7^x - 7^{x^2+6}\right)\left(5^{x^2-1} - 5^{2x+7}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6}\right) \geqslant 0.$

Рашэнне.

Паколькі знак рознасці $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ супадае са знакам здабытку $(a-1)(f(x)-g(x))$, то няроўнасць

$\left(7^x - 7^{x^2+6}\right)\left(5^{x^2-1} - 5^{2x+7}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6}\right) \geqslant 0$

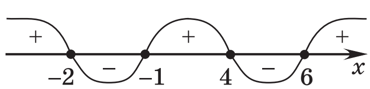
заменім раўназначнай ёй няроўнасцю

$(7-1)(x-x^2-6)(5-1)(x^2-1-2x-7)\left(\frac{2}{3}-1\right)(5x-x^2+6) \geqslant 0;$

$-(-x^2+x-6)(x^2-2x-8)(-x^2+5x+6) \geqslant 0;$

$(x^2-x+6)(x^2-2x-8)(x^2-5x-6) \leqslant 0.$

Паколькі $x^2-x+6>0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то $(x^2-2x-8)(x^2-5x-6) \leqslant 0;$ $(x-4)(x+2)(x-6)(x+1) \leqslant 0.$



$x \in [-2; -1] \cup [4; 6].$

Сума цэлых рашэнняў няроўнасці роўна 12.

Адказ: 12.

Прыклад 17. Рашыце няроўнасць $x \cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x.$

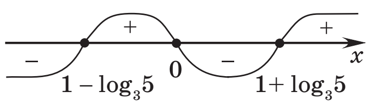
Рашэнне.

$x \cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x;\ \ x \cdot \left(3^{|x-1|} - 5\right) \geqslant 0;\ \ x \cdot \left(3^{|x-1|} - 3^{\log_3 5}\right) \geqslant 0.$

Атрыманую няроўнасць заменім раўназначнай ёй няроўнасцю $x \cdot (3-1)\left(|x-1| - \log_3 5\right) \geqslant 0;\ \ x\left(|x-1| - \log_3 5\right) \geqslant 0.$

Знойдзем нулі функцыі $f(x) = x\left(|x-1| - \log_3 5\right).$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ |x-1| = \log_3 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 1 = \log_3 5, \\ x - 1 = -\log_3 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 + \log_3 5, \\ x = 1 - \log_3 5. \end{array}\right.$$



$x \in \left[1 - \log_3 5;\ 0\right] \cup \left[1 + \log_3 5;\ +\infty\right).$

Адказ: $\left[1 - \log_3 5;\ 0\right] \cup \left[1 + \log_3 5;\ +\infty\right).$

6.1. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < 125^{x+1};$ б) $0{,}25^{1-4x} \leqslant 64;$ в) $3^{3x+15} - 1 > 0;$

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-24};$ д) $125^{x+2} - \sqrt[3]{5} > 0;$ е) $49 \cdot 7^x > 7^{3x+1}.$

6.2. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x^2} < \left(\frac{9}{49}\right)^4;$ б) $2^{x^2} \leqslant 32;$ в) $5^{x^2-x+1} \geqslant 125;$

г) $36^{0{,}5x^2-3} > \left(\frac{1}{6}\right)^{-3};$ д) $16^{0{,}5x^2-1} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{-2};$ е) $2^{2x^2-5x-1} > 0{,}5\sqrt[3]{4^{2x}}.$

6.3. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне дадзенага выразу не перавышае адзінку:

а) $7^{x^2-25};$ б) $\left(\sqrt{2}\right)^{5x^2-x};$ в) $e^{x^3-x};$ г) $\pi^{4x^3-x^2}.$

6.4. Выкарыстайце ўласцівасці ступені і рашыце няроўнасць:

а) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$; б) $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} - 8^{3x} \geqslant 0$;

в) $\sqrt[5]{27} : 3^{8x-1} \geqslant 9^{5x}$; г) $0{,}5\sqrt{32^{-x}} > \frac{2}{4^x}$;

д) $12^{x-2} \leqslant 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; е) $100 : 2^{3-x^2} \geqslant 5^{3-x^2} \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$.

6.5. Знайдзіце здабытак найбольшага цэлага і найменшага цэлага рашэнняў няроўнасці $e^{x^2} - \frac{1}{e^{12x+27}} \leqslant 0$.

6.6. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

6.7. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{32^{\frac{3x-4}{x}} - 2^{\frac{5x}{2}}}$; б) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{27}}}$.

6.8. Рашыце няроўнасць:

а) $0{,}3^{\frac{x^2-16}{x-5}} < 1$; б) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{x+7}{x^2-4}} \geqslant 1$.

6.9. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{x}{x-2}} \geqslant \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{6}{x-1}}$.

6.10. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{35}\right)^{3x^2} - \frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{35}\right)^{15-18x}} \geqslant 0$.

6.11. Рашыце няроўнасць:

а) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$; б) $0{,}25^x - 6 \cdot 0{,}5^x \geqslant -5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 < 0$; г) $4^x + 1 \leqslant \frac{5}{2^{1-x}}$;

д) $4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 < 0$; е) $4^{x-3} + 0{,}25 \cdot 0{,}5^{-2x} > 34$.

6.12. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y = 5^{2x+1} - 5^x - 4$; б) $y = 4^{x+1} - 16^x - 3$; в) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$.

6.13. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $2^{-3x+1} - 4^{-x} \cdot 7 - 2^{-x+2} < 0$.

6.14. Рашыце няроўнасць $4^{\frac{1-2x}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

6.15. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} 1{,}2^{0{,}5x^2-3} > 0{,}6, \\ 16^x - 6 \cdot 4^x + 8 \geqslant 0. \end{cases}$

6.16. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $f(x) = 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$ размешчаны не ніжэй прамой $y = 6$.

6.17. Рашыце няроўнасць:

а) $2^{x+1} \leqslant 3^x$; б) $6^x \geqslant 7^{1-x}$;

в) $36^x - 12^x \geqslant 12 \cdot 4^x$; г) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}} < 0$.

6.18. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $f(x) = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x$ размешчаны вышэй восі абсцыс.

6.19. Знайдзіце ўсе рашэнні няроўнасці:

а) $2^{x+1} - 2^{x-1} \leqslant 1{,}5$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} > 42$;

в) $5^{x-2} + \frac{5^x}{5} \leqslant 150$; г) $2 \cdot 3^{x-6} + 6 \cdot 9^{0{,}5x-2} \leqslant 56$;

д) $4 \cdot 9^{1{,}5x-1} - 27^{x-1} \geqslant 33$; е) $7^{x^2-5x-5} + 7^{x^2-5x-6} \leqslant 8$.

6.20. Рашыце няроўнасць $3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} < 10{,}5$.

6.21. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f(x) = 2^{x^2+2} - 2^{x^2+3} - 2^{x^2+4} - 5^{x^2+1} + 5^{x^2+2}$ прымае адмоўныя значэнні.

6.22. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} 3^{x+3} - 2 \cdot 3^x \geqslant 2\frac{7}{9}, \\ 10^{x^2+2x-3} < 1. \end{cases}$

6.23. Знайдзіце здабытак найбольшага цэлага адмоўнага і найбольшага цэлага дадатнага рашэнняў няроўнасці $8^{\frac{1}{x+1}} \cdot 128^{\frac{1}{x+2}} < 64^{\frac{1}{x-1}}$.

6.24. Рашыце двайную няроўнасць:

а) $0{,}5 < 2^{1-2x} < 128$; б) $\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} < 27$.

6.25. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $-4 < 3^{x^2-2x+1} - 5 \leqslant 22$.

6.26. Выканайце замену зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $\frac{5^x+1}{0,3-5^x} \geqslant 1;$ б) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}};$

в) $\frac{7^x-30}{7^{x-1}+1} \leqslant -14;$ г) $\frac{2^{x+1}-22}{2^x-2} \geqslant 1.$

6.27. Рашыце няроўнасць $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8} > 1.$

6.28. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\left(8-3\sqrt{7}\right)^x \geqslant \left(8+3\sqrt{7}\right)^{\frac{3}{x-4}}.$

6.29. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 0,1^{x^2+1} \geqslant 0,01, \\ 4^{2x+3} \geqslant 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{0,5x^2-3} > 0,5, \\ 16^x - 6\cdot 4^x + 8 \geqslant 0. \end{cases}$

6.30. Рашыце няроўнасць:

а) $0,2 < 5^{|x+1|} < 125;$ б) $0,5^{\frac{|2x-1|}{x-3}} \cdot \sqrt{20} \geqslant \sqrt{5};$ в) $2x\cdot 7^{x-1} \geqslant |x|;$

г) $\left|2^{4x^2-1}-5\right| \leqslant 3;$ д) $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4} < 3^{|x-1|};$ е) $0,2^{\left|\frac{x-1}{x+3}\right|} < \frac{1}{25}.$

6.31. Знайдзіце здабытак найбольшага цэлага адмоўнага і найменшага цэлага дадатнага рашэнняў няроўнасці $3\cdot 2^{|2x|} - 5\cdot 6^{|x|} + 2\cdot 3^{|2x|} > 0.$

6.32. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\sin x} > 0,(6);$ б) $e^{\sin x \cos x} \leqslant e^{\frac{\sqrt{3}}{4}}.$

6.33. Знайдзіце ўсе рашэнні няроўнасці $\frac{6}{3^{|\sin x|}-1} > 3^{|\sin x|}.$

6.34. Рашыце няроўнасць $f'(x) \geqslant b,$ калі:

а) $f(x) = 0,25e^{4x-5},\ b = e^7;$ б) $f(x) = 2x + e^{7x+1},\ b = 9.$

6.35. Рашыце няроўнасць:

а) $4^{x^2-x} - 10\cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geqslant 0;$ б) $2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} \geqslant 3^{2x^2-6x+3}.$

6.36. Рашыце няроўнасць $\sqrt{4^x - 8\cdot 7^{-x}} < 7^{1-\frac{x}{2}} - 2^{x+1}.$

6.37. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\left(\frac{2\sin 1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+2x} \geqslant \left(\frac{2\sin 1}{\sqrt{3}}\right)^8$.

6.38. Рашыце няроўнасць:

а) $3^x < 4 - x$; б) $2^x > \frac{3-5x}{3}$.

6.39. Рашыце няроўнасць $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} - 1 \geqslant 5\left|\sin\frac{x}{5}\right|$.

6.40. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{4^x - 2}{5 - x} \geqslant 0$; б) $\frac{2^x - 1}{125 - 5^x} \leqslant 0$; в) $\frac{x^2 - 4}{2^x - 3} < 0$;

г) $\frac{(5^x - 5)(16 - 2^x)}{3^x} \geqslant 0$; д) $\frac{7^x(81 - 3^x)}{(3^x - 1)(5^x - 2)} \geqslant 0$; е) $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{3^x - 5} > 0$.

6.41. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} < 0$.

6.42. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці

$$9 \cdot 2^x \cdot \sqrt{3+x} + 9x \cdot 2^x + 3 \geqslant 27 \cdot 2^x + \sqrt{3+x} + x$$

на прамежку [–3; 15].

6.43. Рашыце няроўнасць:

а) $(x+1)^2 \cdot 3^{x-2} - 3^{x+3} \geqslant 0$; б) $5^{x+2} - (x+2)^2 \cdot 5^{x-1} \geqslant 0$.

6.44. Рашыце няроўнасць:

а) $(7x^2 - 6x - 1)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right) \geqslant 0$;

б) $\left(10^x - 10^{x^2+2}\right)\left(3^{x^2-4} - 3^{2x+4}\right)\left(0{,}2^{3x} - 0{,}2^{x^2-4}\right) < 0$.

6.45. Знайдзіце здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці

$$(4x^2 + 4x - 3)\left(5^{2x^2} - 5^{x+3}\right) \leqslant 0.$$

§ 7. Уласцівасці лагарыфмаў

Лагарыфмам дадатнага ліку b па аснове a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называецца паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці a, каб атрымаць b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ b > 0.$$

Дзесятковы лагарыфм: $\log_{10} a = \lg a$.

Натуральны лагарыфм: $\log_e a = \ln a$.

Асноўная лагарыфмічная тоеснасць: $a^{\log_a b} = b$.

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc) \qquad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \qquad \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \qquad a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$$

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c| \ \ (bc > 0)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c| \ \ (bc > 0)$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a |b| \ \ (b \neq 0,\ n = 2k,\ k \in \boldsymbol{Z})$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_{|a|} b \ \ (a \neq 0,\ m = 2k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \neq 0)$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{2\log_7 2 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9}$.

Рашэнне.

$$\frac{2\log_7 2 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9} = \frac{\log_7 4 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9} = \frac{\log_7 \frac{1}{9}}{\log_7 \frac{1}{3}} = \frac{2\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 \frac{1}{3}} = 2.$$

Адказ: 2.

Прыклад 2. Параўнайце значэнні выразаў $\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right)$ і $-64^{0,5}$.

Рашэнне.

$$\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right) = \log_{5^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{5^{\frac{1}{6}}}{5^3}\right) = 3\log_5 5^{-2\frac{5}{6}} = -\frac{17\cdot 3}{6} = -8,5; \quad -64^{0,5} = -8; \quad -8,5 < -8.$$

Адказ: $\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right) < -64^{0,5}$.

Прыклад 3. Вылічыце: $\frac{3}{7}\cdot\left(\log_2 32 + 81^{\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14}$.

Рашэнне.

$$\frac{3}{7}\cdot\left(\log_2 32 + 81^{\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot\left(5 + 3^{4\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot\left(5 + 3^{\log_3 16}\right)^{\log_{21} 14} =$$

$$= \frac{3}{7}\cdot(5+16)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot 21^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot 14 = 6.$$

Адказ: 6.

Прыклад 4. Вылічыце: $\left(15 + 7^{1+\log_7 9}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4$.

Рашэнне.

$$\left(15 + 7^{1+\log_7 9}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4 = \left(15 + 7\cdot 7^{\log_7 9}\right)\cdot\log_2 3^{\frac{1}{2}}\cdot\log_3 2^2 =$$

$$= (15 + 7\cdot 9)\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2 = 78\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3} = 78.$$

Адказ: 78.

Прыклад 5. Дадзена: $\log_a b = 5$. Знайдзіце $\log_{a^5}\left(a^5\cdot b^5\right)$.

Рашэнне.

$$\log_{a^5}\left(a^5\cdot b^5\right) = \log_{a^5}(ab)^5 = 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\log_a(ab) = \log_a a + \log_a b =$$

$$= 1 + \log_a b\Big|_{\log_a b = 5} = 6.$$

Адказ: 6.

Прыклад 6. Вылічыце: $\frac{\log_{0,4}\log_9 243 + 8^{4\log_{16} 3}}{\log_7 196 - 2\log_7 2}$.

Рашэнне.

$$\frac{\log_{0,4}\log_9 243 + 8^{4\log_{16} 3}}{\log_7 196 - 2\log_7 2} = \frac{\log_{0,4}\frac{5}{2} + 8^{\log_2 3}}{\log_7 196 - \log_7 4} = \frac{\log_{0,4} 0,4^{-1} + 2^{3\log_2 3}}{\log_7 49} = \frac{-1 + 2^{\log_2 27}}{2} =$$

$$= \frac{-1+27}{2} = 13.$$

Адказ: 13.

Прыклад 7. Знайдзіце значэнне выразу

$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6 + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

Рашэнне.

$$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6 + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3} =$$

$$= \log_4 24 - \log_4 9 \cdot \frac{\log_4 13}{\log_4 9} \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 13} + 3^{\log_5 7} - 3^{\log_5 7} =$$

$$= \log_4 24 - \log_4 6 = \log_4 4 = 1.$$

Адказ: 1.

Прыклад 8. Знайдзіце значэнне выразу $\log_3 \sin^5 \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9$.

Рашэнне.

$$\log_3 \sin^5 \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 = 5\log_3 \sin\frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 = 5 \cdot \frac{1}{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 3} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 =$$

$$= 5 \cdot \frac{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9}{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 3} = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10.$$

Адказ: 10.

Прыклад 9. Вылічыце: $\left(\left(25 - \log_2^2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 7^{\log_7 6}$.

Рашэнне.

$$\left(\left(25 - \log_2^2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 7^{\log_7 6} =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right)\left(5 + \log_2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right)\left(\log_2 32 + \log_2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 (32 \cdot 5) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 160 \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 160 \cdot \frac{1}{\log_2 160} + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(5 - \log_2 5 + \log_2 5\right) \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30.$$

Адказ: 30.

Прыклад 10. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$.

Рашэнне.

$$\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5} = \log_5 250 \cdot \log_5 50 - \log_5 10 \cdot \log_5 1250 =$$

$= \log_5 250 \cdot \log_5 (5 \cdot 10) - \log_5 10 \cdot \log_5 (5 \cdot 250) =$

$= \log_5 250 \cdot (\log_5 5 + \log_5 10) - \log_5 10 \cdot (\log_5 5 + \log_5 250) =$

$= \log_5 250 \cdot (1 + \log_5 10) - \log_5 10 \cdot (1 + \log_5 250) =$

$= \log_5 250 + \log_5 250 \cdot \log_5 10 - \log_5 10 - \log_5 10 \cdot \log_5 250 =$

$= \log_5 250 - \log_5 10 = \log_5 25 = 2.$

Адказ: 2.

Прыклад 11. Знайдзіце значэнне выразу

$$4^{\log_{0,25} 0,01} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{8 - 2\sqrt{15}}.$$

Рашэнне.

$$4^{\log_{0,25} 0,01} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{8 - 2\sqrt{15}} =$$

$$= 4^{\log_4 100} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_9 \left(8 - 2\sqrt{15}\right) =$$

$$= 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{3^2} \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 = 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_3 \left|\sqrt{5} - \sqrt{3}\right| =$$

$$= 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_3 \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) = 100 + \log_3 \left(\frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= 100 + \log_3 81 = 100 + 4 = 104.$$

Адказ: 104.

Прыклад 12. Вылічыце: $\log_2 \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right|.$

Рашэнне.

$$\log_2 \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right| = \log_2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| =$$

$$= \log_2 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\right| = \log_2 \left(\frac{2}{2 - \sqrt{3}}\right) - \left|\log_2 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\right| =$$

$$= \log_2 2 - \log_2 \left(2 - \sqrt{3}\right) - \left|\log_2 \left(2 + \sqrt{3}\right) - \log_2 2\right| =$$

$$= 1 - \log_2 \left(2 - \sqrt{3}\right) - \log_2 \left(2 + \sqrt{3}\right) + 1 = 2 - \left(\log_2 \left(2 - \sqrt{3}\right) + \log_2 \left(2 + \sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= 2 - \log_2 \left(\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)\right) = 2 - \log_2 1 = 2.$$

Адказ: 2.

Прыклад 13. Знайдзіце значэнне выразу

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\log_{2\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right).$$

Рашэнне.

Паколькі $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$, то $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$, тады атрымаем $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

$$=\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}=$$

$$=-\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=-\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{6}+1\right)}=$$

$$=-\frac{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{6}+1\right)}=-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right).$$

Заўважым, што $2\sqrt{6}+7=\left(\sqrt{6}+1\right)^2$, а $2\sqrt{6}+5=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$, тады зыходны выраз прымае выгляд

$$-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)+\log_{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=$$

$$=-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^{-1}+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{1}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)}{\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)}=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{6}-1}{5}=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{6}-1}{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{6}+1\right)}=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{1}{\sqrt{6}+1}=\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{6}+1\right)^{-1}=-1.$$

Адказ: -1.

Прыклад 14. Знайдзіце значэнне выразу

$$\frac{3\log_3^2 45-2\cdot\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 45}.$$

Рашэнне.

Няхай $\log_3 45 = a$, $\log_3 5 = b$, тады выраз прымае выгляд $\dfrac{3a^2 - 2ab - b^2}{3a + b}$. Разгледзім лічнік дробу як квадратны трохчлен адносна b і атрымаем

$$\frac{3a^2 - 2ab - b^2}{3a + b} = -\frac{b^2 + 2ab - 3a^2}{3a + b} = -\frac{(b + 3a)(b - a)}{3a + b} = -(b - a) = a - b.$$

Паколькі $\log_3 45 = a$; $\log_3 5 = b$, то $a - b = \log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 9 = 2$.

Адказ: 2.

Прыклад 15. Параўнайце $5^{\sqrt{\log_5 6}}$ і $6^{\sqrt{\log_6 5}}$.

Рашэнне.

Няхай $a = 5^{\sqrt{\log_5 6}}$ і $b = 6^{\sqrt{\log_6 5}}$. Тады $\log_5 a = \log_5 5^{\sqrt{\log_5 6}} = \sqrt{\log_5 6}$, а $\log_5 b = \log_5 6^{\sqrt{\log_6 5}} = \sqrt{\log_6 5} \cdot \log_5 6 = \dfrac{1}{\sqrt{\log_5 6}} \cdot \log_5 6 = \sqrt{\log_5 6}$, г. зн. $\log_5 a = \log_5 b$, значыць, $a = b$.

Адказ: $5^{\sqrt{\log_5 6}} = 6^{\sqrt{\log_6 5}}$.

7.1. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і вылічыце:

а) $\log_{\frac{1}{12}} 4 + \log_{\frac{1}{12}} 3$;

б) $\log_5 \dfrac{35}{3} + \log_5 \dfrac{75}{7}$;

в) $\log_6 \dfrac{1}{3} - \log_6 12$;

г) $\log_3 \sqrt{3} + \log_5 75 - \log_5 3$;

д) $\log_7 14 + \log_7 \dfrac{49}{4} - \log_7 3{,}5$;

е) $\lg 20 + \lg 2 - \lg 0{,}04$;

ж) $\log_5 75 - \log_5 9 + \log_5 15$;

з) $\dfrac{\log_{0,9} 32}{\log_{0,9} 17 - \log_{0,9} 34}$.

7.2. Ці праўда, што значэнні выразаў з'яўляюцца процілеглымі лікамі:

а) $\ln e$ і $\operatorname{tg} \dfrac{3\pi}{4}$;

б) $\sqrt[3]{-216}$ і $\log_2 21\dfrac{1}{3} + \log_2 3$?

7.3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{\lg 2 + \lg 4}{\lg 16}$;

б) $\dfrac{\ln 81}{\ln 5 - \ln 15}$;

в) $\dfrac{\log_5^2 10 - \log_5^2 2}{\log_5 20}$;

г) $\dfrac{\log_3 147}{\log_3^2 21 - \log_3^2 7}$.

7.4. Вылічыце:

а) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + 2\log_{\frac{1}{6}} 3$; б) $2\log_{49} \frac{12}{7} - \log_7 12 + 9$;

в) $3\log_8 9 - 2\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{81}$; г) $(3\log_7 2 - \log_7 24) : (\log_7 3 + \log_7 9)$;

д) $\dfrac{\log_8 45 + 2\log_8 \frac{1}{3}}{\log_8 75 - \log_8 3}$; е) $\dfrac{\lg 81 + \lg 256}{2\lg 3 + 2\lg 4}$;

ж) $\dfrac{\ln 625 + \ln 64}{2\ln 5 + 3\ln 2}$; з) $\dfrac{\log_3 25 - 4\log_3 2}{0{,}5\log_3 256 - 2\log_3 5}$.

7.5. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$; б) $\dfrac{2\log_\pi 2 + \log_\pi \sqrt{10}}{\log_\pi 10 - \log_\pi \sqrt{10} + \log_\pi 4}$.

7.6. Ведаючы, што $\log_a b = 5$, знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_a (a^2 b)$; б) $\log_a \frac{a}{b^4}$;

в) $\log_a \frac{b^2}{a^3}$; г) $\log_a \sqrt{ab}$;

д) $\log_a (a\sqrt[3]{b})$; е) $\log_a \frac{a\sqrt[5]{a}}{\sqrt[4]{b}}$.

7.7. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_5 9 : \log_5 3$; б) $\log_7 36 : (3\log_7 6)$;

в) $\log_{11} \sqrt[3]{2} : \log_{11} \sqrt[3]{4}$; г) $\log_3 (\sqrt{3} + 1) : \log_3 (4 + 2\sqrt{3})$.

7.8. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\log_3 \sqrt[5]{9\sqrt[4]{3}}$; б) $\lg \sqrt[7]{0{,}01\sqrt[3]{10}}$.

7.9. Вылічыце:

а) $\log_9 \log_2 \sqrt[6]{4}$; б) $\log_{0{,}25} \log_{\sqrt{5}} 25$;

в) $\log^2_{0{,}5} \log_3 \sqrt[4]{3}$; г) $\log^3_{0{,}2} \log_{5\sqrt[5]{5}} 5$;

д) $\log_{0{,}25} (\log_2 7 \cdot \log_7 16)$; е) $\log_3 \left|\log_3 \log_3 \sqrt[9]{3^{0,(3)}}\right|$.

7.10. Спрасціце выраз $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^7$.

7.11. Вылічыце:

а) $\log_{\log_2 \sqrt{2}} \left(\log_{\sqrt{6}} 36\right) + 2$; б) $5^{\frac{\ln 49}{\ln 7}} + \log_{\log_6 36} \log_3 81$.

7.12. Параўнайце значэнні выразаў $-49^{0,5}$ і $\log_{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{9\sqrt[9]{3}}{81}\right)$.

7.13. Знайдзіце значэнне выразу $\log_2 \log_5 \left(\sqrt{7} - 1\right) - \log_2 \log_5 \left(8 - 2\sqrt{7}\right)$.

7.14. Вылічыце:

а) $\log_2 \sin 15^\circ + 0{,}2\log_2 \sin^5 750^\circ + \log_2 \cos 375^\circ$;

б) $\log_4 \left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\log_4 \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

7.15. Выразіце:

а) $\lg 15$ праз $\lg 3$ і $\lg 5$;

б) $\lg 56$ праз $\lg 2$ і $\lg 7$;

в) $\lg 0{,}75$ праз $\lg 2$ і $\lg 3$.

7.16. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $16^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{7}}$; б) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5 + 2\log_{0,5} 5}$;

в) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7}$; г) $\left(2^{\log_4 10} + 3^{-\log_9 10}\right)^2$;

д) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} - 25^{\log_{125} 8}$; е) $36^{\frac{1}{2} - \log_6 5} + 2^{-\log_{\sqrt{2}} 10}$;

ж) $81^{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2,5} - 1$; з) $5{,}5^{\frac{2}{\log_3 11}} \cdot 2^{\frac{2}{\log_3 11}}$.

7.17. Знайдзіце значэнне выразу $\left(11^{0,5\log_{\sqrt[3]{11}} 4} - 3^{4\log_{81} 16}\right) : 8^{\log_2 4}$.

7.18. Вылічыце:

а) $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$; б) $5^{\frac{1}{\log_3 5}} \cdot 5^{\log_5^2 4} - 3 \cdot 4^{\log_5 4} + \lg 0{,}01$.

7.19. Вядома, што $\log_a b = 6$. Знайдзіце $\log_{b^6} \left(a^6 \cdot b^6\right)$.

7.20. Вылічыце:

а) $\log_{12} \left(2\cos 750^\circ + 6^{\log_{36} 3}\right)$; б) $\log_8 \left(2\sin\frac{9\pi}{4} + 5^{\log_{25} 2}\right)$;

в) $2^{\log_2 \sin 135^\circ + \log_4 6}$; г) $3^{\log_9 6 - \log_9 \operatorname{tg}^2 60^\circ}$.

7.21. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$; б) $\left(30 - 5^{1+\log_5 4}\right) \cdot \log_2 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

7.22. Вылічыце:

а) $(\log_5 4 + \log_4 5 + 2)(\log_5 4 - \log_{20} 4)\log_4 5 - \log_5 4$;

б) $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$.

7.23. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{\log_2^2 7 - 6\log_2 7 + 9} + \frac{1}{\log_7 2}$.

7.24. Вылічыце: $\frac{3 \cdot \left(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}\right)}{\log_{0,2} \log_2 32 + \log_{27} 9}$.

7.25. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 - 3\log_3 \sqrt[3]{45}$;

б) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + 2\log_2 6$;

в) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 36^{\frac{1}{\log_7 6}}$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{15} + \log_{25} 4 - \frac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}} + 3^{\frac{\log_2 7}{\log_4 3}}$.

7.26. Спрасціце выраз $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$.

7.27. Вылічыце: $2^{2\log_{0,5} \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6} - 3\log_{0,25} \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$.

7.28. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$; б) $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$;

в) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$; г) $\frac{\log_3 5}{\log_{405} 3} - \frac{\log_3 135}{\log_{15} 3}$;

д) $\frac{\log_3 4}{\log_{108} 3} - \frac{\log_3 12}{\log_{36} 3}$; е) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

7.29. Знайдзіце значэнне выразу $\log_a b$, калі вядома, што $\log^2_{a^3 b}(ab^3) = 9$.

7.30. Вылічыце:

а) $\log_{\sqrt{2}} 5 + \left(9 - \log_2^2 25\right)\log_{200} 2$; б) $\log_{14}^2 7 + \dfrac{\log_{14} 98}{\log_2 14}$.

7.31. Параўнайце $3^{\sqrt{\log_3 2}}$ і $2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

7.32. Вылічыце:

а) $\sqrt{\left(\log_3 4 + 9\log_4 3 - 6\right)\log_2 \sqrt{3}} + \log_2 \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{\left(\log_2 5 + 16\log_5 2 - 8\right)\log_5 2} + 4\log_5 12{,}5$.

7.33. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3^{\log_{\sqrt{3}}(x+2)}$; б) $y = 4^{\log_2(x-1)}$.

7.34. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

7.35. Вылічыце:

а) $\log_9 (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \cdot \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} 27$; б) $7^{\log_{49}(5+\sqrt{3})^2} + \left(\sqrt{10}\right)^{\lg(\sqrt{3}-5)^2}$.

7.36. Знайдзіце значэнне выразу $4\log_{\sqrt{ab}} \left(\dfrac{\sqrt{a}}{b}\right) + 3\log_{\sqrt{ab}} b^2 - \dfrac{2}{\log_b a}$, калі вядома, што $\log_a b = 6$.

7.37. Вылічыце: $\left((36 - \log_2^2 6)\log_{384} 2 + \log_2 6\right) \cdot 3^{\log_9 25}$.

7.38. Знайдзіце значэнне выразу $5^{\log_{16}(28 - 16\sqrt{3}) + \log_4(4 + 2\sqrt{3})}$.

7.39. Вылічыце: $\left(3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2+\sqrt{5}}} + 7^{\log_{49}(2-\sqrt{5})^2} + 7^{\sqrt{\log_7 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 7}}\right)^2$.

7.40. Знайдзіце значэнне выразу $7\log_{\sqrt{ab}} \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b} + 3\log_{\sqrt{ab}} b^2 + \dfrac{3{,}2}{\log_b a}$, калі $\log_a b = 0{,}25$.

7.41. Вылічыце: $\log_{2\sqrt{2}} \sin 70^\circ + \log_{2\sqrt{2}} \sin 50^\circ + \log_{2\sqrt{2}} \sin 10^\circ$.

7.42. Пабудуйце графік функцыі $y = \log_2 \operatorname{tg} x + \log_2 \operatorname{ctg} x$.

7.43. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\log_2^2 20 + \log_2 20 \cdot \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 20 + 2\log_2 5}$; б) $\dfrac{\log_2^2 18 - 4\log_2^2 3 + 3\log_2 18 + 6\log_2 3}{\log_2 18 + 2\log_2 3}$.

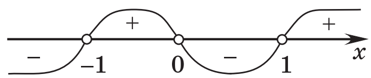
7.44. Вылічыце: $\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^{\log_3(2+\sqrt{3})} \cdot 4^{\log_2 \sqrt{53}} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^{-\log_9\left(8 - 3\sqrt{7}\right)^2}$.

§ 8. Лагарыфмічная функцыя. Вытворная лагарыфмічнай функцыі

Прыклад 1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \lg \frac{x}{x^2 - 1}$.

Рашэнне.

Рэшым няроўнасць $\frac{x}{x^2 - 1} > 0$; $\frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$.



$D = (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Адказ: $D = (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Прыклад 2. Ці з'яўляецца функцыя $f(x) = \log_3\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$ цотнай?

Рашэнне.

Знойдзем абсяг вызначэння функцыі: $\sqrt{1 + x^2} - x > 0$; $\sqrt{1 + x^2} > x$.

Атрыманая няроўнасць правільная для любых $x \in \boldsymbol{R}$, значыць, $D(f) = \boldsymbol{R}$ — сіметрычны адносна нуля.

$$f(-x) = \log_3\left(\sqrt{1 + (-x)^2} - (-x)\right) = \log_3\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) =$$

$$= \log_3\left(\frac{\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right)\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) = \log_3\left(\frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2} - x}\right) =$$

$= \log_3\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)^{-1} = -\log_3\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) = -f(x)$, г. зн. функцыя з'яўляецца няцотнай.

Адказ: не, не з'яўляецца.

Прыклад 3. Дакажыце, што графік функцыі $y = \log_2 \frac{x - 1}{x + 1}$ сіметрычны адносна пачатку каардынат.

Рашэнне.

Абсяг вызначэння дадзенай функцыі $D = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ сіметрычны адносна нуля.

Паколькі $y(-x) = \log_2 \frac{-x - 1}{-x + 1} = \log_2 \frac{x + 1}{x - 1} = \log_2 \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{-1} = -\log_2 \frac{x - 1}{x + 1} = -y(x)$, то функцыя $y = \log_2 \frac{x - 1}{x + 1}$ з'яўляецца няцотнай, і, значыць, яе графік сіметрычны адносна пачатку каардынат.

Прыклад 4. Знайдзіце колькасць усіх цэлых лікаў, якія не ўваходзяць у абсяг вызначэння функцыі $y = \log_3\left(x^2 - 5 - 4|x|\right)$.

Рашэнне.

У абсяг вызначэння дадзенай функцыі не ўваходзяць усе лікі, якія задавальняюць умову $x^2 - 5 - 4|x| \leqslant 0$; $|x|^2 - 4|x| - 5 \leqslant 0$; $(|x| - 5)(|x| + 1) \leqslant 0$; $|x| - 5 \leqslant 0$; $|x| \leqslant 5$; $x \in [-5;\ 5]$.

У атрыманы прамежак уваходзяць 11 цэлых лікаў.

Адказ: 11.

Прыклад 5. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $f(x) = \log_{0,5}(x^2 - 4x + 8)$.

Рашэнне.

$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geqslant 4$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

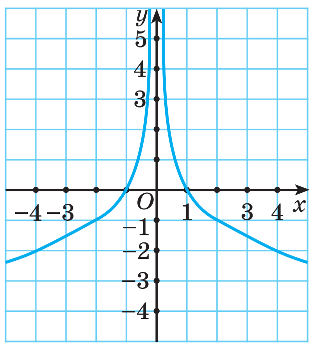
Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} t$ спадае пры $t > 0$, то $\log_{0,5}((x-2)^2 + 4) \leqslant \log_{0,5} 4$; $\log_{0,5}((x-2)^2 + 4) \leqslant -2$, г. зн. $y \leqslant -2$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, тады $E(f) = (-\infty;\ -2]$.

Адказ: $(-\infty;\ -2]$.

Прыклад 6. Пабудуйце відарыс графіка функцыі $y = \log_{0,25} x^2$.

Рашэнне.

$y = \log_{2^{-2}} x^2$; $y = -\log_2 |x|$. Відарыс графіка функцыі $y = \log_{0,25} x^2$ паказаны на рысунку 5.



Рыс. 5

Прыклад 7. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі

$f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$.

Пабудуйце графік гэтай функцыі.

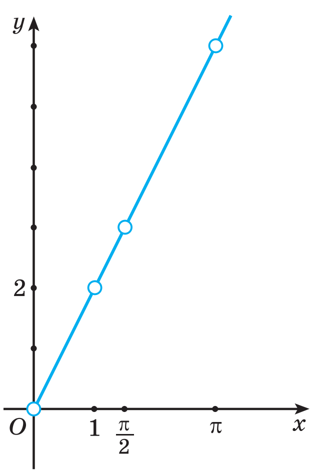
Рашэнне.

Знойдзем абсяг вызначэння функцыі

$f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$;

$$\begin{cases} f(x) = \log_x 1 + 2x, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = 2x, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Графік функцыі $f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$ паказаны на рысунку 6.



Рыс. 6

Вытворная лагарыфмічнай функцыі

Функцыі $f(x) = a^x$ і $g(x) = \log_a x$ узаемна адваротныя.

Паколькі $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, то вытворная функцыі g у пункце $y_0 = f(x_0)$ роўна $(g)' = \frac{1}{(f)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$.

Такім чынам, $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Напрыклад, $\left(\log_3 x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$, а $(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

Прыклад 8. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = \ln x - e^{2x}$; б) $y = \lg(5x - 1)$;

в) $y = \sqrt{x} \cdot \log_3 x$; г) $y = \frac{\log_2 x}{\sin x}$.

Рашэнне.

а) $y' = \left(\ln x - e^{2x}\right)' = (\ln x)' - \left(e^{2x}\right)' = \frac{1}{x} - 2e^{2x}$;

б) $y' = \left(\lg(5x - 1)\right)' = \frac{1}{(5x - 1)\ln 10} \cdot (5x - 1)' = \frac{5}{(5x - 1)\ln 10}$;

в) $y' = \left(\sqrt{x} \cdot \log_3 x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \log_3 x + \sqrt{x} \cdot \left(\log_3 x\right)' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log_3 x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \frac{\log_3 x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x \ln 3}$;

г) $y' = \left(\frac{\log_2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\log_2 x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \log_2 x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2} \cdot \sin x - \cos x \cdot \log_2 x}{\sin^2 x}$.

8.1. Выберыце функцыю, графік якой паказаны на рысунку 7:

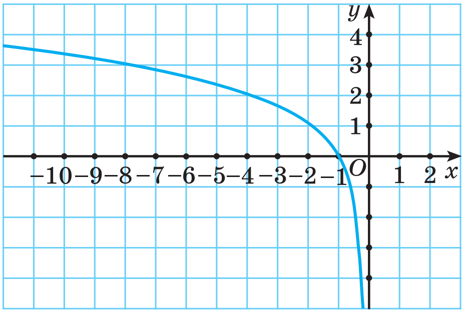
а) $y = \log_2 x$;

б) $y = -\log_2 x$;

в) $y = \log_2(-x)$;

г) $y = -\log_2(-x)$;

д) $y = -2^x$.



Рыс. 7

8.2. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \lg\left(-x^2 - x\right)$; б) $y = \log_{0,3}\left(1 - 4x^2\right)$;

в) $y = \lg\frac{x^2 - 9}{x}$; г) $f(x) = \sqrt[4]{7} + \log_5\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

д) $y = \lg\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{7}\right)$; е) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-7}{x^2+2x-8} - 1\right)$.

8.3. Ці праўда, што:

а) $\ln 5 < \ln 6$; б) $\log_{\frac{3}{7}} 6 < \log_{\frac{3}{7}} 7$?

8.4. Дадатным ці адмоўным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\log_2 3$; б) $\log_5 \frac{2}{7}$; в) $\log_{0,2} 7$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}78$?

8.5. Параўнайце з адзінкай значэнне выразу:

а) $\log_5 4$; б) $\log_6 7$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 3$; г) $\log_{0,9}\frac{2}{3}$.

8.6. Вызначце, ці правільная няроўнасць:

а) $2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} > 3\log_8 26$; б) $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}}\frac{1}{17}$;

в) $\log_2 5 < \log_3 13$; г) $2^{\log_5 3} > 3^{\log_5 2} + 0{,}01$.

8.7. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $\log_2 33$; б) $\lg 9999$; в) $\log_5 0{,}041$.

8.8. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2 - x) + \log_2\frac{1}{x+3}$; б) $y = \log_2\left(9 - 4x^2\right) + \frac{5}{\sqrt[4]{x+1}}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\log_3(4-x)}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt{5x - x^2}}{\log_{0,7}(5 - 3x)}$;

д) $f(x) = \lg(8 - x) + \lg(x-3)^2$; е) $f(x) = \lg(5 - x)^3 + \lg(x - 2)$;

ж) $f(x) = \log_x\left(10 + 3x - x^2\right)$; з) $y = \log_{x-2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{2x+3}\right)$.

8.9. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $y = \log_3\left(x^2 + 2x + 28\right)$.

8.10. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = \log_3\left(23 - x^2 + 4x\right)$.

8.11. Якая з наступных функцый прымае толькі неадмоўныя значэнні:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(5 + 4x - x^2\right)$; б) $y = \log_3\left(5 + 4x + x^2\right)$;

в) $y = \log_3\left(3 + 4x - x^2\right)$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(3 + 4x - x^2\right)$;

д) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(3 + 4x - x^2\right)$?

8.12. Размясціце ў парадку спадання лікі:

а) $\log_5 0{,}6$; $\log_5 2{,}7$; $\log_5 0{,}2$; $\log_5 \frac{1}{3}$; $\log_5 3{,}5$;

б) $\log_{0,7} 7$; $\log_{0,7} 2{,}9$; $\log_{0,7} 0{,}5$; $\log_{0,7} 3{,}8$; $\log_{0,7} \frac{3}{7}$.

8.13. Дакажыце, што функцыя $f(x) = \log_2\left(\frac{3 - x}{3 + x}\right)$ з'яўляецца няцотнай.

8.14. Вызначце знак значэння выразу:

а) $\lg(\lg 5)$; б) $\log_{0,3}(\log_3 5)$.

8.15. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $f(x) = \frac{\log_5|x - 4|}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$.

8.16. Дакажыце, што функцыя:

а) $y = \log_3\left(7 - x^2\right) + \frac{\cos\frac{x}{3}}{\log_2|x|}$ з'яўляецца цотнай;

б) $y = \frac{\sin 5x}{\log_3|x|} \cdot \log_7\left(10 - x^2\right)$ з'яўляецца няцотнай.

8.17. Функцыя $y = f(x)$ няцотная і для $x > 0$ задаецца формулай $f(x) = \log_2 x$. Знайдзіце карані ўраўнення $f(x) = 3$.

8.18. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \left|\log_2 x\right|$; б) $y = \log_2|x|$;

в) $y = \left|\log_2(x - 1)\right|$; г) $y = \left|\log_2|x| - 2\right|$.

8.19. Пабудуйце графік функцыі $y = \log_3\frac{1}{|x|}$.

8.20. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента графікі функцый $y = f(x)$ і $y = g(x)$ супадаюць:

а) $f(x) = \log_7\left(x^3 + x^2 - 6x\right)$, $g(x) = \log_7(x + 3) + \log_7\left(x^2 - 2x\right)$;

б) $f(x) = \log_3\left(x^3 - 5x^2 + 4x\right)$, $g(x) = \log_3(1 - x) + \log_3\left(4x - x^2\right)$.

8.21. Знайдзіце абсяг вызначэння, мноства значэнняў функцыі $f(x) = \sin^2\left(\lg\frac{1-x}{4+x^2}\right) + \cos^2\left(\lg\frac{1-x}{4+x^2}\right) - 2x$ і пабудуйце яе графік.

8.22. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = \log_2 x + x^5$; б) $y = \lg(x^2 - x)$; в) $y = x^4 \cdot \log_5 x$;

г) $y = \frac{x^2}{\ln x}$; д) $y = \ln(\sin x)$; е) $y = \log_2(\cos x)$;

ж) $y = \ln x^4$; з) $y = \log_3^2 x$; і) $y = \sqrt{\ln x}$.

8.23. Вылічыце:

а) $f'(5)$, калі $f(x) = 2\ln x - \ln 5$; б) $f'(1)$, калі $f(x) = 3^x \cdot \log_3 x$;

в) $f'(2)$, калі $f(x) = x^3 - \ln x^2$; г) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, калі $f(x) = \ln\sin x$.

8.24. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0:

а) $f(x) = x^2 - \ln x$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = \log_3(3x + 5)$, $x_0 = -1$.

8.25. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = x - \ln(5x + 6)$ у пункце з абсцысай $x_0 = -1$.

8.26. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f(x) = \ln x - x$; б) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

8.27. Знайдзіце прамежкі нарастання функцыі $f(x) = -x^2 + 8\ln x$.

8.28. Даследуйце функцыю $f(x) = x^2 - 2\ln x$ і пабудуйце яе графік.

8.29. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = x - \ln x$ на адрэзку [0,5; 4].

8.30. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $f'(x) + \frac{4}{x} \cdot f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$, калі $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$.

§ 9. Лагарыфмічныя ўраўненні

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$.

Рашэнне.

$(\lg x^3)^2 - 10\lg x + 1 = 0$; $(3\lg x)^2 - 10\lg x + 1 = 0$; $9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$.

Няхай $\lg x = t$. Тады $9t^2 - 10t + 1 = 0$; $t = 1$ або $t = \frac{1}{9}$.

