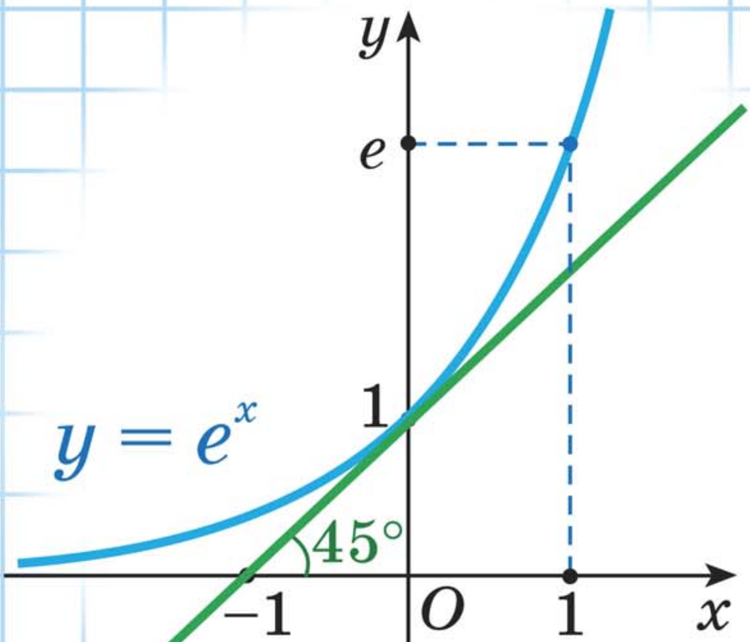
И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

СБОРНИК ЗАДАЧ

по алгебре



11

И. Г. Арефьева   О. Н. Пирютко

СБОРНИК ЗАДАЧ
по алгебре

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2020

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А80

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *В. В. Беняш-Кривец*); учитель математики квалификационной категории «учитель-методист» лицея Белорусского национального технического университета *О. Е. Цыбулько*

ISBN 978-985-03-3254-7

Уважаемые одиннадцатиклассники!

Это пособие поможет вам подготовиться к урокам, экзаменам и вступительным испытаниям по математике, а также углубить свои знания по алгебре.

Книга состоит из 5 глав, каждая из которых разбита на параграфы.

В главах 1, 2 и 3 размещены задания по темам, соответствующим учебному пособию «Алгебра, 11». Среди них вы встретите также упражнения с нестандартными условиями.

Главы 4 и 5 предлагаются для изучения математики на повышенном уровне.

Каждый параграф в этих главах включает:

- новый теоретический материал и методы его применения; алгоритмы;
- важные правила и основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;
- тренировочные упражнения и образцы применения теории в заданиях с нестандартными условиями.

В книге вы встретите следующие условные обозначения:

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— материал повышенного уровня;

— тренировочные упражнения;

— дополнительный материал для углубления математических знаний.

Для обобщения изученного ранее материала в учебном пособии размещен раздел «Повторение. Тематические тесты».

Дополнительные материалы к книге, а также ответы к тренировочным упражнениям можно найти на сайте http://e-vedy.adu.by, курс «Математика».

Желаем успехов!

Глава 1. Обобщение понятия степени

§ 1. Степень с рациональным показателем. Степень с действительным показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n},\ \left(a^m\right)^n = a^{mn},$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,\ (a:b)^n = a^n : b^n$$

Пример 1. Представьте выражение $\dfrac{x\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2}$ в виде степени с рациональным показателем.

Решение.

$$\frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2} = \frac{x \cdot x^{\frac{2}{5}}}{\left(x^{\frac{1}{10}}\right)^2} = \frac{x^{1+\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{1+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}} = x^{\frac{6}{5}}.$$

Ответ: $x^{\frac{6}{5}}$.

Пример 2. Найдите значение выражения

$$81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} + 256^{0,5}.$$

Решение.

$$81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} + 256^{0,5} = \left(3^4\right)^{0,75} \cdot \left(2^5\right)^{-0,4} - \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 + \left(16^2\right)^{0,5} =$$
$$= 3^3 \cdot 2^{-2} - 2^{-2} \cdot 3 + 16 = \frac{27}{4} - \frac{3}{4} + 16 = 22.$$

Ответ: 22.

Пример 3. Сократите дробь $\dfrac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}}$.