Такім чынам, дадзенае ўраўненне раўназначна сукупнасці ўраўненняў:

$$\left[\begin{array}{l}\lg x = 1,\\ \lg x = \frac{1}{9};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10,\\ x = 10^{\frac{1}{9}};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10,\\ x = \sqrt[9]{10}.\end{array}\right.$$

Адказ: $\sqrt[9]{10}$; 10.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне $\lg^2 100x + \lg^2 10x = 14 + \lg\frac{1}{x}$.

Рашэнне.

$$\lg^2 100x + \lg^2 10x = 14 + \lg\frac{1}{x}; \quad (\lg 100x)^2 + (\lg 10x)^2 = 14 + \lg x^{-1};$$

$$(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 - \lg x; \quad (2 + \lg x)^2 + (1 + \lg x)^2 = 14 - \lg x.$$

Няхай $t = \lg x$, тады ўраўненне прымае выгляд

$$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 = 14 - t; \quad 4 + 4t + t^2 + 1 + 2t + t^2 = 14 - t; \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}t = -4{,}5,\\ t = 1.\end{array}\right. \quad \text{Адкуль} \quad \left[\begin{array}{l}\lg x = -4{,}5,\\ \lg x = 1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10^{-4{,}5},\\ x = 10.\end{array}\right.$$

Адказ: $10^{-4{,}5}$; 10.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $\log_3(2x-1) - 2\log_3(2x+5) = \log_{\frac{1}{2}} 8$.

Рашэнне.

Паколькі $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, то запішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе

$$\log_3(2x-1) - 2\log_3(2x+5) = -3; \quad \log_3(2x-1) + 3 = 2\log_3(2x+5);$$

$$\begin{cases}\log_3(2x-1) + \log_3 27 = \log_3(2x+5)^2,\\ 2x + 5 > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}\log_3(27(2x-1)) = \log_3(2x+5)^2,\\ 2x > -5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}54x - 27 = (2x+5)^2,\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2 - 17x + 26 = 0,\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 6{,}5,\\ x = 2,\end{array}\right.\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}x = 6{,}5,\\ x = 2.\end{array}\right.$$

Адказ: 2; 6,5.

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $5\sqrt{\lg x} + 4\lg\sqrt{\frac{1}{x}} = 2$.

Рашэнне.

$$5\sqrt{\lg x} + 4\lg\sqrt{\frac{1}{x}} = 2; \quad 5\sqrt{\lg x} + 4\lg x^{-\frac{1}{2}} = 2; \quad 5\sqrt{\lg x} - 2\lg x = 2.$$

Няхай $\sqrt{\lg x} = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $5t - 2t^2 = 2$; $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$; $t_2 = 0,5$.

Тады $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\lg x} = 2, \\ \sqrt{\lg x} = 0,5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lg x = 4, \\ \lg x = 0,25;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 10^4, \\ x = 10^{0,25}.\end{array}\right.$

Адказ: $\sqrt[4]{10}$; 10 000.

Прыклад 5. Рашыце ўраўненне
$\log_2\left(2^x - x^2 + 3,5x - 5\right) = \log_2\left(2^x - 1,5x - 1\right)$.

Рашэнне.
$2^x - x^2 + 3,5x - 5 = 2^x - 1,5x - 1$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l}x = 1, \\ x = 4.\end{array}\right.$

Праверка. Пры $x = 1$ атрымаем: $\log_2\left(2^1 - 1^2 + 3,5 \cdot 1 - 5\right) = \log_2(-0,5)$ — атрыманы выраз не мае сэнсу.

Пры $x = 4$ атрымаем: $\log_2\left(2^4 - 4^2 + 3,5 \cdot 4 - 5\right) = \log_2\left(2^4 - 1,5 \cdot 4 - 1\right)$; $\log_2 9 = \log_2 9$ — правільная лікавая роўнасць.

Адказ: 4.

Прыклад 6. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $x + \log_2\left(2^x - 6\right) = \log_2\left(2^{x+2} - 16\right)$.

Рашэнне.
Запішам $x = \log_2 2^x$ і атрымаем ураўненне
$\log_2 2^x + \log_2\left(2^x - 6\right) = \log_2\left(2^{x+2} - 16\right)$.

Няхай $t = 2^x$, тады $\log_2 t + \log_2(t - 6) = \log_2(4t - 16)$; $\begin{cases} t(t-6) = 4t - 16, \\ t > 6; \end{cases}$

$\begin{cases} t^2 - 10t + 16 = 0, \\ t > 6; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = 8, \end{array}\right. \\ t > 6; \end{cases}$ $t = 8$. Адкуль $2^x = 8$; $x = 3$.

Адказ: 3.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$.

Рашэнне.
Паколькі $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, то ўраўненне $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$ запішам у выглядзе $7^{\lg x} = 98 - 7^{\lg x}$; $7^{\lg x} + 7^{\lg x} = 98$; $2 \cdot 7^{\lg x} = 98$; $7^{\lg x} = 49$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Адказ: 100.

Прыклад 8. Рашыце ўраўненне $\log_{-x-1}(4x+25)=2$.

Рашэнне.

Дадзенае ўраўненне раўназначна сістэме:

$$\begin{cases} 4x+25=(-x-1)^2, \\ 4x+25>0, \\ -x-1>0, \\ -x-1\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+25=x^2+2x+1, \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-24=0, \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad x=-4.$$

Адказ: –4.

Прыклад 9. Знайдзіце суму паслядоўных цэлых лікаў, паміж якімі змяшчаецца сума каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення

$$0{,}5\log_{2-x}\left(x^2+x-6\right)^2=2.$$

Рашэнне.

$$0{,}5\log_{2-x}\left(x^2+x-6\right)^2=2; \quad \log_{2-x}\left|x^2+x-6\right|=2; \quad \begin{cases} \left|x^2+x-6\right|=(2-x)^2, \\ 2-x>0, \\ 2-x\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|x^2+x-6\right|=x^2-4x+4, \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=x^2-4x+4, \\ x^2+x-6=-x^2+4x-4, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5x=10, \\ 2x^2-3x-2=0, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Сума паслядоўных цэлых лікаў, паміж якімі змяшчаецца корань дадзенага ўраўнення, роўна –1.

Адказ: –1.

Прыклад 10. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x+2}\cdot\log_2(4+x)=0$.

Рашэнне.

Ураўненне $\sqrt{x+2}\cdot\log_2(4+x)=0$ раўназначна сукупнасці

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2=0,\\ x+4>0,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(4+x)=0,\\ x+2\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2,\\ x>-4,\end{cases}\\ \begin{cases}4+x=1,\\ x\geqslant -2;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2,\\ x>-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ x\geqslant -2;\end{cases}\end{array}\right.\quad x=-2.$$

Адказ: –2.

Прыклад 11. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$.

Рашэнне.

$7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$; $\left(7^{\log_7 x}\right)^{\log_7 x}+x^{\log_7 x}=14$; $x^{\log_7 x}+x^{\log_7 x}=14$;

$2x^{\log_7 x}=14$; $x^{\log_7 x}=7$. Па азначэнні лагарыфма атрымаем $\log_7 x=\log_x 7$, тады $\log_7 x=\frac{1}{\log_7 x}$; $\log_7^2 x=1$; $\left[\begin{array}{l}\log_7 x=1,\\ \log_7 x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=\frac{1}{7}.\end{array}\right.$

Здабытак каранёў ураўнення роўны 1.

Адказ: 1.

Прыклад 12. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $3\log_3^2(2x+1)-4\log_3(2x+1)\cdot\log_3(x+1)+\log_3^2(x+1)=0$.

Рашэнне.

Няхай $a=\log_3(x+1)$, $b=\log_3(2x+1)$, тады ўраўненне прымае выгляд $a^2-4ab+3b^2=0$. Разгледзім дадзенае ўраўненне як квадратнае адносна a і атрымаем, што $a=b$ або $a=3b$. Тады $\log_3(x+1)=\log_3(2x+1)$ або $\log_3(x+1)=3\log_3(2x+1)$.

Рэшым ураўненне

$\log_3(x+1)=\log_3(2x+1)$; $\begin{cases}x+1=2x+1,\\ x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\ x>-1;\end{cases}$ $x=0$.

Рэшым ураўненне

$\log_3(x+1)=3\log_3(2x+1)$; $\begin{cases}x+1=(2x+1)^3,\\ x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}8x^3+12x^2+5x=0,\\ x>-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x(8x^2+12x+5)=0,\\ x>-1.\end{cases}$

Паколькі дыскрымінант квадратнага трохчлена $8x^2 + 12x + 5$ адмоўны, то $x = 0$.

Адказ: 0.

Прыклад 13. Рашыце ўраўненне

$$\log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + \frac{6}{\log_{3x^2-1} 2\sqrt{2}}}.$$

Рашэнне.

$$\log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + \frac{6}{\log_{3x^2-1} 2\sqrt{2}}};$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + 6\log_{2\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right)}, \\ 3x^2 - 1 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_2\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + 6 + 4\log_2\left(3x^2 - 1\right)}, \\ x^2 \neq \frac{2}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Няхай $\log_2\left(3x^2 - 1\right) = t$, тады першае ўраўненне сістэмы прымае выгляд

$$2t + 2 = \sqrt{7 + 4t}; \quad \begin{cases} 4 + 8t + 4t^2 = 7 + 4t, \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4t^2 + 4t - 3 = 0, \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -1{,}5, \\ t = 0{,}5, \end{array}\right. \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad t = 0{,}5.$$

Тады $\log_2\left(3x^2 - 1\right) = 0{,}5$; $3x^2 - 1 = \sqrt{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

З улікам умоў сістэмы атрымаем $x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

Адказ: $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

Прыклад 14. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 4^{x-y} - 2^{7y-x} = 0, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} 4^{x-y} - 2^{7y-x} = 0, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4^{x-y} = 2^{7y-x}, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{2x-2y} = 2^{7y-x}, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 7y - x, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_9 y^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_9 \dfrac{y^2}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 3y = \dfrac{y^2}{9}, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 27, \end{array}\right. \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 81, \\ y = 27. \end{cases}$$

Адказ: (81; 27).

Прыклад 15. Знайдзіце суму $x_0 + y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x - y) + \log_2(x + y) = 5, \\ \lg x - \lg 4 = -\lg y + \lg 3, \\ y \neq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - y^2) = 5, \\ \lg(xy) = \lg 12, \\ x > y, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ xy = 12, \\ x > y, \\ y > 0, \\ y \neq 3. \end{cases}$$

Рэшым сістэму $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ xy = 12: \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x = \dfrac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 32, \\ x = \dfrac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} y^4 + 32y^2 - 144 = 0, \\ x = \dfrac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2 = 4, \\ y^2 = -36, \end{array}\right. \\ x = \dfrac{12}{y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4, \\ x = \dfrac{12}{y}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = -6. \end{cases} \end{array}\right.$$

З улікам умоў $\begin{cases} x > y, \\ y > 0, \\ y \neq 3 \end{cases}$ атрымаем, што пара лікаў (6; 2) з'яўляецца рашэннем сістэмы і $x_0 + y_0 = 8$.

Адказ: 8.

Прыклад 16. Рашыце ўраўненне

$$\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4.$$

Рашэнне.

Абсяг вызначэння дадзенага ўраўнення вызначаецца сістэмай няроўнасцей $\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ 2x + 1 \neq 1, \\ -4x^2 + 8x + 5 > 0, \\ 5 - 2x > 0, \\ 5 - 2x \neq 1, \\ 4x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases}$

З улікам гэтага пераўтворым ураўненне

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + \log_{5-2x}(2x+1)^2 = 4;$$

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + 2\log_{5-2x}|2x+1| = 4;$$

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$\log_{2x+1}(2x+1) + \log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$1 + \log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$\log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 3; \ \log_{2x+1}(5-2x) + \frac{2}{\log_{2x+1}(5-2x)} = 3.$$

Няхай $t = \log_{2x+1}(5-2x)$, тады $t + \frac{2}{t} = 3$; $t^2 - 3t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} \log_{2x+1}(5-2x) = 1, \\ \log_{2x+1}(5-2x) = 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5 - 2x = 2x + 1, \\ 5 - 2x = (2x+1)^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2, \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Улічыўшы абсяг вызначэння ўраўнення, атрымаем, што каранямі ўраўнення з'яўляюцца лікі 1 і $\frac{1}{2}$.

Адказ: $\frac{1}{2}$; 1.

Прыклад 17. Рашыце ўраўненне $\log_2\left(4x^2+1\right)=\log_2 x+8x(1-x)$.

Рашэнне.

$\log_2\left(4x^2+1\right)=\log_2 x+8x(1-x)$; $\log_2\left(4x^2+1\right)-\log_2 x=-8x^2+8x$;

$\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)=-2\left(4x^2-4x+1\right)+2$; $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=-2(2x-1)^2+2$.

Па ўласцівасці двух узаемна адваротных лікаў $2x+\frac{1}{2x}\geqslant 2$ пры $x>0$.

Паколькі функцыя $y=\log_2 t$ нарастае на прамежку $(0;+\infty)$, то $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)\geqslant 2$ пры $x>0$.

З другога боку, $-2(2x-1)^2+2\leqslant 2$ пры $x\in\boldsymbol{R}$.

Такім чынам, ураўненне $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=-2(2x-1)^2+2$ раўназначна сістэме ўраўненняў $\begin{cases}\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=2,\\ -2(2x-1)^2+2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+\frac{1}{2x}=2,\\ x=\frac{1}{2};\end{cases}$ $x=\frac{1}{2}$.

Адказ: 0,5.

Прыклад 18. Рашыце ўраўненне $\log_3(-\cos x)-\log_9\sin x+\frac{1}{4}=-\log_9 2$.

Рашэнне.

$\log_3(-\cos x)-\log_9\sin x+\frac{1}{4}=-\log_9 2$;

$\log_3(-\cos x)-\frac{1}{2}\log_3\sin x+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\log_3 2$;

$\log_3(-\cos x)+\log_3\sqrt[4]{3}=\frac{1}{2}\log_3\sin x-\frac{1}{2}\log_3 2$; $\log_3\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)=\frac{1}{2}\log_3\frac{\sin x}{2}$;

$2\log_3\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)=\log_3\frac{\sin x}{2}$; $\begin{cases}\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)^2=\frac{\sin x}{2},\\ \cos x<0;\end{cases}$ $\begin{cases}2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x=0,\\ \cos x<0;\end{cases}$

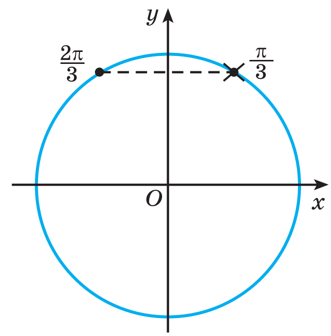
$\begin{cases}2\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x-2\sqrt{3}=0,\\ \cos x<0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\\ \cos x<0.\end{cases}$

Паколькі $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$, то ўраўненне $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ не мае каранёў. Тады $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$

З улікам умовы $\cos x < 0$ атрымаем

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 8).

Адказ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.



Рыс. 8

Прыклад 19. Рашыце ўраўненне

$\log_{\cos x}(\cos 2x + 3\cos x) = 0.$

Рашэнне.

$\log_{\cos x}(\cos 2x + 3\cos x) = 0;\ \log_{\cos x}\left(2\cos^2 x - 1 + 3\cos x\right) = 0.$

Няхай $\cos x = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $\log_t\left(2t^2 - 1 + 3t\right) = 0;$

$$\begin{cases} 2t^2 - 1 + 3t = 1, \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2t^2 + 3t - 2 = 0, \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad t = \frac{1}{2}.$$

Тады $\cos x = \frac{1}{2};\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}.$

Прыклад 20. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $2|\sin x| = \log_{\mathrm{ctg}x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$.

Рашэнне.

Выраз $\log_{\mathrm{ctg}x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$ мае сэнс, калі $\begin{cases} \mathrm{ctg}x > 0, \\ \mathrm{ctg}x \neq 1, \\ \sin x > 0. \end{cases}$ Паколькі катангенс і сінус некаторага вугла x дадатныя, то x — вугал першай чвэрці. Тады $\cos x > 0$. Значыць, ураўненне $2|\sin x| = \log_{\mathrm{ctg}x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$ прымае выгляд $2\sin x = \log_{\mathrm{ctg}x}\frac{\cos x}{\sin x};\ \ 2\sin x = \log_{\mathrm{ctg}x}\mathrm{ctg}x;\ \ 2\sin x = 1;\ \ \sin x = \frac{1}{2}.$

Паколькі x — вугал першай чвэрці, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = 30° + 360°n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Найбольшы адмоўны корань дадзенага ўраўнення роўны $-330°$.

Адказ: $-330°$.

Прыклад 21. Рашыце ўраўненне $\log_2(x - x^2) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2$.

Рашэнне.

Ацэнім левую і правую часткі ўраўнення.

Паколькі $-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$ і функцыя $y = \log_2 t$ нарастае пры $t > 0$, то $\log_2(x - x^2) \leqslant \log_2 \frac{1}{4}$, г. зн. $\log_2(x - x^2) \leqslant -2$.

З другога боку, $0 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) \leqslant 1$; $-2 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2 \leqslant -1$.

Такім чынам, левая частка выходнага ўраўнення не перавышае -2, а правая большая або роўна -2, г. зн. ураўненне раўназначна сістэме

$$\begin{cases} \log_2(x - x^2) = -2, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) = 0; \end{cases} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Адказ: $\frac{1}{2}$.

Прыклад 22. Знайдзіце ўсе цэлыя значэнні a, пры якіх ураўненне $\log_{0,4}(x^6 + 1) = a^4 + 5a^2 - 6$ мае карані.

Рашэнне.

Паколькі $x^6 + 1 \geqslant 1$ пры $x \in \boldsymbol{R}$ і функцыя $y = \log_{0,4} t$ спадае на абсягу вызначэння, то $\log_{0,4}(x^6 + 1) \leqslant 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$. Тады ўраўненне $\log_{0,4}(x^6 + 1) = a^4 + 5a^2 - 6$ мае карані, калі $a^4 + 5a^2 - 6 \leqslant 0$; $(a^2 + 6)(a^2 - 1) \leqslant 0$; $a^2 - 1 \leqslant 0$; $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Цэлымі значэннямі a, пры якіх выходнае ўраўненне мае карані, з'яўляюцца лікі -1; 0; 1.

Адказ: -1; 0; 1.

9.1. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3(2x^2 + x - 1) = 2$;

б) $\log_2(3x^2 - 5x - 4) = 3$;

в) $\log_3(4x) = \log_3(x + 1)$;

г) $\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2)$;

д) $\lg(x^2 - 6) - \lg x = 0$;

е) $\log_{0,1}(x^2 - 8) - \log_{0,1} 2x = 0$.

9.2. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = \log_3(x^2 - x + 1)$; б) $f(x) = \log_2(x^2 - x)$.

9.3. Рашыце ўраўненне:

а) $\dfrac{\log_4(x^2 - 3)}{x - 2} = 0$; б) $\dfrac{\log_3(10 - x^2)}{x + 3} = 0$.

9.4. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$; б) $\log_5 \log_3 \log_{0,5}(x + 1) = 0$.

9.5. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2 \sin x = -1$; б) $\lg \cos x = 0$;

в) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x = -1$; г) $\log_3 \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{2}$.

9.6. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $f(x) = \log_7(|x| + 4)$ і прамой $y = 2$;

б) $f(x) = |\log_2(x + 6) - 2|$ і прамой $y = 2$.

9.7. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_4^2 x - \log_4 x = 0$; б) $\lg^2 x - 3\lg x = 0$;

в) $\log_3^2 x = 2 - \log_3 x$; г) $3 = \ln^2 x - 2\ln x$.

9.8. Рашыце ўраўненне:

а) $\dfrac{17 - \lg x}{4\lg x} = 4\lg x$; б) $\dfrac{1}{5 - 4\lg x} + \dfrac{4}{1 + \lg x} = 3$.

9.9. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_2^2(-x) - 3\log_2(-x) - 4 = 0$; б) $\lg^2(-x) - \lg(-x) - 2 = 0$.

9.10. Рашыце ўраўненне:

а) $2\log_4(3x + 2) = 3$; б) $\log_3 x + 4\log_9 x = 9$;

в) $\log_2 x + 6\log_4 x = 8$; г) $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x$.

9.11. Знайдзіце нуль функцыі $y = \log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x - 2$.

9.12. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$; б) $4\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\sqrt{3}} x = 3$.

9.13. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2\lg x + \lg y = 2, \\ \lg x - 2\lg y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg(x - y) = 1, \\ \lg x - \lg y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\log_5 x - \log_5 y = 0, \\ x^2 + 3y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ xy + 3x = 2. \end{cases}$

9.14. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3^2(3x) + \log_3 x = 5;$ б) $\log_2^2(4x) + 2\log_2 x = -5;$

в) $0{,}5\lg x \cdot \lg(0{,}001) = \lg 0{,}1;$ г) $\log_2(2x^2)\log_2(16x) = 4{,}5\log_2^2 x.$

9.15. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4\right) = -1.$

9.16. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1;$

б) $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x;$

в) $2 - \log_2 x = \log_2(3x - 4);$

г) $3 - \log_3(2x - 1) = \log_3(18x - 27);$

д) $\log_2(1 - x) + \log_2(-5x - 2) = 2 + \log_2 3;$

е) $\log_5(4x + 1) + \log_5(x + 1) = \log_5 35 - 1.$

9.17. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $f(x) = \log_2 x$ і $g(x) = 5 - \log_2(x + 4);$

б) $f(x) = \log_3(2x - 1)$ і $g(x) = 2 - \log_3(x + 1);$

в) $f(x) = \log_{0,6}(4x + 1) - 1$ і $g(x) = \log_{0,6}(8x).$

9.18. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\lg\sin x = \lg\cos x + \lg 2;$ б) $\log_2 \sin 2x + \log_{\frac{1}{2}} \cos x = \frac{1}{2}.$

9.19. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(2x + 3) + \log_2(x + 2) = \log_2(-2x - 1);$

б) $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x - 1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2;$

в) $\log_3(4x) + \log_3(9x) + \log_3 x = \log_3(18x) + \log_3(3x).$

9.20. Знайдзіце пункт перасячэння графіка функцыі $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x + 6} + \sqrt{3x + 7} - 12\right)$ з воссю абсцыс.

9.21. Рашыце ўраўненне:

а) $\lg(x - 2)^2 = 2\lg 2;$ б) $\lg(2x + 3)^4 = 4\lg 3;$

в) $2\lg x^2 + \lg^2(-x) = 5;$ г) $3\log_2 x^2 + \log_2^2(-x) = 7.$

9.22. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_4(x+2)^2 + \log_4(10-x)^2 = 4 + \log_4 x^2$;

б) $\log_4(7-x)^2 + \log_4(5+x)^2 = 4 + \log_4(5-x)^2$;

в) $2 + \lg\left(1+4x^2-4x\right) - \lg\left(19+x^2\right) = 2\lg(1-2x)$;

г) $\log_2\left(9x^2+1-6x\right) - \log_2\left(4+x^2\right) = 2\log_2(1-3x) - 3$.

9.23. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2\left(2^{x+1}-8\right) = x$;

б) $\log_3\left(6+3^{x-2}\right) = x-1$;

в) $\log_6\left(5+6^{-x}\right) = x+1$;

г) $2x - \lg\left(5^{2x}+4x-16\right) = \lg 4^x$;

д) $\lg 6 - \lg\left(2^x+1\right) = x(1-\lg 5)$;

е) $\log_2\left(2^x-5\right) - \log_2\left(2^x-2\right) = 2-x$.

9.24. Колькі пунктаў перасячэння маюць графікі функцый $y = \log_2\left(9-2^x\right)$ і $y = 10^{\lg(3-x)}$?

9.25. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{1}{2x}\lg 2 = \lg\left(2^{\frac{1}{x}}-2\right)$;

б) $\log_8\left(4^{x^2-1}-1\right) + \frac{2}{3} = \log_8\left(2^{x^2+2}-7\right)$.

9.26. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 1,\\ 3^{x-y} = 27^{\frac{2}{3}};\end{cases}$

б) $\begin{cases}4^{x+y} = 2^{3y-x},\\ \log_9 x - \log_3 y = 1.\end{cases}$

9.27. Знайдзіце нулі функцыі $y = \lg(\lg x) + \lg\left(\lg x^3 - 2\right)$.

9.28. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 x^2 + \log_3 x^3 - 6$;

б) $\log_3 x \cdot \log_4 x = \log_3 x^3 + \log_4 x^4 - 12$.

9.29. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x-4}\cdot\log_2(x-2) = 0$;

б) $\sqrt{3x+18}\cdot\log_4(x+4) = 0$.

9.30. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення:

а) $\left(3x^2-4x-7\right)\log_3(2-x) = 0$;

б) $\left(x^2-3x-4\right)\cdot\log_5(3x-8) = 0$.

9.31. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$;

б) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$;

в) $\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x)$;

г) $\log_2(1-x) = 1 + 6\log_{1-x} 2$;

д) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$;

е) $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

9.32. Знайдзіце нулі функцыі $y = \log_{2x} x + \log_{8x^2} x$.

9.33. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_{(x-6)^2}\left(x^2 - 5x + 9\right) = \frac{1}{2}$; б) $\log_{x+1}\left(x^2 + x - 6\right)^2 = 4$.

9.34. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_x \sqrt{3x+4} = 1$.

9.35. Рашыце ўраўненне $\log_{x^2-6x+8}\left(\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2 + 2x\right)\right) = 0$.

9.36. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

9.37. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \lg\left(4x^2 + y^2\right) = \lg 15 + 1, \\ \lg(2x + y) + \lg(2x - y) = \lg 0{,}5 + 2. \end{cases}$

9.38. Рашыце ўраўненне:

а) $16^{\log_4 x} + 2x = 15$; б) $36^{\log_6 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1$;

в) $9^{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 0{,}5x - 9\right)} = 25^{\log_{\frac{1}{5}}(7 - 0{,}5x)}$; г) $16^{\log_{\frac{1}{4}}\left(2x^2 + 2x + 0{,}5\right)} = 49^{\log_{\frac{1}{7}}(x + 1{,}5)}$.

9.39. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $2^{1+\log_2 x} + 4^{1+\log_2 x} = 110$; б) $15 + \lg\frac{1}{x} = 2\sqrt{\lg x}$;

в) $49^{\log_{0,5}^2 x} - 8 \cdot 7^{\log_{0,5}^2 x} + 7 = 0$; г) $\left|1 - \log_{\frac{1}{6}} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{\frac{1}{6}} x\right|$.

9.40. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$.

9.41. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_{1-2x}\left(6x^2 - 5x + 1\right) - \log_{1-3x}\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 2$;

б) $\log_{3x+7}\left(9 + 12x + 4x^2\right) + \log_{2x+3}\left(6x^2 + 23x + 21\right) = 4$.

9.42. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$; б) $\sqrt{\log_x \sqrt{0{,}5x}} \cdot \log_{0,5} x = -1$.

9.43. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2^2 x + (x - 1) \cdot \log_2 x = 6 - 2x$;

б) $(x + 1) \cdot \log_3^2 x + 4x \cdot \log_3 x - 16 = 0$.

9.44. Выкарыстайце ўласцівасці функцый і рашыце ўраўненне:

а) $\log_2\left(1 + x^2\right) = \log_2 x + 2x - x^2$; б) $\log_2\left(3 + 2x - x^2\right) = \sin^2(\pi x) + 2$.

9.45. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_2(-\sin x)-\log_4\cos x+\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{3}$;

б) $\log_{\sin x}(3\sin x-\cos 2x)=0$.

9.46. Рашыце ўраўненне:

а) $2^{\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2^3 x+\dots}=4^{\log_2 x}$, дзе $|\log_2 x|<1$;

б) $3^{\log_{\sqrt{3}}\left(1-\cos x+\cos^2 x-\cos^3 x+\dots\right)}=\sqrt[3]{81}$.

9.47. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\cdot\log_3(x-2)=0$.

9.48. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sin 2x\cdot\lg\left(-x^2+4x+5\right)=0$.

9.49. Рашыце ўраўненне $1-\cos(\pi\lg x)=2\sin(0{,}5\pi\lg x)$.

9.50. Знайдзіце значэнне выразу $27^{\ln x_0}$, дзе x_0 — найбольшы корань ураўнення $\sin(\pi\ln x)+\sin\left(\pi\ln x^2\right)+\sin\left(\pi\ln x^3\right)=0$, які належыць прамежку $(-\infty;\ e)$.

9.51. Рашыце ўраўненне $\lg(\arcsin x)=0$.

9.52. Знайдзіце найменшае значэнне сумы x_0+y_0, дзе $(x_0;\ y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases}\log_{|x|}(2-\log_2 y)=1,\\ y^2+2^{2-|x|}=2.\end{cases}$

9.53. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_3\left(x^2+4x+13\right)+\log_5\left(4x^2+16x+17\right)=2$.

9.54. Знайдзіце ўсе цэлыя значэнні a, пры якіх ураўненне $\log_6\left(x^2+6\right)=\frac{a+2}{2a-4}$ мае карані.

§ 10. Лагарыфмічныя няроўнасці

Прыклад 1. Рашыце няроўнасць $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}\left(x^2-9\right)\geqslant 0$.

Рашэнне.

Параўнаем з адзінкай аснову лагарыфма:

$\sqrt{31}-\sqrt{21}\vee 1$; $\quad\sqrt{31}\vee 1+\sqrt{21}$; $\quad\left(\sqrt{31}\right)^2\vee\left(1+\sqrt{21}\right)^2$; $\quad 31\vee 1+2\sqrt{21}+21$;

$9\vee 2\sqrt{21}$; $4{,}5\vee\sqrt{21}$; $20{,}25<21$, значыць, $\sqrt{31}-\sqrt{21}<1$.

Тады няроўнасць $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}\left(x^2-9\right)\geqslant 0$ раўназначна сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} x^2-9\leqslant 1, \\ x^2-9>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-10\leqslant 0, \\ x^2-9>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\in\left[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right], \\ x\in(-\infty;\ -3)\cup(3;\ +\infty); \end{cases} \quad x\in\left[-\sqrt{10};\ -3\right)\cup\left(3;\ \sqrt{10}\right].$$

Адказ: $\left[-\sqrt{10};\ -3\right)\cup\left(3;\ \sqrt{10}\right]$.

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць $\log_3^2 x\leqslant 9$.

Рашэнне.

$\log_3^2 x\leqslant 9;\quad (\log_3 x)^2\leqslant 9;\quad -3\leqslant\log_3 x\leqslant 3.$

Паколькі аснова лагарыфма большая за адзінку, то $\frac{1}{27}\leqslant x\leqslant 27$.

Адказ: $\left[\frac{1}{27};\ 27\right]$.

Прыклад 3. Рашыце няроўнасць $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4$.

Рашэнне.

$\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4;$

$2\log_3(x+1)-2\log_3(x-1)>2\log_3 2;$

$\log_3(x+1)-\log_3(x-1)>\log_3 2;$

$\log_3(x+1)>\log_3 2+\log_3(x-1);$

$\log_3(x+1)>\log_3(2x-2).$

Паколькі аснова лагарыфма большая за адзінку, то атрыманая няроўнасць раўназначна сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} x+1>2x-2, \\ 2x-2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x>-3, \\ x>1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>1; \end{cases} \quad x\in(1;\ 3).$$

Адказ: (1; 3).

Прыклад 4. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y=\sqrt{\log_{0,5}(x+1)}$.

Рашэнне.

Абсяг вызначэння функцыі $y=\sqrt{\log_{0,5}(x+1)}$ супадае з мноствам рашэнняў няроўнасці $\log_{0,5}(x+1)\geqslant 0$. Паколькі аснова лагарыфма належыць прамежку (0; 1), то атрыманая няроўнасць раўназначна сістэме няроўнасцей $\begin{cases} x+1\leqslant 1, \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\leqslant 0, \\ x>-1; \end{cases}$ $x\in(-1;\ 0]$.

Адказ: $D(y)=(-1;\ 0]$.

Прыклад 5. Рашыце няроўнасць $\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$.

Рашэнне.

$\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$; $\quad (\log_2 x + 1)(\log_2 x + 2) \geqslant 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x \geqslant -1,\\ \log_2 x \leqslant -2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x \geqslant \frac{1}{2},\\ 0 < x \leqslant \frac{1}{4};\end{array}\right. \quad x \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right).$$

Адказ: $\left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Прыклад 6. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\lg^2 x - 3\lg x - 4 < 0$.

Рашэнне.

Няхай $t = \lg x$, тады няроўнасць прымае выгляд $t^2 - 3t - 4 < 0$; $(t-4)(t+1) < 0$; $-1 < t < 4$. Тады $-1 < \lg x < 4$; $0{,}1 < x < 10\,000$.

Найбольшым цэлым рашэннем няроўнасці з'яўляецца лік 9999.

Адказ: 9999.

Прыклад 7. Рашыце няроўнасць $\log_2^2(-x) + \log_2 x^2 - 3 < 0$.

Рашэнне.

$\log_2^2(-x) + \log_2 x^2 - 3 < 0$; $\quad \log_2^2(-x) + 2\log_2|x| - 3 < 0$;

$\log_2^2(-x) + 2\log_2(-x) - 3 < 0$.

Няхай $\log_2(-x) = t$, тады няроўнасць прымае выгляд $t^2 + 2t - 3 < 0$; $t \in (-3;\ 1)$. Атрымаем: $-3 < \log_2(-x) < 1$; $\log_2 \frac{1}{8} < \log_2(-x) < \log_2 2$;

$\frac{1}{8} < -x < 2$; $\quad -2 < x < -\frac{1}{8}$.

Адказ: $\left(-2;\ -\frac{1}{8}\right)$.

Прыклад 8. Рашыце няроўнасць $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x-2}{8-x} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}$.

Рашэнне.

$$\log_{5^{-1}} \frac{x-2}{8-x} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}; \quad \log_5 \left(\frac{x-2}{8-x}\right)^{-1} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}; \quad \begin{cases}\frac{8-x}{x-2} \geqslant \frac{x}{8-x},\\ \frac{x}{8-x} > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{64-14x}{(x-2)(8-x)} \geqslant 0,\\ \frac{x}{x-8} < 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x \in \left(2;\ 4\frac{4}{7}\right] \cup (8;\ +\infty),\\ x \in (0;\ 8);\end{cases} \quad x \in \left(2;\ 4\frac{4}{7}\right].$$

Адказ: $\left(2;\ 4\frac{4}{7}\right]$.

Прыклад 9. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Рашэнне.

$3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad 3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant 3^{-\frac{1}{2}}$; $\quad \log_{0,25}(1-x) \geqslant -\frac{1}{2}$; $\quad \begin{cases} 1-x \leqslant 2, \\ 1-x > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 1; \end{cases}$

$x \in [-1; 1)$. Знойдзем суму цэлых рашэнняў няроўнасці: $-1 + 0 = -1$.

Адказ: -1.

Прыклад 10. Рашыце няроўнасць $2\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}(x^2 - x - 2) \geqslant 1$.

Рашэнне.

$2\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}(x^2 - x - 2) \geqslant 1$;

$2\log_{0,5}(x-2) \geqslant \log_{0,5} 0,5 + \log_{0,5}(x^2 - x - 2)$;

$2\log_{0,5}(x-2) \geqslant \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right)$; $\quad \begin{cases} \log_{0,5}(x-2)^2 \geqslant \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right), \\ x - 2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2 \leqslant \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 \leqslant \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3,5x + 5 \leqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \in [2; 5], \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad x \in (2; 5]$.

Адказ: $(2; 5]$.

Прыклад 11. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці
$\log_{0,5}(x-4) - \log_{0,5}(x+2) - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$.

Рашэнне.

Няроўнасць вызначана, калі выконваецца сістэма ўмоў

$\begin{cases} x - 4 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ \frac{x+2}{x-4} \neq 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -2; \end{cases}$ $\quad x > 4$.

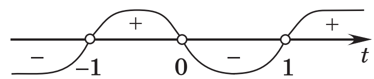
Запішам няроўнасць $\log_{0,5}(x-4) - \log_{0,5}(x+2) - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$ у выглядзе

$\log_{0,5}\frac{x-4}{x+2} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad -\log_2\frac{x-4}{x+2} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$;

$\log_2\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^{-1} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad \log_2\frac{x+2}{x-4} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad \log_2\frac{x+2}{x-4} - \frac{1}{\log_2\frac{x+2}{x-4}} > 0$.

Няхай $\log_2 \frac{x+2}{x-4} = t$, тады $t - \frac{1}{t} > 0;$ $\frac{t^2-1}{t} > 0;$ $\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0.$

Рэшым атрыманую няроўнасць метадам інтэрвалаў:



$t \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty);$ $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 0, \\ t > 1. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} -1 < \log_2 \frac{x+2}{x-4} < 0, \\ \log_2 \frac{x+2}{x-4} > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \frac{x+2}{x-4} < \log_2 1, \\ \log_2 \frac{x+2}{x-4} > \log_2 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \frac{x+2}{x-4} < 1, \\ \frac{x+2}{x-4} > 2. \end{array}\right.$

Улічыўшы ўмову $x > 4$, атрымаем: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x-4) < x+2 < x-4, \\ x+2 > 2(x-4); \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x-4 < 2x+4 < 2x-8, \\ x+2 > 2x-8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4 > x-4, \\ 2x+4 < 2x-8, \end{cases} \\ x+2 > 2x-8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -8, \\ 0x < -12, \end{cases} \\ -x > -10; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x < 10; \end{array}\right.$ $x < 10.$

Такім чынам, $x \in (4;\ 10).$

Сума цэлых рашэнняў няроўнасці роўна 35.

Адказ: 35.

Прыклад 12. Рашыце няроўнасць $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)} < 2.$

Рашэнне.

$$\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)} < 2; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 6x-1 < 1, \\ \log_{\frac{1}{4}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{4}}(6x-1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 6x-1 > 1, \\ \log_{\frac{1}{4}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{4}}(6x-1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}, \\ 3x+1 > (6x-1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ 3x+1 < (6x-1)^2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ x(12x-5)<0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>\frac{1}{3},\\ x(12x-5)>0;\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ 0<x<\frac{5}{12},\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>\frac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>\frac{5}{12};\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ x>\frac{5}{12};\end{array}\right. \quad x\in\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{12};\ +\infty\right).$$

Адказ: $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{12};\ +\infty\right)$.

Прыклад 13. Рашыце няроўнасць $\dfrac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,4}\left(x^2+1\right)}\geqslant 0$.

Рашэнне.

Паколькі $x^2+1\geqslant 1$ пры $x\in\boldsymbol{R}$ і функцыя $y=\log_{0,4}t$ спадае на абсягу вызначэння, то $\log_{0,4}\left(x^2+1\right)\leqslant 0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$. Тады зыходная няроўнасць раўназначна сістэме $\left\{\begin{array}{l}x^2(x-2)^2\leqslant 0,\\ \log_{0,4}\left(x^2+1\right)\neq 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $x=2$.

Адказ: 2.

Прыклад 14. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_9\left(x^2-4x+5\right)\geqslant\log_{11}\left(4x-x^2-3\right)$.

Рашэнне.

Запішам няроўнасць $\log_9\left(x^2-4x+5\right)\geqslant\log_{11}\left(4x-x^2-3\right)$ у выглядзе $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant\log_{11}\left(1-(x-2)^2\right)$.

Выраз $(x-2)^2+1\geqslant 1$ пры $x\in\boldsymbol{R}$. Паколькі функцыя $y=\log_9 t$ нарастае на абсягу вызначэння, то $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant\log_9 1$; $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant 0$.

Разам з тым $1-(x-2)^2\leqslant 1$ пры $x\in\boldsymbol{R}$ і функцыя $y=\log_{11}t$ нарастае пры $t>0$. Тады $\log_{11}\left(1-(x-2)^2\right)\leqslant 0$ пры $1-(x-2)^2>0$.

Такім чынам, выхадная няроўнасць справядлівая пры ўсіх дапушчальных значэннях зменнай, г. зн. няроўнасць раўназначна сістэме няроўнасцей $\begin{cases}1-(x-2)^2>0,\\(x-2)^2+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)^2<1,\\x\in\boldsymbol{R};\end{cases}$ $(x-2)^2<1;$ $-1<x-2<1;$ $1<x<3.$

Няроўнасць мае адно цэлае рашэнне.

Адказ: 1.

Прыклад 15. Рашыце няроўнасць $\sqrt{7-\log_2 x}+\log_2 x^2>4.$

Рашэнне.

$\sqrt{7-\log_2 x}+\log_2 x^2>4;$ $\sqrt{7-\log_2 x}>4-2\log_2 x.$

Няхай $\log_2 x=t$, тады няроўнасць прымае выгляд $\sqrt{7-t}>4-2t;$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-2t<0,\\7-t\geqslant 0,\end{cases}\\\begin{cases}4-2t\geqslant 0,\\7-t>(4-2t)^2;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>2,\\t\leqslant 7,\end{cases}\\\begin{cases}t\leqslant 2,\\4t^2-15t+9<0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}2<t\leqslant 7,\\\begin{cases}t\leqslant 2,\\0{,}75<t<3;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2<t\leqslant 7,\\0{,}75<t\leqslant 2;\end{array}\right.\quad 0{,}75<t\leqslant 7.$$

Тады $0{,}75<\log_2 x\leqslant 7;$ $\sqrt[4]{8}<x\leqslant 128.$

Адказ: $\left(\sqrt[4]{8};\,128\right].$

Прыклад 16. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+2}{x-2}\right).$

Рашэнне.

$\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+2}{x-2}\right);$ $\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<-\log_5\left(-\log_3\frac{x+2}{x-2}\right);$

$\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<-\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right);$ $\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)+\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0;$

$2\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0;$ $\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0;$

$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-2}{x+2} < 1, \\ \log_3 \dfrac{x-2}{x+2} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} < 3, \\ \dfrac{x-2}{x+2} > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{-2x-8}{x+2} < 0, \\ \dfrac{-4}{x+2} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2} > 0, \\ \dfrac{4}{x+2} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2); \end{cases}$

$x \in (-\infty; -4)$.

Найбольшым цэлым рашэннем няроўнасці з'яўляецца лік –5.

Адказ: –5.

Прыклад 17. Рашыце няроўнасць $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$.

Рашэнне.

Ацэнім левую і правую часткі няроўнасці $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$.

$\log_2 (x(1-x)) = \log_2 (-x^2 + x) = \log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$.

Паколькі $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$ пры $x \in \boldsymbol{R}$ і функцыя $y = \log_2 t$ нарастае на абсягу вызначэння, то $\log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \leqslant \log_2 \frac{1}{4}$; $\log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \leqslant -2$.

Паколькі $0 \leqslant \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| \leqslant 1$, то $-2 \leqslant \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2 \leqslant -1$.

Такім чынам, левая частка няроўнасці не перавышае –2 пры дапушчальных значэннях зменнай, а правая — большая або роўна –2 пры $x \neq 0$. Тады няроўнасць $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$ раўназначна сістэме

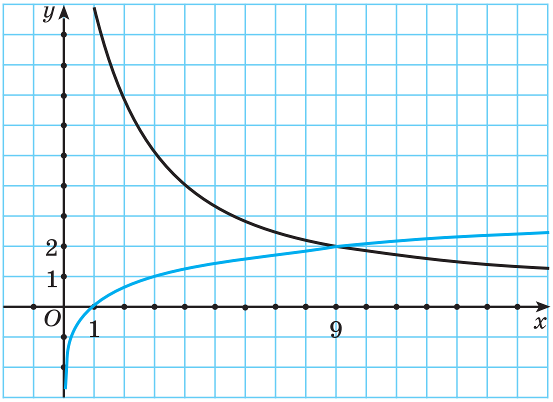
$\begin{cases} x(1-x) > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Адказ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Прыклад 18. Ці праўда, што мноствам рашэнняў няроўнасці $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ з'яўляецца прамежак $(0; 9]$?

Рашэнне.

Пры $x > 0$ няроўнасць $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ раўназначна сістэме няроўнасцей $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x \leqslant \dfrac{20}{x+1}. \end{cases}$



Рыс. 9

Пабудуем графікі функцый $f(x) = \log_3 x$ і $g(x) = \frac{20}{x+1}$ пры $x > 0$ (рыс. 9).

Паколькі $f(9) = \log_3 9 = 2$ і $g(9) = \frac{20}{10} = 2$ і графік функцыі $f(x) = \log_3 x$ размешчаны ніжэй графіка функцыі $g(x) = \frac{20}{x+1}$ на прамежку (0; 9), то рашэннем няроўнасці $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ з'яўляецца прамежак (0; 9].

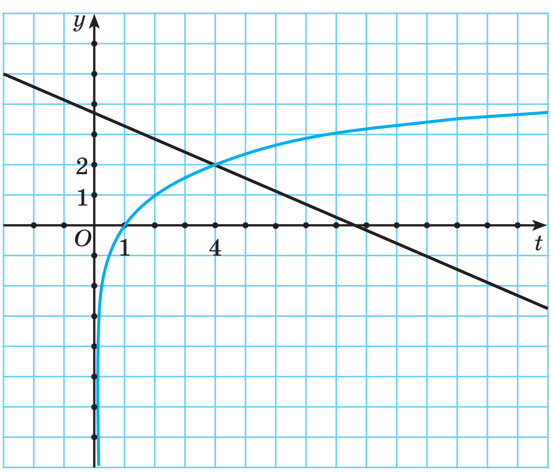
Адказ: праўда.

Прыклад 19. Рашыце няроўнасць $\log_2(1-3x) < \frac{13+5x}{4}$.

Рашэнне.

Рэшым няроўнасць $\log_2(1-3x) < \frac{13+5x}{4}$ графічным метадам.

Няхай $1 - 3x = t$, тады $x = \frac{1-t}{3}$ і $\frac{13+5x}{4} = \frac{13+5\cdot\frac{1-t}{3}}{4} = \frac{44-5t}{12}$ і зыходная няроўнасць прымае выгляд $\log_2 t < \frac{44-5t}{12}$.



Рыс. 10

Пабудуем графікі функцый $y = \log_2 t$ і $y = \frac{44-5t}{12}$ (рыс. 10).

Графікі дадзеных функцый перасякаюцца ў пункце (4; 2) (у гэтым неабходна пераканацца з дапамогай праверкі). Графік функцыі $y = \log_2 t$ размешчаны ніжэй графіка функцыі $y = \frac{44-5t}{12}$ пры $0 < t < 4$. Тады $0 < 1 - 3x < 4$; $-1 < x < \frac{1}{3}$.

Адказ: $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Прыклад 20. Рашыце няроўнасць

$$\log_{7-4\sqrt{3}}\left(4x^2-20x+25\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0.$$

Рашэнне.

Заўважым, што $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, а $2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$, тады зыходная няроўнасць прымае выгляд

$$\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\left(4x^2-20x+25\right)+\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0;$$

$$\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}(2x-5)^2-\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0;$$

$$\log_{\left|2-\sqrt{3}\right|}|2x-5|\geqslant\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right);\ \log_{2-\sqrt{3}}|2x-5|\geqslant\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right).$$

Паколькі $0<2-\sqrt{3}<1$, то атрыманая няроўнасць раўназначна сістэме

$$\begin{cases}|2x-5|\leqslant x^2-x-2,\\ |2x-5|>0;\end{cases}\quad \begin{cases}2x-5\leqslant x^2-x-2,\\ 2x-5\geqslant -x^2+x+2,\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-3x+3\geqslant 0,\\ x^2+x-7\geqslant 0,\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty),\\ x\in\left(-\infty;\ \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2};\ +\infty\right),\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}$$

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ 2{,}5\right)\cup(2{,}5;\ +\infty).$$

Адказ: $\left(-\infty;\ \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2};\ 2{,}5\right)\cup(2{,}5;\ +\infty).$

Прыклад 21. Рашыце няроўнасць

$$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4.$$

Рашэнне.

$$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4;$$

$$\log_{2x+1}\left((2x+1)(5-2x)\right)+\log_{5-2x}(1+2x)^2\leqslant 4;$$

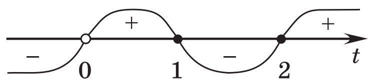
$$\log_{2x+1}\left((2x+1)(5-2x)\right)+2\log_{5-2x}|1+2x|\leqslant 4;$$

$$1+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(1+2x)\leqslant 4;$$

$$\log_{2x+1}(5-2x)+\frac{2}{\log_{2x+1}(5-2x)}-3\leqslant 0.$$

Няхай $\log_{2x+1}(5-2x)=t,$ тады няроўнасць прымае выгляд

$$t+\frac{2}{t}-3\leqslant 0;\quad \frac{t^2-3t+2}{t}\leqslant 0;\quad \frac{(t-1)(t-2)}{t}\leqslant 0.$$



$t\in(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2],$ або $\left[\begin{array}{l} t<0, \\ 1\leqslant t\leqslant 2. \end{array}\right.$

Паколькі $t=\log_{2x+1}(5-2x),$ то $\left[\begin{array}{l} \log_{2x+1}(5-2x)<0, \\ 1\leqslant \log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2. \end{array}\right.$

Рэшым першую няроўнасць сукупнасці:

$$\log_{2x+1}(5-2x)<0;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1>1, \\ 5-2x<1, \\ 5-2x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<2x+1<1, \\ 5-2x>1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x>2, \\ x<2{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5<x<0, \\ x<2; \end{cases} \end{array}\right. \quad x\in(-0{,}5;\ 0)\cup(2;\,2{,}5).$$

Рэшым другую няроўнасць сукупнасці:

$$1\leqslant \log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1>1, \\ 2x+1\leqslant 5-2x\leqslant (2x+1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<2x+1<1, \\ 2x+1\geqslant 5-2x\geqslant (2x+1)^2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ 2x+1\leqslant 5-2x, \\ 5-2x\leqslant 4x^2+4x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5<x<0, \\ 2x+1\geqslant 5-2x, \\ 5-2x\geqslant 4x^2+4x+1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x\leqslant 1, \\ 2x^2+3x-2\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5<x<0, \\ x\geqslant 1, \\ 2x^2+3x-2\leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x\leqslant 1, \\ 2x^2+3x-2\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -0{,}5<x<0, \\ x\geqslant 1, \\ -2\leqslant x\leqslant 0{,}5; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x\leqslant 1, \\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[0{,}5;\ +\infty), \end{cases} \\ x\in\varnothing; \end{array}\right. \quad x\in[0{,}5;\,1].$$

Такім чынам, атрымаем $x \in (-0,5;\ 0) \cup [0,5;\ 1] \cup (2;\ 2,5)$.

Адказ: $(-0,5;\ 0) \cup [0,5;\ 1] \cup (2;\ 2,5)$.

Прыклад 22. Рашыце няроўнасць

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}\left(x^2+2x+1\right) \leqslant 3 - \log_{-x-1}\left(-x^2-5x-4\right).$$

Рашэнне.

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x+1)^2 + \log_{-x-1}\left((-x-1)(x+4)\right) - 3 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}|x+1| + 1 + \log_{-x-1}(x+4) - 3 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}(-x-1) + \log_{-x-1}(x+4) - 2 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}(-x-1) + \frac{1}{\log_{x+4}(-x-1)} - 2 \leqslant 0.$$

Няхай $t = \log_{x+4}(-x-1)$, тады няроўнасць прымае выгляд $t + \frac{1}{t} - 2 \leqslant 0$;

$\frac{t^2-2t+1}{t} \leqslant 0$; $\frac{(t-1)^2}{t} \leqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t < 0. \end{array}\right.$

Паколькі $t = \log_{x+4}(-x-1)$, то $\left[\begin{array}{l} \log_{x+4}(-x-1) = 1, \\ \log_{x+4}(-x-1) < 0. \end{array}\right.$

Рэшым ураўненне сукупнасці:

$$\log_{x+4}(-x-1) = 1; \quad \begin{cases} -x-1 = x+4, \\ x+4 > 0, \\ x+4 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2,5, \\ x > -4, \\ x \neq -3; \end{cases} \quad x = -2,5.$$

Рэшым няроўнасць сукупнасці:

$$\log_{x+4}(-x-1) < 0; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+4 < 1, \\ -x-1 > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+4 > 1, \\ -x-1 < 1, \\ -x-1 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4 < x < -3, \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -3, \\ x > -2, \\ x < -1; \end{cases} \end{array}\right. \quad x \in (-4;\ -3) \cup (-2;\ -1).$$

Такім чынам, атрымаем $x \in (-4;\ -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2;\ -1)$.

Адказ: $(-4;\ -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2;\ -1)$.

Прыклад 23. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей $\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01x > 0, \\ \dfrac{1}{x} < 1000. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01x > 0, \\ \dfrac{1}{x} < 1000; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01 + \lg x > 0, \\ \dfrac{1}{x} - 1000 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg^2 x + \lg x - 2 > 0, \\ \dfrac{1 - 1000x}{x} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lg x - 1)(\lg x + 2) > 0, \\ \dfrac{1000x - 1}{x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x > 1, \\ \lg x < -2, \end{array}\right. \\ \dfrac{1000x - 1}{x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 10, \\ 0 < x < 0{,}01, \end{array}\right. \\ x \in (-\infty;\, 0) \cup (0{,}001;\, +\infty); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0;\, 0{,}01) \cup (10;\, +\infty), \\ x \in (-\infty;\, 0) \cup (0{,}001;\, +\infty); \end{cases} \quad x \in (0{,}001;\, 0{,}01) \cup (10;\, +\infty).$$

Найменшым цэлым рашэннем сістэмы няроўнасцей з'яўляецца лік 11.
Адказ: 11.

Рашэнне лагарыфмічных няроўнасцей заменай выразаў на знакасупадальныя

Пакажам, што знак выразу $\log_a t_1 - \log_a t_2$ супадае са знакам выразу $(a - 1)(t_1 - t_2)$ пры ўмове, што $a > 0$, $a \neq 1$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

1. Няхай $a > 1$, тады функцыя $y = \log_a t$ нарастальная, і калі $t_1 > t_2 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 > 0$, а калі $t_2 > t_1 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 < 0$. Пры $a > 1$, г. зн. $a - 1 > 0$, калі $t_1 > t_2$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) > 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) < 0$, г. зн. знак выразу $\log_a t_1 - \log_a t_2$ супадае са знакам выразу $(a - 1)(t_1 - t_2)$.

2. Няхай $0 < a < 1$, тады функцыя $y = \log_a t$ спадальная, і калі $t_1 > t_2 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 < 0$, а калі $t_2 > t_1 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 > 0$. Пры $a < 1$, г. зн. $a - 1 < 0$, калі $t_1 > t_2$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) < 0$, а калі $t_2 > t_1$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) > 0$, г. зн. знак выразу $\log_a t_1 - \log_a t_2$ супадае са знакам выразу $(a - 1)(t_1 - t_2)$.

Прыклад 24. Рашыце няроўнасць $\log_{x-2}(2x - 7) < 1$.
Рашэнне.

$$\log_{x-2}(2x - 7) < 1; \quad \log_{x-2}(2x - 7) < \log_{x-2}(x - 2);$$

$$\log_{x-2}(2x - 7) - \log_{x-2}(x - 2) < 0.$$

Паколькі знак рознасці $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ супадае са знакам здабытку $(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)$ пры ўмове, што $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то няроўнасць $\log_{x-2}(2x-7) - \log_{x-2}(x-2) < 0$ заменім раўназначнай сістэмай

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ 2x-7>0, \\ (x-2-1)\big(2x-7-(x-2)\big)<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ x>3{,}5, \\ (x-3)(x-5)<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3{,}5, \\ 3<x<5; \end{cases} \quad x \in (3{,}5;\ 5).$$

Адказ: $(3{,}5;\ 5)$.

Прыклад 25. Рашыце няроўнасць $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

Рашэнне.

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x) - \log_{x^2} x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1, \\ (x^2-1)(3-2x-x^2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq -1, \\ (x^2-1)(x^2+2x-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq -1, \\ x\in(-3;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3;\ -1).$$

Адказ: $(-3;\ -1)$.

Прыклад 26. Рашыце няроўнасць $\log_{x+3}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$.

Рашэнне. *Першы спосаб.*

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0; \quad \log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > \log_{x+3} 1;$$

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \log_{x+3} 1 > 0.$$

Паколькі знак рознасці $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ супадае са знакам здабытку $(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)$ пры ўмове, што $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то няроўнасць $\log_{x+3}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \log_{x+3} 1 > 0$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2}>0, \\ (x+3-1)\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1\right)>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ -1<x<1, \\ (x+2)\dfrac{2x^2}{1-x^2}>0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1<x<1, \\ x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1); \end{cases}$$

$x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

Другі спосаб. Дадзеная няроўнасць раўназначна сукупнасці

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+3<1, \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2}>0, \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2}<1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3>1, \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2}>1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3<x<-2, \\ 1-x^2>0, \\ \dfrac{2x^2}{1-x^2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>-2, \\ \dfrac{2x^2}{1-x^2}>0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3<x<-2, \\ -1<x<1, \\ x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x>-2, \\ x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1); \end{cases} \end{array}\right. \quad x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1).$$

Адказ: $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

Прыклад 27. Рашыце няроўнасць $\log_{x-1}\dfrac{x^2-x-6}{2x-8}\leqslant 1$.

Рашэнне. *Першы спосаб.*

$$\log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8}\leqslant 1;\ \log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8}-\log_{x-1}(x-1)\leqslant 0.$$

Паколькі знак рознасці $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ супадае са знакам здабытку $(a-1)(f(x)-g(x))$ пры ўмове, што $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, то няроўнасць $\log_{x-1}\dfrac{x^2-x-6}{2x-8}-\log_{x-1}(x-1)\leqslant 0$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ \dfrac{x^2-x-6}{2x-8}>0, \\ (x-1-1)\left(\dfrac{x^2-x-6}{2x-8}-(x-1)\right)\leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\neq 2, \\ \dfrac{x^2-x-6}{2x-8}>0, \\ (x-2)\dfrac{x^2-9x+14}{2x-8}\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x \in (-2;\ 3) \cup (4;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 4) \cup [7;\ +\infty); \end{cases} \qquad x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty).$$

Другі спосаб.

$$\log_{x-1} \frac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \leqslant 1; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \geqslant x - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \leqslant x - 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} > 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 < x < 2, \\ \dfrac{x^2 - 9x + 14}{2x - 8} \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x^2 - 9x + 14}{2x - 8} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} > 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (1;\ 2), \\ x \in (-\infty;\ 2] \cup (4;\ 7], \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (2;\ +\infty), \\ x \in [2;\ 4) \cup [7;\ +\infty), \\ x \in (-2;\ 3) \cup (4;\ +\infty); \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (1;\ 2), \\ x \in (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty); \end{array} \right. \quad x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty).$$

Адказ: $(1; 2) \cup (2; 3) \cup [7; +\infty)$.

10.1. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{16}(3x + 1) \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\log_4(7 - x) < 3$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) \geqslant -2$; г) $\log_{\frac{1}{4}}(5x - 1) \geqslant -0{,}5$;

д) $\log_3(2x - 1) \geqslant 0$; е) $\log_2(3x - 5) \leqslant 0$.

10.2. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt{\log_{0,2}(x - 1)}$; б) $f(x) = \sqrt{\lg(2 - x)}$;

в) $f(x) = \sqrt{2 - \log_4 x}$; г) $f(x) = \sqrt[4]{5 - \log_2(2x)}$.

10.3. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} \log_2\left(x^2-2x-2\right)>0, \\ 2^{2x^2+5x+2}>1. \end{cases}$

10.4. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,9}\left(x^2-4x\right)>\log_{0,9}(4x+1)$; б) $\log_{0,5}\left(x^2-5x+6\right)\geqslant-1$;

в) $\log_3\left(x^2-2x+1\right)\leqslant 2$; г) $\log_2\left(x^2-6x+9\right)\leqslant 2$;

д) $\log_2\left(x^2+4x+11\right)\geqslant\log_{0,5}125$; е) $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(x^2+4x+11-4\sqrt{3}\right)<2$.

10.5. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{\cos\frac{\pi}{7}}(x^2-7x)\geqslant\log_{\cos\frac{\pi}{7}}(3x+11)$.

10.6. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,7}\dfrac{5x+1}{x-4}>\log_{0,7}3$; б) $\log_7\dfrac{2x}{x-2}<1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{x+2}>1$; г) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2-3x}{x}\geqslant-1$;

д) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\dfrac{1}{x+4}<-2$; е) $\log_3\dfrac{x}{6-x}\leqslant\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x-3}{6-x}$.

10.7. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x)=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{3}}x}+\dfrac{1}{x-1}$; б) $f(x)=\sqrt{2-\log_{\frac{1}{2}}(x+5)}-\dfrac{1}{x+1}$.

10.8. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_3^2 x-2\log_3 x\leqslant 3$; б) $\log_{0,5}^2 x-4\log_{0,5}x+3\leqslant 0$;

в) $\log_3^2 x>4$; г) $\lg^2 x-\lg x<0$;

д) $5\lg x-\lg^2 x-4<0$; е) $2\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_{\frac{1}{3}}x+2\geqslant 0$.

10.9. Рашыце няроўнасць $\log_3^2(-x)-\log_3 x^2-3<0$.

10.10. Знайдзіце суму найбольшага і найменшага цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{0,2}^2(x-1)\leqslant 9$.

10.11. Ці праўда, што няроўнасць $\log_5 x+\log_{25}x<\log_{0,2}\sqrt{3}$ не мае цэлых рашэнняў?

10.12. Рашыце няроўнасць:

а) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)\leqslant 14+\lg\dfrac{1}{x}$; б) $\log_3^2(3x)+\log_3 x\leqslant 2\log_{\sqrt{3}}3$.

10.13. Рашыце двайную няроўнасць $0 < \log_2 \frac{x-5}{4} \leqslant 3$.

10.14. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,6} \log_2 x > -1$; б) $\log_{0,8} \log_3 x > -1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 (x-1) > 0$; г) $2 + \log_{0,5} \left(\log_3 (7-x)\right) > 0$.

10.15. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = 1 + \log_{0,25} \left(\log_3 (4-x)\right)$ прымае дадатныя значэнні.

10.16. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0$; б) $\log_{0,3} \log_2 \frac{3x-1}{2-x} > 0$;

в) $\log_2 \log_{0,5} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1$; г) $\log_{0,5} \lg \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$.

10.17. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \log_{0,6} (3x-7)$; б) $f(x) = \log_3 \log_{\frac{1}{7}} (6+5x)$.

10.18. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці:

а) $\log_{0,5} \left(\log_3 (x-2)\right) \geqslant -1$; б) $\log_{0,5} \log_2 \left(x^2 - 2\right) \geqslant 0$.

10.19. Рашыце няроўнасць:

а) $\lg(7-x) + \lg x > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (10-x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4{,}5 - 1$;

в) $\log_3 \left(6 + x^2\right) - \log_3 (x-2) < 1 + \log_3 (x+2)$;

г) $\lg 5 + \lg(x+4) \leqslant 1 - \lg(3x-2) + \lg(5x+2)$.

10.20. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\frac{\log_{0,2}\left(x^2 - 4x + 4\right)}{x^2 + 2x + 8} \geqslant 0$.

10.21. Рашыце няроўнасць:

а) $2\log_{\frac{1}{2}} (1-x) < \log_{\frac{1}{2}} (3x+1)$; б) $2\log_4 (x+1) - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-5) < 3$;

в) $\log_9 (2x-1) \geqslant \log_3 x$; г) $1 + \log_{\sqrt{3}} x > \log_3 (6-7x)$.

10.22. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \log_{0,4} \log_4 \frac{5-x}{x-2}$; б) $f(x) = \log_5 \log_{0,5} \frac{3-x}{x+2}$.

10.23. Рашыце няроўнасць

$$\log_{9-4\sqrt{5}}\left(9x^2-24x+16\right)+\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+x-2\right)\geqslant 0.$$

10.24. Знайдзіце мноства рашэнняў няроўнасці:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2\geqslant -2$; б) $\log_4(x+2)^2\leqslant 3$.

10.25. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}>32,\\ \log_4(x-6)^2\leqslant 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{2x-6}<\frac{1}{27},\\ \log_3(1-x)^2\leqslant 2.\end{cases}$

10.26. Рашыце няроўнасць:

а) $0{,}3^{\log_2(3x-2)}\geqslant 0{,}09$; б) $0{,}2^{\log_3(2x+3)}\leqslant 0{,}04$; в) $3^{\log_{0,5}(2x-1)}\geqslant \frac{1}{9}$.

10.27. Рашыце няроўнасць:

а) $5^{\log_5(4-9x)}<31$; б) $10^{\lg(3x-2)}\leqslant 7$; в) $9^{\log_3(-x)}<4$.

10.28. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $\log_2^2(4x)+2\log_2 x-11<0$; б) $\log_2(3x+1)\cdot\log_{0,5}(6x+2)<-6$;

в) $\log_x 9-\log_3^2(3x)\leqslant -2$; г) $\log_x 10+\frac{1}{1-\lg x}>1$.

10.29. Рашыце няроўнасць $\log_3\left(4^x+1\right)+\log_{4^x+1}3>2{,}5$.

10.30. Знайдзіце ўсе рашэнні няроўнасці:

а) $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}\leqslant\frac{3}{4}$; б) $\log_{\sqrt{2}}\left(5^x-1\right)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2$.

10.31. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{1+\log_{0,5}^2 x}{1+\log_{0,5}x}<1$.

10.32. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{2}{\log_2 x+1}\geqslant 1$.

10.33. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{x^2+4x-5}{\lg(x+2)}\geqslant 0$.

10.34. Рашыце няроўнасць $\frac{5^{x^2}-625}{\log_x(x-1)}\geqslant 0$.

10.35. Рашыце двума спосабамі няроўнасць $\log_{x+3}\frac{x-1}{x+1}\leqslant\log_{x+3}2$.

10.36. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{5x+4} 3 < 0$;

б) $\log_x (x-2) \leqslant 2$;

в) $\log_x (2x^2 - 3x) \leqslant 1$;

г) $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}} (10x^2 + x - 2) \leqslant 0$;

д) $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$;

е) $\log_{3^2 - x^2} (1,5 - |1-x|) \leqslant 0$.

10.37. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\log_x \log_9 (3^x - 9) < 1$.

10.38. Рашыце няроўнасць $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}{\log_{\frac{1}{3}}(4x-1)} < 2$.

10.39. Рашыце ўраўненне $|\log_{0,25}(x+3) - 5| - |2 - \log_{0,25}(x+3)| = 3$.

10.40. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\dfrac{\log_{0,8}(x^2 - 4x + 5)}{x^3 - 5x^2 + 4x} \leqslant 0$.

10.41. Знайдзіце ўсе рашэнні няроўнасці $\dfrac{\log_{0,5}(x^2+2)}{x^2(x+1)^2} \leqslant 0$.

10.42. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_2 x^3 - 3 < \sqrt{7 + \log_2 x}$;

б) $\sqrt{\log_4^2 x - 2} \geqslant \log_2 \dfrac{x}{4} - 1$.

10.43. Ці праўда, што мноствам рашэнняў няроўнасці $(0,25)^{x-3} + \log_{0,5} x \geqslant 3$ з'яўляецца прамежак $(0; 2]$?

10.44. Рашыце няроўнасць $\log_2 (x(1-x)) \leqslant \left|\cos\dfrac{\pi}{4x}\right| - 2$.

10.45. Знайдзіце колькасць лікаў выгляду $\dfrac{\pi m}{4}$, $m \in \mathbf{Z}$, якія з'яўляюцца рашэннем няроўнасці $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \dfrac{3}{\log_2 |\sin x|}$.

10.46. Рашыце няроўнасць:

а) $||\log_3 x + 2| - 3| < 1$;

б) $|\log_3 x| < \left|\log_3^2 \dfrac{x}{9}\right|$.

10.47. Рашыце няроўнасць $\left(\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}\right)\lg\left(x^2 + \dfrac{9}{25}\right) > 0$.

§ 11. Метады рашэння сістэм ураўненняў

Разгледзім мноства ўраўненняў

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; ..., \; f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

са зменнымі $x_1, x_2, ..., x_n$.

Калі неабходна знайсці ўсе наборы значэнняў зменных $x_1, x_2, ..., x_n$, пры якіх кожнае з ураўненняў разглядаемага мноства ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, то гавораць, што зададзена ***сістэма ўраўненняў***:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ..., \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Кожны такі ўпарадкаваны набор значэнняў зменных называецца ***рашэннем сістэмы ўраўненняў***. Мноства рашэнняў сістэмы ўраўненняў уяўляе сабой перасячэнне мностваў рашэнняў усіх ураўненняў. Мноства рашэнняў сістэмы ўраўненняў можа быць пустым. У гэтым выпадку гавораць, што сістэма не мае рашэнняў.

Рашыць сістэму ўраўненняў — значыць знайсці ўсе яе рашэнні або даказаць, што рашэнняў няма.

Дзве сістэмы ўраўненняў называюцца ***раўназначнымі***, калі мноствы іх рашэнняў супадаюць. Сістэмы, якія не маюць рашэнняў, таксама лічацца раўназначнымі. Пры рашэнні сістэм ураўненняў імкнуцца замяніць зыходную сістэму больш простай раўназначнай сістэмай.

Метады рашэння сістэм ураўненняў

1. Метад падстаноўкі

Для рашэння сістэмы ўраўненняў з дзвюма зменнымі метадам падстаноўкі трэба:

① Выразіць адну са зменных з першага ўраўнення.
② Падставіць гэты выраз у другое ўраўненне.
③ Рашыўшы другое ўраўненне, знайсці значэнне зменнай.
④ Падставіць знойдзенае значэнне ў выраз для першай зменнай.
⑤ Вылічыць значэнне першай зменнай.
⑥ Запісаць адказ у выглядзе ўпарадкаванай пары лікаў.

Прыклад 1. Рашыце сістэму лінейных ураўненняў $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 5, \\ 3(2y + 5) + 8y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 5, \\ 6y + 15 + 8y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 5, \\ 14y = -14; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y + 5, \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) + 5, \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$$

Адказ: (3; –1).

Прыклад 2. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ (5 - y)y = 4. \end{cases}$$

Рэшым другое ўраўненне сістэмы: $y^2 - 5y + 4 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Падставім кожнае са значэнняў зменнай y у першае ўраўненне сістэмы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 - 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - 4, \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Адказ: (4; 1); (1; 4).

Прыклад 3. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x^2 + 16x(2 - 2x) + 4(2 - 2x)^2 = 1. \end{cases}$$

Рэшым другое ўраўненне сістэмы:

$x^2 + 16x(2 - 2x) + 4(2 - 2x)^2 = 1$; $x^2 + 32x - 32x^2 + 4(4 - 8x + 4x^2) = 1$;

$x^2 + 32x - 32x^2 + 16 - 32x + 16x^2 = 1$; $-15x^2 = -15$; $x^2 = 1$; $x = 1$ або $x = -1$.

Пры $x = 1$ атрымаем $y = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

Пры $x = -1$ атрымаем $y = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$.

Такім чынам, рашэннямі сістэмы ўраўненняў з'яўляюцца пары лікаў (1; 0); (–1; 4).

Адказ: (1; 0); (–1; 4).

Прыклад 4. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5). \end{cases}$

Рашэнне.

Раскладзём на множнікі квадратны трохчлен $2x^2 + x - 3$.

$2x^2 + x - 3 = 0;\ D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25;\ x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1,\ x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}.$

Тады $2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3)$ і сістэма

$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5) \end{cases}$ прымае выгляд $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)(2x+3) = (x-1)(y+5); \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)\big((2x+3) - (y+5)\big) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)(2x-y-2) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 2x-2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ y = 2x-2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - y - 3y = 7, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - x(2x-2) - 3(2x-2) = 7, \\ y = 2x-2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1{,}25, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0{,}25, \\ y = 2x-2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1{,}25, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0{,}25, \\ y = -2{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Адказ: (1; –1,25); (–0,25; –2,5).

2. Метад складання

Сістэма двух ураўненняў з дзвюма зменнымі $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f_1(x;\ y) = g_1(x;\ y), \\ f_1(x;\ y) \pm f_2(x;\ y) = g_1(x;\ y) \pm g_2(x;\ y). \end{cases}$

Прыклад 5. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x + 7y = 3, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$

Рашэнне.

Рэшым дадзеную сістэму метадам складання, пераўтварыўшы ўраўненні так, каб каэфіцыенты пры адной са зменных сталі процілеглымі:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 3, \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot (-2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 21y = 9, \\ -6x - 10y = 2 \end{cases} \Bigg|+ \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 11, \\ 2x + 7y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ 2x + 7 \cdot 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Адказ: (–2; 1).

Прыклад 6. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |y - x| = 2. \end{cases}$

Рашэнне.

Раскрыем модуль у другім ураўненні сістэмы і атрымаем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - x = -2. \end{cases} \end{array} \right.$

Рэшым кожную атрыманую сістэму метадам складання:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = -2, \end{cases} \Bigg| + \\ \begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = 2; \end{cases} \Bigg| + \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x = 5, \\ x - y = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x = 9, \\ x - y = 2; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1\frac{2}{3}, \\ y = 3\frac{2}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Адказ: $\left(1\frac{2}{3};\ 3\frac{2}{3}\right)$; $(3;\ 1)$.

Прыклад 7. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 3y = 12, \\ 2y - 7x = 8. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 3y = 12, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \right. \quad \begin{cases} 4x^2 + 10x + 6y = 24, \\ -6y + 21x = -24; \end{cases} \Bigg| + \quad \begin{cases} 4x^2 + 31x = 0, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(4x + 31) = 0, \\ 2y - 7x = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 4x + 31 = 0, \end{array} \right. \\ 2y - 7x = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -7\frac{3}{4}, \end{array} \right. \\ 2y - 7x = 8; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -7\frac{3}{4}, \\ y = -23\frac{1}{8}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Адказ: $(0;\ 4)$; $\left(-7\frac{3}{4};\ -23\frac{1}{8}\right)$.

Прыклад 8. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$

Рашэнне.

Складзём ураўненні сістэмы і атрымаем

$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0;$ $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0.$

Атрыманая роўнасць раўназначна сістэме $\begin{cases} x = y, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

З дапамогай праверкі пераканаемся, што пара лікаў (1; 1) з'яўляецца рашэннем дадзенай сістэмы ўраўненняў.

Адказ: (1; 1).

3. Метад замены зменных

Прыклад 9. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \dfrac{8}{x+y} + \dfrac{5}{y-3x} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{5}{x+y} - \dfrac{3}{y-3x} = 4. \end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $a = \dfrac{1}{x+y}$, $b = \dfrac{1}{y-3x}$, тады зыходную сістэму ўраўненняў можна замяніць сістэмай $\begin{cases} 8a + 5b = \dfrac{3}{2}, \\ 5a - 3b = 4. \end{cases}$

Для рашэння атрыманай сістэмы выкарыстаем метад складання:

$$\begin{cases} 8a + 5b = \dfrac{3}{2}, \,\Big|\cdot 3 \\ 5a - 3b = 4; \,\Big|\cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 24a + 15b = \dfrac{9}{2}, \\ 25a - 15b = 20; \end{cases}\Bigg| + \quad \begin{cases} 49a = \dfrac{49}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вернемся да замены:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y-3x} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ y - 3x = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 4, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Адказ: (1; 1).

Прыклад 10. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{2y + 3x} = -0{,}2, \\ \dfrac{1}{3x + 2y} - 2y + 3x = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $a = 3x + 2y$, $b = 3x - 2y$, тады сістэма прымае выгляд

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = -0{,}2, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} - \frac{a}{5} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5 - a^2}{5a} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5 - a^2}{a} = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ 5 - a^2 = -4a, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ a^2 - 4a - 5 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 5, \\ a = -1, \end{array} \right. \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 5, \\ b = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = \frac{1}{5}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тады $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 3x - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = -1, \\ 3x - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x = 4, \\ 3x - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} 6x = -\frac{4}{5}, \\ 3x - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ 3 \cdot \frac{2}{3} - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ 3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ -2y = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ 2y = -\frac{3}{5}; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = 1{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ y = -\frac{3}{10}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Адказ: $\left(\frac{2}{3};\ 1{,}5\right)$; $\left(-\frac{2}{15};\ -\frac{3}{10}\right)$.

Прыклад 11. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \frac{12}{3x^2 - 2y} + \frac{17}{2x^2 + 3y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $a = \frac{1}{3x^2 - 2y}$; $b = \frac{1}{2x^2 + 3y}$, тады сістэма прымае выгляд

$$\begin{cases} 12a + 17b = 3, \\ 6a + 34b = 3; \ \Big| \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{cases} 12a + 17b = 3, \\ -12a - 68b = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} -51b = -3, \\ 12a + 17b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ 12a + 17 \cdot \frac{1}{17} = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ 12a + 1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ a = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Выканаем адваротную замену:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2-2y}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{2x^2+3y}=\dfrac{1}{17};\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2-2y=6, & \big|\cdot(-2)\\ 2x^2+3y=17; & \big|\cdot 3\end{cases} \quad \begin{cases}-6x^2+4y=-12,\\ 6x^2+9y=51;\end{cases}$$

$$\begin{cases}13y=39,\\ 3x^2-2y=6;\end{cases} \quad \begin{cases}y=3,\\ 3x^2-2\cdot 3=6;\end{cases} \quad \begin{cases}y=3,\\ x^2=4;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Адказ: $(2; 3)$; $(-2; 3)$.

Прыклад 12. Знайдзіце здабытак $x_0 \cdot y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}-\dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}=1,\\ \dfrac{10\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}+\dfrac{3}{x-y\sqrt{2}}=1.\end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $a=\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}$, тады зыходная сістэма прымае выгляд $\begin{cases}a-b=1,\\ 5a+3b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}3a-3b=3,\\ 5a+3b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}8a=4,\\ a-b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ a-b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Тады $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y\sqrt{2}=4\sqrt{2},\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=4\sqrt{2}-2,\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ 2\sqrt{2}-1-y\sqrt{2}=-2;\end{cases} \quad \begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ y=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Тады здабытак

$$x_0\cdot y_0=\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}=3{,}5\sqrt{2}.$$

Адказ: $3{,}5\sqrt{2}$.

Прыклад 13. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases}\dfrac{8}{x^2+yx}+\dfrac{5}{y^2-3xy}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{5}{x^2+yx}-\dfrac{3}{y^2-3xy}=4.\end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $a = \dfrac{1}{x^2 + yx}$, $b = \dfrac{1}{y^2 - 3xy}$, тады сістэма прымае выгляд

$$\begin{cases} 8a + 5b = \dfrac{3}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 24a + 15b = \dfrac{9}{2}, \\ 25a - 15b = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} 49a = \dfrac{49}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тады $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + yx} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y^2 - 3xy} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + yx = 2, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases}$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 3y^2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Адказ: (1; 1); (–1; –1).

Прыклад 14. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$

Рашэнне.

Разгледзім першае ўраўненне сістэмы. Няхай $t = \dfrac{x + y}{x - y}$, тады ўраўненне прымае выгляд $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{13}{6}$; $6t^2 - 13t + 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3}, \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x + 3y = 2x - 2y, \\ 2x + 2y = 3x - 3y, \end{array}\right. \\ x \ne y; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -5y, \\ x = 5y, \end{array}\right. \\ x \ne y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = -5y, \\ x = 5y. \end{array}\right.$

Пры $x = -5y$ другое ўраўненне сістэмы прымае выгляд $-5y \cdot y = 5$; $y^2 = -1$. Атрыманае ўраўненне не мае каранёў.

Пры $x = 5y$ атрымаем $5y \cdot y = 5$; $y^2 = 1$; $y = 1$ або $y = -1$.

Тады рашэннямі сістэмы з’яўляюцца пары лікаў (5; 1) і (–5; –1).

Адказ: (5; 1); (–5; –1).

Прыклад 15. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = 2{,}5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Рашэнне.

Няхай $t = \dfrac{x + y}{x - y}$, тады першае ўраўненне сістэмы прымае выгляд

$t + \dfrac{1}{t} = 2{,}5$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Адкуль $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=2,\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ x^2+y^2=20;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=2,\\ x^2+y^2=20,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2},\\ x^2+y^2=20;\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3y,\\ 9y^2+y^2=20,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-3y,\\ 9y^2+y^2=20;\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3y,\\ y^2=2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-3y,\\ y^2=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Пры $y_1=\sqrt{2}$ атрымаем $x_1=3\sqrt{2}$.

Пры $y_2=-\sqrt{2}$ атрымаем $x_2=-3\sqrt{2}$.

Пры $y_3=\sqrt{2}$ атрымаем $x_3=-3\sqrt{2}$.

Пры $y_4=-\sqrt{2}$ атрымаем $x_4=3\sqrt{2}$.

Адказ: $\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(-3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; $\left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Прыклад 16. Рашыце сістэму ўраўненняў $\left\{\begin{array}{l}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11.\end{array}\right.$

Рашэнне.

Няхай $x+y=t$, тады першае ўраўненне сістэмы $\left\{\begin{array}{l}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11\end{array}\right.$ запішам у выглядзе $t^2-2t-15=0$; $\left[\begin{array}{l}t=5,\\ t=-3.\end{array}\right.$ Адкуль $\left[\begin{array}{l}x+y=5,\\ x+y=-3.\end{array}\right.$

Пры $x+y=5$ атрымаем сістэму $\left\{\begin{array}{l}x+y=5,\\ x+xy+y=11;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x+y=5,\\ xy=6;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=2,\\ y=3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3,\\ y=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Пры $x+y=-3$ маем $\left\{\begin{array}{l}x+y=-3,\\ x+xy+y=11;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x+y=-3,\\ xy=14;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x=-y-3,\\ (-y-3)y=14;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x=-y-3,\\ y^2+3y+14=0.\end{array}\right.$

Паколькі ўраўненне $y^2+3y+14=0$ не мае каранёў $(D<0)$, то сістэма не мае рашэнняў.

Такім чынам, рашэннямі зыходнай сістэмы з'яўляюцца пары лікаў (2; 3); (3; 2).

Адказ: (2; 3); (3; 2).

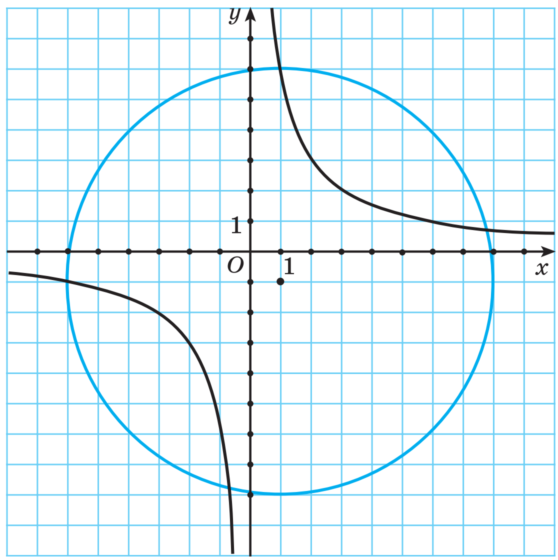
4. Выкарыстанне графікаў ураўненняў

Прыклад 17. Знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 + y^2 - 47 = 2x - 2y. \end{cases}$

Рашэнне.

Пераўтворым сістэму да выгляду $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 49. \end{cases}$

Графікам першага ўраўнення сістэмы $y = \dfrac{6}{x}$ з'яўляецца гіпербала, а графікам ураўнення $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 49$ з'яўляецца акружнасць з цэнтрам у пункце (1; –1) і радыусам 7 (рыс. 11).



Рыс. 11

Графікі ўраўненняў маюць чатыры агульныя пункты, значыць, адпаведная сістэма мае чатыры рашэнні.

5. Метад множання і дзялення ўраўненняў сістэмы

Сістэма двух ураўненняў з дзвюма зменнымі $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) = g_1(x; y) \cdot g_2(x; y), \end{cases}$ калі не існуе такіх пар $(x; y)$, пры якіх абодва выразы $f_1(x; y)$ і $g_1(x; y)$ адначасова ператвараюцца ў нуль.

Сістэма двух ураўненняў з дзвюма зменнымі $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ \dfrac{f_1(x; y)}{f_2(x; y)} = \dfrac{g_1(x; y)}{g_2(x; y)}, \end{cases}$ калі не існуе такіх пар $(x; y)$, пры якіх выразы $f_2(x; y)$ і $g_2(x; y)$ ператвараюцца ў нуль.

Прыклад 18. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} y^2 + 2xy = 15, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 15, \\ 2x^2 + xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y + 2x) = 15, \\ x(2x + y) = 5. \end{cases}$$

Дадзеная сістэма раўназначна сістэме:

$$\begin{cases} \dfrac{y(y+2x)}{x(2x+y)} = \dfrac{15}{5}, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 3, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x(2x + 3x) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ 5x^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1; \end{array} \right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Адказ: (1; 3); (–1; –3).

Прыклад 19. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} (x-3)^4 (y-5)^5 = 1, \\ (x-3)^5 (y-5)^4 = 1. \end{cases}$

Рашэнне.

Падзелім першае ўраўненне сістэмы $\begin{cases} (x-3)^4 (y-5)^5 = 1, \\ (x-3)^5 (y-5)^4 = 1 \end{cases}$ на другое і атрымаем:

$$\begin{cases} \dfrac{y-5}{x-3} = 1, \\ (x-3)^5 (y-5)^4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x-3)^5 (y-5)^4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x-3)^5 (x-3)^4 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x-3)^9 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ x - 3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 6, \\ x = 4. \end{cases}$$

Адказ: (4; 6).

6. Рашэнне сіметрычных сістэм ураўненняў

Мнагачлен $F(x; y)$ называецца *сіметрычным*, калі пры замене x на y і y на x ён не змяняецца.

Напрыклад, $x^4 + y^4$; $x^2 + y^2 - 5x^2y^2 + x + y + 1$ — сіметрычныя мнагачлены.

Усе сіметрычныя мнагачлены могуць быць выражаны праз найпрасцейшыя сіметрычныя мнагачлены $a = x + y$ і $b = xy$, напрыклад:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b;\ x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = a^2 - b;$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab.$$

Ураўненне $F(x;\ y) = 0$ называецца *сіметрычным*, калі $F(x;\ y)$ — сіметрычны мнагачлен. Сістэма, усе ўраўненні якой сіметрычныя, называецца *сіметрычнай*. Пры рашэнні сіметрычных сістэм карыстаюцца заменай $a = x + y$ і $b = xy$.

Прыклад 20. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

Рашэнне.

Запішам ураўненні сістэмы ў выглядзе $\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 17, \\ (x + y) + xy = 9. \end{cases}$

Няхай $a = x + y$, $b = xy$, тады сістэма прымае выгляд

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 17, \\ a + b = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 2(9 - a) = 17, \\ b = 9 - a; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 2a - 35 = 0, \\ b = 9 - a; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -7, \\ a = 5, \end{array} \right. \\ b = 9 - a; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -7, \\ b = 16, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 5, \\ b = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Тады $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 16, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases} \end{array} \right.$ Першая сістэма сукупнасці не мае рашэнняў, а рашэннямі другой сістэмы з'яўляюцца пары лікаў (1; 4) і (4; 1).

Адказ: (1; 4); (4; 1).

Прыклад 21. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8. \end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} xy + 2(x + y) = 5, \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 8. \end{cases}$$

Няхай $a = x + y$, $b = xy$, тады сістэма прымае выгляд

$$\begin{cases} b + 2a = 5, \\ a^2 - 2b + 3a = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ a^2 - 2(5 - 2a) + 3a = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ a^2 + 7a - 18 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ \left[\begin{array}{l} a = -9, \\ a = 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -9, \\ b = 23, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases} \end{array}\right. \text{ Вернемся да замены: } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -9, \\ xy = 23, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Першая сістэма сукупнасці не мае рашэнняў. Рашэннем другой сістэмы сукупнасці з'яўляецца пара лікаў (1; 1).

Адказ: (1; 1).

Прыклад 22. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x + xy + y = 1 + 2\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

Рашэнне.

Запішам сістэму $\begin{cases} x + xy + y = 1 + 2\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ у выглядзе $\begin{cases} (x + y) + xy = 1 + 2\sqrt{2}, \\ (x + y)^2 - 2xy = 3 \end{cases}$

і выканаем замену $a = x + y$, $b = xy$, тады $\begin{cases} a + b = 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2b = 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2\left(-a + 1 + 2\sqrt{2}\right) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 + 2a - 4\sqrt{2} - 5 = 0. \end{cases}$$

Рэшым другое ўраўненне сістэмы $a^2 + 2a - 4\sqrt{2} - 5 = 0$.

$$D = 2^2 - 4\left(-4\sqrt{2} - 5\right) = 4 + 16\sqrt{2} + 20 = 24 + 16\sqrt{2} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2;$$

$$a_1 = \frac{-2 + 4 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{-2 - 4 - 2\sqrt{2}}{2} = -3 - \sqrt{2}.$$

Тады $b_1 = -\left(1 + \sqrt{2}\right) + 1 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ і $b_2 = -\left(-3 - \sqrt{2}\right) + 1 + 2\sqrt{2} = 4 + 3\sqrt{2}$.