Решение.

$$\frac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}} = \frac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5x^{\frac{1}{2}} - 15x^{\frac{3}{10}}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}\left(3 - x^{\frac{1}{5}}\right)}{5x^{\frac{3}{10}}\left(x^{\frac{1}{5}} - 3\right)} = -\frac{x^{\frac{4}{5}}}{5x^{\frac{3}{10}}} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{5} = -0,2\sqrt{x}.$$

Ответ: $-0,2\sqrt{x}$.

Пример 4. Упростите выражение

$$\left(\frac{x - x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 1} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3\right) : \left(\frac{1 + x^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}.$$

Решение.

$$\left(\frac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right):\left(\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}=\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)}{x^{\frac{2}{3}}-1}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}=\left(x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-3\right)\cdot\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=\left(3x^{\frac{1}{3}}-3\right)\cdot\frac{1}{1-x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{1-x^{\frac{1}{3}}}=-3.$$

Ответ: –3.

Пример 5. Упростите выражение

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right).$$

Решение.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right)=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)+4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{a^{\frac{1}{3}}-2\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)+\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=$$

$$=\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^2+4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+2b+a^{\frac{1}{3}}+b}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=\frac{3b^2}{a^{\frac{1}{3}}-b}:\frac{3b}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=$$

$$=\frac{3b^2\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}{3b\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)}=b\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right).$$

Ответ: $b\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)$.

Пример 6. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения

$$\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right).$$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2\cdot\left(4-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{9\cdot 3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}\right)^2\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(4-2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left|\sqrt{3}-1\right|}\cdot\left(\sqrt{3}-3\right)=\left(\sqrt[4]{3}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-3$$ —

рациональное число.

Ответ: значение выражения является рациональным числом.

Пример 7. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}-7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3.$$

Решение.

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}-7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3=\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}\right)}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^6+\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}\right)}{7^{\frac{1}{6}}-5^{\frac{1}{6}}}\right)^3=$$

$$=\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^6+\left(7^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^3=6^2+35=71.$$

Ответ: 71.

Пример 8. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{5}x^{0,5}-3x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-\sqrt{5}x^{-0,5}}{\sqrt{5x+6\sqrt{5}x^{\frac{5}{6}}+9x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$,

если $x\in\left(0;\,1\right)$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{5}x^{0,5}-3x^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-\sqrt{5}x^{-0,5}}{\sqrt{5x+6\sqrt{5}x^{\frac{5}{6}}+9x^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}=\frac{\sqrt{5}x^{0,5}\left(1-x^{-1}\right)+3x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^{-1}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(1-x^{-1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}x^{0,5}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-x^{-1}\right)}{\left(\sqrt{5}x^{0,5}+3x^{\frac{1}{3}}\right)\left|1-x^{-1}\right|}=\left.\frac{1-x^{-1}}{\left|1-x^{-1}\right|}\right|_{x\in(0;\,1)}=\frac{1-x^{-1}}{-\left(1-x^{-1}\right)}=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 9. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{5^{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}\cdot 25^{\sqrt{7}}}$.

Решение.

$$\sqrt[4]{5^{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}\cdot 25^{\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^{8-2\sqrt{7}}\cdot 5^{2\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^{8-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}}}=\sqrt[4]{5^8}=25.$$

Ответ: 25.

Пример 10. Вычислите: $\left(3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}\right):3^{\sqrt{5}}$.

Решение.

$$\left(3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}\right):3^{\sqrt{5}}=\frac{3^{\sqrt{5}}-3^{\sqrt{5}-1}}{3^{\sqrt{5}}}=\frac{3^{\sqrt{5}}\left(1-3^{-1}\right)}{3^{\sqrt{5}}}=1-3^{-1}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 11. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\cdot b+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}+1}}+\frac{b^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}}{b^{0,25\sqrt{5}}+a^{0,25\sqrt{5}}}\right):\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-0,5\sqrt{5}}}\right)^{-1}.$$

Решение.

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}+\frac{b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}\right)\cdot\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=$$

$$=\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\left(b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}\right)}\cdot\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{5}}{4}}}{a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=\frac{a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}}{b\cdot a^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}=\frac{a^{\sqrt{5}}}{b}.$$

Ответ: $\frac{a^{\sqrt{5}}}{b}$.

1.1. Вычислите:

а) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 0{,}81^{-0{,}5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+2^{-3}$; б) $125^{-\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{2}}+343^{-\frac{1}{3}}-3$.