Тады пры $a_1 = 1 + \sqrt{2}$ і $b_1 = \sqrt{2}$ атрымаем:

$$\begin{cases} x + y = 1 + \sqrt{2}, \\ xy = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пры $a_2 = -3 - \sqrt{2}$ і $b_2 = 4 + 3\sqrt{2}$ атрымаем:

$$\begin{cases} x + y = -3 - \sqrt{2}, \\ xy = 4 + 3\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - 3 - \sqrt{2}, \\ \left(-y - 3 - \sqrt{2}\right)y = 4 + 3\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - 3 - \sqrt{2}, \\ y^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)y + 4 + 3\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Рэшым ураўненне $y^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)y + 4 + 3\sqrt{2} = 0;$

$$D = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(4 + 3\sqrt{2}\right) = 9 + 6\sqrt{2} + 2 - 16 - 12\sqrt{2} = -5 - 6\sqrt{2} < 0,$$

г. зн. ураўненне не мае каранёў.

Такім чынам, рашэннямі зыходнай сістэмы з'яўляюцца пары лікаў $\left(1; \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}; 1\right)$.

Адказ: $\left(1; \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}; 1\right)$.

7. Рашэнне аднародных сістэм ураўненняў

Мнагачлен $F(x;\ y)$ называецца *аднародным мнагачленам ступені* m, калі ўсе яго члены маюць адну і тую ж ступень m.

Напрыклад, $2x^3 + y^3 - 2x^2y$ — аднародны мнагачлен трэцяй ступені.

Сістэма ўраўненняў выгляду $\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0, \end{cases}$ дзе $F_1(x; y)$ і $F_2(x; y)$ — аднародныя мнагачлены адной і той жа ступені m, называецца *аднароднай сістэмай ступені* m.

Для рашэння аднародных сістэм выкарыстоўваюць метад складання, каб спачатку замяніць адно з ураўненняў сістэмы аднародным ураўненнем. Рашыўшы атрыманае аднароднае ўраўненне, адну са зменных выражаюць праз другую зменную. Затым карыстаюцца метадам падстаноўкі.

Прыклад 23. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

Рашэнне.

Разгледзім першае ўраўненне сістэмы як квадратнае адносна x і атрымаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3y, \\ x = -y, \end{array}\right. \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ (3y)^2 - 3y \cdot y - 2 \cdot 3y - 3y = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 - (-y)y - 2(-y) - 3y = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 - y - 6 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 3y,\\ \left[\begin{array}{l}y = 2,\\ y = -\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x = -y,\\ \left[\begin{array}{l}y = 2,\\ y = -\dfrac{3}{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 6,\\ y = 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x = -1{,}5,\\ y = -0{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}x = -2,\\ y = 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x = 1{,}5,\\ y = -1{,}5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Адказ: (6; 2); (–1,5; –0,5); (–2; 2); (1,5; –1,5).

Прыклад 24. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases}2x^2 - 3xy + y^2 = 3,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$

Рашэнне.

Памножым першае ўраўненне сістэмы $\begin{cases}2x^2 - 3xy + y^2 = 3,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6\end{cases}$ на –2 і атрымаем $\begin{cases}-4x^2 + 6xy - 2y^2 = -6,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$ Складзём першае і другое ўраўненні сістэмы, тады $\begin{cases}-3x^2 + 8xy - 4y^2 = 0,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$

Разгледзім ураўненне $3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0$ як квадратнае адносна x. $D = (8y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4y^2 = 64y^2 - 48y^2 = 16y^2$.

$x_1 = \dfrac{8y - 4y}{6} = \dfrac{2y}{3}$, $x_2 = \dfrac{8y + 4y}{6} = 2y$.

Пры $x = \dfrac{2y}{3}$ атрымаем $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{2y}{3} \cdot y - 2y^2 = 6;\end{cases}$

$\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{2y}{3} \cdot y - 2y^2 - 6 = 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ y^2 = -27.\end{cases}$ Сістэма не мае рашэнняў.

Пры $x = 2y$ маем $\begin{cases}x = 2y,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 2y,\\ (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot y - 2y^2 = 6;\end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right. \end{cases}$

Рашэннямі сістэмы з'яўляюцца пары лікаў (2; 1); (–2; –1).

Адказ: (2; 1); (–2; –1).

8. Выкарыстанне розных метадаў рашэння сістэм ураўненняў

Прыклад 25. Знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў
$\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$

Рашэнне.

Аднімем першае ўраўненне сістэмы ад другога і атрымаем:

$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - x = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} (x - y)(x + y) - (x - y) = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} (x - y)(x + y - 1) = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{array}\right. \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x = 1 - y, \end{array}\right. \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$

Пры $x = y$ атрымаем ураўненне $y^2 + y - 3 = 0$. Пры $x = 1 - y$ атрымаем ураўненне $(1 - y)^2 + y - 3 = 0;$ $y^2 - y - 2 = 0$. Паколькі атрыманыя ўраўненні маюць па два розныя карані $(D > 0)$, то зыходная сістэма ўраўненняў мае чатыры рашэнні.

Прыклад 26. Рашыце сістэму ўраўненняў
$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 5y + 3xy = 15, \\ x^2 + y^2 - x - y + xy = 1. \end{cases}$

Рашэнне.

Складзём першае і другое ўраўненні сістэмы:
$2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4xy = 16$.

Падзелім абедзве часткі атрыманага ўраўнення на два:
$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy = 8$, запішам ураўненне ў выглядзе
$(x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) = 8$, або $(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0$.

Няхай $x + y = t$, тады $t^2 + 2t - 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -4, \\ t = 2. \end{array}\right.$ Такім чынам, $\left[\begin{array}{l} x + y = -4, \\ x + y = 2. \end{array}\right.$

Вернемся да зыходнай сістэмы і запішам яе ў выглядзе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=-4,\\x+y=2,\end{array}\right.\\x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-4,\\x^2+y^2-x-y+xy=1,\end{cases}\\\begin{cases}x+y=2,\\x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y-4,\\x^2+y^2-x-y+xy=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y+2,\\x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y-4,\\(-y-4)^2+y^2-(-y-4)-y+(-y-4)y=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y+2,\\(2-y)^2+y^2-(2-y)-y+(2-y)y=1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+8y+16+y^2+y+4-y-y^2-4y=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-4y+4+y^2-2+y-y+2y-y^2=1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+4y+20=1,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+2=1;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+4y+19=0,\end{cases}\\\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+1=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ураўненне $y^2+4y+19=0$ не мае каранёў $\left(D=4^2-4\cdot1\cdot19<0\right)$.

Рэшым сістэму $\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-y+2,\\(y-1)^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-y+2,\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

Такім чынам, пара лікаў $(1;\,1)$ з'яўляецца рашэннем зыходнай сістэмы ўраўненняў.

Адказ: $(1;\,1)$.

Прыклад 27. Знайдзіце найбольшую з сум x_0+y_0, дзе $(x_0;\,y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases}|x-3|+|y|=10,\\x^2-6x+y^2-10y=39.\end{cases}$

Рашэнне.

Запішам сістэму ў выглядзе $\begin{cases}|x-3|+|y|=10,\\(x-3)^2+y^2-10y=48.\end{cases}$

Няхай $t = |x - 3|$, $t \geqslant 0$, тады сістэма прымае выгляд $\begin{cases} t + |y| = 10, \\ t^2 + y^2 - 10y = 48; \end{cases}$

$\begin{cases} t = 10 - |y|, \\ (10 - |y|)^2 + y^2 - 10y = 48; \end{cases}$ $\begin{cases} t = 10 - |y|, \\ y^2 - 5y - 10|y| + 26 = 0. \end{cases}$

Рэшым другое ўраўненне сістэмы.

Пры $y < 0$ атрымаем $y^2 + 5y + 26 = 0$; $D < 0$, г. зн. ураўненне не мае каранёў.

Пры $y \geqslant 0$ атрымаем $y^2 - 15y + 26 = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = 13, \\ y = 2. \end{array}\right.$

Калі $y = 13$, то $t = 10 - 13 < 0$.

Калі $y = 2$, то $t = 8$, г. зн. $|x - 3| = 8$; $\left[\begin{array}{l} x = -5; \\ x = 11. \end{array}\right.$

Рашэннямі зыходнай сістэмы ўраўненняў з'яўляюцца пары лікаў $(-5; 2)$ і $(11; 2)$. Найбольшая з сум $x_0 + y_0$ роўна 13.

Прыклад 28. Знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x^2(y+2)^2 + x^4 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + y^2 = -1. \end{cases}$

Рашэнне.

Запішам сістэму $\begin{cases} x^2(y+2)^2 + x^4 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + y^2 = -1 \end{cases}$ у выглядзе

$\begin{cases} x^2(y+2)^2 = 1 - x^4, \\ 4x^2 + 4xy + y^2 - x^2 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2(y+2)^2 = 1 - x^4, \\ (2x + y)^2 = x^2 - 1. \end{cases}$

Заўважым, што сістэма мае рашэнні, калі $1 - x^4 \geqslant 0$ і $x^2 - 1 \geqslant 0$, што магчыма, толькі калі $x = 1$ або $x = -1$.

Тады $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ (y+2)^2 = 0, \\ (2+y)^2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ (y+2)^2 = 0, \\ (-2+y)^2 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Другая сістэма сукупнасці не мае рашэнняў. Такім чынам, зыходная сістэма мае адзінае рашэнне (1; –2).

Прыклад 29. Рашыце сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 = 0, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0. \end{cases}$$

Рашэнне.

Разгледзім першае ўраўненне сістэмы як квадратнае адносна x:

$$5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 = 0; \quad 5x^2 - (4y - 18)x + 3y^2 - 16y + 25 = 0;$$

$$D = (4y - 18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3y^2 - 16y + 25) =$$

$$= 16y^2 - 144y + 324 - 60y^2 + 320y - 500 =$$

$$= -44y^2 + 176y - 176 = -44(y^2 - 4y + 4) = -44(y - 2)^2.$$

Ураўненне мае рашэнне, калі $-44(y-2)^2 \geqslant 0$, г. зн. $y = 2$.

Тады зыходная сістэма раўназначна сістэме

$$\begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 + 20x + 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ (x+1)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Адказ: (–1; 2).

11.1. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y-x}{3} = 8, \\ \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{y-x}{4} = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} - \dfrac{y-x}{6} = 4, \\ \dfrac{3x+y}{4} + \dfrac{5y-2x}{3} = 5. \end{cases}$

11.2. Знайдзіце суму $x_0 + y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} \dfrac{3x-7}{4} - \dfrac{2y-3}{5} = 1, \\ \dfrac{2x-y}{2} - 1 = y - 2. \end{cases}$$

11.3. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - 2\sqrt{7}, \\ 2y - \dfrac{6x}{\sqrt{7}} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 5y = 12 + 5\sqrt{2}, \\ 3x - 2\sqrt{2}y = 1. \end{cases}$

11.4. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{y-2}{x-1} = 2, \\ y - 2x = x^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-3} = 1, \\ (x+1)(y-3) = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-5)(y-3) = 0; \\ \dfrac{3x+y}{x-y+8} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+3)(y-4) = 0; \\ \dfrac{2y-x+5}{x+y+7} = 3. \end{cases}$

11.5. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2)(y+1) = 12, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+2y)^2 - (3x+y)^2 = 8, \\ y - 2x = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 17; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x + y - 2xy = -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1. \end{cases}$

11.6. Знайдзіце значэнне выразу $(x_0 + y_0)$, дзе $(x_0;\, y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$

11.7. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+2y} + \dfrac{8}{y} = 5, \\ \dfrac{10}{x+2y} - \dfrac{2}{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7, \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1. \end{cases}$

11.8. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

11.9. Знайдзіце найменшы са здабыткаў $x_0 \cdot y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2y = 12. \end{cases}$

11.10. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} (3x - 2y)(x - 4y) = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 4)(y - 1) = x^2 + 5x + 4, \\ x^2 - y - 3x + 8 = 0. \end{cases}$

11.11. Знайдзіце найменшае значэнне выразу $4(x_0 + y_0)$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x - 1)(y + 5). \end{cases}$

11.12. Знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x - 3)(y - 2) = y^2 - 3y + 2. \end{cases}$$

11.13. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x + y} - \dfrac{x + y}{x} = 1, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x - y)^2 - 11(x - y) + 5 = 0, \\ 2x + 3y = 25; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - 2y)^2 + 6(x - 2y) - 55 = 0; \\ (x - y)^2 + 6(x - y) + 5 = 0. \end{cases}$

11.14. Знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x + 3y} + \dfrac{x + 3y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x - y} + \dfrac{x - y}{xy} = 2{,}5. \end{cases}$$

11.15. Знайдзіце найбольшае значэнне выразу $(x_0 + y_0)$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} |x - 2| + |y - 5| = 1, \\ y - |x - 2| = 5. \end{cases}$

11.16. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x + 4xy + y = 6, \\ x^2y + xy^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 1 = x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5. \end{cases}$

11.17. Знайдзіце найменшае значэнне выразу $x_0 - y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

11.18. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 5y = -4, \\ -2x^2 - 6y^2 + 2x + 15y = 6. \end{cases}$

11.19. Знайдзіце значэнне выразу $n \cdot S$, дзе n — колькасць рашэнняў, а S — найменшая з сум $x_0 + y_0$, ведаючы, што $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - 2|x|y + y^2 = 4, \\ x^2 - 3|x|y - y^2 = 3. \end{cases}$

11.20. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + y^4x^2 = 80. \end{cases}$

11.21. Знайдзіце значэнне выразу $x_0 + y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 65, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

11.22. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - |y - x| + 2y^2 = 8, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

11.23. Знайдзіце значэнне выразу $n \cdot S$, дзе n — колькасць рашэнняў, а S — найменшая з сум $x_0 + y_0$, ведаючы, што $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

§ 12. Метады рашэння сістэм няроўнасцей

Прыклад 1. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases}\dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{3}>\dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{148}{21},\\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}\leqslant\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}.\end{cases}$$

Рашэнне.

$$\begin{cases}\dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{3}>\dfrac{2x+7}{3}-\dfrac{148}{21}, \ \Big|\cdot 21\\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}\leqslant\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}; \ \Big|\cdot 6\end{cases} \quad \begin{cases}3(3x+5)+7(10-3x)>7(2x+7)-148,\\ 2\cdot 7x-11(x+1)\leqslant 2(3x-1)-3(13-x);\end{cases}$$

$$\begin{cases}9x+15+70-21x>14x+49-148,\\ 14x-11x-11\leqslant 6x-2-39+3x;\end{cases} \quad \begin{cases}-26x>-184,\\ -6x\leqslant -30;\end{cases} \quad \begin{cases}x<7\dfrac{1}{13},\\ x\geqslant 5;\end{cases} \quad x\in\left[5;\ 7\dfrac{1}{13}\right).$$

Сума цэлых рашэнняў няроўнасці роўна $5 + 6 + 7 = 18$.

Адказ: 18.

Прыклад 2. Стораны трохвугольніка выражаюцца living рознымі цэлымі лікамі. Знайдзіце, якую даўжыню можа мець трэцяя старана, калі даўжыні дзвюх іншых старон 5 і 8, а перыметр не перавышае 20.

Рашэнне.

Няхай x — даўжыня трэцяй стараны трохвугольніка. Паколькі сума даўжынь любых дзвюх старон трохвугольніка павінна быць большай за даўжыню трэцяй стараны, то складзём сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases}5+8>x,\\ 5+x>8,\\ 8+x>5,\\ 5+8+x\leqslant 20;\end{cases} \quad \begin{cases}x<13,\\ x>3,\\ x>-3,\\ x\leqslant 7;\end{cases} \quad x\in(3;\ 7].$$

Паколькі стораны трохвугольніка выражаюцца цэлымі лікамі, то трэцяя старана трохвугольніка можа быць роўна 4, 5, 6 або 7.

Адказ: 4, 5, 6 або 7.

Прыклад 3. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей $\begin{cases}2x-x^2-1<0,\\ 3-2x\geqslant 0.\end{cases}$

Рашэнне.

$\begin{cases} 2x - x^2 - 1 < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ -2x \geqslant -3; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ x \leqslant 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \leqslant 1{,}5; \end{cases}$

$x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 1{,}5]$.

Найбольшым цэлым рашэннем сістэмы няроўнасцей з'яўляецца лік 0.

Адказ: 0.

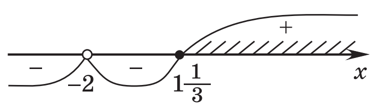
Прыклад 4. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0. \end{cases}$

Рашэнне.

$\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 2 - 3x + 12 > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x > -5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 2{,}5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0. \end{cases}$

Выкарыстаем метад інтэрвалаў і рэшым другую няроўнасць сістэмы:

$\dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0;$ 

$\left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Атрымаем: $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 2{,}5), \\ x \in \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right); \end{cases}$ $x \in \left[1\frac{1}{3};\ 2{,}5\right)$.

Адказ: $\left[1\frac{1}{3};\ 2{,}5\right)$.

Прыклад 5. Знайдзіце колькасць цэлых лікаў з абсягу вызначэння функцыі $f(x) = \sqrt[4]{7 - 2x} - \lg(10 - x^2 + 3x)$.

Рашэнне.

Абсяг вызначэння дадзенай функцыі супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей:

$\begin{cases} 7 - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 3x + 10 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 7 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 3{,}5, \\ x \in (-2;\ 5); \end{cases}$ $x \in (-2;\ 3{,}5]$.

У прамежку $(-2;\ 3{,}5]$ знаходзяцца 5 цэлых лікаў.

Адказ: 5.

Прыклад 6. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}(7+x)^{-1} \geqslant \dfrac{1}{6},\\ (7+x)^2 < 36.\end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases}(7+x)^{-1} \geqslant \dfrac{1}{6},\\ (7+x)^2 < 36;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x+7} \geqslant \dfrac{1}{6},\\ -6 < x+7 < 6;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x+7} - \dfrac{1}{6} \geqslant 0,\\ -13 < x < -1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x+1}{x+7} \leqslant 0,\\ -13 < x < -1;\end{cases} \quad \begin{cases}x \in (-7;\ -1],\\ -13 < x < -1.\end{cases}$$

Адказ: $(-7; -1)$.

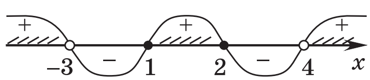
Прыклад 7. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \leqslant 1,\\ |4-2x| \leqslant 1.\end{cases}$

Рашэнне.

$$\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \leqslant 1,\\ |4-2x| \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} - 1 \leqslant 0,\\ |2x-4| \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{2x-14-x^2+x+12}{x^2-x-12} \leqslant 0,\\ -1 \leqslant 2x-4 \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-x-12} \leqslant 0,\\ 3 \leqslant 2x \leqslant 5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-12} \geqslant 0,\\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \geqslant 0,\\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5.\end{cases}$$

Выкарыстаем метад інтэрвалаў і рэшым першую няроўнасць сістэмы:

$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \geqslant 0;$ 

$x \in (-\infty;\ -3) \cup [1;\ 2] \cup (4;\ +\infty).$

Атрымаем: $\begin{cases}x \in (-\infty;\ -3) \cup [1;\ 2] \cup (4;\ +\infty),\\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5;\end{cases}$ $x \in [1{,}5;\ 2].$

Адказ: $[1{,}5;\ 2]$.

Прыклад 8. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases}\dfrac{36}{x} - x \leqslant 0,\\ \dfrac{|12-2x|(x^2+3x+8)}{|x|-3} \leqslant 0.\end{cases}$$

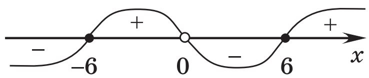
Рашэнне.

Заўважым, што $x^2+3x+8>0$ для ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$ (паколькі $a=1>0$ і $D<0$).

Тады зыходную сістэму можна запісаць у выглядзе $\begin{cases} \dfrac{36 - x^2}{x} \leqslant 0, \\ \dfrac{|12 - 2x|}{|x| - 3} \leqslant 0. \end{cases}$

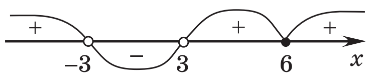
Выкарыстаем метад інтэрвалаў для рашэння кожнай няроўнасці сістэмы:

1) $\dfrac{x^2 - 36}{x} \geqslant 0;$



$x \in [-6;\ 0) \cup [6;\ +\infty).$

2) $\dfrac{|12 - 2x|}{|x| - 3} \leqslant 0;$



$x \in (-3;\ 3) \cup \{6\}.$

$\begin{cases} x \in [-6;\ 0) \cup [6;\ +\infty), \\ x \in (-3;\ 3) \cup \{6\}; \end{cases}$ $x \in (-3;\ 0) \cup \{6\}.$

Знойдзем суму цэлых рашэнняў сістэмы няроўнасцей: $-2 + (-1) + 6 = 3.$

Адказ: 3.

12.1. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 2(2x + 1) + x > 3x + 1, \\ \dfrac{2x - 1}{3} \geqslant \dfrac{3x - 2}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{2} \geqslant 3, \\ (x - 2)^2 > x(x - 4). \end{cases}$

12.2. Знайдзіце найбольшае цэлае дадатнае рашэнне сістэмы няроўнасцей $\begin{cases} x - 4 \leqslant 1 - \dfrac{x - 1}{4}, \\ 2x - 0{,}5 > \dfrac{x}{2} - 1{,}5. \end{cases}$

12.3. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} |x - 3| \leqslant 4, \\ |x - 6| \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |8x - 1| \leqslant 3, \\ |2x + 1| \geqslant -5. \end{cases}$

12.4. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} x^2 - 25 \geqslant 0, \\ x^2 + 6x - 27 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x^2 - 4x \leqslant 0. \end{cases}$

12.5. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} 50 - 5x \geqslant x^2, \\ x^2 - 4x + 4 > 0. \end{cases}$$

12.6. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x - 24 \leqslant 0. \end{cases}$

12.7. Знайдзіце ўсе рашэнні сістэмы няроўнасцей $\begin{cases} (x + 2)(x - 3)(x - 5) \geqslant 0, \\ x^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$

12.8. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 2, \\ |x + 1| < 5. \end{cases}$

12.9. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{|4x + 1| - 5}} - \sqrt[4]{2x^2 - x + 3}$.

12.10. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} \dfrac{10}{9x - 10} > \dfrac{9x^2}{10 - 9x}, \\ \dfrac{9x^2}{9x^2 + 16} < \dfrac{16}{9x^2 + 16}. \end{cases}$

§ 13. Сістэмы лінейных ураўненняў з n зменнымі ($n \geqslant 2$)

Для рашэння сістэм лінейных ураўненняў з n зменнымі ($n \geqslant 2$) у элементарнай матэматыцы карыстаюцца *метадам Гаўса*, які заключаецца ў паслядоўным выключэнні зменных спосабам складання.

Карл Фрыдрых Гаўс (1777—1855)

Прыклад. Рашыце сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

Рашэнне.

Рэшым дадзеную сістэму ўраўненняў метадам Гаўса.

1) Выберам адно з ураўненняў сістэмы, лепш тое, у якім каэфіцыент перад x роўны 1, гэта ўраўненне $x + 2y + 3z = 5$.

Абедзве часткі гэтага ўраўнення памножым на –3:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ -3x - 6y - 9z = -15, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

2) Складзём першае і другое ўраўненні і запішам суму ўраўненняў на другім месцы, а на першым — ураўненне $x + 2y + 3z = 5$: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

Памножым ураўненне $x + 2y + 3z = 5$ на –2: $\begin{cases} -2x - 4y - 6z = -10, \\ -5y - 7z = -9, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

Складзём першае і трэцяе ўраўненні і запішам гэту суму на трэцім месцы: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ -y - 5z = -9. \end{cases}$

3) Памножым трэцяе ўраўненне на –5 і складзём з другім:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 5y + 25z = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 18z = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ z = 2. \end{cases}$$

4) Знойдзем значэнні зменных y і x з другога і першага ўраўненняў: $-5y = -9 + 7z = -9 + 14$, $y = -1$; $x = 5 - 2y - 3z = 5 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 1$.

Адказ: (1; –1; 2).

13.1. Рашыце сістэму ўраўненняў:

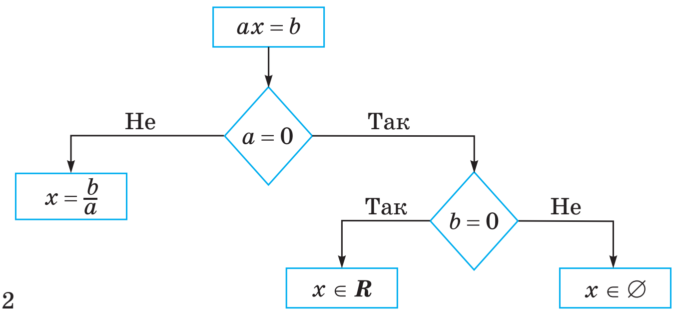
а) $\begin{cases} x + y + 2z = -2, \\ -x + y - 3z = -7, \\ 2x + 3y + z = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y + z = -5, \\ -2x + y - 3z = -3, \\ -x + 4y + 6z = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x - 3y + z = 8, \\ -2x - y - 3z = 0, \\ -x + 4y + 6z = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x + y - 3z = 3, \\ -x + 4y + 6z = 13. \end{cases}$

§ 14. Задачы з параметрамі. Лінейныя ўраўненні з параметрамі

Ураўненне выгляду $ax = b$, дзе x — зменная, а a і b — некаторыя рэчаісныя лікі (параметры), называецца лінейным.

Колькасць рашэнняў лінейнага ўраўнення залежыць ад значэння параметраў a і b. Усе магчымыя выпадкі, якія ўзнікаюць пры рашэнні лінейных ураўненняў, пакажам на блок-схеме (рыс. 12).



Рыс. 12

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне $a^2x - 3 = 9x + a$ адносна x.

Рашэнне.

Прывядзём дадзенае лінейнае ўраўненне да стандартнага выгляду:

$$a^2x - 3 = 9x + a \Leftrightarrow a^2x - 9x = a + 3 \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = a + 3 \qquad (1)$$

Згодна са схемай, разгледзім два выпадкі для каэфіцыента пры x:

1) калі $a^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 3$, то $x = \dfrac{a+3}{a^2-9} = \dfrac{1}{a-3}$;

2) калі $a^2 - 9 = 0$, то

а) пры $a = -3$ ураўненне (1) прыме выгляд $0 \cdot x = 0$, адсюль атрымаем, што x — любы рэчаісны лік;

б) пры $a = 3$ ураўненне (1) прыме выгляд $0 \cdot x = 9$, адсюль вынікае, што пры дадзеным значэнні параметра ўраўненне не мае каранёў.

Адказ: калі $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x = \dfrac{1}{a-3}$;
калі $a = -3$, то x — любы рэчаісны лік;
калі $a = 3$, то ўраўненне не мае каранёў.

Прыклад 2. Пры якіх значэннях параметра k ураўненне $2(k - 2x) = kx + 3$ не мае каранёў?

Рашэнне.

Прывядзём дадзенае лінейнае ўраўненне да стандартнага выгляду:
$2(k - 2x) = kx + 3 \Leftrightarrow (k + 4)x = 2k - 3$.

Ураўненне не мае каранёў, калі $k + 4 = 0$ і $2k - 3 \neq 0$, г. зн. $k = -4$ і $k \neq 1{,}5$, адкуль $k = -4$.

Адказ: $k = -4$.

Прыклад 3. Колькі рашэнняў мае ўраўненне $|x + 2| = ax$ у залежнасці ад значэнняў параметра a?

Рашэнне.

Па азначэнні модуля атрымаем, што ўраўненне раўназначна сукупнасці дзвюх сістэм:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x + 2 = ax, \\ x + 2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -(x + 2) = ax, \\ x + 2 < 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} (a - 1)x = 2, \\ x \geqslant -2, \end{cases} \\ \begin{cases} (a + 1)x = -2, \\ x < -2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Рэшым першую сістэму:

1) калі $a = 1$, то сістэма не мае рашэнняў (паколькі ўраўненне $0 \cdot x = 2$ не мае рашэнняў);

2) калі $a \neq 1$, то $\begin{cases} x = \dfrac{2}{a - 1}, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

У гэтым выпадку сістэма мае адно рашэнне $x = \dfrac{2}{a - 1}$ пры $\dfrac{2}{a + 1} \geqslant -2$, г. зн. пры $a \leqslant 0$ і $a > 1$, і не мае рашэнняў пры $a \in (0; 1)$.

Рэшым другую сістэму:

1) калі $a = -1$, то сістэма не мае рашэнняў (паколькі ўраўненне $0 \cdot x = -2$ не мае рашэнняў);

2) калі $a \neq -1$, то $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{a + 1}, \\ x < -2. \end{cases}$

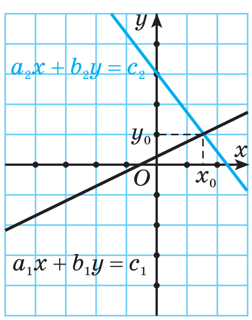
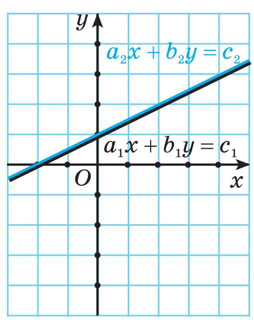
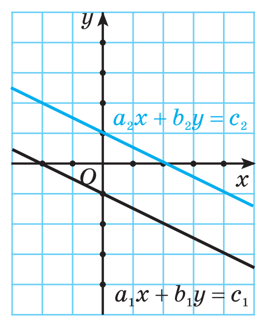
У гэтым выпадку сістэма мае адно рашэнне $x = -\dfrac{2}{a + 1}$ пры $\dfrac{2}{a + 1} < -2$, г. зн. пры $-1 < a < 0$, і не мае рашэнняў пры $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Аб'яднаўшы рашэнні сістэм, атрымаем адказ.

Адказ: пры $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ ураўненне мае адно рашэнне,
пры $a \in (-1; 0)$ ураўненне мае два рашэнні,
пры $a \in (0; 1]$ ураўненне не мае рашэнняў.

Сістэмы двух лінейных ураўненняў з параметрамі

У залежнасці ад значэнняў каэфіцыентаў пры зменных і свабодных членаў такія сістэмы могуць мець адзінае рашэнне, бясконца многа рашэнняў і не мець рашэнняў.

	Сістэма лінейных ураўненняў $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$		
Колькасць рашэнняў сістэмы	Мае адзінае рашэнне $(x_0;\ y_0)$	Мае бясконца многа рашэнняў $\left(x_0;\ \dfrac{c_1 - a_1x_0}{b_1}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$	Не мае рашэнняў
Адносіны паміж каэфіцыентамі і свабоднымі членамі	$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$	$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$
Графічная інтэрпрэтацыя			

Прыклад 4. Пры якіх значэннях параметра a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ay = a \end{cases}$ не мае рашэнняў?

Рашэнне.

Сістэма ўраўненняў не мае рашэнняў, калі:

$$\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{6}{a}, \\ \frac{3}{5} \neq \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10, \\ a \neq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 10.$$

Адказ: $a = 10$.

Прыклад 5. Пры якіх значэннях параметра a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} 3x + (a-1)y = a+1, \\ (a+1)x + y = 3 \end{cases}$ мае бясконца многа рашэнняў?

Рашэнне.

Сістэма ўраўненняў мае бясконца многа рашэнняў, калі:

$$\begin{cases} \frac{3}{a+1} = a - 1, \\ \frac{3}{a+1} = \frac{a+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4, \\ \left[\begin{array}{l} a + 1 = 3, \\ a + 1 = -3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Адказ: $a = 2$.

Квадратныя ўраўненні з параметрамі

Ураўненне выгляду $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, дзе x — зменная, а a, b і c — некаторыя рэчаісныя лікі (параметры), называецца квадратным. Колькасць рашэнняў квадратнага ўраўнення залежыць ад яго дыскрымінанта.

Прыклад 6. Знайдзіце ўсе значэнні параметра a, для якіх квадратнае ўраўненне $(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ мае два карані.

Рашэнне.

Паколькі па ўмове ўраўненне з'яўляецца квадратным, то $a \neq -1$. Знойдзем дыскрымінант:

$$D = 4(a+1)^2 - 4(a+1)(a-2) = 12(a+1).$$

Квадратнае ўраўненне мае два карані, калі $D > 0$, г. зн. калі $12(a+1) > 0 \Leftrightarrow a > -1$.

Адказ: $a \in (-1; +\infty)$.

Прыклад 7. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $2x^2 + x - a = 0$ мае хаця б адзін агульны корань з ураўненнем $2x^2 - 7x + 6 = 0$?

Рашэнне.

Каранямі ўраўнення $2x^2 - 7x + 6 = 0$ з'яўляюцца $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$. Па ўмове задачы лікі $x_1 = 2$ і $x_2 = 1{,}5$ павінны ператвараць ураўненне

$2x^2 + x - a = 0$ у правільную лікавую роўнасць, таму для вызначэння параметра a атрымаем два ўраўненні $\left[\begin{array}{l} 8 + 2 - a = 0, \\ 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10, \\ a = 6. \end{array}\right.$

Адказ: $a = 10$, $a = 6$.

Прыклад 8. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненні $x^2 + ax + 1 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ маюць хаця б адзін агульны корань?

Рашэнне.

Няхай x_0 — агульны корань двух дадзеных ураўненняў. Тады павінны выконвацца ўмовы

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + 1 - x_0 - a = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(a - 1) = a - 1, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Пры $a = 1$ рашэннем першага ўраўнення сістэмы з'яўляецца $x_0 \in \boldsymbol{R}$, аднак другое ўраўненне рашэнняў не мае (паколькі $D = -3 < 0$). Значыць, і сістэма рашэнняў не мае.

Пры $a \neq 1$ першае ўраўненне сістэмы мае адзіны корань $x_0 = 1$. Сістэма будзе мець рашэнні тады і толькі тады, калі дадзены корань з'яўляецца таксама коранем другога ўраўнення. Таму, падстаўляючы яго ў другое ўраўненне, знаходзім $a = -2$.

Такім чынам, пры $a = -2$ абодва ўраўненні маюць агульны корань $x_0 = 1$.

Адказ: $a = -2$.

Размяшчэнне каранёў квадратнага трохчлена

Прыклад 9. Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $x^2 - ax + 2 = 0$ належаць інтэрвалу $(0; 3)$?

Рашэнне.

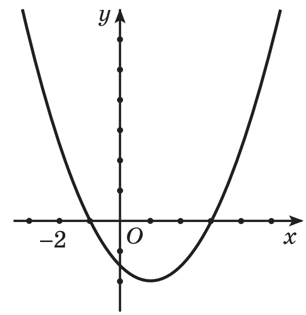
Для таго каб усе карані квадратнага ўраўнення ляжалі ў інтэрвале паміж 0 і 3, неабходна і дастаткова, каб выконваліся ўмовы:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ 0 < \frac{a}{2} < 3, \\ f(0) > 0, \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 \geqslant 0, \\ 0 < a < 6, \\ 2 > 0, \\ 11 - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right), \\ 0 < a < 6, \\ a < 3\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Рашыўшы дадзеную сістэму, знойдзем $a \in \left[2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right)$.

Адказ: $a \in \left[2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right)$.

Прыклад 10. Пры якіх значэннях параметра a абодва карані ўраўнення $(a-1)x^2-4ax+4(a+3)=0$ большыя за -2?



Рыс. 13

Рашэнне. *Першы спосаб.*

1) Пры $a=1$ ураўненне не з'яўляецца квадратным, значыць, $a=1$ не падыходзіць, паколькі ў гэтым выпадку ўраўненне мае адзін корань.

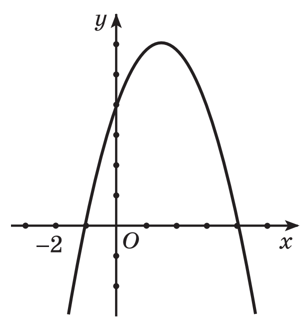
2) Даследуем ураўненне пры $a>1$.

Для таго каб абодва карані квадратнага ўраўнення былі большымі за -2 (рыс. 13), неабходна і дастаткова выкананне ўмоў:

$$\begin{cases} a>1, \\ D>0, \\ -\frac{b}{2a}>-2, \\ f(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ 16a^2-16(a-1)(a+3)>0, \\ \frac{4a}{2(a-1)}>-2, \\ 4(a-1)+8a+4(a+3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a<\frac{3}{2}, \\ \frac{2a-1}{a-1}>0, \\ a>-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(1;\ 1\frac{1}{2}\right).$$

3) Даследуем ураўненне пры $a<1$.

Для таго каб абодва карані квадратнага ўраўнення былі большымі за -2 (рыс. 14), неабходна і дастаткова выкананне ўмоў:



Рыс. 14

$$\begin{cases} a<1, \\ D>0, \\ -\frac{b}{2a}>-2, \\ f(-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ 16a^2-16(a-1)(a+3)>0, \\ \frac{4a}{2(a-1)}>-2, \\ 4(a-1)+8a+4(a+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<1, \\ a<\frac{3}{2}, \\ \frac{2a-1}{a-1}>0, \\ a<-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right).$$

Аб'яднаўшы дадзеныя рашэнні, атрымаем $a\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Адказ: $a\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Другі спосаб. Часта пры рашэнні задач з квадратнымі ўраўненнямі зручна карыстацца тэарэмай Віета.

Тэарэма Віета
Калі x_1, x_2 — карані квадратнага ўраўнення $ax^2 + bx + c = 0$, то
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Няхай x_1, x_2 — карані дадзенага ўраўнення. Паколькі $x_1 > -2$, $x_2 > -2$, то $x_1 + 2 > 0$, $x_2 + 2 > 0$.

Для таго каб два лікі былі дадатнымі, неабходна і дастаткова, каб сума гэтых лікаў і іх здабытак былі дадатнымі. Таму рэшым сістэму:
$$\begin{cases} D > 0, \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0, \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0, \\ (x_1 + x_2) + 4 < 0. \end{cases}$$

Па тэарэме Віета $x_1 + x_2 = \frac{4a}{a-1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4(a+3)}{a-1}$.

Падставіўшы выразы ў сістэму, атрымаем:
$$\begin{cases} 16a^2 - 16(a-1)(a+3) > 0, \\ \frac{4(a+3)}{a-1} + \frac{8a}{a-1} + 4 > 0, \\ \frac{4a}{a-1} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2}, \\ \frac{16a+8}{a-1} > 0, \\ \frac{8a-4}{a-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 1{,}5).$$

Адказ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 1{,}5)$.

Квадратныя няроўнасці з параметрамі

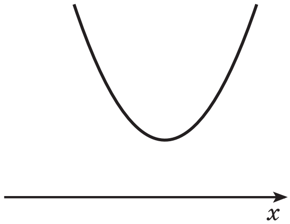
Прыклад 11. Рашыце адносна x няроўнасць
$mx^2 - 2(m-1)x + (m+2) < 0$.

Рашэнне.

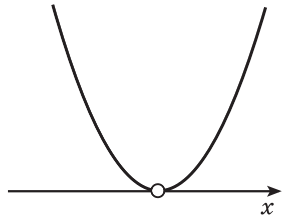
Паколькі ва ўмове задачы не сказана, што няроўнасць з'яўляецца квадратнай, то пры рашэнні дадзенай няроўнасці з іншымі магчымымі выпадкамі трэба разгледзець і выпадак $m = 0$.

1) Няхай $m = 0$. Тады няроўнасць прымае выгляд $2x + 2 < 0$, адкуль $x < -1$.

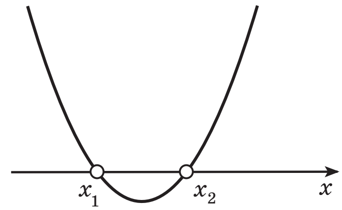
2) Няхай $m > 0$ і $D = 4(m-1)^2 - 4m(m+2) = 4(1-4m) < 0$, г. зн. $m \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. Тады няроўнасць не мае рашэнняў (рыс. 15).



Рыс. 15



Рыс. 16



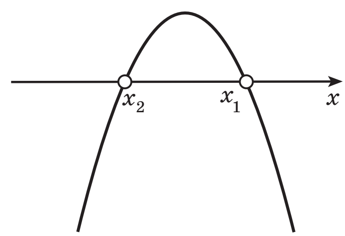
Рыс. 17

3) Няхай $m > 0$ і $D = 4(1 - 4m) = 0$, г. зн. $m = \frac{1}{4}$. Як і ў папярэднім выпадку, няроўнасць не мае рашэнняў (рыс. 16).

4) Няхай $m > 0$ і $D = 4(1 - 4m) > 0$, г. зн. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Тады $x \in (x_1; x_2)$, дзе $x_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$, $x_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$ (рыс. 17).

5) Няхай $m < 0$ і $D = 4(1 - 4m) < 0$. Тады $m \in \varnothing$. Значыць, такі выпадак немагчымы.

6) Няхай $m < 0$ і $D = 4(1 - 4m) = 0$. Дадзены выпадак таксама, як папярэдні, немагчымы.



Рыс. 18

7) Няхай $m < 0$ і $D = 4(1 - 4m) > 0$, г. зн. $m \in (-\infty; 0)$. Тады $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$, дзе $x_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$, $x_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$. Паколькі $m < 0$, то x_2 — меншы корань, а x_1 — большы (рыс. 18).

Адказ: калі $m \in (-\infty; 0)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}\right) \cup \left(\frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}; +\infty\right)$, калі $m = 0$, то $x \in (-\infty; -1)$, калі $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$, то $x \in \left(\frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}; \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}\right)$, калі $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то $x \in \varnothing$.

Прыклад 12. Вызначце ўсе значэнні параметра m, пры якіх няроўнасць $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + m + 1 > 0$ справядлівая для любых рэчаісных значэнняў x.

Рашэнне.

Няхай $m = 1$, тады зыходная няроўнасць прымае выгляд $2x + 2 > 0$. Яна выконваецца не пры ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$.

Няхай $m \neq 1$. Квадратны трохчлен $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x + m + 1$ прымае дадатныя значэнні пры ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$ (графік ляжыць вышэй восі абсцыс) тады і толькі тады, калі выконваюцца ўмовы:

$$\begin{cases} m - 1 > 0, \\ D = (m+1)^2 - 4(m-1)(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0, \\ -3m^2 + 2m + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

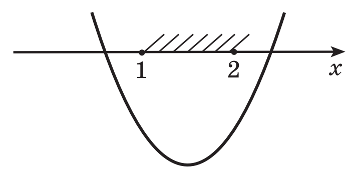
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1, \\ 3m^2 - 2m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1, \\ \left[\begin{array}{l} m < -1, \\ m > \frac{5}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{3}.$$

Адказ: $m \in \left(\frac{5}{3};\ +\infty\right)$.

Прыклад 13. Знайдзіце ўсе значэнні параметра m, пры якіх усякае рашэнне няроўнасці $1 \leqslant x \leqslant 2$ з'яўляецца рашэннем няроўнасці $x^2 - mx + 1 \leqslant 0$.

Рашэнне.

Задача можа быць перафармулявана наступным чынам: пры якіх значэннях m мноства рашэнняў няроўнасці $x^2 - mx + 1 \leqslant 0$ змяшчае адрэзак [1; 2], г. зн. пры якіх значэннях m карані трохчлена размяшчаюцца так, як паказана на рысунку 19.



Рыс. 19

Размяшчэнне парабалы вызначаецца ўмовамі: $\begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \leqslant 0, \\ 5 - 2m \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant 2{,}5.$

Адказ: $m \in [2{,}5;\ +\infty)$.

Прыклад 14. Знайдзіце ўсе значэнні параметра k, пры кожным з якіх існуе хаця б адно агульнае рашэнне ў няроўнасцей $x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k$ і $x^2 + 2kx \leqslant 3k^2 - 8k + 4$.

Рашэнне.

Выходная задача можа быць перафармулявана наступным чынам: знайсці ўсе значэнні параметра k, пры кожным з якіх сістэма няроўнасцей $\begin{cases} x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1 > 0, \\ x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 \leqslant 0 \end{cases}$ мае хаця б адно рашэнне.

Знойдзем усе значэнні параметра k, пры якіх сістэма не мае рашэнняў. Пры любым фіксаваным k каранямі квадратнага ўраўнення $x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 = 0$ з'яўляюцца лікі $x_1 = k - 2$, $x_2 = -3k + 2$. Таму мноства рашэнняў другой няроўнасці сістэмы ёсць інтэрвал, утвораны пунктамі, якія ляжаць паміж дадзенымі каранямі. Сістэма не мае рашэнняў, калі мноства рашэнняў першай няроўнасці не змяшчае гэты інтэрвал, а гэта будзе тады і толькі тады, калі выконваюцца ўмовы:

$$\begin{cases} f(x_1) \leqslant 0, \\ f(x_2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8k^2 - 14k + 3 \leqslant 0, \\ -6k + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}, \text{ дзе}$$

$f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1.$

Такім чынам, сістэма не мае рашэнняў пры $k \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Значыць, пры $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ дадзеная сістэма мае хаця б адно рашэнне.

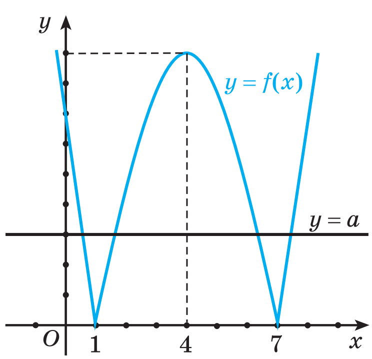
Адказ: $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Графічны метад рашэння задач з параметрамі

Прыклад 15. Колькі каранёў у залежнасці ад значэнняў параметра a мае ўраўненне $|x^2 - 8x + 7| = a$?

Рашэнне.

Пабудуем на каардынатнай плоскасці xOy графік функцыі $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ (рыс. 20). Графікам функцыі $y = a$ з'яўляецца прамая, якая паралельна восі абсцыс і праходзіць праз пункт з каардынатамі $(0; a)$.



Рыс. 20

Дадзенае ўраўненне мае столькі ж каранёў, колькі пунктаў перасячэння маюць графікі функцый $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ і $y = a$ пры фіксаваным значэнні a.

Робім выснову, што графікі не перасякаюцца, калі $a < 0$; маюць два пункты перасячэння, калі $a = 0$; маюць чатыры пункты перасячэння, калі $0 < a < 9$; маюць тры пункты перасячэння, калі $a = 9$; маюць два пункты перасячэння, калі $a > 9$.

Адказ: калі $a \in (-\infty; 0)$, то каранёў няма, калі $a \in \{0\} \cup (9; +\infty)$ — два карані, калі $a \in (0; 9)$ — чатыры карані, калі $a = 9$ — тры карані.

Выкарыстанне ўласцівасцей функцый пры рашэнні задач з параметрамі

Прыклад 16. Рашыце сістэму ўраўненняў з параметрам a

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = 3a. \end{cases} \qquad (1)$$

Рашэнне.

Складаўшы першае ўраўненне з другім, а затым адняўшы ад другога ўраўнення першае, атрымаем сістэму, раўназначную зыходнай:

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 4a, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 4a, \\ \cos(x+y) = 2a. \end{cases} \qquad (2)$$

Сістэма (2), а значыць, і сістэма (1) маюць рашэнні тады і толькі тады, калі параметр a задавальняе наступную сістэму няроўнасцей: $\begin{cases} -1 \leqslant 4a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant 2a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$.

Менавіта пры гэтых значэннях a сістэма (1) мае рашэнне.

Такім чынам, няхай $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$. Тады з сістэмы (2) атрымліваем

$$\begin{cases} x - y = \pm\arccos 4a + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \pm\arccos 2a + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}\arccos 4a \pm \frac{1}{2}\arccos 2a + \pi(n+k), \ n \in \boldsymbol{Z}, \ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \pm\frac{1}{2}\arccos 2a \mp \frac{1}{2}\arccos 4a + \pi(k-n), \ n \in \boldsymbol{Z}, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Адказ: калі $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то рашэнняў няма;

калі $a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \pm\frac{1}{2}\arccos 4a \pm \frac{1}{2}\arccos 2a + \pi(n+k)$,

$n, k \in \boldsymbol{Z}$, $y = \pm\frac{1}{2}\arccos 2a \mp \frac{1}{2}\arccos 4a + \pi(k-n)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 17. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне

$$3^{-x^2+2x-3} \cdot \log_2(|a|+2) + 3^{-2-|a|} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3) = 0$$

мае адзіны корань?

Рашэнне.

Прывядзём лагарыфмы да адной асновы і памножым абедзве часткі ўраўнення на $3^{|a|+2+x^2-2x+3} \neq 0$, атрымаем раўназначнае ўраўненне
$3^{|a|+2}\log_2(|a|+2) = 3^{x^2-2x+3}\log_2(x^2-2x+3)$.

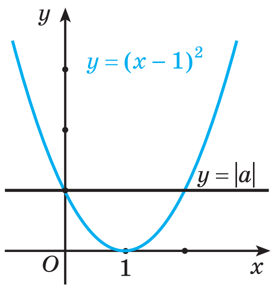
Абазначым $u = |a|+2$ і $v = x^2-2x+3$. Заўважым, што $u \geqslant 2$, $v \geqslant 2$. Разгледзім функцыю $f(t) = 3^t \log_2 t$. Так, калі $y = 3^t$ і $y = \log_2 t$ — нарастальныя дадатныя функцыі пры $t \geqslant 2$, то і здабытак гэтых функцый, г. зн. функцыя $f(t)$ таксама манатонна нарастальная функцыя. Маем $f(u) = f(v)$. Для нарастальных функцый гэта роўнасць выконваецца толькі пры $u = v$.

Значыць, зыходнае ўраўненне раўназначна ўраўненню $(x-1)^2 = |a|$.

Разгледзім графікі функцый $f_1(x) = (x-1)^2$ і $f_2(x) = |a|$ (рыс. 21).

Ураўненне мае адзіны корань у тым выпадку, калі прамая $y = |a|$ праходзіць праз вяршыню парабалы $y = (x-1)^2$, г. зн. ураўненне мае адзінае рашэнне пры $a = 0$.

Адказ: $a = 0$.



Рыс. 21

14.1. Колькі каранёў можа мець ураўненне:

а) $a \cdot x = 7$; б) $0 \cdot x = a$?

14.2. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(5 + a)x = a + 2$ мае адзіны корань?

14.3. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(7 + a)x = a - 5$ не мае каранёў?

14.4. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(2a + 3)x = 3a + 2$ мае бясконца многа каранёў?

14.5. Рашыце ўраўненне адносна x:

а) $(a + 14)x = 7$; б) $(2a + 7)x = a$;
в) $(a + 7)x = a + 2$; г) $a(x - 3) = 0$;
д) $(a - 1)(x - 3) = 3$; е) $(a^2 - 25)x = a + 5$;
ж) $(a - 2)x = (4 - 2a)x + 3$; з) $2(a + 2x) = ax + 3$.

14.6. Пры якіх значэннях параметра b ураўненне $1 + 2x - bx = 4 + x$ мае адмоўнае рашэнне?

14.7. Пры якіх значэннях параметра b ураўненне $2 + 4x - bx = 3 + x$ мае дадатнае рашэнне?

14.8. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(a^2 - 1)x = a - 1$ не мае рашэнняў?

14.9. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(a^2 - 4)x = a + 2$ мае бясконца многа рашэнняў?

14.10. Пры якіх значэннях a ўраўненне $(a^2 + 8a + 16)x = a + 4$ мае адзінае рашэнне?

14.11. Рашыце ўраўненне адносна x:

а) $|x + 2| = a$; б) $|x - 3| = ax$; в) $|3x + 6| = ax$.

14.12. Колькі рашэнняў можа мець сістэма ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2x + 7y = 5, \\ 4x + 3y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ ax + 6y = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x + 5y = 6? \end{cases}$

14.13. Пры якіх значэннях параметра a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} (a + 3)x + 2y = 4, \\ x - ay = 10 \end{cases}$ мае адзінае рашэнне?

14.14. Пры якіх значэннях параметра a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не мае рашэнняў?

14.15. Пры якіх значэннях параметра a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} x + (a + 1)y = 1, \\ x + 2y = a \end{cases}$ мае бясконца многа рашэнняў?

14.16. Для кожнага значэння параметра вызначце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў:

а) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + ay = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (a + 4)x + y = 5, \\ 2x + ay = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (a^2 - 9)x + 4y = 20, \\ (a - 3)x + 2y = 2a. \end{cases}$

14.17. Пры якіх значэннях параметра b сістэма ўраўненняў $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$ мае хаця б адно рашэнне пры любых значэннях параметра a?

14.18. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $x^2 + 2x - 6a = 0$ не мае каранёў?

14.19. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $3x^2 + 7ax + 5 = 0$ мае два карані?

14.20. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $2ax^2 - 8x + 8 = 0$ мае адзін корань?

14.21. Пры якіх значэннях параметра a толькі адзін з каранёў ураўнення $3x^2 + x + 2a - 3 = 0$ роўны нулю?

14.22. Пры якіх значэннях параметра a толькі адзін з каранёў ураўнення $x^2 + (a + 3)x + |a| - 3 = 0$ роўны нулю?

14.23. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $3x^2 + (a - 1)x + 1 - a^2 = 0$ мае адзіны корань, роўны нулю?

14.24. Рашыце адносна x ураўненне:

а) $x^2 - 2x + 1 = a$;
б) $(2x - 1)^2 = a$;
в) $a^2x^2 - 4 = 0$;
г) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;
д) $2x^2 - (a - 1)x + a + 1 = 0$;
е) $(x - 1)^2 + (x - a)^2 = 0$;
ж) $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$;
з) $(a - 1)x^2 - 2a(x + 1) - 1 = 0$;
і) $(a + 1)x^2 - 2(a + 1)x + a - 2 = 0$;
к) $(a^2 + 1)x^2 - 2(x - a)(1 + ax) + 1 = 0$.

14.25. Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $a^2x^2 - ax - 2 = 0$ ляжаць па-за адрэзкам $[-1; 1]$?

14.26. Пры якіх значэннях параметра a большы корань ураўнення $x^2 + 4x - (a - 1)(a - 5) = 0$ належыць прамежку $[0; 1)$?

14.27. Знайдзіце ўсе значэнні параметра a, пры якіх карані ўраўнення $ax^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ маюць розныя знакі.

14.28. Знайдзіце ўсе значэнні параметра a, пры якіх карані ўраўнення $x^2 - 2(a - 2)x + 3a + a^2 = 0$ меншыя за -1.

14.29. Пры якіх значэннях параметра a адзін з каранёў ураўнення $(a^2 + a + 1)x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ большы за 3, а другі меншы за 3?

14.30. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненні $x^2 + ax + 8 = 0$ і $x^2 + x + a = 0$ маюць хаця б адзін агульны корань?

14.31. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $x^2 + ax - a = 0$ мае два рэчаісныя карані x_1 і x_2, якія задавальняюць умову $ax_1 < x_2^2$?

14.32. Пры якіх значэннях параметра a няроўнасць $x^2 - (a + 2)x + 8a + 1 > 0$ выконваецца пры ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$?

14.33. Пры якіх значэннях параметра a няроўнасць $\frac{x^2}{24} + ax - a + 1 < 0$ не мае рашэнняў?

14.34. Рашыце адносна x няроўнасць:

а) $x^2 - ax + 3 \leqslant 0$;
б) $x^2 + 2x - a > 0$;
в) $ax^2 + 3x - 4 \geqslant 0$;
г) $9x^2 + 12ax + 5a^2 \leqslant 4a - 4$;
д) $16x^2 + 13a^2 + 4a > 24ax - 1$;
е) $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 3 > 0$;
ж) $\frac{x^2}{a} - 2x - \frac{x}{a} + a + 1 > 0$.

14.35. Пры якіх значэннях параметра b няроўнасць не мае рашэнняў:

а) $bx^2 + 4bx + 5 \leqslant 0$;
б) $bx^2 + (2b+3)x + b - 1 \geqslant 0$;
в) $(4 - b^2)x^2 + 2(b+2)x - 1 > 0$?

14.36. Пры якіх значэннях параметра m няроўнасць $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ выконваецца для любых $x \in (1;\ 2)$?

14.37. Пры якіх значэннях параметра a няроўнасць $(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выконваецца пры ўсіх $x \in [1;\ 3]$?

14.38. Пры якіх значэннях параметра a няроўнасць $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$ справядлівая для любых $|x| < 1$?

14.39. Пры якіх значэннях параметра a няроўнасць $(x - 2a - 1)(x - a) < 0$ выконваецца пры ўсіх $x \in [1;\ 2]$?

14.40. Пры якіх значэннях параметра m з няроўнасці $x^2 - (3m+1)x + m > 0$ вынікае няроўнасць $x > 1$?

14.41. Знайдзіце ўсе значэнні параметра a, пры якіх з няроўнасці $ax^2 - x + 1 - a < 0$ вынікае няроўнасць $0 < x < 1$.

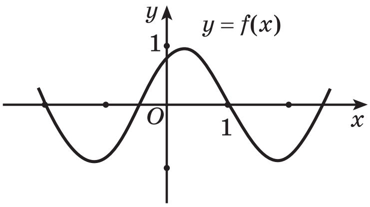
14.42. Пры якіх значэннях параметра a любое рашэнне няроўнасці $x^2 - 3x + 2 < 0$ з'яўляецца рашэннем няроўнасці $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$?

14.43. Пры якіх значэннях параметра a любое рашэнне няроўнасці $x^2 - x - 2 < 0$ большае за любое рашэнне няроўнасці $ax^2 - 4x - 1 \geqslant 0$?

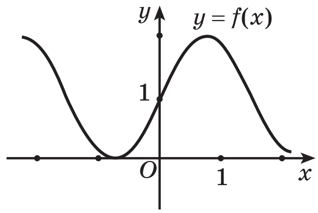
14.44. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 22). Колькі каранёў мае ўраўненне $f(x) = a$ пры $a = 2$?

14.45. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 23). Колькі каранёў мае ўраўненне $f(x) = a$ пры $a = 1$?

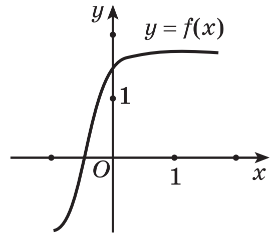
14.46. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 24). Колькі каранёў мае ўраўненне $f(x) = a$ пры $a = 0,5$?



Рыс. 22

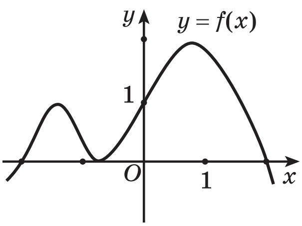


Рыс. 23

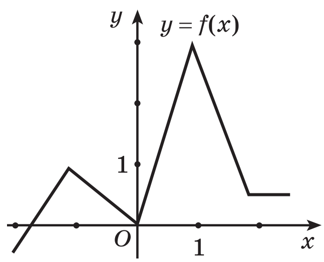


Рыс. 24

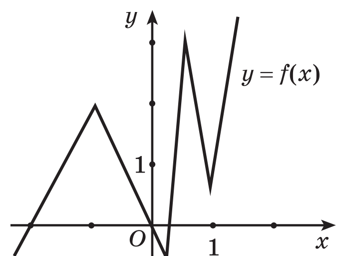
14.47. Вызначце колькасць каранёў ураўнення $f(x) = a$ ў залежнасці ад значэнняў параметра a, ведаючы, што функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна: а) рыс. 25; б) рыс. 26; в) рыс. 27.



Рыс. 25



Рыс. 26

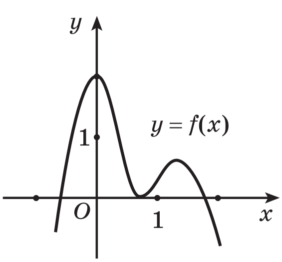


Рыс. 27

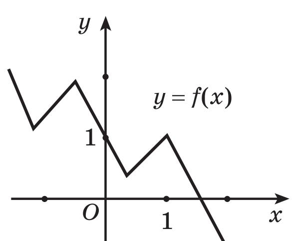
14.48. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 28). Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $f(x) = a$ мае два рашэнні?

14.49. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 29). Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $f(x) = a$ мае тры рашэнні?

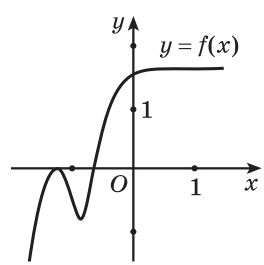
14.50. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 30). Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $f(x) = a$ мае адно рашэнне?



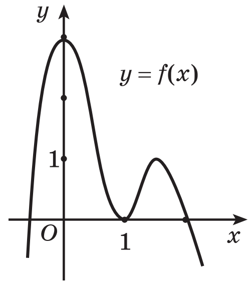
Рыс. 28



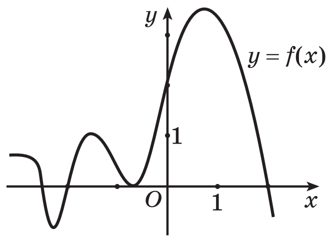
Рыс. 29



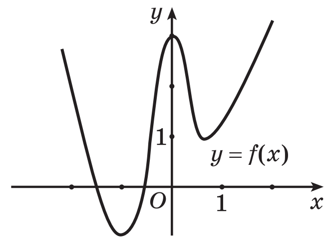
Рыс. 30



Рыс. 31



Рыс. 32

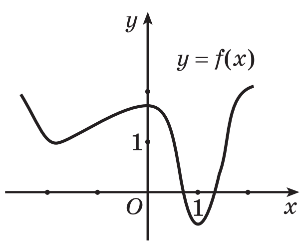


Рыс. 33

14.51. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 31). Пры якіх значэннях параметра a хаця б адзін корань ураўнення $f(x) = a$ большы за 1?

14.52. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 32). Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $f(x) = a$ дадатныя?

14.53. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 33). Пры якіх значэннях параметра a хаця б адзін корань ураўнення $f(x) = a$ меншы за 2?

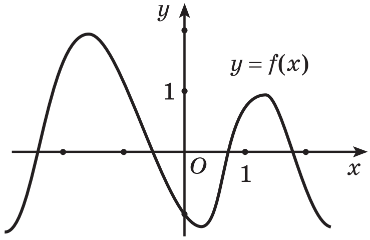


Рыс. 34

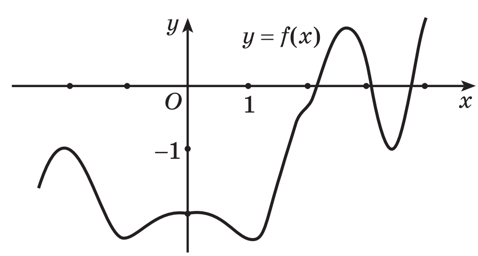
14.54. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 34). Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $f(x) = a$ належаць прамежку $(-2; 2)$?

14.55. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 35). Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $f(x) = a$ ляжаць па-за адрэзкам $[-1; 1]$?

14.56. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 36). Пры якіх значэннях параметра a ўсе карані ўраўнення $f(x) = a$ належаць адрэзку $[1; 4]$?



Рыс. 35



Рыс. 36

14.57. Колькі каранёў у залежнасці ад значэння параметра a мае ўраўненне:

а) $ax^2 + |x - 1| = 0$; б) $x^2 + a|x - 2| = 0$;

в) $x^2 + 2|x - a| = 0$; г) $|x - a| = x - 2$;

д) $|x + 1| = x - a$; е) $|x - 2| = ax$;

ж) $|x - 4| = \frac{a}{x}$; з) $||2x| - 6| = x + a$?

14.58. Рашыце адносна x ураўненне:

а) $|a + x| + |2 + x| = 2 - a$; б) $x + \sqrt{x} = a$; в) $2|x| + |x - 1| = a$.

14.59. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $\sin x = a$ не мае каранёў?

14.60. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $2^x = a$ мае карані?

14.61. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $x^2 = a$ мае карані?

14.62. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $3\cos x = 4a + 1$ мае карані?

14.63. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $2x^2 = 2a + 4$ не мае каранёў?

14.64. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $3 \cdot 2^x - 1 = 4a$ мае карані?

14.65. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $\sin^2 x + 3\cos^2 x = \frac{a - 2}{3}$ не мае каранёў?

14.66. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $3^{x^2 + 2} = 2a + 3$ не мае каранёў?

14.67. Рашыце адносна x ураўненне:

а) $2\sin(x + 3) = 3a + 1$; б) $3\cos(x - 1) = 4a - 7$;

в) $2^{x^2 + 2x} = a + 5$; г) $\log_2(2x - x^2) = 2a - 3$;

д) $2^{|x|+3} = a^2 + 2a$; е) $3 \cdot 5^{x^2 + 4x + 16} = 2a^2 + 3a + 6$.

14.68. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ не мае каранёў?

14.69. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне
$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = a^2 - 3a + 2$ мае карані?

14.70. Пры якіх значэннях параметра a ўраўненне
$3 \cdot 2^{x^2 + 4x + 6} = a^2 - 5a + 18$ мае карані?

§ 15. Выпадковыя, дакладныя, немагчымыя і элементарныя падзеі

Тэорыя імавернасцей, як і іншыя раздзелы матэматыкі, звязана з рашэннем практычных задач. Узнікненне тэорыі імавернасцей адносіцца да сярэдзіны XVII ст. і звязана з даследаваннямі Б. Паскаля (1623—1662), П. Ферма (1601—1665) і Х. Гюйгенса (1629—1695) у галіне тэорыі азартных гульняў.

У тэорыі імавернасцей на падставе схемы азартных гульняў можна складаць мадэлі выпадковых з'яў. З дапамогай шматразовага паўтарэння аднаго і таго ж доследу гэтыя мадэлі дазваляюць назіраць, вывучаць і эксперыментальна правяраць законы выпадковых з'яў.

Нават да цяперашняга часу прыклады з вобласці азартных гульняў і аналагічныя ім задачы на «ігральны кубік» шырока ўжываюцца пры вывучэнні тэорыі імавернасцей як спрошчаныя мадэлі выпадковых з'яў, якія ілюструюць асноўныя законы і правілы тэорыі імавернасцей. Пры гэтым мяркуецца, што манета і кубік аднародныя і маюць геаметрычна правільную форму, а калода карт добра перамешана і «ідэальная» з пункту гледжання аднолькавасці кашуль карт.

Матэматычныя законы тэорыі імавернасцей — адлюстраванне рэальных законаў, якія аб'ектыўна існуюць у масавых выпадковых з'явах прыроды і грамадства. Пры вывучэнні гэтых з'яў у тэорыі імавернасцей выкарыстоўваецца матэматычны метад, лагічна дакладны і строгі, як і ў іншых раздзелах матэматыкі.

Пазнаёмімся з асноўнымі паняццямі тэорыі імавернасцей.

Назіранне з'явы, дослед, эксперымент, якія можна правесці шматразова, у тэорыі імавернасцей прынята называць **выпрабаваннем**. Вынік, зыход выпрабавання называецца **падзеяй.**

Напрыклад,

а) здача экзамена — гэта выпрабаванне; атрыманне пэўнай адзнакі — падзея;

б) стрэл — гэта выпрабаванне; пападанне ў пэўную вобласць мішэні — падзея;

Падкідванне манеты — гэта **выпрабаванне**

в) падкідванне ігральнага кубіка — гэта выпрабаванне; з'яўленне той ці іншай колькасці ачкоў на ім — падзея;

г) выманне шара са скрыні з рознакаляровымі шарамі — гэта выпрабаванне; з'яўленне шара таго ці іншага колеру — падзея.

З'яўленне лічбы або герба — гэта **падзея**

Падзея называецца **дакладнай**, калі ў выніку дадзенага выпрабавання яна **абавязкова адбудзецца**.

Напрыклад,

а) выпадзенне натуральнага ліку, які не перавышае 6, пры падкідванні ігральнага кубіка (ігральным кубікам лічыцца куб, на кожнай з шасці граней якога намаляваны кропкі ад 1 да 6);

б) з'яўленне белага шара пры выманні шароў са скрыні, у якой знаходзяцца толькі белыя шары;

в) падзенне ва ўмовах зямнога прыцягнення падкінутай манеты ўніз.

Дакладная падзея — закіпанне вады пры нармальным атмасферным ціску пры тэмпературы 100 °C

Падзея называецца **немагчымай**, калі ў выніку дадзенага выпрабавання яна **не можа адбыцца**.

Напрыклад,

а) выпадзенне натуральнага ліку, большага за 7, пры падкідванні ігральнага кубіка;

б) з'яўленне чорнага шара пры выманні шароў са скрыні, у якой знаходзяцца толькі белыя шары;

в) ва ўмовах зямнога прыцягнення падкінутая манета паляціць уверх.

Немагчымая падзея — у Мінску ноччу ярка свеціць сонца

Падзея называецца **выпадковай**, калі ў выніку дадзенага выпрабавання яна **можа адбыцца, а можа і не адбыцца**.

Напрыклад,

а) выпадзенне ліку 2 пры падкідванні ігральнага кубіка;

б) пры падкідванні манеты выпадзе лічба;

в) пры стрэле па мішэні куля пападзе ў «дзясятку»;

г) па дарозе ў школу вы сустрэнеце 10 веласіпедыстаў;

д) з калоды будзе выцягнута карта крыжовай масці.

Выпадковая падзея

Падзея (зыход) называецца **элементарнай**, калі яе **нельга раскласці на іншыя падзеі.**

Напрыклад, выпадзенне цотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка не з’яўляецца элементарнай падзеяй, паколькі гэту падзею можна раскласці на іншыя:

- выпадзенне ліку 2;
- выпадзенне ліку 4;
- выпадзенне ліку 6.

Гэтыя падзеі ўжо нельга раскласці на іншыя, яны з’яўляюцца элементарнымі.

Падзея называецца **процілеглай** да падзеі A, калі яна **адбываецца тады і толькі тады, калі не адбываецца** A.

Падзея, процілеглая да падзеі A, абазначаецца $\overline{A}$.

Напрыклад, разгледзім выпрабаванне, якое заключаецца ў падкідванні ігральнага кубіка.

а) Падзея A — пры падкідванні кубіка выпадзе цотны лік: 2, 4, 6.

Падзея, процілеглая да падзеі A, г. зн. $\overline{A}$ — выпадзе няцотны лік: 1, 3, 5.

б) Падзея B — пры падкідванні кубіка выпадзе лік, меншы за тры: 1, 2.

Падзея, процілеглая да падзеі B, г. зн. $\overline{B}$ — выпадзе лік, большы або роўны тром: 3, 4, 5, 6.

Выпрабаванне — падкідванне манеты	
Падзея A — выпаў герб	Падзея $\overline{A}$ — выпала лічба
	

Прыклад 1. Якой (дакладнай, немагчымай або выпадковай) з'яўляецца падзея:

а) трохкратнае выпадзенне ліку 3 пры падкідванні ігральнага кубіка тры разы;

б) выпадзенне ліку, кратнага тром, пры падкідванні ігральнага кубіка чатыры разы;

в) выпадзенне трох розных лікаў, сума якіх роўна 20, пры падкідванні ігральнага кубіка тры разы;

г) выпадзенне двух лікаў, сума якіх не перавышае 12, пры падкідванні ігральнага кубіка два разы?

Рашэнне.

а) трохкратнае выпадзенне ліку 3 пры падкідванні ігральнага кубіка тры разы з'яўляецца выпадковай падзеяй, паколькі гэта падзея можа адбыцца, а можа і не адбыцца ў выніку выпрабавання — падкідвання ігральнага кубіка тры разы;

б) выпадзенне ліку, кратнага тром, пры падкідванні ігральнага кубіка чатыры разы з'яўляецца выпадковай падзеяй;

в) выпадзенне трох розных лікаў, сума якіх роўна 20, пры падкідванні ігральнага кубіка тры разы з'яўляецца немагчымай падзеяй, паколькі максімальна магчымая сума лікаў, якія могуць выпасці, роўна 18;

г) выпадзенне двух лікаў, сума якіх не перавышае 12, пры падкідванні ігральнага кубіка два разы з'яўляецца дакладнай падзеяй, паколькі максімальна магчымая сума роўна 12.

Прыклад 2. Падкідваюць два кубікі. Назавіце падзею, процілеглую да падзеі:

а) выпадзе хаця б адна шасцёрка;

б) выпадуць розныя лікі;

в) на першым кубіку выпадзе лік, большы, чым на другім.

Рашэнне.

а) Не выпадзе ніводнай шасцёркі.

б) Выпадуць аднолькавыя лікі.

в) На першым кубіку выпадзе лік, меншы або роўны ліку на другім кубіку.

Прыклад 3. Якая з наступных пазей з'яўляецца элементарнай:

а) выпадзенне ліку, кратнага 3, пры падкідванні ігральнага кубіка;

б) выпадзенне ліку, кратнага 4, пры падкідванні ігральнага кубіка;

в) выпадзенне няцотнага ліку, кратнага 3, пры падкідванні ігральнага кубіка;

г) выпадзенне ліку, які пры дзяленні на тры дае ў астачы 2, пры падкідванні ігральнага кубіка?

Рашэнне.

а) Падзея «выпадзенне ліку, кратнага 3, пры падкідванні ігральнага кубіка» не з'яўляецца элементарнай, паколькі яе можна раскласці на іншыя падзеі:

- выпадзенне ліку 3;
- выпадзенне ліку 6.

б) Падзея «выпадзенне ліку, кратнага 4, пры падкідванні ігральнага кубіка» з'яўляецца элементарнай, паколькі ў выніку падкідвання ігральнага кубіка можа выпасці толькі адзін лік, кратны 4.

в) Падзея «выпадзенне няцотнага ліку, кратнага 3, пры падкідванні ігральнага кубіка» з'яўляецца элементарнай, паколькі ў выніку падкідвання ігральнага кубіка можа выпасці толькі адзін няцотны лік, кратны 3.

г) Падзея «выпадзенне ліку, які пры дзяленні на тры дае ў астачы 2, пры падкідванні ігральнага кубіка» не з'яўляецца элементарнай, паколькі яе можна раскласці на іншыя падзеі:

- выпадзенне ліку 2;
- выпадзенне ліку 5.

Прыклад 4. У якіх з наступных прыкладаў названы ўсе магчымыя зыходы выпрабавання:

а) выйгрыш, пройгрыш, нічыя ў шахматнай партыі;

б) выйгрыш, пройгрыш у футбольным матчы;

в) выйгрыш, пройгрыш пры гульні ў баскетбол;

г) пападанне, промах пры стральбе па мішэні?

Рашэнне.

а) Названы ўсе магчымыя зыходы шахматнай партыі.

б) Не названы магчымы вынік — нічыя.

в) Названы ўсе магчымыя зыходы пры гульні ў баскетбол.

г) Названы ўсе магчымыя зыходы пры стральбе па мішэні.

15.1. У скрыні знаходзіцца 25 стандартных і 6 бракаваных аднатыпных дэталей. Падзея «наўздагад выбраная дэталь аказалася бракаванай» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.2. Падзея «камп'ютару не спатрэбіцца рамонт на працягу гарантыйнага тэрміну» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.3. Падзея «з'яўленне цотнага нумара пры выдачы нумарка ў гардэробе тэатра» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.4. На талерцы 20 аднолькавых знешне піражкоў: 2 з мясам, 16 з капустай і 2 з варэннем. Наўздагад выбіраюць адзін піражок. Падзея «выбраны піражок з капустай» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.5. Падзея «выпадзенне цотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка 7 разоў» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.6. Падзея «выпадзенне няцотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка 12 разоў» з'яўляецца:

а) элементарнай; б) выпадковай;
в) дакладнай; г) немагчымай.
Выберыце правільны адказ.

15.7. Немагчымай з'яўляецца падзея:

а) выпадзенне цотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка 3 разы;

б) выпадзенне цотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка 4 разы;

в) выпадзенне трох аднолькавых лікаў пры падкідванні ігральнага кубіка 3 разы;

г) выпадзенне двух лікаў, сума якіх роўна 13, пры падкідванні ігральнага кубіка 2 разы.

Выберыце правільны адказ.

15.8. Дакладнай з'яўляецца падзея:

а) выпадзенне цотнага ліку пры падкідванні ігральнага кубіка 4 разы;

б) выпадзенне чатырох аднолькавых лікаў пры падкідванні ігральнага кубіка 4 разы;

в) выпадзенне трох аднолькавых лікаў пры падкідванні ігральнага кубіка 3 разы;

г) выпадзенне двух лікаў, сума якіх не перавышае 12, пры падкідванні ігральнага кубіка 2 разы.

Выберыце правільны адказ.

15.9. Прывядзіце прыклады дакладных, немагчымых, выпадковых падзей пры некаторым выпрабаванні.

15.10. На 6 картках запісаны лікі ад 1 да 6. Наўздагад выбіраюць адну картку. Усе магчымыя зыходы гэтага выпрабавання ёсць з'яўленне:

а) ліку, кратнага двум або кратнага тром;

б) простага або састаўнога ліку;

в) натуральнага ліку, не большага за 6;

г) ліку, меншага за 6.

Выберыце правільны адказ.

15.11. Двойчы падкідваюць манету. Усе магчымыя зыходы выпрабавання:

а) двухкратнае выпадзенне герба; двухкратнае выпадзенне лічбы;

б) выпадзенне лічбы пры першым падкідванні, герба — пры другім; выпадзенне герба пры першым падкідванні, лічбы — пры другім;

в) выпадзенне лічбы пры першым падкідванні, герба — пры другім; выпадзенне герба пры першым падкідванні, лічбы — пры другім, двухкратнае выпадзенне герба, двухкратнае выпадзенне лічбы;

г) двухкратнае выпадзенне герба, двухкратнае выпадзенне лічбы; выпадзенне герба, выпадзенне лічбы.

Выберыце правільны адказ.

15.12. Робяць два стрэлы па мішэні. Мноства ўсіх зыходаў утвараюць падзеі:

а) ні аднаго пападання, два пападанні;

б) няма промаху, ёсць хоць адзін промах;

в) ёсць хоць адно пападанне, два промахі;

г) ні аднаго пападання, хоць адно пападанне.

Выберыце правільны адказ.

15.13. Апішыце ўсе магчымыя зыходы пры адначасовым падкідванні дзвюх манет.

15.14. Робяць апытанне, звязанае з аналізам жыллёвых умоў работнікаў фірмы. Кожнаму з апытаных задалі два пытанні:

• Ці задаволены вы якасцю жылля?

• Ці задаволены вы аддаленасцю кватэры ад месца працы?

Апішыце ўсе магчымыя зыходы апытання, калі вядома, што былі апытаны тры супрацоўнікі.

§ 16. Класічнае азначэнне імавернасці

Разгледзім сітуацыю. У пакеце 15 цукерак: 10 шакаладных і 5 карамелек. Вымаем адну цукерку наўздагад. Магчыма, яна будзе шакаладнай. На карысць гэтай падзеі ёсць 10 шансаў — гавораць, спрыяльных зыходаў для гэтай падзеі 10. Спрыяльных зыходаў для з'яўлення карамелькі — 5. Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна колькасці ўсіх цукерак, г. зн. 15.

Абазначым падзею «з'яўленне шакаладнай цукеркі» праз A.

Знойдзем адносіну колькасці спрыяльных для гэтай падзеі зыходаў да колькасці ўсіх магчымых зыходаў: $\frac{10}{15}$.

У гэтым выпадку гавораць, што знойдзена імавернасць з'яўлення падзеі A і запісваюць: $P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Імавернасцю падзеі A называецца адносіна колькасці спрыяльных зыходаў для з'яўлення падзеі A да колькасці ўсіх магчымых зыходаў выпрабавання: $P(A) = \frac{m}{n}$, дзе $P(A)$ — імавернасць падзеі A, m — колькасць элементарных зыходаў выпрабавання, спрыяльных для з'яўлення падзеі A, n — агульная колькасць магчымых элементарных зыходаў выпрабавання.

Гэта класічнае азначэнне імавернасці, ім можна карыстацца, калі колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання канечная, а ўсе элементарныя зыходы роўнамагчымыя. Зыходы некаторага выпрабавання лічацца роўнамагчымымі, калі няма аб'ектыўных пераваг для з'яўлення некаторых з іх.

Прыклад 1. Знайдзіце імавернасць падзеі A: «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў лік, не меншы за 4».

Рашэнне.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна 6, а спрыяльных для падзеі «выпаў лік, не меншы за 4», роўна 3.

Тады $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Адказ: 0,5.

Прыклад 2. Студэнт хацеў бы, каб на экзамене яму дастаўся любы з 25 білетаў, якія ён добра падрыхтаваў. Якая імавернасць таго, што яму дастанецца добра падрыхтаваны білет, калі ўсяго іх 30?

Рашэнне.

Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання «выбар білета» роўна 30, а спрыяльных для падзеі A — «дастаўся добра падрыхтаваны білет» — 25.

Тады $P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

Адказ: $\frac{5}{6}$.

Прыклад 3. У скрыні 15 шароў: 10 белых і 5 чырвоных. Вымаюць адзін шар. Якая імавернасць таго, што будзе выняты чырвоны шар?

Рашэнне.

Выпрабаванне — вымаюць шар. Колькасць усіх магчымых зыходаў гэтага выпрабавання роўна колькасці ўсіх шароў — 15.

Падзея A — з'яўленне чырвонага шара. Колькасць спрыяльных для падзеі A зыходаў роўна колькасці чырвоных шароў — 5.

Імавернасць падзеі A: $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Адказ: $\frac{1}{3}$.

Прыклад 4. З 33 картак, на кожнай з якіх напісана адна з літар рускага алфавіта, па чарзе вымаюць тры карткі. Якая імавернасць з'яўлення слова «ура»?

Рашэнне.

Выпрабаванне заключаецца ў тым, што наўздагад вымаюць 3 карткі з 33. Колькасць усіх магчымых зыходаў роўна колькасці размяшчэнняў з 33 па 3, г. зн. A_{33}^3.

Колькасць спрыяльных зыходаў для падзеі A — з'яўленне літар «у», «р», «а», якія ідуць запар, — роўна 1. Імавернасць падзеі A:

$$P(A) = \frac{1}{A_{33}^3} = \frac{1}{33 \cdot 32 \cdot 31} = \frac{1}{32\,736}.$$

Адказ: $\frac{1}{32\,736}$.

Прыклад 5. У скрыні 15 дэталей, сярод якіх 10 пафарбаваных. Наўздагад вымаюць 3 дэталі. Знайдзіце імавернасць таго, што ўсе тры вынятыя дэталі пафарбаваныя.

Рашэнне.

Выпрабаванне — наўздагад вымаюць 3 дэталі. Колькасць усіх магчымых зыходаў роўна колькасці спалучэнняў з 15 элементаў па 3 — C_{15}^3, паколькі парадак размяшчэння элементаў не важны, і выбіраюць 3 элементы з 15.

Колькасць спрыяльных зыходаў для падзеі A — з'яўленне трох пафарбаваных дэталей — роўна колькасці спалучэнняў з 10 элементаў па 3 — C_{10}^3, паколькі парадак размяшчэння элементаў не важны, і выбіраюць 3 элементы з 10.

Імавернасць таго, што ўсе тры дэталі пафарбаваныя: $P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$.

Адказ: $\frac{24}{91}$.

Імавернасць немагчымай падзеі роўна нулю.

Паколькі для немагчымай падзеі A пры дадзеным выпрабаванні колькасць спрыяльных зыходаў роўна нулю, то $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Прыклад 6. Знайдзіце імавернасць падзеі «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў лік, не меншы за 7».

Рашэнне.

Паколькі падзея «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў лік, не меншы за 7» з'яўляецца немагчымай, то яе імавернасць роўна нулю.

Адказ: 0.

Прыклад 7. У скрыні 8 шароў з нумарамі ад 1 да 8. Вынялі адзін шар. Якая імавернасць таго, што шар мае нумар, які перавышае 8?

Рашэнне.

Падзея «з'яўленне шара з нумарам, які перавышае 8» з'яўляецца немагчымай. Яе імавернасць роўна нулю, г. зн. $P(A) = 0$.

Адказ: 0.

Імавернасць дакладнай падзеі роўна 1.

Паколькі для дакладнай падзеі A пры дадзеным выпрабаванні колькасць спрыяльных зыходаў роўна n, то $P(A) = \frac{n}{n} = 1$.

Прыклад 8. Якая імавернасць падзеі «выпадзенне двух лікаў, сума якіх не перавышае 12, пры падкідванні ігральнага кубіка 2 разы»?

Рашэнне.

Паколькі падзея «выпадзенне двух лікаў, сума якіх не перавышае 12, пры падкідванні ігральнага кубіка 2 разы» з'яўляецца дакладнай, то яе імавернасць роўна 1.

Адказ: 1.

Прыклад 9. Знайдзіце імавернасць падзеі A і процілеглай да яе падзеі $\bar{A}$, калі падзея A:

а) «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў цотны лік»;

б) «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў лік, меншы за 3».

Рашэнне.

а) Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна 6, а спрыяльных для падзеі A «выпаў цотны лік» роўна 3. Тады $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Падзея «выпаў няцотны лік» з'яўляецца процілеглай да падзеі A. Знойдзем імавернасць падзеі $\bar{A}$. Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна 6, а спрыяльных для падзеі $\bar{A}$ «выпаў няцотны лік» роўна 3. Атрымаем, што $P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна 6, а спрыяльных для падзеі A «выпаў лік, меншы за 3» роўна 2. Тады $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Падзея «выпаў лік, большы або роўны тром» з'яўляецца процілеглай да падзеі A. Знойдзем імавернасць падзеі $\bar{A}$. Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна 6, а спрыяльных для падзеі $\bar{A}$ «выпаў лік, большы або роўны тром» роўна 4. Атрымаем, што $P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Абагульнім атрыманыя вынікі:

Падзея A	$P(A)$	Падзея $\bar{A}$	$P(\bar{A})$	$P(A)+P(\bar{A})$
Выпаў цотны лік	$\frac{1}{2}$	Выпаў няцотны лік	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
Выпаў лік, меншы за 3	$\frac{1}{3}$	Выпаў лік, большы або роўны тром	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

Імавернасць процілеглай падзеі можна вылічыць па формуле

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Доказ.

Няхай дослед можа скончыцца адным з n роўнамагчымых зыходаў, m з якіх спрыяльныя для наступлення падзеі A. Тады астатнія $n - m$ зыходаў спрыяльныя для наступлення падзеі $\bar{A}$. Таму $P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$.

Прыклад 10. У скрыні 5 белых, 6 чырвоных і 7 сініх шароў. Якая імавернасць таго, што наўздагад выбраны шар апынецца не сінім?

Рашэнне.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Разгледзім падзею A — шар апынецца сінім. Тады падзея, процілеглая да падзеі A, г. зн. $\bar{A}$ — шар апынецца не сінім.

Знойдзем імавернасць падзеі A. Колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання роўна колькасці шароў, г. зн. 18, а колькасць зыходаў выпрабавання, спрыяльных для падзеі «шар апынецца сінім», роўна колькасці сініх шароў, г. зн. 7. Тады $P(A) = \frac{7}{18}$. Па формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ атрымаем: $P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$.

Адказ: $\frac{11}{18}$.

Прыклад 11. У скрыні знаходзяцца аднатыпныя дэталі: 10 стандартных і 3 нестандартныя. Якая імавернасць таго, што сярод наўздагад выбраных 3 дэталей апынецца хаця б адна нестандартная?

Рашэнне.

Разгледзім падзею A — хаця б адна дэталь з 3 апынецца нестандартнай. Тады падзея, процілеглая падзеі A, г. зн. $\bar{A}$ — ні адна дэталь не апынецца нестандартнай. Знойдзем $P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{13}^3} = \frac{60}{143}$, тады $P(A) = 1 - \frac{60}{143} = \frac{83}{143}$.

16.1. У скрыні 12 шароў: 3 белыя, 4 чорныя, 5 чырвоных. Вынялі адзін шар. Якая імавернасць таго, што выняты шар чорны?

16.2. Ці праўда, што імавернасць падзеі «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў цотны лік» роўна $\frac{1}{2}$?

16.3. Якая імавернасць падзеі «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў лік, кратны 3»?

16.4. Якая імавернасць падзеі «пры падкідванні ігральнага кубіка выпаў просты лік»?

16.5. У класе 25 чалавек, з іх 13 хлопчыкаў. Якая імавернасць таго, што сёння дзяжурыць па класу дзяўчынка?

16.6. У партыі з 15 дэталей 3 дэталі бракаваныя. Наўздагад выбіраюць адну дэталь. Якая імавернасць таго, што яна бракаваная?

16.7. У каробцы ляжыць толькі 5 сініх і 7 чорных алоўкаў. Якая імавернасць узяць з каробкі наўздагад: а) ручку; б) аловак; в) чорны аловак?

16.8. Выбраны ўсе няцотныя лічбы. Якая імавернасць таго, што лік, запісаны гэтымі лічбамі, будзе:

а) няцотным;

б) цотным?

16.9. У скрыні 12 шароў з нумарамі ад 1 да 12. Вынялі адзін шар. Якая імавернасць таго, што гэты шар мае нумар:

а) які не перавышае 8;

б) узаемна просты з 4;

в) сума якога з лікам 4 не перавышае 10?

16.10. З 60 пытанняў, што ўваходзяць у экзаменацыйныя білеты, студэнт ведае 50. На экзамене студэнт павінен адказаць на 2 пытанні. Якая імавернасць таго, што студэнт адкажа на абодва пытанні?