1.2. Найдите значение выражения:

а) $\left(2-15^{\frac{1}{4}}\right)\left(2+15^{\frac{1}{4}}\right):\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$; б) $\left(16^{-0{,}25}-3^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}}+4^{-0{,}5}\right)$.

1.3. Воспользуйтесь свойствами степени с рациональным показателем и вычислите значение выражения:

а) $\left(9\sqrt{3}\right)^{0{,}2}:\left(27\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{7}}$; б) $\left(12^{-\frac{1}{3}}\cdot 18^{-\frac{4}{3}}\cdot 6^{3{,}5}\right)^{2}-3^{0{,}25}\cdot 9^{\frac{3}{8}}$.

1.4. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\left(\dfrac{9a^{-\frac{5}{24}}}{a^{\frac{1}{8}}a^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $a=24$; б) $\left(a^{3}\sqrt[3]{a}\right)^{0{,}2}\cdot\left(a^{2}\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{1}{7}}$ при $a=3$.

1.5. Найдите значение выражения:

а) $3^{\sqrt{18}}\cdot 27^{1-\sqrt{2}}$; б) $5^{1+\sqrt{17}}:5^{3+\sqrt{17}}$; в) $2^{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}}:2^{2\sqrt{3}}$;

г) $\left(\left(\sqrt[4]{6}\right)^{2\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$; д) $\left(\left(2\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[6]{9^{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}}\cdot 81^{\sqrt{2}}}$.

1.6. Сравните значения выражений $12^{\sqrt{48}}\cdot 2^{\sqrt{192}}$ и $4^{\sqrt{108}}\cdot 6^{\sqrt{48}}$.

1.7. Вычислите:

а) $10^{3\sin^{2}\frac{\pi}{12}}\cdot 10^{3\cos^{2}\frac{\pi}{12}}$; б) $\left(17^{\operatorname{tg}89^\circ}\right)^{2\operatorname{ctg}89^\circ}$;

в) $\left(25^{\cos\frac{\pi}{6}}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}$; г) $49^{\sin\frac{2\pi}{3}}:7^{\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}}$.

1.8. Упростите выражение $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}}$.

1.9. Упростите выражение $1-\left(c^{-0{,}1}-c^{0{,}3}\right)\left(c^{0{,}6}+c\right)c^{-0{,}5}$.

1.10. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a^{0{,}5}}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot\dfrac{\left(a^{0{,}25}+\sqrt[4]{3}\right)^{2}-2\sqrt[4]{3a}}{\sqrt{3}}$ при $a=\frac{3}{5}$.

1.11. Упростите выражение $\dfrac{ab^{-1}-4}{b^{-1}\sqrt{a}+2b^{-\frac{1}{2}}}+2\sqrt{b}$.

1.12. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(b^{\frac{1}{3}}-2a+\dfrac{4a^2-4\sqrt[3]{b^2}}{2a+\sqrt[3]{b}}\right):\left(\dfrac{2a}{b^{\frac{2}{3}}-4a^2}-\dfrac{2}{b^{\frac{1}{3}}-2a}-\dfrac{1}{2a+b^{\frac{1}{3}}}\right)$;

в) $\left(m+\dfrac{n^{1,5}}{m^{0,5}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{m^{0,5}-n^{0,5}}{m^{0,5}}+\dfrac{n^{0,5}}{m^{0,5}-n^{0,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $\left(\dfrac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\cdot\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$.

1.13. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{1+\sqrt{2}}{2^{0,25}}\right)^2\cdot\left(1,5-2^{0,5}\right)^{-1}$.

1.14. Упростите выражение

$\left(\dfrac{2\sqrt[3]{3}xy}{x^2y^2-\sqrt[3]{9}}+\dfrac{xy-\sqrt[3]{3}}{2xy+2\sqrt[3]{3}}\right)\cdot\dfrac{2xy}{xy+\sqrt[3]{3}}-\dfrac{xy}{xy-\sqrt[3]{3}}+0,1$ и найдите его значение при $x=\dfrac{1}{11}$, $y=3$.