16.11. З 7 латэрэйных білетаў два выйгрышныя. Выбіраюць тры білеты. Якая імавернасць таго, што роўна адзін білет з трох выбраных выйгрышны?

16.12. У шахматным турніры ўдзельнічаюць 16 чалавек, якія будуць падзелены па жэрабю на дзве групы па 8 чалавек. Якая імавернасць таго, што два найбольш моцныя ўдзельнікі будуць гуляць у адной групе?

§ 17. Тэарэмы складання і множання імавернасцей

Азначэнне

Сумай падзей A і B называецца падзея, для якой спрыяльныя ўсе зыходы, спрыяльныя хаця б для адной з падзей A або B.

Напрыклад, падкінулі дзве манеты. Падзея A — «герб выпаў на першай манеце», падзея B — «герб выпаў на другой манеце». Сума падзей $A + B$ — «выпаў хаця б адзін герб».

Азначэнне

Здабыткам падзей A і B называецца падзея, для якой спрыяльныя ўсе зыходы, спрыяльныя і для падзеі A, і для падзеі B адначасова.

Напрыклад, падкінулі дзве манеты. Падзея A — «герб выпаў на першай манеце», падзея B — «герб выпаў на другой манеце». Здабытак падзей AB — «выпалі два гербы».

Напрыклад, выкананы два стрэлы па мішэні. Падзея A — пападанне ў мішэнь пры першым стрэле. Падзея B — пападанне ў мішэнь пры другім стрэле. Здабытак падзей AB — мішэнь паражоная двойчы.

Азначэнне

Падзея A называецца **незалежнай** ад падзеі B, калі імавернасць наступлення падзеі A не залежыць ад таго, адбылася падзея B ці не адбылася.

Напрыклад, падкінулі дзве манеты. Падзея A — «герб выпаў на першай манеце», падзея B — «герб выпаў на другой манеце». Падзея A незалежная ад падзеі B.

Напрыклад, у скрыні 10 шароў: 5 белых і 5 чырвоных. Вымаюць адзін за другім два шары. Падзея A — «другі раз вынялі белы шар», падзея B — «першы раз вынялі белы шар». Імавернасць падзеі A залежыць ад таго, ці адбылася падзея B. A залежыць ад B.

Падзеі называюцца **несумеснымі**, калі з'яўленне адной з іх выключае з'яўленне другой.

Тэарэма складання імавернасцей

Імавернасць сумы дзвюх несумесных падзей роўна суме імавернасцей гэтых падзей: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказ.

Няхай у выніку некаторага выпрабавання могуць з'явіцца падзеі A або B. Няхай $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ — элементарные зыходы, спрыяльныя для падзеі A пры дадзеным выпрабаванні, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ — элементарныя зыходы, спрыяльныя для падзеі B пры дадзеным выпрабаванні. Тады для сумы падзей $A + B$ спрыяльныя ўсе зыходы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$. Паколькі падзеі A і B несумесныя, то сярод усіх гэтых зыходаў няма тых, што паўтараюцца.

Няхай усяго зыходаў дадзенага выпрабавання n. Тады

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Тэарэма даказана.

Прыклад 1. У скрыні 15 шароў: 5 белых, 5 чырвоных і 5 сініх. Вымаюць адзін шар. Якая імавернасць з'яўлення не сіняга шара?

Рашэнне. Трэба знайсці імавернасць з'яўлення чырвонага (падзея A) або белага (падзея B) шара. Паколькі падзеі A і B несумесныя, то па тэарэме складання імавернасцей маем: $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Вынік. Калі падзеі $A_1, A_2, \ldots, A_n$ парамі несумесныя, то імавернасць сумы гэтых падзей роўна суме імавернасцей гэтых падзей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Тэарэма аб здабытку імавернасцей

Імавернасць здабытку дзвюх незалежных падзей роўна здабытку імавернасцей гэтых падзей: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Доказ.

Няхай у выніку некаторага выпрабавання (напрыклад, вымаюць 2 шарыкі па адным з першай і другой скрыні. Якая імавернасць таго, што абодва шарыкі будуць чорнага колеру, калі ў першай скрыні — 4 белыя, 5 чорных, у другой — 3 чорныя, 8 белых шарыкаў?) могуць з'явіцца незалежныя падзеі A і B.

Няхай $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ — элементарныя зыходы, спрыяльныя для падзеі A пры дадзеным выпрабаванні, а ўсяго магчымых зыходаў — n; $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ — элементарныя зыходы, спрыяльныя для падзеі B пры дадзеным выпрабаванні, а ўсяго магчымых зыходаў — f. Тады спрыяльных для падзеі AB зыходаў па правіле множання mk, а колькасць усіх магчымых зыходаў выпрабавання па гэтым жа правіле роўна nf, значыць, $P(AB) = \frac{mk}{nf} = \frac{m}{n}\frac{k}{f} = P(A)P(B)$.

Для прыведзенага прыкладу колькасць спрыяльных зыходаў будзе роўна колькасці ўсіх магчымых пар чорных шарыкаў, па правіле множання іх колькасць роўна $5 \cdot 3 = 15$. Колькасць усіх магчымых зыходаў роўна колькасці ўсіх магчымых пар шарыкаў, іх колькасць роўна $9 \cdot 11 = 99$.

Імавернасць таго, што абодва шарыкі будуць чорнага колеру, роўна $\frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 11} = \frac{5}{33}$.

Прыклад 2. Два стралкі страляюць па мішэні. Імавернасць пападання пры адным стрэле першага стралка 0,7, другога — 0,8. Знайдзіце імавернасць таго, што пры адным залпе мішэнь будзе паражоная двойчы.

Рашэнне.

Паколькі падзея A — пападанне першага стралка і B — пападанне другога незалежныя, то па тэарэме аб множанні імавернасцей будзем мець $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Адказ: 0,56.

Прыклад 3. Два стралкі страляюць па мішэні. Імавернасць пападання пры адным стрэле першага стралка 0,7, другога — 0,8. Знайдзіце імавернасць таго, што пры адным залпе (стрэле кожнага са стралкоў) мішэнь будзе паражоная.

Рашэнне.

Няхай падзея A — «мішэнь паражоная». Разгледзім процілеглую падзею $\overline{A}$ — «мішэнь не паражоная». Гэта значыць, што і першы, і другі стралок прамахнуліся. Імавернасць промаху пры адным стрэле першага стралка $1 - 0{,}7 = 0{,}3$, другога — $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Тады імавернасць таго, што мішэнь не паражоная, роўна здабытку імавернасцей промаху кожнага са стралкоў, г. зн. $P(\overline{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Адкуль $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Адказ: 0,94.

17.1. Падкінулі дзве манеты. Разгледжаны падзеі:

A — «герб выпаў на першай манеце»,

B — «герб выпаў на другой манеце»,

C — «герб выпаў на дзвюх манетах»,

D — «герб выпаў толькі на другой манеце»,

E — «герб выпаў толькі на адной манеце».

Якім падзеям з гэтага спісу адпавядае падзея:

а) $A \cdot B$; б) $A + B$; в) $A \cdot \bar{B}$?

17.2. Падкінулі дзве манеты. Калі падзея A — «герб выпаў на першай манеце», падзея B — «герб выпаў на другой манеце», то падзея $A\bar{B} + B\bar{A}$ азначае:

а) не выпаў ніводзін герб; б) выпаў толькі адзін герб;

в) выпалі два гербы; г) выпаў герб на адной з манет.

Выберыце правільны адказ.

17.3. Падкінулі дзве манеты. Калі падзея A — «герб выпаў на першай манеце», падзея B — «герб выпаў на другой манеце», то падзея $\bar{A} \cdot \bar{B}$ азначае:

а) выпаў роўна адзін герб; б) выпала хаця б адна лічба;

в) выпалі дзве лічбы; г) выпаў хаця б адзін герб.

Выберыце правільны адказ.

17.4. Два стралкі страляюць па мішэні. Імавернасць пападання пры адным стрэле першага стралка 0,9, другога — 0,8. Знайдзіце імавернасць таго, што:

а) пры адным залпе мішэнь будзе паражоная толькі другім стралком;

б) пры адным залпе мішэнь будзе паражоная толькі адзін раз.

17.5. У скрыні 10 шароў, з якіх 4 белыя. Наўздагад вымаюць 3 шары. Знайдзіце імавернасць таго, што хаця б адзін шар белы.

17.6. Падкінулі тры ігральныя кубікі. Знайдзіце імавернасць таго, што на кожнай з граней, што выпалі:

а) з’явіцца лік 5;

б) з’явіцца аднолькавы лік;

в) з’явяцца хаця б два розныя лікі;

г) усе лікі будуць розныя.

17.7. Два стралкі страляюць па мішэні. Імавернасць пападання пры адным стрэле першага стралка 0,9, другога — 0,8. Знайдзіце імавернасць таго, што пры:

а) адным залпе мішэнь будзе паражоная;

б) адным залпе мішэнь не будзе паражоная;

в) двух залпах мішэнь не будзе паражоная.

17.8. Студэнт ведае 20 пытанняў праграмы з 25. Знайдзіце імавернасць таго, што студэнт ведае тры прапанаваныя экзаменатарам пытанні.

17.9. У скрыні 10 дэталей, 6 з якіх пафарбаваны. Вымаюць 4 дэталі па адной. Знайдзіце імавернасць таго, што:

а) усе вынятыя дэталі апынуцца пафарбаванымі;

б) хаця б адна дэталь будзе пафарбаванай.

§ 18. Умоўныя імавернасці. Формула поўнай імавернасці

Азначэнне

Няхай A і B — назіраемыя падзеі ў эксперыменце. **Умоўнай імавернасцю** $P(A/B)$ называецца імавернасць падзеі A ў здагадцы, што падзея B ужо адбылася.

Тэарэма. Імавернасць падзеі A, якая можа наступіць толькі пры з'яўленні адной з несумесных падзей (гіпотэз) H_1, H_2, ..., H_n, якія ўтвараюць поўную групу падзей, роўна суме здабыткаў імавернасці кожнай з гіпотэз на адпаведную ўмоўную імавернасць падзеі A:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n).$$

Гэта формула называецца **формулай поўнай імавернасці.**

Прыклад 1. Партыя электрычных прыбораў на 20 % выраблена заводам № 1, на 40 % — заводам № 2, на 10 % — заводам № 3, на 30 % — заводам № 4. Для завода № 1 імавернасць выпуску бракаванага прыбора роўна 0,01, для завода № 2 — 0,008, для завода № 3 — 0,02, для завода № 4 — 0,005. Якая імавернасць таго, што выбраны з партыі прыбор апынецца бракаваным?

Рашэнне.

Гіпотэза H_1 — выбраны прыбор выраблены на заводзе № 1, $P(H_1) = 0{,}2$.

Гіпотэза H_2 — выбраны прыбор выраблены на заводзе № 2, $P(H_2) = 0{,}4$.

Гіпотэза H_3 — выбраны прыбор выраблены на заводзе № 3, $P(H_3) = 0{,}1$.

Гіпотэза H_4 — выбраны прыбор выраблены на заводзе № 4, $P(H_4) = 0{,}3$.

Падзея A — прыбор бракаваны.

$P(A/H_1)$ — імавернасць таго, што прыбор, выраблены першым заводам, бракаваны, $P(A/H_1) = 0{,}01$.

$P(A/H_2)$ — імавернасць таго, што прыбор, выраблены другім заводам, бракаваны, $P(A/H_2) = 0{,}008$.

$P(A/H_3)$ — імавернасць таго, што прыбор, выраблены трэцім заводам, бракаваны, $P(A/H_3) = 0{,}02$.

$P(A/H_4)$ — імавернасць таго, што прыбор, выраблены чацвёртым заводам, бракаваны, $P(A/H_4) = 0{,}005$.

Па формуле поўнай імавернасці атрымаем:

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4)$;

$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}008 + 0{,}1 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}005 = 0{,}0087$.

Адказ: 0,0087.

Формула Баеса

Няхай падзея A можа адбыцца толькі пры з'яўленні адной з несумесных падзей (гіпотэз) $H_1, H_2, ..., H_n$, якія ўтвараюць поўную групу падзей. Калі падзея A ўжо адбылася, то імавернасць таго, што яна адбылася разам з падзеяй H_k, роўна

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},$$

дзе $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)$.

Прыклад 2. Ёсць 10 вінтовак, з якіх 4 забяспечаны аптычным прыцэлам. Імавернасць таго, што стралок пападзе з вінтоўкі з аптычным прыцэлам, роўна 0,95, з вінтоўкі без аптычнага прыцэла — 0,8. Стралок папаў па мішэні з наўздагад выбранай вінтоўкі. Якая імавернасць таго, што стралок папаў па мішэні з вінтоўкі з аптычным прыцэлам?

Рашэнне.

Гіпотэза H_1 — стралок выбраў вінтоўку з аптычным прыцэлам, $P(H_1) = 0{,}4$.

Гіпотэза H_2 — стралок выбраў вінтоўку без аптычнага прыцэла, $P(H_2) = 0{,}6$.

$P(A/H_1)$ — імавернасць таго, што стралок пападзе па мішэні з вінтоўкі з аптычным прыцэлам, $P(A/H_1) = 0{,}95$.

$P(A/H_2)$ — імавернасць таго, што стралок пападзе па мішэні з вінтоўкі без аптычнага прыцэла, $P(A/H_2) = 0{,}8$.

Па формуле поўнай імавернасці атрымаем:

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}86$.

Тады па формуле Баеса імавернасць таго, што мішэнь будзе паражоная з вінтоўкі з аптычным прыцэлам, роўна $P(H_1/A)=\frac{0{,}4\cdot 0{,}95}{0{,}86}=\frac{19}{43}$.

Адказ: $\frac{19}{43}$.

18.1. У адной скрыні 5 белых і 6 чорных шароў, а ў другой — 4 белыя і 8 чорных. З адной скрыні вымаюць шар. Тады поўную групу гіпотэз складаюць:

а) H_1 — шар выняты з першай скрыні, H_2 — шар выняты з другой скрыні;

б) H_1 — белы шар выняты з першай скрыні, H_2 — чорны шар выняты з другой скрыні;

в) H_1 — шар выняты з першай скрыні, H_2 — шар выняты з другой скрыні, H_3 — шар выняты з першай або з другой скрыні;

г) H_1 — белы шар выняты з першай скрыні, H_2 — белы шар выняты з другой скрыні; H_3 — выняты чорны шар.

Выберыце правільны адказ.

18.2. У адной скрыні 5 белых і 6 чорных шароў, а ў другой — 4 белыя і 8 чорных. З адной скрыні вымаюць шар. Калі падзея H_1 — шар выняты з першай скрыні, падзея H_2 — шар выняты з другой скрыні, падзея A — выняты белы шар, то $P(A/H_1)$ — гэта:

а) імавернасць таго, што шар выняты з першай скрыні;

б) імавернасць таго, што белы шар выняты з першай скрыні;

в) імавернасць таго, што выбрана першая скрыня;

г) імавернасць выняць белы шар з першай скрыні.

Выберыце правільны адказ.

18.3. У адной скрыні 5 белых і 6 чорных шароў, а ў другой — 4 белыя і 8 чорных. З адной скрыні вымаюць шар. Калі падзея H_1 — шар выняты з першай скрыні, падзея H_2 — шар выняты з другой скрыні, падзея A — выняты белы шар, то $P(H_1/A)$ — гэта:

а) імавернасць таго, што шар выняты з першай скрыні;

б) імавернасць таго, што белы шар выняты з першай скрыні;

в) імавернасць таго, што выбрана першая скрыня;

г) імавернасць выняць белы шар з першай скрыні.

Выберыце правільны адказ.

18.4. У адной скрыні 5 белых і 6 чорных шароў, а ў другой — 4 белыя і 8 чорных. З адной скрыні вымаюць шар. Якая імавернасць выняць белы шар?

18.5. У адной скрыні 5 белых і 6 чорных шароў, а ў другой — 4 белыя і 8 чорных. З адной скрыні вымаюць шар, ён апынуўся белым. Якая імавернасць таго, што шар выняты з першай скрыні?

18.6. Два цэхі вырабляюць аднолькавыя дэталі, якія затым паступаюць на агульны канвеер. У першым цэху выпускаецца ў два разы больш дэталей, чым у другім. Імавернасць выпуску якаснай дэталі ў першым цэху роўна 0,6, а ў другім — 0,84. Падзея A — наўздагад выбраная дэталь якасная, падзея H_1 — дэталь выраблена ў першым цэху, падзея H_2 — дэталь выраблена ў другім цэху. Знайдзіце: а) $P(H_2)$; б) $P(A/H_1)$.

18.7. Два цэхі вырабляюць аднолькавыя дэталі, якія затым паступаюць на агульны канвеер. У першым цэху выпускаецца ў два разы больш дэталей, чым у другім. Імавернасць выпуску якаснай дэталі ў першым цэху роўна 0,6, а ў другім — 0,84. Знайдзіце імавернасць таго, што наўздагад выбраная з канвеера дэталь:

а) апынулася якаснай;
б) выраблена ў першым цэху;
в) выраблена ў другім цэху.

18.8. Дэталі на зборку паступаюць з трох аўтаматаў. З першага аўтамата іх паступіла 1000, з другога — 2000, з трэцяга — 2500. Вядома, што першы аўтамат дае 0,3 % бракаваных дэталей, другі — 0,2 %, трэці — 0,4 %. Знайдзіце імавернасць:

а) пападання на зборку бракаванай дэталі;
б) таго, што бракаваная дэталь выраблена першым аўтаматам;
в) таго, што бракаваная дэталь выраблена другім аўтаматам.

18.9. Прыборы аднаго найменння вырабляюцца двума прадпрыемствамі. Першае пастаўляе $\frac{2}{3}$ усіх прыбораў, другое — $\frac{1}{3}$. Надзейнасць прыбораў першага прадпрыемства — 0,9, а другога — 0,8. Знайдзіце імавернасць таго, што:

а) выбраны надзейны прыбор;
б) выбраны надзейны прыбор выраблены на першым прадпрыемстве;
в) выбраны надзейны прыбор выраблены на другім прадпрыемстве.

18.10. Адзін з трох незалежна працуючых элементаў прылады выйшаў са строю. Імавернасці выхаду са строю першага, другога і трэцяга элементаў адпаведна роўны 0,2, 0,4, 0,3. Знайдзіце імавернасць таго, што:

а) выйшаў са строю першы элемент;
б) выйшаў са строю другі элемент;
в) выйшлі са строю першы і другі элементы.

§ 19. Паняцце аб геаметрычнай імавернасці

Азначэнне

Няхай адрэзак l займае частку адрэзка L. На адрэзак L наўздагад пастаўлены пункт. Тады імавернасць пападання пункта на адрэзак l вызначаецца роўнасцю $P = \frac{\text{Даўжыня } l}{\text{Даўжыня } L}$ і называецца геаметрычнай імавернасцю (на прамой).

Няхай плоская фігура g займае частку плоскай фігуры G. На фігуру G наўздагад кінуты пункт. Тады імавернасць пападання пункта ў фігуру g вызначаецца роўнасцю $P = \frac{\text{Плошча } g}{\text{Плошча } G}$ і называецца геаметрычнай імавернасцю (на плоскасці).

Аналагічна вызначаецца імавернасць пападання пункта ў прасторавую фігуру v, якая займае частку фігуры V: $P = \frac{\text{Аб'ём } v}{\text{Аб'ём } V}$ — і называецца геаметрычнай імавернасцю (у прасторы).

У азначэнні мяркуецца, што імавернасць пападання пункта на адрэзак l (на фігуру g) прапарцыянальна даўжыні гэтага адрэзка (плошчы гэтай фігуры) і не залежыць ад яго размяшчэння адносна адрэзка L (фігуры G).

Уласцівасці геаметрычнай імавернасці

1. Для любой часткі адрэзка значэнне імавернасці з'яўляецца неадмоўным лікам, які не перавышае 1. Для самога адрэзка значэнне імавернасці роўна 1.

2. Калі часткі X і Y не маюць агульных пунктаў (несумесныя), то $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$.

Прыклад 1. ***«Складанне трохвугольніка»***

На адрэзак даўжынёй 1 кідаюць наўздагад 2 пункты. Яны разбіваюць адрэзак на тры адрэзкі. Якая імавернасць таго, што з атрыманых трох адрэзкаў можна скласці трохвугольнік?

Рашэнне.

1. Для таго каб з трох адрэзкаў можна было скласці трохвугольнік, кожны з адрэзкаў павінен быць меншы за суму іншых.

2. Паколькі сума трох адрэзкаў роўна 1, то кожны з адрэзкаў павінен быць меншы за $\frac{1}{2}$.

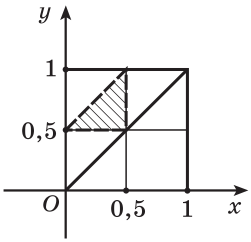
3. Разгледзім прамавугольную сістэму каардынат xOy.

Каардынаты любых двух пунктаў павінны задавальняць двайныя няроўнасці: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Гэтыя няроўнасці задавальняюць каардынаты любога пункта $(x;\, y)$, які належыць квадрату са старанoй 1.

4. Атрыманы квадрат можна разглядаць як фігуру G, каардынаты пунктаў якой уяўляюць сабой усе магчымыя значэнні каардынат наўздагад кінутых пунктаў на адрэзкі x і y. Калі пункты x і y ляжаць на адрэзку, то даўжыні старон трохвугольніка задавальняюць умовы:

пры $x \leqslant y$ $\begin{cases} x < (y - x) + (1 - y), \\ y - x < x + (1 - y), \\ 1 - y < x + (y - x), \end{cases}$ пасля пераўтварэнняў

атрымаем сістэму няроўнасцей $\begin{cases} x < 0{,}5, \\ y < x + 0{,}5, \\ 0{,}5 < y, \\ x \leqslant y, \end{cases}$ якая на

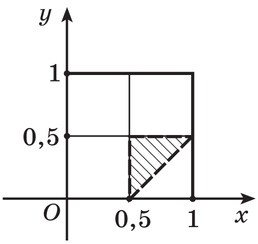


Рыс. 37

плоскасці задае трохвугольнік (рыс. 37);

пры $x > y$ сістэма $\begin{cases} x > 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ y > x - 0{,}5, \\ x > y \end{cases}$ задае на плоскасці

яшчэ адзін трохвугольнік (рыс. 38).



Рыс. 38

5. Заштрыхаваныя трохвугольнікі можна разглядаць як фігуру g. Плошчы гэтых трохвугольнікаў складаюць $\frac{1}{8}$ квадрата. Тады $g = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $G = 1$. Такім чынам, імавернасць скласці трохвугольнік $P = \frac{g}{G} = \frac{1}{4}$.

Прыклад 2. ***«Колькі штурхаць аўтамабіль»***

На аўтамабільнай магістралі кожныя 20 км знаходзяцца станцыі тэхнічнага абслугоўвання. Якая імавернасць таго, што аўтамабіль, які зламаўся на трасе, прыйдзецца штурхаць да бліжэйшай станцыі больш за 1 км?

Рашэнне.

1. На мове геаметрычнай імавернасці гэта выбар выпадковага пункта на адрэзку даўжынёй 20 км.

2. Спрыяльнымі зыходамі для падзеі будзе пападанне ў пункты, якія знаходзяцца на адлегласці, не большай за 1 км ад канцоў адрэзка. Такія пункты знаходзяцца на адрэзках даўжынёй 1 км ад пачатку і 1 км ад канца: $P = \frac{l}{L} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Заўвага: магістраль можа не быць прамой лініяй, тады пункт выбіраецца ўжо не на адрэзку, а на крывой, але паколькі імавернасць залежыць толькі ад даўжыні, то адказ не зменіцца.

Прыклад 3. ***«Рулетка»***

Вядомым прыкладам прылады для выбару выпадковага пападання служыць так званая рулетка (ваўчок, круцёлка). У цэнтры рулеткі замацавана стрэлка, якая раскручваецца і спыняецца ў выпадковым становішчы. Якая імавернасць таго, што стрэлка рулеткі спыніцца на якім-небудзь сектары?

Рашэнне.

1. Круг рулеткі разбіты на сектары з рознай вуглавой велічынёй.

2. Імавернасць таго, што стрэлка круцёлкі спыніцца на якім-небудзь сектары, роўна адносіне даўжыні дугі, якая абмяжоўвае яго (спрыяльныя выхады), да даўжыні ўсёй акружнасці $P = \frac{\alpha r}{2\pi r} = \frac{\alpha}{2\pi}$.

Прыклад 4. ***«Круг у квадраце»***

У квадрат са стараной a кідаюць выпадковы пункт. Якая імавернасць таго, што ён пападзе ва ўпісаны ў гэты квадрат круг?

Рашэнне.

$G = a^2$, $g = \pi \cdot r^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$. Тады $P = \frac{g}{G} = \frac{\pi \cdot a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$.

19.1. На адрэзак $[-2; 2]$ кідаюць выпадковы пункт. Якая імавернасць таго, што яго каардыната будзе:

а) дадатнай; б) большай за 1; в) большай за $\frac{1}{2}$?

19.2. У круг радыуса 2 кідаюць выпадковы пункт. З якой імавернасцю адлегласць ад гэтага пункта да цэнтра круга будзе:

а) меншай за 1; б) меншай за $\frac{1}{2}$; в) большай за 1; г) большай за $\frac{1}{2}$?

19.3. У круг радыуса 2 кідаюць выпадковы пункт. З якой імавернасцю ён пападзе ў канцэнтрычны круг радыуса 1?

19.4. Метровую стужку выпадковым чынам разразаюць нажніцамі. Знайдзіце імавернасць таго, што даўжыня адрэзанай часткі стужкі будзе не меншай за 80 см.

19.5. Пасля буры на ўчастку паміж 40-м і 70-м кіламетрамі лініі электраперадач адбыўся абрыў проваду. Якая імавернасць таго, што ён адбыўся паміж 50-м і 55-м кіламетрамі лініі?

19.6. На адрэзку L даўжынёй 20 см змешчаны меншы адрэзак даўжынёй 10 см. Знайдзіце імавернасць таго, што пункт, наўздагад пастаўлены на большы за адрэзак, пападзе таксама і на меншы адрэзак. Мяркуецца, што імавернасць пападання пункта на адрэзак прапарцыянальна даўжыні адрэзка і не залежыць ад яго размяшчэння.

19.7. У трохвугольнік са старанамі $a = 9$; $b = 13$; $c = 16$ упісаны круг. Пункт M адвольна ставіцца ў трохвугольнік. Знайдзіце імавернасць таго, што пункт пападзе ў круг.

19.8. На шахматнай дошцы выпадковым чынам выбіраюць пункт. Якая імавернасць таго, што ён трапіць на белую клетку?

19.9. У шар упісаны куб. Пункт наўздагад кідаюць у шар. Якая імавернасць таго, што ён пападзе ў куб?

§ 20. Паняцце выпадковай велічыні

Прыклады выпадковай велічыні:

1) колькасць машын, якія праязджаюць за 1 г праз некаторае перакрыжаванне;

2) колькасць лістоў, што паступаюць у некаторае паштовае аддзяленне за адзін дзень;

3) колькасць пападанняў пры стральбе па мішэні.

У кожным з прыкладаў гаворка ідзе аб велічыні, якая характарызуе выпадковую падзею. Кожная з гэтых велічынь можа прымаць адпаведнае значэнне ў залежнасці ад выпадковага зыходу выпрабавання.

Азначэнне

Выпадковай велічынёй называецца зменная велічыня, значэнні якой залежаць ад выпадковага зыходу некаторага выпрабавання.

Прыклад 1. На завод паступіла партыя, якая складаецца з N падшыпнікаў:

m_1 — колькасць падшыпнікаў са знешнім дыяметрам x_1,

m_2 — колькасць падшыпнікаў са знешнім дыяметрам x_2,

...

m_n — колькасць падшыпнікаў са знешнім дыяметрам x_n.

Знешні дыяметр вынятага наўздагад падшыпніка можна разглядаць як выпадковую велічыню, якая прымае значэнні $x_1, x_2, \ldots, x_n$, з адпаведнымі імавернасцямі $p_1 = \frac{m_1}{N}$, $p_2 = \frac{m_2}{N}$, ..., $p_n = \frac{m_n}{N}$.

Прыклад 2. Прылада складаецца з трох элементаў, якія працуюць незалежна. Імавернасць выхаду са строю кожнага элемента ў адным доследзе роўна 0,1. Выпадковая велічыня — колькасць элементаў, якія выйшлі са строю.

Запішам у табліцу значэнні гэтай выпадковай велічыні і адпаведныя імавернасці гэтых значэнняў.

Колькасць элементаў, якія выйшлі са строю	0	1	2	3
P — імавернасці	0,729	0,243	0,027	0,001

Гэтай табліцай зададзены закон размеркавання выпадковай велічыні. Патлумачым, што выпадковая велічыня прымае значэнне, роўнае 0, калі ўсе тры элементы працуюць, г. зн. імавернасць здабытку: $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729$. Калі выйшаў са строю толькі адзін элемент, то імавернасць гэтага значэння выпадковай велічыні роўна $3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ і г. д.

Калі выпадковая велічыня можа прымаць толькі канечную колькасць магчымых значэнняў, то яна называецца **дыскрэтнай**.

Законам размеркавання дыскрэтнай выпадковай велічыні (шэрагам размеркавання) называецца пералік усіх яе магчымых значэнняў і адпаведных ім імавернасцей. Закон размеркавання дыскрэтных велічынь найбольш зручна паказваць у выглядзе табліцы.

X — значэнні выпадковай велічыні	1	2	3	...	n
P — імавернасці	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Азначэнне

Знойдзем сярэдняе значэнне выпадковай велічыні ў прыкладзе 1:

$$x_{\text{сяр}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{N} = \frac{m_1}{N}x_1 + \frac{m_2}{N}x_2 + \ldots + \frac{m_n}{N}x_n;$$

$$x_{\text{сяр}} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Гэта значэнне называецца **матэматычным чаканнем выпадковай велічыні.**

Абазначаецца матэматычнае чаканне $M(x)$.

Імавернасны сэнс матэматычнага чакання: матэматычнае чаканне прыбліжана роўна сярэдняму арыфметычнаму назіраемых значэнняў выпадковай велічыні.

Прыклад 3. Знойдзем матэматычнае чаканне колькасці элементаў, якія выйшлі са строю ў прыкладзе 2.

$M(x) = 0 \cdot 0{,}729 + 1 \cdot 0{,}243 + 2 \cdot 0{,}027 + 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}3.$

20.1. Выпушчана 1000 латарэйных білетаў. На 100 білетаў выпадае выйгрыш 10 р., на 50 білетаў — 20 р., на 20 білетаў — 100 р., на 5 білетаў выпадае выйгрыш 200 р. Астатнія білеты — без выйгрышу.

а) Закон размеркавання выпадковай велічыні — выйгрышу білета, набытага выпадкова, мае наступны выгляд:

1)

x	0	10	20	100	200
p	0,825	0,1	0,05	0,02	0,005

2)

x	0	100	50	20	5
p	0,825	0,1	0,05	0,02	0,005

3)

x	0	10	20	100	200
p	0,825	0,01	0,005	0,002	0,0005

4)

x	0	100	20	100	200
p	0,825	0,1	0,5	0,2	0,05

Выберыце правільны адказ.

б) Якое матэматычнае чаканне выпадковай велічыні — выйгрышу білета, набытага выпадкова?

20.2. У стралка 4 патроны. Ён страляе па мішэні, пакуль не пападзе або пакуль не скончацца патроны. Імавернасць пападання роўна 0,25. Знайдзіце:

а) закон размеркавання выпадковай велічыні — колькасці стрэлаў да заканчэння стральбы;

б) матэматычнае чаканне колькасці стрэлаў.

20.3. Няхай x — колькасць гербаў, што выпалі пры чатырох падкіданнях правільнай манеты. Знайдзіце:

а) закон размеркавання выпадковай велічыні x;

б) матэматычнае чаканне выпадковай велічыні x.

20.4. Стральба па мішэні вядзецца да другога пападання. Імавернасць пападання адным стрэлам роўна 0,2. Знайдзіце:

а) закон размеркавання выпадковай велічыні — колькасці стрэлаў да другога пападання;

б) матэматычнае чаканне колькасці стрэлаў да другога пападання.

20.5. Аўтамабіль сустракае 4 светлафоры, кожны з якіх прапускае яго з імавернасцю 0,5. Знайдзіце:

а) закон размеркавання выпадковай велічыні — колькасці светлафораў да першага спынення аўтамабіля;

б) матэматычнае чаканне колькасці светлафораў да першага спынення аўтамабіля.

20.6. Баскетбаліст у сярэднім закідвае штрафны мяч у кошык з імавернасцю 0,5. Знайдзіце:

а) закон размеркавання штрафных мячоў, якія папалі ў цэль запар;

б) матэматычнае чаканне колькасці штрафных мячоў, закінутых запар.

§ 21. Элементы матэматычнай статыстыкі

Матэматычная статыстыка — навука аб матэматычных метадах аналізу даных, атрыманых пры правядзенні масавых назіранняў (вымярэнняў, доследаў).

Асноўным метадам усіх статыстычных даследаванняў з'яўляецца выбарачны метад. Ён заключаецца ў тым, што ў рэальным даследаванні назіраецца не ўся сукупнасць з'яў або аб'ектаў, якія вывучаюцца, а толькі некаторая іх частка.

Напрыклад, пры вызначэнні рэйтынгу тэлевізійнай перадачы практычна немагчыма высветліць меркаванне ўсіх тэлегледачоў, таму праводзяць выбарачнае абследаванне толькі малой іх часткі.

Уся сукупнасць з'яў або аб'ектаў, якія падлягаюць статыстычнаму даследаванню, называецца **генеральнай сукупнасцю**.

Элементамі генеральнай сукупнасці могуць быць аб'екты любой прыроды: людзі, прыродныя з'явы, лікі, фізічныя эксперыменты і г. д.

З усёй генеральнай сукупнасці для даследавання выбіраюць невялікае (у параўнанні з генеральнай сукупнасцю) канечнае мноства элементаў, якія складаюць **выпадковую выбарку**.

Выбаркай можна лічыць шэраг (паслядоўнасць) даных (часцей за ўсё лікавых), атрыманых у выніку статыстычнага назірання. Такі шэраг называюць **статыстычным**.

Прыклад 1. Лікавы шэраг, які ўяўляе сабой выніковыя адзнакі па матэматыцы навучэнцаў 11-га класа:

8 4 5 4 4 8 5 6 6 9 5 4 5 7 7 5 9 9 5 5 4 10 7 8 6.

Прыклад 2. Выпадковая выбарка з 25 навучэнцаў 8-га класа з данымі аб іх росце:

166 165 163 166 168 165 168 170 165 165 165 165 164 168 165 164 161 166 166 167 164 163 168 167 167.

У статыстыцы ўпарадкаванне даных, атрыманых у выбарцы, называюць **ранжыраваннем**, а ўпарадкаваны па нарастанні статыстычны шэраг — **варыяцыйным шэрагам**.

Напрыклад: статыстычны шэраг —
2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3,
атрыманы па ім варыяцыйны шэраг —
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5.

Калі зададзены статыстычны шэраг x_1, x_2, ..., x_n, то **сярэдняе арыфметычнае** ўсіх членаў дадзенага шэрага, г. зн. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$, называецца ***выбарковым сярэднім***.

Прыклад 3. Навучэнец атрымаў за першую навучальную чвэрць наступныя адзнакі па матэматыцы: 7, 4, 6, 6, 5, 4, 5, 6, 6, 5. Знойдзем яго *сярэдні бал*, г. зн. сярэдняе арыфметычнае ўсіх членаў шэрага:

$$\bar{x} = \frac{7+4+6+6+5+4+5+6+6+5}{10} = 5{,}4.$$

Значэнне 5,4 — выбарковае сярэдняе дадзенага статыстычнага шэрага.

Выбарковае сярэдняе дае няпоўнае ўяўленне аб паводзінах даследуемай велічыні. Напрыклад, на планеце Меркурый сярэдняя тэмпература +15 °C. Выходзячы з гэтага статыстычнага паказчыка, можна падумаць, што на Меркурыі ўмераны клімат, прыдатны для жыцця людзей. Аднак на самай справе гэта не так. Тэмпература на Меркурыі вагаецца ад –150 °C да +350 °C.

А ў прыкладзе з адзнакамі па матэматыцы сярэдні бал (пры акругленні атрымаецца 5) здаецца не зусім справядлівым, бо найбольшая колькасць адзнак — гэта адзнакі «6».

Модай лікавага шэрага называюць лік, які сустракаецца ў гэтым шэрагу найбольш часта. Можна сказаць, што ён у гэтым шэрагу самы «модны». Для прыкладу з адзнакамі мода роўна 6.

Моду можна выкарыстоўваць *не толькі ў лікавых шэрагах*. Калі, напрыклад, апытаць вялікую групу навучэнцаў, які школьны прадмет ім падабаецца больш за ўсё, то модай гэтага шэрага адказаў будзе той прадмет, які будуць называць часцей астатніх. Мода шырока выкарыстоўваецца пры вывучэнні попыту і правядзені іншых сацыялагічных даследаванняў. Напрыклад, пры рашэнні пытання, у які час і якія авіярэйсы адкрываць і да т. п., папярэдне вывучаецца попыт і выяўляецца мода — заказ, які сустракаецца найбольш часта.

Медыянай варыяцыйнага шэрага называюць лік гэтага шэрага (або паўсуму двух яго лікаў), які знаходзіцца роўна пасярэдзіне шэрага.

***Каб знайсці медыяну статыстычнага шэрага, трэба*:**

① Ранжыраваць статыстычны шэраг і атрымаць варыяцыйны шэраг.

② Калі варыяцыйны шэраг змяшчае няцотную колькасць лікаў, то трэба ўзяць лік, які знаходзіцца роўна пасярэдзіне.

Калі ж шэраг змяшчае цотную колькасць лікаў, то трэба ўзяць два сярэднія лікі і знайсці іх паўсуму.

Напрыклад, разгледзім шэраг адзнак 7; 4; 6; 6; 5; 4; 5; 6; 6; 5.

① Ранжыруем яго і атрымаем 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7.

② Шэраг змяшчае цотную колькасць лікаў, трэба ўзяць два сярэднія лікі 5 і 6 і знайсці іх паўсуму, медыяна роўна 5,5.

Разгледзім статыстычны шэраг 15; 13; 12; 16; 14; 12; 13; 14; 16 — узрост членаў каманды на спартыўных спаборніцтвах.

① Ранжыруем шэраг і атрымаем 12 12 13 13 14 14 15 16 16.

② Варыяцыйны шэраг змяшчае няцотную колькасць лікаў, возьмем лік, які знаходзіцца пасярэдзіне — гэта 14.

Вартасцю медыяны з'яўляецца яе большая ў параўнанні з сярэднім арыфметычным *устойлівасць да памылак*. Уявім сабе, што пры запісе лікавага шэрага 15; 13; 12; 16; 14; 12; 13; 14; 16 была зроблена памылка: лік 15 замянілі на 5. Тады сярэдняе арыфметычнае ўзросту зменіцца з 13,9 на 12,8, а медыяна застанецца правільнай.

Але для таго каб атрымаць больш поўнае ўяўленне аб паводзінах статыстычнага шэрага ў цэлым, трэба ведаць, наколькі моцна яго значэнні адрозніваюцца паміж сабой, як моцна яны раскінуты, рассеяны.

Размах — гэта рознасць найбольшага і найменшага значэнняў выбаркі.

Размах можа дадаць шмат карыснай інфармацыі да іншых характарыстык. Так, для тэмпературы на Меркурыі, дзе сярэдняя тэмпература, вагаецца каля +15 °C, размах роўны 350 °C – (–150 °C) = 500 °C.

Размах не заўсёды дае дакладную інфармацыю, паколькі на яго велічыню можа моцна паўплываць нейкае адно (магчыма, памылковае) значэнне выбаркі.

Мерай роскіду можа быць велічыня, якую можна назваць **сярэднім адхіленнем ад сярэдняга:** спачатку знаходзяць сярэдняе значэнне $\bar{x}$, затым вылічваюць сярэдняе арыфметычнае ўсіх адхіленняў ад гэтага сярэдняга:

$$\frac{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})}{n}.$$

Вынік можа апынуцца роўным нулю, паколькі нейкая частка значэнняў шэрага ляжыць злева ад сярэдняга, а нейкая — справа.

Для таго каб гэтага пазбегнуць, разглядаецца **дысперсія лікавага шэрага** $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ — сярэдняе арыфметычнае квадратаў адхіленняў значэнняў варыяцыйнага шэрага ад сярэдняга.

21.1. За навучальны год Пеця атрымаў наступныя адзнакі за кантрольныя па алгебры: дзве «чацвёркі», дзве «шасцёркі», дзве «васьмёркі» і дзве «дзявяткі». Які з наступных шэрагаў яго адзнак з'яўляецца варыяцыйным:

а) 4, 6, 8, 9;
б) 4, 4, 8, 8, 6, 6, 9, 9;
в) 4, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 9;
г) 9, 9, 8, 8, 6, 6, 4, 4?

Назавіце выбарковае сярэдняе і медыяну яго адзнак.

21.2. Дадзены шэраг з шасці лікаў: 18, 25, 24, 25, 36, 43. Вызначце, якая з сярэдніх характарыстык знаходзіцца наступным чынам:

а) $18 + 25 + 24 + 25 + 36 + 43 = 171$; $171 : 6 = 28{,}5$;
б) $(25 + 25) : 2 = 25$.

21.3. Знайдзіце медыяну наступнага шэрага даных:
а) 1; 7; 8; 4; 9; 5; 2;
б) $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}$.

21.4. Якую сярэднюю характарыстыку можна выкарыстоўваць у нялікавых шэрагах?

21.5. Якая сярэдняя характарыстыка найбольш устойлівая да выпадковых памылак пры запісе даных?

21.6. Знайдзіце для лікавага шэрага 1, 2, 3, 4, x магчымыя значэнні x, пры якіх:

а) выбарковае сярэдняе шэрага роўна 3;

б) мода роўна 3;

в) медыяна роўна 3, ведаючы, што x прымае натуральныя значэнні, якія не перавышаюць 10.

21.7. Даныя аб часе (у фармаце г:мін) дарожна-транспартных здарэнняў на вуліцах Мінска за адны суткі прыведзены ў выглядзе ранжыраванага шэрага: 0:15, 0:55, 1:20, ..., 21:30, 21:45, 22:10, 22:35. Якую сярэднюю характарыстыку можна выкарыстаць для дзейснага аналізу:

а) выбарковае сярэдняе; б) моду;

в) медыяну; г) размах?

21.8. Ёсць даныя аб тэмпературы паветра ў першай дэкадзе красавіка: 2 6 8 4 12 10 2 4 6 7. Знайдзіце дысперсію гэтага лікавага шэрага.

Тэст 1. Рацыянальныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$.	а) –9; б) –36; в) 0; г) –12; д) –6.
2. Рашыце ўраўненне $\left(x^2+5x+6\right)^2+\left(x^2+6x+9\right)^2=0$.	а) –3; б) –2; –3; в) –5; –6; г) 0; д) –9.
3. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$.	а) –3; б) –1; в) $\frac{4}{9}$; г) 0; д) –2.
4. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\left(x^2-6x+8\right)^2-9x^2-6x=1$.	а) 7; б) 63; в) 12; г) 9; д) 27.
5. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.	а) 1,5; б) 2; в) –2; г) 0,5; д) 1.
6. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)=24$.	а) –4; б) –24; в) 6; г) –6; д) 18.

Працяг

7. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $x^2 + 5x + 6 = \frac{3}{x^2 + x}$.	а) 3; б) –6; в) –3; г) –1; д) 0.
8. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.	а) 9; б) –18; в) 4; г) –1; д) 0.
9. Знайдзіце значэнне выразу $n \cdot S$, дзе n — колькасць каранёў ураўнення $x^2 - 5x + \frac{35}{x} + \frac{49}{x^2} = 14$, а S — іх сума.	а) 40; б) –14; в) –28; г) 10; д) 20.
10. Знайдзіце колькасць цэлых каранёў ураўнення $\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2 + 14 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-25} - 15\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^2 = 0$.	
11. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$.	
12. Знайдзіце найбольшы корань ураўнення $\left(x^2 + 4x + 3\right)^2 + \left(x^2 - 2x - 15\right)^2 = 36(x+3)^2$.	
13. Знайдзіце падвоеную суму каранёў ураўнення $2\left(x^2 - x + 1\right)^2 = x^2\left(8x^2 - 5x + 5\right)$.	
14. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{45}{16}$.	
15. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\frac{x^2 + x - 7}{x^2 + 5} = \frac{x-5}{2x^2+3}$.	

Тэст 2. Ураўненні з модулем

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце ўраўненне, якое не мае каранёў: 1) $\lvert x+1\rvert=0$; 2) $\lvert x-7\rvert-8=0$; 3) $\lvert x\rvert=4$; 4) $\lvert x-6\rvert+1=0$; 5) $\lvert x+1\rvert=\lvert -2\rvert$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\lvert x\rvert=\lvert 2x-5\rvert$.	а) 5; б) $6\frac{2}{3}$; в) 2; г) –5; д) $1\frac{2}{3}$.
3. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $\lvert\lvert 3x+1\rvert+x+1\rvert=2$.	а) –1; б) –0,5; в) 0,25; г) 0; д) 0,5.
4. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $x^2+2x=8\frac{\lvert x+4\rvert}{4+x}$.	а) –8; б) 2; в) –64; г) 8; д) 4.
5. Рашыце ўраўненне $\lvert x^2+11x+28\rvert=\lvert x^2-14\rvert$.	а) $-3\frac{9}{11}$; б) –3,5; –2; в) $-3\frac{9}{11}$; –3,5; –2; г) 0; д) $-3\frac{9}{11}$; 2; 3,5.
6. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\lvert x^2-2x-3\rvert=x-3$ на адрэзку [–3; 5].	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

Працяг

7. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $x^2 - 4\lvert x + 1\rvert + 5x + 4 = 0$.	а) $-1{,}5$; б) $-4{,}5$; в) $-0{,}5$; г) $-2{,}5$; д) -3.
8. Рашыце ўраўненне $\lvert x^2 + x - 2\rvert + x^2 + x - 2 = 0$.	а) -2; 1; б) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $[-2; 1]$; д) $[-1; 2]$.
9. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\frac{x^2 + 5\lvert x\rvert + 6}{x^2 - 9} = 2$.	а) -16; б) -4; в) -64; г) -9; д) -100.
10. Знайдзіце значэнне выразу $6 \cdot S$, дзе S — сума каранёў ураўнення $\lvert x + 3\rvert + \lvert 2x - 1\rvert = 8$.	
11. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\frac{1}{\lvert x^2 - 5x + 6\rvert} = \frac{\lvert x - 1{,}5\rvert}{x^2 - 5x + 6}$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу $5 \cdot S$, дзе S — сума каранёў ураўнення $4\lvert 5x + 8\rvert - 25x^2 = 80x + 64$.	
13. Знайдзіце суму ўсіх цэлых значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \frac{5 - x}{\lvert x + 3\rvert + \lvert x - 5\rvert - 8}$ не вызначана.	
14. Знайдзіце суму натуральных каранёў ураўнення $\lvert 5x - x^2 - 8\rvert + \lvert x - 9\rvert = x^2 - 6x + 17$.	
15. Знайдзіце суму цэлых каранёў ураўнення $\frac{\lvert x^2 - 6x + 8\rvert + \lvert x^2 - 6x + 5\rvert - 3}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$.	

Тэст 3. Няроўнасці з модулем

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няроўнасць, раўназначную няроўнасці $\lvert x \rvert \geqslant -1$: 1) $\lvert x \rvert - 1 \leqslant 0$; 2) $\lvert x \rvert \leqslant 0$; 3) $\lvert x \rvert > 0$; 4) $\lvert x \rvert \geqslant 0$; 5) $\lvert x \rvert - 1 \geqslant 0$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Рашыце няроўнасць $\lvert 3 - x \rvert \leqslant 3$.	а) $(-\infty; 6]$; б) $[6; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[0; 6]$; д) $[3; +\infty)$.
3. Рашыце няроўнасць $\sqrt[5]{y^5} \geqslant \sqrt[4]{y^4}$.	а) $(-\infty; 0]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$; д) 0.
4. Рашыце няроўнасць $\lvert 3x - 2 \rvert x < 1$.	а) $(-\infty; 1)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; в) $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$; г) $(1; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$.
5. Знайдзіце здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці $\lvert x^2 - 2x - 7 \rvert \leqslant 4$.	а) 12; б) –12; в) 6; г) 24; д) 32.

Працяг

6. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\lvert 9 - x^2 \rvert + 8x < 0$.	а) -45; б) -35; в) -44; г) -36; д) -32.
7. Знайдзіце суму найбольшага цэлага адмоўнага і найбольшага цэлага дадатнага рашэнняў няроўнасці $\lvert x^2 + 3x - 9 \rvert - \lvert x^2 - 3x - 9 \rvert < 0$.	а) -6; б) -9; в) -4; г) -1; д) -2.
8. Рашыце няроўнасць $\lvert x - 2x^2 \rvert > 2x^2 - x$.	а) $(-0{,}5;\ 0)$; б) $(0;\ 0{,}5)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (0;\ +\infty)$; д) $\varnothing$.
9. Рашыце няроўнасць $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt{5} - 4 \geqslant \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.	а) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right]$; в) $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right] \cup [1;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; д) $[1;\ +\infty)$.
10. Знайдзіце значэнне выразу $9 \cdot x_0$, дзе x_0 — найбольшае рашэнне няроўнасці $\lvert 3x - 1 \rvert \geqslant (3x - 1)^2$.	
11. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $\frac{\lvert x - 1 \rvert}{3 - x} \geqslant \frac{\lvert x - 1 \rvert}{3 - 2x}$ на адрэзку $[-1;\ 3]$.	
12. Знайдзіце здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці $\frac{2x^2 - 3\lvert x \rvert + 3}{x^2 + 1} \leqslant 1$.	

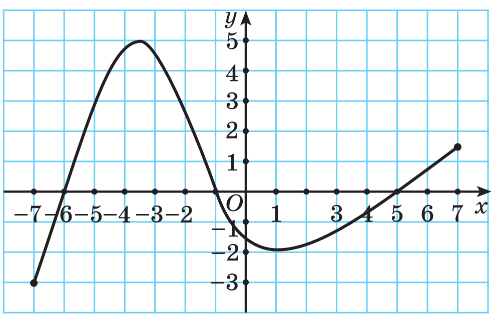
Працяг

13. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $(\lvert x\rvert - 1)(2x^2 + x - 1) \leqslant 0$.	
14. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{\lvert x^2 - 4\rvert} \leqslant 0$.	
15. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $\lvert 3x + 1\rvert + 2 + \dfrac{3}{\lvert 3x + 1\rvert - 2} \leqslant \dfrac{1}{\lvert 3x + 1\rvert + 2}$.	

Тэст 4. Функцыі і іх уласцівасці

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ зрухам яго на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі ардынат.	а) $y = \dfrac{k}{x+2} + 3$; б) $y = \dfrac{k}{x-2} + 3$; в) $y = \dfrac{k}{x+3} - 2$; г) $y = \dfrac{k}{x+2} - 3$; д) $y = \dfrac{k}{x-3} + 2$.
2. Дадзены функцыі $y = x$, $y = \sqrt{x^2}$ і $y = (\sqrt{x})^2$. Назавіце нумар правільнага сцвярджання: 1) графікі ўсіх функцый супадаюць; 2) графікі першай і другой функцый супадаюць; 3) графікі першай і трэцяй функцый супадаюць; 4) графікі другой і трэцяй функцый супадаюць; 5) графікі ўсіх функцый розныя.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

3. Прамая праходзіць праз пункты (2; 0) і (1; 2). Выберыце пункт, праз які таксама праходзіць дадзеная прамая: 1) (–1; 2); 2) (0; –4); 3) (–19; 42); 4) (50; –98); 5) (–25; 52).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. На рысунку 41 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Выберыце няправільнае сцверджанне: 1) $D = [-7;\ 7]$; 2) $E = [-3;\ 5]$; 3) $y > 0$ пры $x \in (-6;\ -1) \cup (5;\ 7]$; 4) функцыя спадае на прамежку (–1; 5); 5) нулямі функцыі з’яўляюцца лікі –6; –1; 5.  Рыс. 41	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
5. Выберыце прамежак (аб’яднанне прамежкаў), які не можа з’яўляцца абсягам вызначэння няцотнай функцыі: 1) (–10; 10); 2) $[-5;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ 5]$; 3) [–1; 3]; 4) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 5) $[-\sqrt{7};\ \sqrt{7}]$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
6. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$.	а) (1; 5); б) (–3; –2); в) $(-\infty;\ -5) \cup (-1;\ +\infty)$; г) (–5; –1); д) (2; 3).

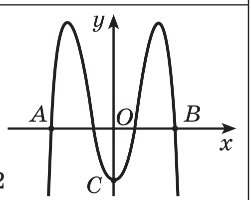
Працяг

7. Выберыце ўсе няцотныя функцыі: 1) $y = -7x^3$; 2) $y = \frac{x}{\lvert x \rvert}$; 3) $y = -\sqrt{2x}$; 4) $y = \lvert x-5 \rvert + \lvert x+5 \rvert$; 5) $y = -6\lvert x \rvert - 8$.	а) 1); 2); б) 4); 5); в) 1); 2); 3); г) 1); 3); 4); д) 1); 2); 5).
8. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей $x^2 + y^2 = 1$ і $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$.	а) 3; б) 5; в) 4; г) 7; д) 1.
9. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$.	а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$; в) $(-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$.

10. Знайдзіце адлегласць паміж нулямі функцый $y = \sqrt{x-1} - 5$ і $y = x^3 + 8$.

11. Знайдзіце колькасць цэлых значэнняў аргумента, пры якіх значэнні функцыі $y = \lvert 2x - 8 \rvert - \lvert x + 6 \rvert$ адмоўныя.

12. На рысунку 42 паказаны графік функцыі $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Пункты $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$ належаць дадзенаму графіку. Знайдзіце значэнне выразу $x_1 \cdot x_2 + y_3$.



Рыс. 42

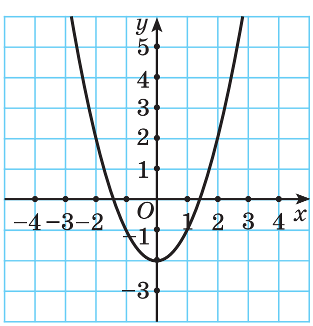
13. Знайдзіце, колькі цэлых лікаў з прамежку [–11; 45] належыць абсягу вызначэння функцыі $y = \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

14. Знайдзіце найбольшае цэлае адмоўнае значэнне зменнай, пры якім графік функцыі $y = \frac{9}{x}$ размешчаны вышэй бісектрысы I і III каардынатных вуглоў.

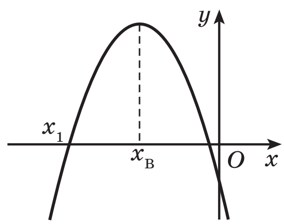
Працяг

15. Няхай функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і вызначана на мностве рэчаісных лікаў, а ўраўненне $f(x) = -3$ мае роўна сем розных каранёў. Знайдзіце $f(0)$.

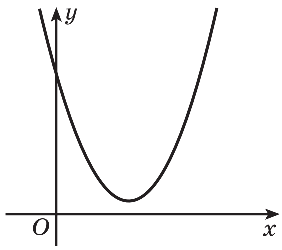
Тэст 5. Квадратычная функцыя

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце парабалу, воссю сіметрыі якой з'яўляецца прамая $x = -6$: 1) $y = 3(x-6)^2 - 8$; 2) $y = x^2 - 6x + 2$; 3) $y = x^2 + 12x - 1$; 4) $y = -2(x-4)^2 - 6$; 5) $y = 2x^2 - 24x + 7$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберыце функцыю, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 43: 1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = (x-2)^2$; 4) $y = (x+2)^2$; 5) $y = x^2 - 2x$.  Рыс. 43	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

3. На рысунку 44 паказаны відарыс графіка функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.  Рыс. 44 Выберыце няправільнае сцверджанне: 1) $f(x_1) = 0$; 2) $f(3) < f(0)$; 3) $f(10) < 0$; 4) $f(0) = 0$; 5) $f(x_в) \geqslant f(x_0)$, дзе $x_0 \in \boldsymbol{R}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Для парабалы $y = -(x + 4)^2 - 5$ выберыце няправільнае сцверджанне: 1) пункт з каардынатамі (–4; –5) з’яўляецца вяршыняй парабалы; 2) парабала перасякае вось ардынат у пункце (0; –5); 3) мноствам значэнняў функцыі з’яўляецца прамежак $(-\infty; -5]$; 4) функцыя нарастае на прамежку $(-\infty; -4]$; 5) воссю сіметрыі парабалы з’яўляецца прамая $x = -4$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
5. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента функцыя $y = (3 - x)(7x + 2)$ прымае адмоўныя значэнні.	а) $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$; б) $\left(-\frac{2}{7}; 3\right)$; в) $(-\infty; -3,5) \cup (3; +\infty)$; г) $\left(-3; \frac{2}{7}\right)$; д) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup (3; +\infty)$.

Працяг

6. На рысунку 45 паказаны відарыс графіка функцыі $y = ax^2 + bx + c$.  Рыс. 45 Вызначце знакі каэфіцыентаў a, b і c.	а) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; б) $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$; в) $a > 0$; $b < 0$; $c = 0$; г) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$; д) $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$.
7. Знайдзіце, пры якім значэнні a функцыя $y = x^2 - (a + 6)x + 7$ з'яўляецца цотнай.	а) 0; б) 6; в) –7; г) –6; д) 7.
8. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = -x^2 + x - 1$ размешчаны не вышэй восі абсцыс.	а) $(1; +\infty)$; б) $[0; 1]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -1)$; д) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.
9. Абсягам вызначэння функцыі $y = x^2 - 2x + 3$ з'яўляецца адрэзак $[-1; 2]$. Знайдзіце мноства значэнняў гэтай функцыі.	а) $[3; 6]$; б) $[2; 6]$; в) $[2; 3]$; г) $[1; 3]$; д) $[-1; 2]$.
10. Квадратычная функцыя зададзена формулай $y = ax^2 - (a + 2)x + 2$. Знайдзіце найбольшы цэлы лік, які належыць мноству значэнняў дадзенай функцыі, калі яе воссю сіметрыі з'яўляецца прамая $x = -0{,}5$.	
11. Знайдзіце значэнне выразу $k + b$, дзе $y = kx + b$ — ураўненне прамой, якая праходзіць праз пункты перасячэння графікаў функцый $y = x^2 + 2x$ і $y = 6x - x^2$.	

Працяг

12. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = 3x^2$ зрухам яго на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ і прамой $x = 5$.	
13. Вядома, што нулямі функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ з'яўляюцца лікі $-2 + 2\sqrt{3}$ і $24 - 2\sqrt{3}$. Знайдзіце абсцысу вяршыні парабалы.	
14. Знайдзіце суму двух лікаў, рознасць якіх роўна 40, а здабытак — найменшы з магчымых.	
15. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $f(x) = (x-1)(x-7)(x-4)(x+2) + 100$.	

Тэст 6. Спрашчэнне трыганаметрычных выразаў

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце магчымую роўнасць: 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{3}$; 3) $\cos\alpha = \sqrt[12]{1{,}08}$; 4) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin 12^\circ}$; 5) $\cos\alpha = -7^0$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберыце выраз, значэнне якога адмоўнае: 1) $\sin\frac{18\pi}{19}$; 2) $\cos(-49^\circ)$; 3) $\mathrm{tg}3$; 4) $\cos(-297^\circ)$; 5) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Вылічыце: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.	а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) -1; д) 2.

Працяг

4. Вылічыце: $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}}-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4}$.	а) $-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$; д) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.
5. Спрасціце выраз $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\left(60^\circ+\alpha\right)}{2\sin\left(60^\circ+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.	а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) 1; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{tg}\alpha$.
6. Вылічыце: $\sin^4\frac{23\pi}{12}-\cos^4\frac{13\pi}{12}$.	а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. Знайдзіце значэнне выразу $4\sin 20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ$.	а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 2; д) 4.

Працяг

8. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.	а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 2; д) 4.
9. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 200^\circ}}$.	а) $-\cos 50^\circ$; б) $\sin 50^\circ$; в) $\cos 50^\circ$; г) $-\sin 50^\circ$; д) $\operatorname{tg} 50^\circ$.
10. Знайдзіце здабытак найбольшага і найменшага значэнняў выразу $3\sin 7\alpha + 3\cos 7\alpha$.	
11. Знайдзіце значэнне выразу $9\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$, калі $\cos(\pi - 4\alpha) = -\frac{1}{3}$.	
12. Вылічыце $\frac{\cos 0{,}5t \cdot \sin^3 0{,}5t}{\sin t - 2\sin 2t + \sin 3t}$, калі $\cos t = \frac{1}{16}$.	
13. Спрасціце выраз $\left(\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}\right)^4$ і знайдзіце яго значэнне пры $\alpha = \frac{\pi}{18}$.	
14. Знайдзіце значэнне выразу $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.	
15. Вядома, што $\sqrt{13} - 13\sin\frac{2\alpha}{3} + 12\sqrt{13}\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0$. Знайдзіце значэнне выразу $\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)^2$.	

Тэст 7. Трыганаметрычныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $\cos\left(2x - \frac{\pi}{18}\right) = 0$.	а) 40°; б) 90°; в) 100°; г) 10°; д) 50°.
2. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $4\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$.	а) –120°; б) –150°; в) –135°; г) –60°; д) –90°.
3. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $2\operatorname{tg} x + 1 = -3\operatorname{ctg}(-x)$ на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
4. Знайдзіце найменшы дадатны корань ураўнення $\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = 0$.	а) $\frac{\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$.
5. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $3\sin^2(5\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x)\cdot\cos(x - 7\pi) = 2$ на прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.	а) 9; б) 5; в) 7; г) 6; д) 8.
6. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x\sin^2 x = -0{,}5\sqrt{2}$.	а) 45°; б) 78,75°; в) 33,75°; г) 56,25°; д) 11,25°.

Працяг

7. Знайдзіце (у градусах) суму найбольшага адмоўнага і найменшага дадатнага каранёў ураўнення $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.	а) $-15°$; б) $30°$; в) $15°$; г) $45°$; д) $35°$.
8. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$ на прамежку $[0;\ 2\pi]$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
9. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 3\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x + 4 = 0$.	а) $150°$; б) $120°$; в) $60°$; г) $45°$; д) $135°$.
10. Знайдзіце (у градусах) суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$, якія належаць інтэрвалу $[-215°;\ -180°]$.	
11. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 2\sqrt{2}$.	
12. Знайдзіце (у градусах) суму каранёў ураўнення $(3\cos x + \cos 2x + 2)\sqrt{\mathrm{ctg}x} = 0$ на прамежку $[0;\ 2\pi]$.	
13. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ на прамежку $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.	
14. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{ctg}x = -\sqrt{3}$.	
15. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.	

Адказы да тэматычных тэстаў

Тэст 1

1. б). **2.** а). **3.** д). **4.** г). **5.** г). **6.** а). **7.** в). **8.** в). **9.** д). **10.** 2. **11.** –9. **12.** 5. **13.** –1. **14.** 0. **15.** 2.

Тэст 2

1. г). **2.** б). **3.** б). **4.** б). **5.** в). **6.** а). **7.** д). **8.** г). **9.** в). **10.** –8. **11.** 1. **12.** –24. **13.** 9. **14.** 45. **15.** 7.

Тэст 3

1. г). **2.** г). **3.** г). **4.** а). **5.** г). **6.** б). **7.** д). **8.** б). **9.** а). **10.** 6. **11.** 4. **12.** 4. **13.** –1. **14.** –22. **15.** 1.

Тэст 4

1. б). **2.** д). **3.** в). **4.** г). **5.** в). **6.** г). **7.** а). **8.** б). **9.** г). **10.** 28. **11.** 13. **12.** –2. **13.** 54. **14.** –4. **15.** –3.

Тэст 5

1. в). **2.** а). **3.** г). **4.** б). **5.** д). **6.** г). **7.** г). **8.** в). **9.** б). **10.** 2. **11.** 4. **12.** 241. **13.** 11. **14.** 0. **15.** 19.

Тэст 6

1. д). **2.** в). **3.** г). **4.** д). **5.** а). **6.** д). **7.** а). **8.** д). **9.** в). **10.** –18. **11.** 4. **12.** –1. **13.** 9. **14.** 4. **15.** 52.

Тэст 7

1. д). **2.** г). **3.** в). **4.** д). **5.** г). **6.** в). **7.** а). **8.** г). **9.** д). **10.** –210. **11.** –195. **12.** 600°. **13.** 8. **14.** 90°. **15.** –315°.

Рэкамендацыі па выкананні тэматычных тэстаў

Тэст 1

1. Няхай $\frac{x+3}{x-3}=t$, тады ўраўненне $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$ прымае выгляд $t+\frac{1}{t}=3\frac{1}{3}$, г. зн. $t+\frac{1}{t}=3+\frac{1}{3}$, значыць, $\left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} \frac{x+3}{x-3}=3, \\ \frac{x+3}{x-3}=\frac{1}{3}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+3=3(x-3), \\ 3(x+3)=x-3, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+3=3x-9, \\ 3x+9=x-3, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Здабытак каранёў ураўнення роўны -36.

2. Паколькі $\left(x^2+5x+6\right)^2\geqslant 0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$ і $\left(x^2+6x+9\right)^2\geqslant 0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$, то роўнасць $\left(x^2+5x+6\right)^2+\left(x^2+6x+9\right)^2=0$ магчыма, толькі калі абодва складаемыя адначасова роўны нулю, г. зн. $\left\{\begin{array}{l} x^2+5x+6=0, \\ x^2+6x+9=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x=-3; \end{array}\right.$ $x=-3.$

3. Няхай $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=t$, тады ўраўненне $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$ прымае выгляд $t+\frac{1}{t}=\frac{17}{4}$; $t+\frac{1}{t}=4\frac{1}{4}$; $t+\frac{1}{t}=4+\frac{1}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2=4, \\ \left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{1}{4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+1}=2, \\ \frac{x}{x+1}=-2, \\ \frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}, \\ \frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2(x+1), \\ x=-2(x+1), \\ 2x=x+1, \\ -2x=x+1, \end{array}\right. \\ x\neq -1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-\frac{2}{3}, \\ x=1, \\ x=-\frac{1}{3}, \end{array}\right. \\ x\neq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-\frac{2}{3}, \\ x=1, \\ x=-\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Сума каранёў ураўнення роўна -2.

4. Запішам ураўненне $\left(x^2-6x+8\right)^2-9x^2-6x=1$ у выглядзе $\left(x^2-6x+8\right)^2-9x^2-6x-1=0$; $\left(x^2-6x+8\right)^2-\left(9x^2+6x+1\right)=0$; $\left(x^2-6x+8\right)^2-(3x+1)^2=0$.

Па формуле рознасці квадратаў атрымаем

$\left(\left(x^2-6x+8\right)-(3x+1)\right)\left(\left(x^2-6x+8\right)+(3x+1)\right)=0;$

$\left(x^2-6x+8-3x-1\right)\left(x^2-6x+8+3x+1\right)=0;\quad \left(x^2-9x+7\right)\left(x^2-3x+9\right)=0;$

$\left[\begin{array}{l} x^2-9x+7=0, \\ x^2-3x+9=0. \end{array}\right.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў $(D<0)$. Выкарыстаем тэарэму Віета і атрымаем, што сума каранёў першага ўраўнення сукупнасці роўна 9.

5. Няхай $x^2-x=t$, тады ўраўненне $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$ прымае выгляд $\frac{t}{t+1}-\frac{t+2}{t-2}=1;\ \frac{t(t-2)-(t+2)(t+1)-(t+1)(t-2)}{(t+1)(t-2)}=0;$

$\frac{t^2-2t-\left(t^2+3t+2\right)-\left(t^2-t-2\right)}{(t+1)(t-2)}=0;\quad \frac{t^2-2t-t^2-3t-2-t^2+t+2}{(t+1)(t-2)}=0;\quad \frac{-t^2-4t}{(t+1)(t-2)}=0;$

$\left\{\begin{array}{l} t(t+4)=0, \\ t\neq-1;\ 2; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-4. \end{array}\right.$ Тады $\left[\begin{array}{l} x^2-x=0, \\ x^2-x=-4; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x(x-1)=0, \\ x^2-x+4=0. \end{array}\right.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў $(D<0)$. Каранямі першага ўраўнення з'яўляюцца лікі 0 і 1. Іх сярэдняе арыфметычнае роўна 0,5.

6. Запішам ураўненне $x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)=24$ у выглядзе

$x^2\left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)=24;\ \left(x^4-3x^2\right)\left(x^4-3x^2+2\right)=24.$

Няхай $x^4-3x^2=t$, тады $t(t+2)=24;\ t^2+2t-24=0;\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=4. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} x^4-3x^2=-6, \\ x^4-3x^2=4; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x^4-3x^2+6=0, \\ x^4-3x^2-4=0. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў $(D<0)$. Рэшым другое ўраўненне: $x^4-3x^2-4=0;\ \left[\begin{array}{l} x^2=4, \\ x^2=-1; \end{array}\right.\ x^2=4;\ x=2$ або $x=-2.$

Здабытак каранёў ураўнення роўны -4.

7. Запішам ураўненне $x^2+5x+6=\frac{3}{x^2+x}$ у выглядзе $(x+2)(x+3)=\frac{3}{x(x+1)}.$

Тады пры $x\neq-1;\ 0$ атрымаем $x(x+1)(x+2)(x+3)=3;$

$x(x+3)(x+1)(x+2)=3;\ \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=3.$

Няхай $x^2+3x=t$, тады $t(t+2)=3$; $t^2+2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=1. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} x^2+3x=-3, \\ x^2+3x=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+3x+3=0, \\ x^2+3x-1=0. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў ($D<0$). Сума каранёў другога ўраўнення роўна -3.

8. Паколькі $x=0$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення, то запішам ураўненне $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ у выглядзе

$$\frac{4x}{x\left(4x-8+\frac{7}{x}\right)}+\frac{3x}{x\left(4x-10+\frac{7}{x}\right)}=1;\quad \frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Няхай $4x-8+\frac{7}{x}=t$, тады $\frac{4}{t}+\frac{3}{t-2}=1$; $\frac{4(t-2)+3t-t(t-2)}{t(t-2)}=0$;

$$\frac{4t-8+3t-t^2+2t}{t(t-2)}=0;\quad \frac{-t^2+9t-8}{t(t-2)}=0;\quad \left\{\begin{array}{l} t^2-9t+8=0, \\ t\neq 0, \\ t\neq 2; \end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=8, \end{array}\right. \\ t\neq 0, \\ t\neq 2; \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=8. \end{array}\right.$$

Тады $\left[\begin{array}{l} 4x-8+\frac{7}{x}=1, \\ 4x-8+\frac{7}{x}=8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4x-9+\frac{7}{x}=0, \\ 4x-16+\frac{7}{x}=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{4x^2-9x+7}{x}=0, \\ \frac{4x^2-16x+7}{x}=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4x^2-9x+7=0, \\ 4x^2-16x+7=0, \end{array}\right. \\ x\neq 0. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў ($D<0$). Сума каранёў другога ўраўнення роўна $\frac{16}{4}=4$.

9. Запішам ураўненне $x^2-5x+\frac{35}{x}+\frac{49}{x^2}=14$ у выглядзе

$$\left(x^2+\frac{49}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{7}{x}\right)=14.$$

Няхай $x-\frac{7}{x}=t$, тады $\left(x-\frac{7}{x}\right)^2=t^2$; $x^2-2\cdot x\cdot\frac{7}{x}+\frac{49}{x^2}=t^2$;

$$x^2-14+\frac{49}{x^2}=t^2;\quad x^2+\frac{49}{x^2}=t^2+14.$$

Такім чынам, ураўненне $\left(x^2+\frac{49}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{7}{x}\right)=14$ прымае выгляд

$$(t^2+14)-5t=14;\quad t^2-5t=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=5. \end{array}\right.$$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{7}{x} = 0, \\ x - \dfrac{7}{x} = 5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2 - 7 = 0, \\ x^2 - 5x - 7 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці мае два карані, сума якіх роўна нулю. Другое ўраўненне сукупнасці таксама мае два карані. Сума каранёў другога ўраўнення роўна 5.

Знойдзем значэнне шуканага выразу $n \cdot S = 4 \cdot 5 = 20$.

10. Запішам ураўненне $\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^2 + 14 \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2-25} - 15\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^2 = 0$ у выглядзе $\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^2 + 14 \cdot \dfrac{x-1}{x+5} \cdot \dfrac{x+1}{x-5} - 15\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^2 = 0$ і выканаем замену: $a = \dfrac{x-1}{x+5}$, $b = \dfrac{x+1}{x-5}$, тады $a^2 + 14ab - 15b^2 = 0$. Разгледзім атрыманае ўраўненне як квадратнае адносна a і атрымаем $\left[\begin{array}{l} a = -15b, \\ a = b. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x+5} = -15 \cdot \dfrac{x+1}{x-5}, \\ \dfrac{x-1}{x+5} = \dfrac{x+1}{x-5}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-5) = -15(x+1)(x+5), \\ (x-1)(x-5) = (x+1)(x+5), \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4x^2 + 21x + 20 = 0, \\ x = 0, \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = -1\frac{1}{4}, \\ x = 0, \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = -1\frac{1}{4}, \\ x = 0. \end{array}\right.$

Ураўненне мае два цэлыя карані.

11. Запішам ураўненне $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$ у выглядзе $(x^2 + x - 20)(x^2 + 8x - 20) = 18x^2$. Паколькі $x = 0$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на x^2 і атрымаем:

$\dfrac{(x^2 + x - 20)(x^2 + 8x - 20)}{x^2} = 18$; $\left(\dfrac{x^2 + x - 20}{x}\right)\left(\dfrac{x^2 + 8x - 20}{x}\right) = 18$;

$\left(x + 1 - \dfrac{20}{x}\right)\left(x + 8 - \dfrac{20}{x}\right) = 18.$

Няхай $x - \frac{20}{x} = t$, тады $(t+1)(t+8) = 18$; $t^2 + 9t - 10 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -10, \\ t = 1. \end{array}\right.$

Такім чынам, $\left[\begin{array}{l} x - \frac{20}{x} = -10, \\ x - \frac{20}{x} = 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2 + 10x - 20 = 0, \\ x^2 - x - 20 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{array}\right.$

Абодва ўраўненні сукупнасці маюць карані, прычым сума каранёў першага ўраўнення роўна –10, а сума каранёў другога ўраўнення роўна 1. Тады сума каранёў зыходнага ўраўнення роўна –9.

12. Раскладзём на множнікі квадратныя трохчлены $x^2 + 4x + 3$ і $x^2 - 2x - 15$ і атрымаем $(x+1)^2(x+3)^2 + (x-5)^2(x+3)^2 - 36(x+3)^2 = 0$;

$(x+3)^2\left((x+1)^2 + (x-5)^2 - 36\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l} (x+3)^2 = 0, \\ (x+1)^2 + (x-5)^2 - 36 = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x^2 - 4x - 5 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 5, \\ x = -1. \end{array}\right.$ Найбольшы корань ураўнення роўны 5.

13. Запішам ураўненне $2\left(x^2 - x + 1\right)^2 = x^2\left(8x^2 - 5x + 5\right)$ у выглядзе $2\left(x^2 - x + 1\right)^2 = x^2\left(3x^2 + 5x^2 - 5x + 5\right)$; $2\left(x^2 - x + 1\right)^2 = x^2\left(3x^2 + 5\left(x^2 - x + 1\right)\right)$ і выканаем замену: $a = x^2 - x + 1$, $b = x^2$, тады $2a^2 = b(3b + 5a)$; $2a^2 - 5ab - 3b^2 = 0$. Разгледзім атрыманае ўраўненне як квадратнае адносна a і атрымаем $\left[\begin{array}{l} a = 3b, \\ a = -\frac{b}{2}. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 3x^2, \\ x^2 - x + 1 = -\frac{x^2}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 1 = 0, \\ 3x^2 - 2x + 2 = 0. \end{array}\right.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў ($D < 0$). Сума каранёў першага ўраўнення роўна $-\frac{1}{2}$. Падвоеная сума каранёў ураўнення роўна –1.

14. У левай частцы ўраўнення $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{45}{16}$ вылучым квадрат сумы: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} - 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{45}{16}$;

$$\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16};\quad \left(\frac{x(x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16};$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16}.$$

Няхай $\frac{2x^2}{x^2-1}=t$, тады $t^2-t-\frac{45}{16}=0$. $D=1+4\cdot\frac{45}{16}=\frac{49}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t=-\frac{5}{4},\\ t=\frac{9}{4}.\end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \frac{2x^2}{x^2-1}=-\frac{5}{4},\\ \frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{9}{4};\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l}13x^2=5,\\ x^2=9,\end{array}\right.\\ x\ne 1,\\ x\ne -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{5}{13}},\\ x=-\sqrt{\frac{5}{13}},\\ x=3,\\ x=-3.\end{array}\right.$

Сума каранёў ураўнення роўна 0.

15. Заўважым, што сумы лічніка і назоўніка абодвух дробаў аднолькавыя, дададзім да абедзвюх частак зыходнага ўраўнення адзінку і атрымаем: $\frac{x^2+x-7}{x^2+5}+1=\frac{x-5}{2x^2+3}+1$; $\frac{x^2+x-7+x^2+5}{x^2+5}=\frac{x-5+2x^2+3}{2x^2+3}$;

$$\frac{2x^2+x-2}{x^2+5}=\frac{2x^2+x-2}{2x^2+3};\quad \frac{2x^2+x-2}{x^2+5}-\frac{2x^2+x-2}{2x^2+3}=0;$$

$$\left(2x^2+x-2\right)\left(\frac{1}{x^2+5}-\frac{1}{2x^2+3}\right)=0;\quad \left(2x^2+x-2\right)\cdot\frac{2x^2+3-\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+5\right)\left(2x^2+3\right)}=0;$$

$$\left(2x^2+x-2\right)\cdot\frac{x^2-2}{\left(x^2+5\right)\left(2x^2+3\right)}=0.$$

Паколькі $x^2+5>0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$ і $2x^2+3>0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$, то

$$\left(2x^2+x-2\right)\left(x^2-2\right)=0;\quad \left[\begin{array}{l}2x^2+x-2=0,\\ x^2-2=0.\end{array}\right.$$

Абодва ўраўненні сукупнасці маюць карані. Здабытак каранёў першага ўраўнення роўны –1, а другога — (–2). Здабытак каранёў зыходнага ўраўнення роўны 2.

Тэст 2

1. З прапанаваных ураўненняў не мае каранёў ураўненне $|x-6|+1=0$, якое можна запісаць у выглядзе $|x-6|=-1$, паколькі модуль не можа быць роўны адмоўнаму ліку.

2. Ураўненне выгляду $\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right|$ раўназначна сукупнасці ўраўненняў $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

Рэшым ураўненне $|x| = |2x - 5|$; $\left[\begin{array}{l} x = 2x - 5, \\ x = -2x + 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Сума каранёў ураўнення роўна $6\frac{2}{3}$.

3. $\left|\,|3x+1| + x + 1\right| = 2$; $\left[\begin{array}{l} |3x+1| + x + 1 = 2, \\ |3x+1| + x + 1 = -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |3x+1| = 1 - x, \\ |3x+1| = -x - 3; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x+1 = 1-x, \\ 3x+1 = -1+x, \end{array}\right. \\ 1 - x \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x+1 = -x-3, \\ 3x+1 = x+3, \end{array}\right. \\ -x - 3 \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \leqslant -3; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення роўна $-0{,}5$.

4. Для рашэння ўраўнення $x^2 + 2x = 8\frac{|x+4|}{4+x}$ выкарыстаем азначэнне модуля і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x + 4 > 0, \\ x^2 + 2x = 8, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x + 4 < 0, \\ x^2 + 2x = -8; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > -4, \\ x^2 + 2x - 8 = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -4, \\ x^2 + 2x + 8 = 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -4, \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad x = 2.$$

5. $\left|x^2 + 11x + 28\right| = \left|x^2 - 14\right|$; $\left[\begin{array}{l} x^2 + 11x + 28 = x^2 - 14, \\ x^2 + 11x + 28 = -x^2 + 14; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 11x = -42, \\ 2x^2 + 11x + 14 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -3\frac{9}{11}, \\ x = -2, \\ x = -3{,}5. \end{array}\right.$$

6. Ураўненне выгляду $\left|f(x)\right| = g(x)$ раўназначна сістэме $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0. \end{array}\right.$

Рэшым ураўненне $\left|x^2-2x-3\right|=x-3.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=x-3,\\x^2-2x-3=-x+3,\end{array}\right.\\x-3\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-3x=0,\\x^2-x-6=0,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x(x-3)=0,\\x=3,\\x=-2,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3,\\x=-2,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad x=3.$$

Ураўненне мае адзіны корань. Лік 3 належыць адрэзку [–3; 5].

7. Для рашэння ўраўнення $x^2-4|x+1|+5x+4=0$ выкарыстаем азначэнне модуля і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x^2-4(x+1)+5x+4=0,\end{cases}\\\begin{cases}x+1<0,\\x^2+4(x+1)+5x+4=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -1,\\x^2+x=0,\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\x^2+9x+8=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -1,\\\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=0,\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\\left[\begin{array}{l}x=-8,\\x=-1;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=0,\\x=-8.\end{array}\right.$$

Сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення роўна $\dfrac{-1+0-8}{3}=-3.$

8. Запішам ураўненне $\left|x^2+x-2\right|+x^2+x-2=0$ у выглядзе $\left|x^2+x-2\right|=-\left(x^2+x-2\right).$

Ураўненне выгляду $\left|f(x)\right|=-f(x)$ раўназначна няроўнасці $f(x)\leqslant 0.$

Рэшым няроўнасць $x^2+x-2\leqslant 0;$ $x\in\left[-2;\,1\right].$

9. Паколькі $x^2=|x|^2$, то запішам ураўненне $\dfrac{x^2+5|x|+6}{x^2-9}=2$ у выглядзе $\dfrac{|x|^2+5|x|+6}{|x|^2-9}=2$ і выканаем замену $|x|=t$.

Тады $\dfrac{t^2+5t+6}{t^2-9}=2;$ $\dfrac{(t+2)(t+3)}{(t-3)(t+3)}=2;$ $\begin{cases}\dfrac{t+2}{t-3}=2,\\t\neq -3;\end{cases}$ $\begin{cases}t+2=2(t-3),\\t\neq -3,\\t\neq 3;\end{cases}$

$$\begin{cases}t=8,\\t\neq -3,\\t\neq 3;\end{cases}\quad t=8.$$

Адкуль $|x|=8;$ $x=8$ або $x=-8$, здабытак каранёў дадзенага ўраўнення роўны –64.

10. Для рашэння дадзенага ўраўнення выкарыстаем метад прамежкаў. Раскрыем модулі на кожным з прамежкаў $(-\infty;\ -3]$; $\left(-3;\ \frac{1}{2}\right)$ і $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant -3,\\ -(x+3)-(2x-1)=8,\end{cases}\\ \begin{cases}-3 < x < \frac{1}{2},\\ x+3-(2x-1)=8,\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant \frac{1}{2},\\ x+3+2x-1=8;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant -3,\\ x=-3\frac{1}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}-3 < x < \frac{1}{2},\\ x=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant \frac{1}{2},\\ x=2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=-3\frac{1}{3},\\ x=2.\end{array}\right.$$

Тады $6 \cdot S = 6 \cdot \left(-3\frac{1}{3}+2\right) = -8$.

11. Паколькі $\left|x^2-5x+6\right| > 0$, а $|x-1{,}5| \geqslant 0$ пры дапушчальных значэннях зменнай, то ўраўненне $\frac{1}{\left|x^2-5x+6\right|} = \frac{|x-1{,}5|}{x^2-5x+6}$ мае карані, калі $x^2-5x+6>0$, г. зн. $x \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

У гэтым выпадку атрымаем $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{|x-1{,}5|}{x^2-5x+6}$, г. зн. $|x-1{,}5| = 1$ пры $x \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$. Значыць, $\left[\begin{array}{l}x-1{,}5=1,\\ x-1{,}5=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2{,}5,\\ x=0{,}5.\end{array}\right.$

З улікам умовы $x \in (-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$ атрымаем, што зыходнае ўраўненне мае адзіны корань $x = 0{,}5$.

12. Запішам ураўненне $4|5x+8| - 25x^2 = 80x+64$ у выглядзе $4|5x+8| = 25x^2+80x+64$ і атрымаем $4|5x+8| = (5x+8)^2$, або $4|5x+8| = |5x+8|^2$. Няхай $|5x+8| = t$, тады $4t = t^2$; $t^2-4t=0$; $\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=4.\end{array}\right.$

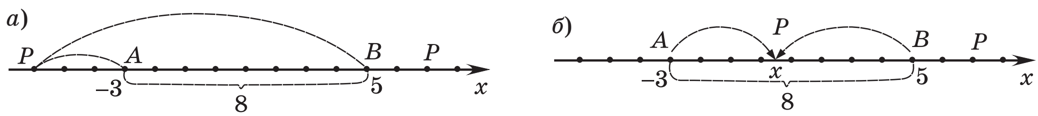
Значыць, $\left[\begin{array}{l}|5x+8|=0,\\ |5x+8|=4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5x+8=0,\\ 5x+8=4,\\ 5x+8=-4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-1{,}6,\\ x=-0{,}8,\\ x=-2{,}4.\end{array}\right.$

$5 \cdot S = 5 \cdot (-1{,}6-0{,}8-2{,}4) = -24$.

13. Функцыя $y = \dfrac{5-x}{|x+3|+|x-5|-8}$ не вызначана пры $|x+3|+|x-5|-8=0;$ $|x+3|+|x-5|=8.$

Рэшым атрыманае ўраўненне, выкарыстаўшы геаметрычны сэнс модуля. Разгледзім пункты $P(x)$, $A(-3)$ і $B(5)$, тады $PA=|x+3|$, а $PB=|x-5|$. Рашыць дадзенае ўраўненне — значыць знайсці ўсе пункты каардынатнай прамой, сума адлегласцей ад кожнай з якіх да пунктаў з каардынатамі –3 і 5 роўна 8, г. зн. $PA+PB=8$.

Адзначым на каардынатнай прамой пункты $A(-3)$ і $B(5)$ і заўважым, што даўжыня адрэзка AB роўна 8 (рыс. 40).



Рыс. 40

1) Калі пункт $P(x)$ размешчаны злева ад пункта $A(-3)$ (або справа ад пункта $B(5)$), то сума адлегласцей ад пункта $P(x)$ да пунктаў $A(-3)$ і $B(5)$ большая за 8, г. зн. $PA+PB>8$.

2) Калі пункт $P(x)$ належыць адрэзку AB, то $PA+PB=8$.

Такім чынам, каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца ўсе лікі, якія належаць адрэзку AB, г. зн. $x\in[-3;\,5]$.

Сума ўсіх цэлых лікаў, якія належаць адрэзку $[-3;\,5]$, роўна 9.

14. Паколькі $|a|=|-a|$, то запішам ураўненне ў выглядзе

$|x^2-5x+8|+|x-9|=x^2-6x+17.$

Разгледзім квадратны трохчлен x^2-5x+8. $D=25-40<0$, а першы каэфіцыент $a=1>0$, значыць, $x^2-5x+8>0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$. Тады $|x^2-5x+8|=x^2-5x+8$ пры $x\in\boldsymbol{R}$ і ўраўненне прымае выгляд $x^2-5x+8+|x-9|=x^2-6x+17;$ $|x-9|=-x+9.$ Атрыманае ўраўненне раўназначна няроўнасці $x-9\leqslant 0;$ $x\leqslant 9.$ Такім чынам, рашэннем зыходнага ўраўнення з'ўляецца прамежак $(-\infty;\,9]$. Сума натуральных каранёў ураўнення роўна 45.

15. Ураўненне $\dfrac{|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|-3}{\sqrt{25-x^2}}=0$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases}|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=3,\\25-x^2>0.\end{cases}$$

Рэшым ураўненне $\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=3$, выкарыстаўшы геаметрычны сэнс модуля, і атрымаем $-8 \leqslant x^2-6x \leqslant -5$, тады $\begin{cases} x^2-6x \leqslant -5, \\ x^2-6x \geqslant -8; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-6x+5 \leqslant 0, \\ x^2-6x+8 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [1;\ 5], \\ x \in (-\infty;\ 2] \cup [4;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in [1;\ 2] \cup [4;\ 5].$$

З улікам умовы $25-x^2>0$; $x^2<25$; $x \in (-5;\ 5)$ атрымаем $x \in [1;\ 2] \cup [4;\ 5)$.

Сума цэлых каранёў ураўнення роўна $1+2+4=7$.