1.15. Упростите выражение $\left(a^{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}:a^{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

1.16. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-36}{a^{\sqrt{2}}+6}$;

б) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\sqrt{20}}-b^{\sqrt{28}}}$;

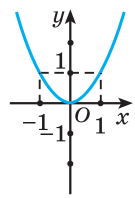
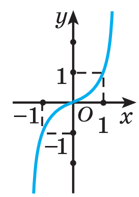
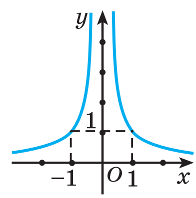
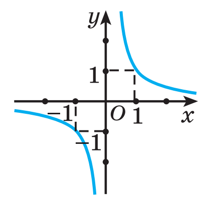
в) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}+2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}+b^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}}+a^{\sqrt{3}}b^{2\sqrt{2}}}$;

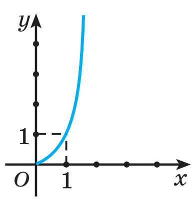
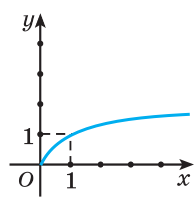
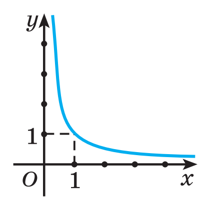
г) $\dfrac{x^{\frac{\sqrt{7}}{3}}-25}{x^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+10x^{\frac{\sqrt{7}}{6}}+25}$.

1.17. Упростите выражение

$\left(\dfrac{n^{\frac{\sqrt{3}}{4}}-m^{\frac{\sqrt{3}}{4}}}{m^{-0,5\sqrt{3}}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{m^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-n^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{n\cdot m^{\frac{\sqrt{3}}{4}}-n^{\frac{\sqrt{3}}{4}+1}}-\dfrac{n^{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}}{n^{0,25\sqrt{3}}-m^{0,25\sqrt{3}}}\right)$.

§ 2. Степенная функция $y = x^n$ и ее график

$n > 0$, натуральное		$n < 0$, целое	
n — четное	n — нечетное	n — четное	n — нечетное
$D(y) = \boldsymbol{R}$		$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	
$E(y) = [0;\ +\infty)$	$E(y) = \boldsymbol{R}$	$E(y) = (0;\ +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ +\infty)$
 Четная функция	 Нечетная функция	 Четная функция	 Нечетная функция

n — нецелое число		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0;\ +\infty)$ $E(y) = [0;\ +\infty)$		$D(y) = (0;\ +\infty)$ $E(y) = (0;\ +\infty)$
		

Пример 1. Определите, проходит ли график функции $f(x) = x^{0,6}$ через точку $A(32;\ 8)$.

Решение.

При $x = 32$ получим $f(32) = 32^{0,6} = 32^{\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8.$

Ответ: проходит.

Пример 2. Сравните числа:

а) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi}$ и $(1,2)^{\pi}$; б) $(1,7)^{-\sqrt{2}}$ и $(2,3)^{-\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Функция $y = x^{\pi}$ возрастает на области определения. Так как $\frac{5}{6} < 1{,}2$, то $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi} < (1{,}2)^{\pi}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{6}\right)^{\pi} < (1{,}2)^{\pi}$.

б) Функция $y = x^{-\sqrt{2}}$ убывает на области определения. Так как $1{,}7 < 2{,}3$, то $(1{,}7)^{-\sqrt{2}} > (2{,}3)^{-\sqrt{2}}$.

Ответ: $(1{,}7)^{-\sqrt{2}} > (2{,}3)^{-\sqrt{2}}$.

2.1. Выберите точки, через которые проходит график функции $f(x) = x^{-0{,}75}$:

а) $A(1; -1)$; б) $B(16; 0{,}125)$; в) $C\left(\frac{1}{81}; 27\right)$; г) $D\left(\sqrt[3]{2}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

2.2. Определите знак значения выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $(5{,}1)^{-\pi} - (7{,}9)^{-\pi}$.

2.3. Найдите область определения функции:

а) $y = \left(x^2 - 6\right)^{-1{,}8}$; б) $y = \left(7x - 3x^2\right)^{\frac{1}{7}}$;

в) $y = \left(x^3 - 2x^2 + x\right)^{-0{,}8}$; г) $y = \left(x^4 - 5x^2 + 4\right)^{\sqrt{3}}$;

д) $y = \left(x - 4x^3\right)^{-\sqrt{2}}$; е) $y = \left(\frac{9x^4 - 8x^2 - 1}{4x^2 - 1}\right)^{\sqrt{5}}$.

2.4. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = 2 - x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$;

г) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; д) $y = |x - 1|^{\frac{1}{3}}$; е) $y = (|x| - 2)^{\frac{1}{3}}$.

2.5. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^{-0{,}4}$; б) $y = 1 - x^{-0{,}4}$; в) $y = (x - 1)^{-0{,}4}$;

г) $y = |x|^{-0{,}4}$; д) $y = |x + 3|^{0{,}4}$; е) $y = (|x| + 2)^{-0{,}4}$.

2.6. Найдите функцию, обратную для функции:

а) $y = x^{\frac{1}{7}}$; б) $y = x^{-1{,}2}$.

2.7. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^{-\sqrt{2}}$; б) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$.

2.8. Изобразите схематически график функции:

а) $y = |x-1|^{\sqrt{3}} + 2$; б) $y = \left||x+2|^{-\pi} - 3\right|$.

2.9. Для функции $f(x) = x^{\sqrt{3}}$ известно, что $f(a) = n$. Найдите:

а) $f(a^3)$; б) $f\left(a^{-2}\right)$.

2.10. Докажите, что графики функций $f(x) = x^{\sqrt{5}}$ и $f(x) = x^{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ симметричны относительно прямой $y = x$.

2.11. Исследуйте функцию на четность (нечетность):

а) $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$; б) $f(x) = |x|^{-\sqrt{7}} - 2$.

§ 3. Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

Пример 1. Найдите значение выражения $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$.

Решение.

$$\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4} = \log_3 \log_4 4^{\frac{1}{9}} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2.$$

Ответ: -2.

Пример 2. Найдите значение выражения $\log_5^2 \sqrt[4]{5}$.

Решение.

$$\log_5^2 \sqrt[4]{5} = \left(\log_5 \sqrt[4]{5}\right)^2 = \left(\log_5 5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$3^{0,5\log_3 7} \cdot 3^{\log_3^2 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25}.$$

Решение.

Воспользуемся свойствами степени и основным логарифмическим тождеством и получим: $3^{0,5\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$;

$3^{\log_3^2 8} = \left(3^{\log_3 8}\right)^{\log_3 8} = 8^{\log_3 8}$; $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_3 25} = \left(3^{\log_3 25}\right)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5.$

Найдем значение исходного выражения:

$\sqrt{7}\cdot 8^{\log_3 8} - \sqrt{7}\cdot 8^{\log_3 8} + 5 = 5.$

Ответ: 5.

Пример 4. Вычислите: $3^{-2\log_3 \sin 510^\circ}$.

Решение.

$\sin 510^\circ = \sin(360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

тогда $3^{-2\log_3 \sin 510^\circ} = 3^{-2\log_3 \frac{1}{2}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

Ответ: 4.

3.1. Выберите верные равенства:

а) $\log_5 25 = \frac{1}{2}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$; в) $\log_{0,2} 5 = -1$;

г) $\log_6 \frac{1}{216} = \frac{1}{3}$; д) $\log_2 0,125 = -3$; е) $\lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$;

ж) $\log_7 \sqrt[3]{7} = 3$; з) $\log_{0,75} \frac{3}{4} = 0$.

3.2. Найдите $\log_a 16$, если:

а) $a = 2$; б) $a = \frac{1}{2}$; в) $a = \sqrt{2}$;

г) $a = 256$; д) $a = 256$; е) $a = 16$.

3.3. Запишите в виде десятичного логарифма число:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1; е) –2;

ж) –3; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{1}{3}$; к) –0,5; л) $\frac{2}{3}$.

3.4. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{6}} 36$; б) $\log_3\left(81\sqrt{3}\right)$; в) $\log_2\left(16\sqrt[4]{2}\right)$;

г) $\log_3 \log_7 \sqrt[9]{7}$; д) $\log^2_{27\sqrt{3}} 9$; е) $\log^3_{8\sqrt{2}} 2$.

3.5. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 8 : \lg 0,1$; б) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right) : \log_{\frac{1}{6}} 36 \cdot \log_7 \sqrt{7}$.

3.6. Найдите значение выражения:

а) $\log_4 64 - \log_5 0{,}2 + \log_{13} \sqrt[4]{13} + \log_{36}^2 \sqrt{6}$;

б) $\lg \sqrt[5]{100} - \log_{14} \log_4 \log_{\sqrt{5}} 25$.

3.7. Найдите значение выражения:

а) $4^{1 - 2\log_3 9 + \log_5 \sqrt{5}}$; б) $16^{2 - \log_4 64 + 3\log_3 \sqrt{3}}$.