Тэст 3

1. Мноствам рашэнняў няроўнасці $|x| \geqslant -1$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў $(x \in \boldsymbol{R})$.

З прапанаваных няроўнасцей правільнай для любых значэнняў зменнай з'яўляецца няроўнасць $|x| \geqslant 0$.

2. $|3-x| \leqslant 3$; $|x-3| \leqslant 3$; $-3 \leqslant x-3 \leqslant 3$; $0 \leqslant x \leqslant 6$; $x \in [0;\ 6]$.

3. Няроўнасць $\sqrt[5]{y^5} \geqslant \sqrt[4]{y^4}$ раўназначна няроўнасці $y \geqslant |y|$, якая выконваецца для $y \in [0;\ +\infty)$.

4. Для рашэння няроўнасці $|3x-2|x<1$ выкарыстаем азначэнне модуля і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-2 \geqslant 0, \\ (3x-2)x<1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-2<0, \\ -(3x-2)x<1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3}, \\ 3x^2-2x-1<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ -3x^2+2x-1<0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3}, \\ 3x^2-2x-1<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ 3x^2-2x+1>0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3}, \\ x \in \left(-\frac{1}{3};\ 1\right), \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ x \in \boldsymbol{R}; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left[\frac{2}{3};\ 1\right), \\ x \in \left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right); \end{array}\right. \quad x \in (-\infty;\ 1).$$

5. Няроўнасць $\left|x^2-2x-7\right| \leqslant 4$ раўназначна сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} x^2-2x-7 \leqslant 4, \\ x^2-2x-7 \geqslant -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-11 \leqslant 0, \\ x^2-2x-3 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left[1-2\sqrt{3};\ 1+2\sqrt{3}\right], \\ x \in (-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty); \end{cases}$$

$x \in \left[1 - 2\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[3;\ 1 + 2\sqrt{3}\right]$. Знойдзем здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці: $-2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

6. Запішам няроўнасць $\left|9 - x^2\right| + 8x < 0$ у выглядзе $\left|x^2 - 9\right| < -8x$. Атрыманая няроўнасць раўназначна сістэме няроўнасцей

$$\begin{cases} x^2 - 9 < -8x, \\ x^2 - 9 > 8x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 8x - 9 < 0, \\ x^2 - 8x - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-9;\ 1), \\ x \in (-\infty;\ -1) \cup (9;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in (-9;\ -1).$$

Сума цэлых рашэнняў няроўнасці роўна -35.

7. Запішам зыходную няроўнасць у выглядзе $\left|x^2 + 3x - 9\right| < \left|x^2 - 3x - 9\right|$ і пяройдзем да раўназначнай няроўнасці $\left(x^2 + 3x - 9\right)^2 < \left(x^2 - 3x - 9\right)^2$;
$\left(x^2 + 3x - 9\right)^2 - \left(x^2 - 3x - 9\right)^2 < 0$;
$\left(\left(x^2 + 3x - 9\right) - \left(x^2 - 3x - 9\right)\right)\left(\left(x^2 + 3x - 9\right) + \left(x^2 - 3x - 9\right)\right) < 0$;
$\left(x^2 + 3x - 9 - x^2 + 3x + 9\right)\left(x^2 + 3x - 9 + x^2 - 3x - 9\right) < 0$; $6x\left(2x^2 - 18\right) < 0$;
$x(x - 3)(x + 3) < 0$; $x \in (-\infty;\ -3) \cup (0;\ 3)$.

Сума найбольшага цэлага адмоўнага і найбольшага цэлага дадатнага рашэнняў няроўнасці роўна $-4 + 2 = -2$.

8. Няроўнасць выгляду $\left|f(x)\right| > f(x)$ раўназначна няроўнасці $f(x) < 0$. Такім чынам, няроўнасць $\left|x - 2x^2\right| > 2x^2 - x$ запішам у выглядзе $\left|2x^2 - x\right| > 2x^2 - x$ і пяройдзем да рашэння раўназначнай няроўнасці $2x^2 - x < 0$; $x(2x - 1) < 0$; $x \in (0;\ 0{,}5)$.

9. Пераўтворым выраз $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2$.

Тады няроўнасць прыме выгляд $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt{5} - 4 \geqslant \sqrt{5} - 2$;

$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \geqslant 2$; $\sqrt{(3x - 1)^2} \geqslant 2$; $\left|3x - 1\right| \geqslant 2$.

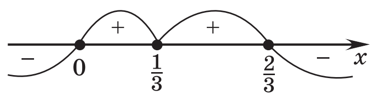
Няроўнасць выгляду $\left|f(x)\right| \geqslant g(x)$ раўназначна сукупнасці няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right.$ Тады $\left[\begin{array}{l} 3x - 1 \geqslant 2, \\ 3x - 1 \leqslant -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -\frac{1}{3}; \end{array}\right.$ $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$.

10. Паколькі $a^2 = |a|^2$, то запішам няроўнасць $|3x-1| \geqslant (3x-1)^2$ у выглядзе $|3x-1| \geqslant |3x-1|^2$; $|3x-1| - |3x-1|^2 \geqslant 0$; $|3x-1|\left(1-|3x-1|\right) \geqslant 0$.

Знойдзем нулі выразу $|3x-1|\left(1-|3x-1|\right)$.

$$|3x-1|\left(1-|3x-1|\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} |3x-1| = 0, \\ |3x-1| = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x-1 = 0, \\ 3x-1 = 1, \\ 3x-1 = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{3}, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Выкарыстаем метад інтэрвалаў:



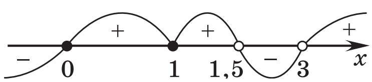
$x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Значэнне шуканага выразу роўна $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$.

11. $\frac{|x-1|}{3-x} \geqslant \frac{|x-1|}{3-2x}$; $\frac{|x-1|}{3-x} - \frac{|x-1|}{3-2x} \geqslant 0$; $|x-1| \cdot \left(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-2x}\right) \geqslant 0$;

$|x-1| \cdot \frac{3-2x-3+x}{(3-x)(3-2x)} \geqslant 0$; $|x-1| \cdot \frac{-x}{(3-x)(3-2x)} \geqslant 0$; $|x-1| \cdot \frac{x}{(x-3)(2x-3)} \leqslant 0$.

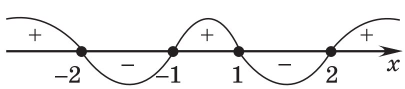
Выкарыстаем метад інтэрвалаў:



$x \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (1{,}5; 3)$.

На адрэзку [–1; 3] няроўнасць мае чатыры цэлыя рашэнні.

12. Паколькі $x^2+1>0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то няроўнасць $\frac{2x^2-3|x|+3}{x^2+1} \leqslant 1$ раўназначна няроўнасці $2x^2-3|x|+3 \leqslant x^2+1$; $x^2-3|x|+2 \leqslant 0$; $|x|^2-3|x|+2 \leqslant 0$; $\left(|x|-1\right)\left(|x|-2\right) \leqslant 0$. Выкарыстаем метад інтэрвалаў:

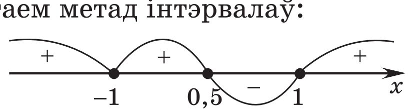


$x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$.

Здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці роўны 4.

13. $\left(|x|-1\right)\left(2x^2+x-1\right) \leqslant 0$; $\left(|x|-1\right)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$.

Выкарыстаем метад інтэрвалаў:



$x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Найменшае цэлае рашэнне няроўнасці роўна –1.

14. Няроўнасць $\frac{x^2+4x-21}{\left|x^2-4\right|} \leqslant 0$ раўназначна сістэме $\begin{cases} x^2+4x-21 \leqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$

$x \in [-7; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 3]$.

Сума цэлых рашэнняў няроўнасці роўна –22.

15. $|3x+1| + 2 + \frac{3}{|3x+1|-2} \leqslant \frac{1}{|3x+1|+2}$.

Няхай $|3x+1| = t$, $t \geqslant 0$, тады няроўнасць прымае выгляд

$t+2+\frac{3}{t-2} \leqslant \frac{1}{t+2}$; $\quad t+2+\frac{3}{t-2} - \frac{1}{t+2} \leqslant 0$; $\quad t+2+\frac{3(t+2)-(t-2)}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$;

$\frac{(t-2)(t+2)^2+3t+6-t+2}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$; $\quad \frac{t^3+4t^2+4t-2t^2-8t-8+3t+6-t+2}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$;

$\frac{t^3+2t^2-2t}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$; $\quad \frac{t\left(t-\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\left(t-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$. Паколькі $t \geqslant 0$, то атрыманая няроўнасць раўназначна няроўнасці $\frac{t\left(t-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)}{t-2} \leqslant 0$, г. зн. $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant t < 2. \end{array}\right.$

Тады $\left[\begin{array}{l} |3x+1| = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant |3x+1| < 2; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} 3x+1 = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant 3x+1 < 2, \\ -2 < 3x+1 \leqslant 1-\sqrt{3}; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}, \\ \sqrt{3}-2 \leqslant 3x < 1, \\ -3 < 3x \leqslant -\sqrt{3}; \end{array}\right.$

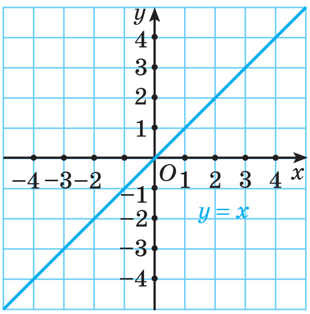
$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}, \\ \frac{\sqrt{3}-2}{3} \leqslant x < \frac{1}{3}, \\ -1 < x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}; \end{array}\right.$ $\quad x \in \left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

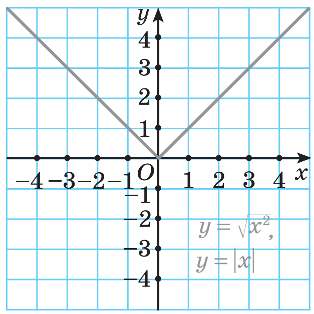
Няроўнасць мае адно цэлае рашэнне.

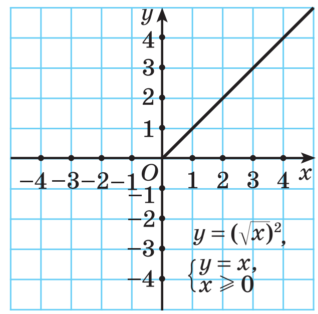
Тэст 4

1. Графік функцыі $y = \frac{k}{x-2} + 3$ атрыманы з графіка функцыі $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ зрухам яго на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 3 адзінкі ўверх уздоўж восі ардынат.

2. Пабудуем графікі функцый $y = x$, $y = \sqrt{x^2}$ і $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.







Графікі ўсіх функцый розныя.

3. Складзём ураўненне прамой $y = kx + b$, якая праходзіць праз пункты (2; 0) і (1; 2). Рэшым сістэму ўраўненняў: $\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ 2 = k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} k = -2, \\ 2 = k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} k = -2, \\ b = 4. \end{cases}$ Шуканая прамая мае выгляд $y = -2x + 4$.

Прамая $y = -2x + 4$ праходзіць праз пункт з каардынатамі (–19; 42), паколькі $42 = -2 \cdot (-19) + 4$ — правільная лікавая роўнасць.

4. Няправільным з'яўляецца сцверджанне 4), паколькі на прамежку (–1; 5) функцыя і нарастае, і спадае.

5. Калі функцыя мае ўласцівасць цотнасці або няцотнасці, то яе абсяг вызначэння павінен быць сіметрычны адносна нуля. З прапанаваных варыянтаў адказаў несіметрычным адносна пачатку каардынат з'яўляецца адрэзак [–1; 3]. Такім чынам, абсягам вызначэння няцотнай функцыі не можа быць прамежак 3).

6. Абсяг вызначэння функцыі $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$ супадае з мноствам рашэнняў няроўнасці

$-x^2 - 6x - 5 > 0$; $x^2 + 6x + 5 < 0$; $(x + 5)(x + 1) < 0$; $x \in (-5; -1)$.

7. 1) $y = -7x^3$; $y(-x) = -7(-x)^3 = 7x^3 = -y(x)$ — функцыя няцотная;

2) $y = \dfrac{|x|}{x}$; $y(-x) = \dfrac{|-x|}{-x} = -\dfrac{|x|}{x} = -y(x)$ — функцыя няцотная;

3) $y = -\sqrt{2x}$; $D(y) = [0; +\infty)$ — абсяг вызначэння функцыі не сіметрычны адносна пачатку каардынат, значыць, функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай;

4) $y = |x - 5| + |x + 5|$; $y(-x) = |-x - 5| + |-x + 5| = |x + 5| + |x - 5| = y(x)$ — функцыя цотная;

5) $y = -6|x| - 8$; $y(-x) = -6|-x| - 8 = -6|x| - 8 = y(x)$ — функцыя цотная.

Такім чынам, няцотнымі з’яўляюцца функцыі 1) і 2).

8. Цэнтрам акружнасці $x^2 + y^2 = 1$ з’яўляецца пункт $A(0;\ 0)$, а цэнтрам акружнасці $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$ — пункт $B(3;\ -4)$.

Па формуле адлегласці паміж двума пунктамі

$\left(AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)$ знойдзем $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0+4)^2} = 5$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$; $y = \dfrac{(x+6)(x-1)}{x-1}$; $\begin{cases} y = x + 6, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Паколькі $x \neq 1$, то $y \neq 1 + 6$; $y \neq 7$. Такім чынам, $E = (-\infty;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$.

10. Знойдзем нулі функцый $y = \sqrt{x-1} - 5$ і $y = x^3 + 8$.

1) $\sqrt{x-1} - 5 = 0$; $\sqrt{x-1} = 5$; $x - 1 = 25$; $x = 26$.

2) $x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

Адлегласць паміж нулямі дадзеных функцый роўна $|26 - (-2)| = 28$.

11. Высветлім, пры якіх значэннях аргумента значэнні функцыі $y = |2x - 8| - |x + 6|$ адмоўныя. Для гэтага рэшым няроўнасць

$|2x - 8| - |x + 6| < 0$; $|2x - 8| < |x + 6|$; $(2x - 8)^2 < (x + 6)^2$;

$(2x - 8)^2 - (x + 6)^2 < 0$; $(2x - 8 - x - 6)(2x - 8 + x + 6) < 0$; $(x - 14)(3x - 2) < 0$; $x \in \left(\dfrac{2}{3};\ 14\right)$. Няроўнасць мае 13 цэлых рашэнняў.

12. У пункце $C(x_3;\ y_3)$ графік функцыі $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$ перасякае вось ардынат, значыць, $x_3 = 0$, тады $y_3 = -1$.

Абсцысы пунктаў $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ з’яўляюцца нулямі функцыі $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Знойдзем нулі дадзенай функцыі: $-9x^4 + 10x^2 - 1 = 0$; $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Няхай $x^2 = t$, тады $9t^2 - 10t + 1 = 0$.

$D = 100 - 4 \cdot 9 = 64$; $t_1 = \dfrac{10 - 8}{18} = \dfrac{1}{9}$; $t_2 = \dfrac{10 + 8}{18} = 1$.

Адкуль $x^2 = \dfrac{1}{9}$ або $x^2 = 1$, тады $x = \dfrac{1}{3}$, $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 1$, $x = -1$.

Такім чынам пункты A і B маюць каардынаты $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$. Знойдзем значэнне выразу $x_1 \cdot x_2 + y_3 = -1 \cdot 1 + (-1) = -2$.

13. Знойдзем абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

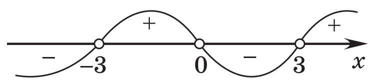
$$\begin{cases} x^2 - x + 5 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

Дыскрымінант квадратнага трохчлена $x^2 - x + 5$ меншы за нуль, значыць, няроўнасць $x^2 - x + 5 \geqslant 0$ правільная для $x \in \boldsymbol{R}$. Такім чынам, рашэннем сістэмы няроўнасцей будзе рашэнне няроўнасці $x^2 - 1 > 0$; $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Прамежку [–11; 45] належаць 54 целыя лікі з абсягу вызначэння дадзенай функцыі.

14. Прамая $y = x$ з'яўляецца бісектрысай I і III каардынатных вуглоў. Значэнні зменнай, для якіх графік функцыі $y = \frac{9}{x}$ размешчаны вышэй графіка функцыі $y = x$, задавальняюць няроўнасць $\frac{9}{x} > x$; $\frac{9 - x^2}{x} > 0$;

$\frac{(x-3)(x+3)}{x} < 0$;



$x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

Найбольшым цэлым адмоўным значэннем зменнай, якое задавальняе няроўнасць $\frac{9}{x} > x$, з'яўляецца лік –4.

15. Паколькі функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў і з'яўляецца цотнай, то прамая $y = -3$ перасякае графік дадзенай функцыі ў пунктах, абсцысы якіх сіметрычны адносна пачатку каардынат. Паколькі ўраўненне $f(x) = -3$ мае роўна сем розных каранёў (г. зн. колькасць пунктаў перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ і прамой $y = -3$ — няцотная), то графік функцыі $y = f(x)$ і прамая $y = -3$ маюць агульны пункт, які належыць восі ардынат. Тады $f(0) = -3$.

Тэст 5

1. Воссю сіметрыі парабалы з'яўляецца прамая $x = x_{\text{в}}$.
Знойдзем абсцысу вяршыні кожнай парабалы:

1) $y = 3(x - 6)^2 - 8$; $x_{\text{в}} = 6$;

2) $y = x^2 - 6x + 2$; $x_{\text{в}} = \frac{6}{2} = 3$;

3) $y = x^2 + 12x - 1$; $x_{\text{в}} = \frac{-12}{2} = -6$;

4) $y = -2(x - 4)^2 - 6$; $x_{\text{в}} = 4$;

5) $y = 2x^2 - 24x + 7$; $x_{\text{в}} = \frac{24}{4} = 6$.

Такім чынам, прамая $x = -6$ з’яўляецца воссю сіметрыі парабалы $y = x^2 + 12x - 1$.

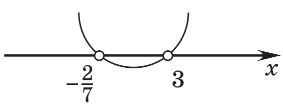
2. Паколькі вяршыняй парабалы з’яўляецца пункт з каардынатамі (0;–2), а галіны парабалы накіраваны ўверх, то парабала мае выгляд $y = ax^2 - 2$. З прапанаваных варыянтаў адказаў такі выгляд мае парабала $y = x^2 - 2$.

3. Няправільнае сцверджанне 4). Паколькі графік дадзенай функцыі перасякае вось ардынат у пункце з адмоўнай ардынатай, то $f(0) < 0$.

4. Няправільным з’яўляецца сцверджанне 2). Знойдзем каардынаты пункта перасячэння парабалы $y = -(x+4)^2 - 5$ і восі ардынат. Пры $x = 0$ атрымаем $y = -(0+4)^2 - 5 = -21$. Такім чынам, парабала $y = -(x+4)^2 - 5$ перасякае вось ардынат у пункце (0; –21).

5. Рэшым няроўнасць $(3 - x)(7x + 2) < 0$;

$(x - 3)(7x + 2) > 0$; $x_1 = -\frac{2}{7}$; $x_2 = 3$.



$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup (3; +\infty)$.

6. Паколькі галіны парабалы накіраваны ўверх, то $a > 0$.

Графік функцыі $y = ax^2 + bx + c$ перасякае вось ардынат у пункце з каардынатамі (0; c), г. зн. $c > 0$.

Абсцыса вяршыні парабалы дадатная, г. зн. $-\frac{b}{2a} > 0$, паколькі $a > 0$, то $b < 0$.

7. Квадратычная функцыя з’яўляецца цотнай, калі мае выгляд $y = ax^2 + c$, г. зн. другі каэфіцыент роўны нулю. Тады $a + 6 = 0$; $a = -6$.

8. Графік функцыі $y = -x^2 + x - 1$ размешчаны не вышэй восі абсцыс для ўсіх значэнняў аргумента, пры якіх $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$; $x^2 - x + 1 \geqslant 0$; $D < 0$; $x \in \boldsymbol{R}$.

9. Знойдзем найбольшае і найменшае значэнні квадратычнай функцыі $y = x^2 - 2x + 3$ на адрэзку $[-1; 2]$.

Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы $x_в = 1$. Паколькі абсцыса вяршыні парабалы належыць адрэзку $[-1; 2]$, то знойдзем значэнне функцыі ў вяршыні парабалы і на канцах дадзенага адрэзка.

Пры $x = -1$ $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6$.

Пры $x = 1$ $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$.

Пры $x = 2$ $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$.

Такім чынам, найбольшае значэнне дадзенай функцыі на адрэзку $[-1; 2]$ роўна 6, а найменшае значэнне роўна 2, г. зн. мноствам значэнняў функцыі з'яўляецца адрэзак $[2; 6]$.

10. Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы $x_в = \frac{a+2}{2a}$. Паколькі воссю сіметрыі парабалы з'яўляецца прамая $x = -0{,}5$, то $x_в = -0{,}5$, г. зн. $\frac{a+2}{2a} = -\frac{1}{2}$; $2a + 4 = -2a$; $4a = -4$; $a = -1$.

Пры $a = -1$ атрымаем $y = -x^2 - x + 2$ і ардыната вяршыні парабалы роўна $y_в = -(-0{,}5)^2 + 0{,}5 + 2 = 2{,}25$.

Паколькі галіны парабалы накіраваны ўніз, то $E = (-\infty; 2{,}25]$. Найбольшы цэлы лік з мноства значэнняў дадзенай функцыі роўны 2.

11. Знойдзем каардынаты пунктаў перасячэння графікаў дадзеных функцый: $x^2 + 2x = 6x - x^2$; $2x^2 - 4x = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Пры $x = 0$ атрымаем $y = 0$, а пры $x = 2$ атрымаем $y = 8$.

Такім чынам, прамая $y = kx + b$ праходзіць праз пункты з каардынатамі $(0; 0)$ і $(2; 8)$. Тады $b = 0$, а $k = \frac{8}{2} = 4$, г. зн. $k + b = 4$.

12. Функцыя $y = f(x)$, графік якой атрыманы з графіка функцыі $g(x) = 3x^2$ зрухам яго на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат, мае выгляд $f(x) = 3(x+4)^2 - 2$.

Тады $f(5) = 3(5+4)^2 - 2 = 3 \cdot 81 - 2 = 241$.

13. Абсцыса вяршыні парабалы $f(x) = ax^2 + bx + c$ з'яўляецца сярэдзінай адрэзка $[x_1; x_2]$, дзе x_1; x_2 — нулі функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Тады $x_в = \frac{-2 + 2\sqrt{3} + 24 - 2\sqrt{3}}{2} = 11$.

14. Няхай x — першы лік, тады $(40 + x)$ — другі лік. Іх здабытак роўны $x(x + 40)$. Разгледзім функцыю $f(x) = x(x + 40)$ і знойдзем, пры якім значэнні зменнай дадзеная функцыя прымае сваё найменшае значэнне.

Паколькі галіны парабалы $f(x) = x^2 + 40x$ накіраваны ўверх, то свайго найменшага значэння функцыя дасягае ў вяршыні, г. зн. $x = x_в = -20$. Тады першы лік роўны -20, а другі — 20, і іх сума роўна 0.

15. Запішам функцыю $f(x) = (x-1)(x-7)(x-4)(x+2) + 100$ у выглядзе

$f(x) = (x-1)(x-4)(x-7)(x+2) + 100;$

$f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x - 14) + 100;$

$f(x) = (x^2 - 5x + 4)((x^2 - 5x + 4) - 18) + 100;$
$f(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 18(x^2 - 5x + 4) + 100;$
$f(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 18(x^2 - 5x + 4) + 81 + 19;$
$f(x) = ((x^2 - 5x + 4) - 9)^2 + 19;$ $f(x) = (x^2 - 5x - 5)^2 + 19.$

Паколькі $(x^2 - 5x - 5)^2 + 19 \geqslant 19$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то найменшым значэннем дадзенай функцыі з'яўляецца лік 19.

Тэст 6

1. Паколькі $\cos\alpha \in [-1; 1]$, то з прапанаваных роўнасцей магчыма роўнасць $\cos\alpha = -7^0$; $\cos\alpha = -1$.

2. Вызначым знак кожнага выразу:

1) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, паколькі $\frac{18\pi}{19}$ — вугал другой чвэрці, а сінус у другой чвэрці дадатны;

2) $\cos(-49°) > 0$, паколькі $(-49°)$ — вугал чацвёртай чвэрці, а косінус у чацвёртай чвэрці дадатны;

3) $\operatorname{tg}3 < 0$, паколькі 3 рад — вугал другой чвэрці, а тангенс у другой чвэрці адмоўны;

4) $\cos(-297°) > 0$, паколькі $(-297°)$ — вугал першай чвэрці, а косінус у першай чвэрці дадатны;

5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$, паколькі $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ — вугал трэцяй чвэрці, а катангенс у трэцяй чвэрці дадатны.

Такім чынам, адмоўнае значэнне выразу 3).

3. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$

4. Няхай $A = \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}} - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4}$.

1) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = -\sin\frac{14\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} =$

$= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2) $\sin^2\frac{29\pi}{4} = \sin^2\left(6\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{4} = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

3) $\mathrm{tg}^2\,\frac{3\pi}{4} = \mathrm{tg}^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{4} = 1.$

4) $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$

5. Выкарыстаем формулы складання і атрымаем

$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60^\circ\cos\alpha - \sin 60^\circ\sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha.$$

6. Выкарыстаем формулы прывядзення:

$$A = \sin^4\frac{23\pi}{12} - \cos^4\frac{13\pi}{12} = \sin^4\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) - \cos^4\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12}.$$

Па формуле рознасці квадратаў атрымаем:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12} = \left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12} = -\left(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. $4\sin 20^\circ + \mathrm{tg}20^\circ = 4\sin 20^\circ + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$

$$= \frac{2\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + 2\sin\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ + 2\sin 30^\circ\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{40^\circ + 80^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 80^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ\cos(-20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

8. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$

$$= \frac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = 4.$$

9. $A = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 200^\circ}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 200^\circ}{2}}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 100^\circ}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\cos 100^\circ|}$. Паколькі $\cos 100^\circ < 0$, то

$A = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 100^\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 100^\circ}{2}} = \sqrt{\cos^2 50^\circ} = |\cos 50^\circ|$.

Паколькі $\cos 50^\circ > 0$, то $A = \cos 50^\circ$.

10. $3\sin 7\alpha + 3\cos 7\alpha = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7\alpha\right) =$

$= 3\sqrt{2}(\cos 45^\circ \sin 7\alpha + \sin 45^\circ \cos 7\alpha) = 3\sqrt{2}\sin(45^\circ + 7\alpha)$.

Паколькі $-1 \leqslant \sin(45^\circ + 7\alpha) \leqslant 1$, то $-3\sqrt{2} \leqslant 3\sqrt{2}\sin(45^\circ + 7\alpha) \leqslant 3\sqrt{2}$.

Такім чынам, найменшае значэнне дадзенага выразу роўна $-3\sqrt{2}$, а найбольшае — $3\sqrt{2}$. Іх здабытак роўны $-3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = -18$.

11. Паколькі $\cos(\pi - 4\alpha) = -\cos 4\alpha$, то $\cos 4\alpha = \frac{1}{3}$.

Спросцім выраз

$$9\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = 9\cos^4 2\alpha = 9\left(\cos^2 2\alpha\right)^2 = 9\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{4}(1+\cos 4\alpha)^2\Big|_{\cos 4\alpha = \frac{1}{3}} = \frac{9}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4.$$

12. $$\frac{\cos 0{,}5t \cdot \sin^3 0{,}5t}{\sin t - 2\sin 2t + \sin 3t} = \frac{\cos 0{,}5t \cdot \sin 0{,}5t \cdot \sin^2 0{,}5t}{(\sin t + \sin 3t) - 2\sin 2t} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cos 0{,}5t \cdot \sin 0{,}5t \cdot \sin^2 0{,}5t}{2\sin\frac{t+3t}{2}\cos\frac{t-3t}{2} - 2\sin 2t} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin t \cdot \sin^2 0{,}5t}{2\sin 2t\cos t - 2\sin 2t} = \frac{\frac{1}{2}\sin t \cdot \frac{1-\cos t}{2}}{2\sin 2t\cos t - 2\sin 2t} = \frac{\frac{1}{2}\sin t \cdot \frac{1-\cos t}{2}}{2\sin 2t(\cos t - 1)} = \frac{\sin t(1-\cos t)}{8\sin 2t(\cos t - 1)} =$$

$$= -\frac{\sin t}{8\sin 2t} = -\frac{\sin t}{16\sin t\cos t} = -\frac{1}{16\cos t}\Big|_{\cos t = \frac{1}{16}} = -\frac{1}{16\cdot\frac{1}{16}} = -1.$$

13. $$\left(\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}\right)^4 = \left(\frac{(\cos\alpha + \cos 5\alpha) - (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)}{(\sin\alpha + \sin 5\alpha) - (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 3\alpha\cos\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha - 2\sin 3\alpha\cos\alpha}\right)^4 = \left(\frac{2\cos 3\alpha(\cos 2\alpha - \cos\alpha)}{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha - \cos\alpha)}\right)^4 = \left(\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}\right)^4 =$$

$$= (\mathrm{ctg}\,3\alpha)^4 \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{18}} = \left(\mathrm{ctg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{18}\right)\right)^4 = \left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9.$$

14. $\mathrm{tg}\,9° - \mathrm{tg}\,63° + \mathrm{tg}\,81° - \mathrm{tg}\,27° = \mathrm{tg}\,9° + \mathrm{tg}\,81° - \mathrm{tg}\,63° - \mathrm{tg}\,27° =$

$$= \mathrm{tg}\,9° + \mathrm{ctg}\,9° - \mathrm{tg}\,63° - \mathrm{ctg}\,63° = \frac{\sin 9°}{\cos 9°} + \frac{\cos 9°}{\sin 9°} - \frac{\sin 63°}{\cos 63°} - \frac{\cos 63°}{\sin 63°} =$$

$$= \frac{\sin^2 9° + \cos^2 9°}{\cos 9° \sin 9°} - \frac{\sin^2 63° + \cos^2 63°}{\cos 63° \sin 63°} = \frac{1}{\cos 9° \sin 9°} - \frac{1}{\cos 63° \sin 63°} =$$

$$= \frac{2}{2\cos 9° \sin 9°} - \frac{2}{2\cos 63° \sin 63°} = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\sin 126°} = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\sin 54°} =$$

$$= \frac{2\sin 54° - 2\sin 18°}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{2(\sin 54° - \sin 18°)}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{2 \cdot 2\sin\frac{54° - 18°}{2}\cos\frac{54° + 18°}{2}}{\sin 18° \sin 54°} =$$

$$= \frac{4\sin 18° \cos 36°}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{4\cos 36°}{\sin 54°} = \frac{4\sin 54°}{\sin 54°} = 4.$$

15. Падзелім абедзве часткі роўнасці $\sqrt{13} - 13\sin\frac{2\alpha}{3} + 12\sqrt{13}\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0$ на $\sqrt{13}$ і атрымаем $1 - \sqrt{13}\sin\frac{2\alpha}{3} + 12\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$

$\sin^2\frac{\alpha}{3} + \cos^2\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} + 12\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$

$\sin^2\frac{\alpha}{3} - 2\sqrt{13}\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} + 13\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$ $\left(\sin\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13}\cos\frac{\alpha}{3}\right)^2 = 0;$

$\sin\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13}\cos\frac{\alpha}{3} = 0.$

Падзелім абедзве часткі апошняй роўнасці на $\cos\frac{\alpha}{3}$ і атрымаем $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13} = 0;$ $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{3} = \sqrt{13}.$ Тады $\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 4 \cdot 13 = 52.$

Тэст 7

1. Перавядзём $\frac{\pi}{18}$ у градусную меру: $\frac{\pi}{18} = \frac{180°}{18} = 10°.$

$\cos(2x - 10°) = 0;$ $2x - 10° = 90° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $2x = 100° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $x = 50° + 90°n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Найменшы дадатны корань ураўнення роўны 50°.

2. $4\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x + 3 = 0;$ $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)^2 = 0;$ $2\sin x + \sqrt{3} = 0;$

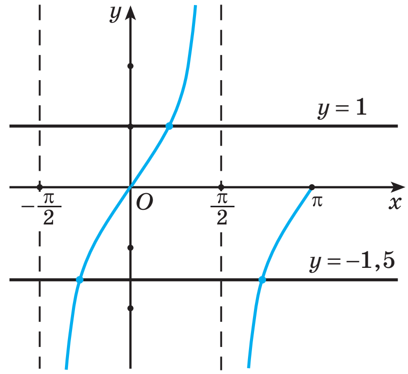
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $x = (-1)^{n+1} \cdot 60° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Найбольшы адмоўны корань дадзенага ўраўнення роўны –60°.

3. $2\operatorname{tg}x + 1 = -3\operatorname{ctg}(-x)$; $2\operatorname{tg}x + 1 = 3\operatorname{ctg}x$; $2\operatorname{tg}x + 1 = \frac{3}{\operatorname{tg}x}$.

Няхай $\operatorname{tg}x = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $2t + 1 = \frac{3}{t}$; $2t^2 + t - 3 = 0$; $t \neq 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1{,}5, \\ t = 1. \end{array}\right.$ Адкуль $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x = -1{,}5, \\ \operatorname{tg}x = 1. \end{array}\right.$

Пабудуем графікі функцый $y = \operatorname{tg}x$, $y = -1{,}5$ і $y = 1$ (рыс. 46) і знойдзем колькасць пунктаў перасячэння гэтых графікаў на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.



Рыс. 46

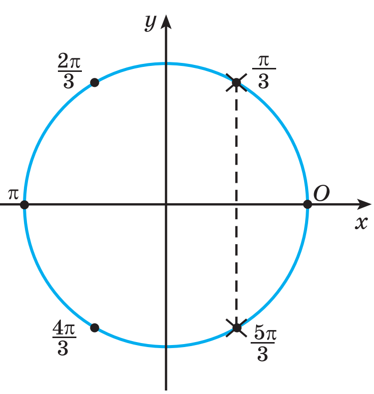
На прамежку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ дадзенае ўраўненне мае тры карані.

4. Ураўненне $\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = 0$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ 1 - 2\cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Адзначым на адзінкавай акружнасці лікі $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 47). З улікам умовы $\cos x \neq \frac{1}{2}$ атрымаем, што лікі выгляду $\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, і $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення.

Найменшым дадатным коранем ураўнення з'яўляецца лік $\frac{2\pi}{3}$.



Рыс. 47

5. Выкарыстаем формулы прывядзення і запішам ураўненне

$3\sin^2(5\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x) \cdot \cos(x - 7\pi) = 2$

у выглядзе $3\sin^2(\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x) \cdot \cos(\pi - x) = 2$;

$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2$.

Затым атрымаем

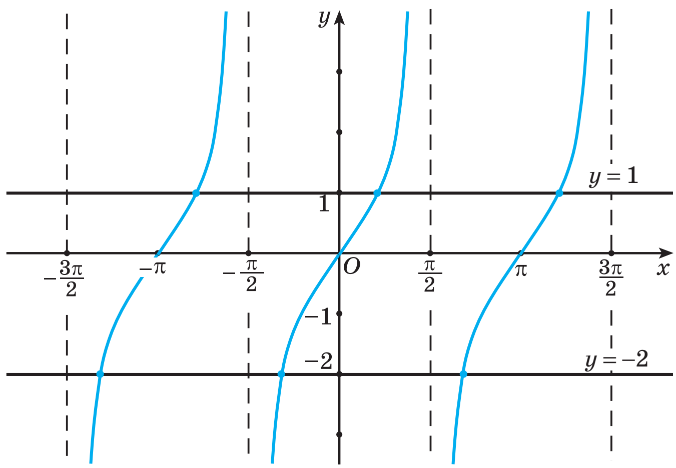
$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$; $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Паколькі значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x$ і атрымаем $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x - 2 = 0$.

Няхай $t = \mathrm{tg} x$, тады ўраўненне прымае выгляд $t^2 + t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 1. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = -2, \\ \mathrm{tg} x = 1. \end{array}\right.$

Пабудуем графікі функцый $y = \mathrm{tg} x$, $y = -2$ і $y = 1$ (рыс. 48) і знойдзем колькасць пунктаў перасячэння гэтых графікаў на прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ дадзенае ўраўненне мае шэсць каранёў.



Рыс. 48

6. Для пераўтварэння левай часткі ўраўнення

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x \sin^2 x = -0{,}5\sqrt{2}$$

выкарыстаем формулы двайнога вугла і атрымаем:

$\cos^2 2x - \sin^2 2x = -0{,}5\sqrt{2}$; $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm 33{,}75° + 90° n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Найменшы дадатны корань дадзенага ўраўнення роўны $33{,}75°$.

7. Паколькі $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, то запішам ураўненне

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ у выглядзе $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0; \quad 2\sin\frac{3x - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{2}\cos\frac{3x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + x}{2} = 0;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2x = 0; \quad \left[\begin{array}{l}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0,\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x - \frac{\pi}{6} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 30° + 180°n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = 45° + 90°n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны $-45°$. Найменшы дадатны корань ураўнення роўны $30°$. Іх сума роўна $-15°$.

8. Выкарыстаем формулу сінуса двайнога вугла і атрымаем:

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0; \quad \cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

На прамежку $[0;\ 2\pi]$ першае і другое ўраўненні сукупнасці маюць па два карані. Такім чынам, ураўненне мае чатыры карані на дадзеным прамежку.

9. Запішам ураўненне ў выглядзе $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 4 = 0.$

Няхай $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = t$. Узвядзём абедзве часткі гэтай роўнасці ў квадрат:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = t^2; \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x = t^2; \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = t^2;$$

$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = t^2 - 2.$ Тады зыходнае ўраўненне прымае выгляд

$$t^2 - 2 + 3t + 4 = 0; \quad t^2 + 3t + 2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l}t = -1,\\ t = -2.\end{array}\right. \text{ Адкуль } \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1,\\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2.\end{array}\right.$$

Па ўласцівасці двух узаемна адваротных лікаў $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$. Тады першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў.

Разгледзім другое ўраўненне сукупнасці:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2; \quad \operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}; \quad x = -45° + 180°n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Найменшы дадатны корань ураўнення роўны $135°$.

10. Выкарыстаем формулу косінуса двайнога вугла і атрымаем

$8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7;\quad 8\sin^4 x + 13\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 7;$

$8\sin^4 x - 26\sin^2 x + 6 = 0;\quad 4\sin^4 x - 13\sin^2 x + 3 = 0.$

Няхай $\sin^2 x = t,\quad t \in [0;\ 1],$ тады ўраўненне прымае выгляд $4t^2 - 13t + 3 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4}, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Паколькі $t \in [0;\ 1]$, то $t = \frac{1}{4}$, г. зн. $\sin^2 x = \frac{1}{4}.$

Адкуль $2\sin^2 x = \frac{1}{2};\ -2\sin^2 x = -\frac{1}{2};\ 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2};$

$\cos 2x = \frac{1}{2};\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$x = \pm 30° + 180°n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Інтэрвалу $[-215°;\ -180°]$ належыць корань $-210°$.

11. Няхай $\sin x - \cos x = t,\quad t \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$. Узвядзём абедзве часткі гэтай роўнасці ў квадрат: $(\sin x - \cos x)^2 = t^2;\ \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = t^2;$ $\sin 2x = 1 - t^2.$

Тады зыходнае ўраўненне прымае выгляд $\sqrt{2}\left(1 - t^2\right) = \sqrt{3}t - 2\sqrt{2};$

$\sqrt{2}t^2 + \sqrt{3}t - 3\sqrt{2} = 0;\quad D = 3 + 4\cdot\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 27;$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ t = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{6}, \\ t = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$ Паколькі $t \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$, то $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$, г. зн. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Памножым абедзве часткі ўраўнення на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і атрымаем:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z};\quad x + 45° = \pm 150° + 360°n,\quad n \in \boldsymbol{Z};$

$\left[\begin{array}{l} x = 105° + 360°n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -195° + 360°n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны $-195°$.

12. Ураўненне $(3\cos x + \cos 2x + 2)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$ раўназначна сукупнасці

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = 0, \\ \begin{cases} 3\cos x + \cos 2x + 2 = 0, \\ \operatorname{ctg} x \geqslant 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Каранямі ўраўнення $\operatorname{ctg} x = 0$ з'яўляюцца лікі $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Рэшым ураўненне $3\cos x + \cos 2x + 2 = 0$. Па формуле косінуса двайнога вугла атрымаем $3\cos x + 2\cos^2 x - 1 + 2 = 0$; $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = -1. \end{array}\right.$$

Паколькі $\sin x \neq 0$, то значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = -1$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення.

Разгледзім ураўненне $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Паколькі $\operatorname{ctg} x \geqslant 0$, то каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца лікі $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Такім чынам, зыходнае ўраўненне мае карані $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Прамежку $[0; 2\pi]$ належаць карані 90°; 270° і 240°. Іх сума роўна 600°.

13. Памножым абедзве часткі ўраўнення $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ на $2\sin x$ і атрымаем ураўненне $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x$.

Атрыманае ўраўненне і ўраўненне $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ не з'яўляюцца раўназначнымі, паколькі лікі выгляду πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, з'яўляюцца каранямі ўраўнення $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x$, але не з'яўляюцца каранямі зыходнага ўраўнення.

Рэшым ураўненне $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x$;

$\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4}\sin x$; $2\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{4}\sin x$;

$\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2}\sin x$; $2\sin 4x \cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin x$; $\sin 8x = \sin x$;

$\sin 8x - \sin x = 0;$ $\quad 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2} = 0;$ $\quad \left[\begin{array}{l}\sin\frac{7x}{2} = 0,\\ \cos\frac{9x}{2} = 0;\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l}\frac{7x}{2} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}7x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 9x = \pi + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{2\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{9},\ m \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

З першай серыі каранёў прамежку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ належаць лікі $\frac{4\pi}{7}$; $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{8\pi}{7}$; $\frac{10\pi}{7}$.

З другой серыі — лікі $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; π; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{13\pi}{9}$.

З улікам таго, што $x = \pi$ не з'яўляецца коранем зыходнага ўраўнення, атрымаем, што ўраўненне мае восем каранёў на дадзеным прамежку.

14. Ураўненне $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ мае карані, калі $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$ і $\sin x \neq 0$.

Выкарыстаем формулу тангенса сумы і атрымаем ураўненне

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}; \quad \frac{\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}; \quad \frac{3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}.$$

Выкананыя пераўтварэнні не з'яўляюцца раўназначнымі, паколькі ў зыходным ураўненні лікі выгляду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, належаць абсягу вызначэння ўраўнення, а ў атрыманым ураўненні — не.

Неабходна праверыць, ці з'яўляюцца лікі выгляду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, каранямі зыходнага ўраўнення: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\sqrt{3}$;

$-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ — правільная роўнасць, значыць, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — карані дадзенага ўраўнення.

Рэшым ураўненне $\frac{3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}$;

$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = -3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x$; $-3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Такім чынам, каранямі зыходнага ўраўнення з'яўляюцца лікі выгляду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Найменшы дадатны корань дадзенага ўраўнення роўны $\frac{\pi}{2} = 90°$.

15. Ацэнім левую і правую часткі ўраўнення $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Паколькі $-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, то $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$.

Такім чынам, левая частка ўраўнення не перавышае $\sqrt{2}$.

Разам з тым $\sqrt{2} + \sin^4 4x \geqslant \sqrt{2}$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.

Такім чынам, роўнасць $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$ магчыма, калі абедзве часткі ўраўнення адначасова роўны $\sqrt{2}$, г. зн. зыходнае ўраўненне раўназначна сістэме

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2} + \sin^4 4x = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin^4 4x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \sin 4x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi m}{4},\ m \in \boldsymbol{Z}; \end{cases} \qquad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Найбольшы адмоўны корань дадзенага ўраўнення роўны

$\frac{\pi}{4} - 2\pi = -315°$.

Змест

Вучэбнае выданне

Арэф'ева Ірына Глебаўна
Пірутка Вольга Мікалаеўна

Зборнік задач па алгебры

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактары *Н. М. Алганава*, *Л. М. Ясніцкая*.
Мастацкі рэдактар *А. А. Правалові̇ч*.
Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко*.
Карэктары *В. С. Казіцкая, В. С. Бабеня, А. П. Тхір, Г. В. Алешка*.

Падпісана да друку 19.03.2020. Фармат $70 \times 90^1/_{16}$. Папера афсетная.
Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 16,38.
Ул.-выд. арк. 12,0. Тыраж 6370 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета»
Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Выдавецтва «Беларускі Дом друку».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/102 ад 01.04.2014.
Пр. Незалежнасці, 79, 220013, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			