3.8. Представьте число π в виде степени с основанием:

а) 2; б) 5; в) 0,8; г) $\sqrt{7}$.

3.9. Найдите значение выражения:

а) $\left(5^{\log_5 \sqrt[4]{7}}\right)^4$; б) $\left(7^{\log_7 \sqrt[5]{3}}\right)^5$; в) $\left(7^{\log_2 7}\right)^{\log_7 2}$;

г) $\left(3^{\lg 3}\right)^{\log_3 10}$; д) $\dfrac{4^{\log_2 7}}{3^{\log_9 16}}$; е) $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 36}}{100^{\lg 5}}$;

ж) $\sqrt{49^{\log_7 6} - 10^{\lg 32}}$; з) $\sqrt[4]{3^{\log_9 625} - 4^{\log_2 3}}$.

3.10. Вычислите:

а) $7^{\log_7 2} : \log_{\frac{1}{3}} 9$; б) $0{,}25^{\log_4 3} \cdot \lg 0{,}01$;

в) $\log_7 \sqrt[6]{7} \cdot \left(10^{\lg 11} - \log_{\sqrt{2}} 2\right)$; г) $\left(\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_{\sqrt[3]{3}} 9\right) \cdot \left(\log_6 216 + 3^{\log_3 7}\right)$;

д) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_2 7}$; е) $36^{\log_6 5 - \log_{\sqrt{6}} 3}$;

ж) $25^{0{,}25\log_5 9} - 121^{0{,}5\log_{11} 21}$; з) $\left(2^{\log_{\sqrt{2}}\left(2\log_2 \sqrt{2}\right)}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 4}$.

3.11. Найдите значение выражения:

а) $\lg\left(49^{\log_7 0{,}6} + 4^{\log_2 0{,}8}\right)$; б) $\log_{15}\left(100^{\lg 7} + 2^{\log_2 11 + 4}\right)$;

в) $625^{\log_5 \sqrt{3}} + 16\log_3 \sqrt[4]{3\sqrt{3}}$; г) $27^{\log_3 \sqrt[3]{5}} - 10\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[5]{2}}$;

д) $0{,}6 \cdot \left(\log_2 16 + 25^{\log_5 4}\right)^{\log_{20} 25}$; е) $\dfrac{1}{3} \cdot \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} + 100^{\lg 6}\right)^{\log_{37} 9}$.

3.12. Вычислите:

а) $81^{1 - \log_9 2} + 10^{\lg 13}$; б) $7^{\log_7 11} + 25^{1 - \log_5 2}$.

3.13. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

а) $\log_{0{,}4}\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{50}\right)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{54}\right)$.

3.14. Вычислите:

а) $\log_2 \sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\log_{\sqrt{2}} \cos\frac{\pi}{4}$; в) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; д) $\log_{0,75} \cos\frac{11\pi}{6}$; е) $\log_5 \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

3.15. Вычислите: $9^{2+\log_9 \cos 660^\circ}$.

3.16. Найдите значение выражения:

а) $\log_{7-4\sqrt{3}}\left(7+4\sqrt{3}\right)$; б) $\log_{9+4\sqrt{5}}\left(9-4\sqrt{5}\right)$;

в) $\log_{\sqrt{2}+1}\left(3+2\sqrt{2}\right)$; г) $\log_{4-2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)$;

д) $\log_{2+\sqrt{3}}\left(7-4\sqrt{3}\right)$; е) $\log_{\sqrt{3}-1}\left(6\sqrt{3}-10\right)$.

3.17. Постройте график функции:

а) $y = 2^{\log_2 (x-1)}$; б) $y = 3^{\log_3 x^2}$;

в) $y = \log_{x-2}(x-2)^3$; г) $y = 36^{\log_6 x}$;

д) $y = 7^{\log_{49} x}$; е) $y = 0{,}1^{\lg x}$.

3.18. Постройте график функции:

а) $y = 4^{\log_4 (\sin x)}$; б) $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(\operatorname{tg} x)}$.

3.19. Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $9^{\log_3\left(5-\sqrt{6}\right)} + 25^{\log_5\left(5+\sqrt{6}\right)}$; б) $7^{\log_{49}\left(6-2\sqrt{5}\right)} + 6^{\log_{36}\left(6+2\sqrt{5}\right)}$.

3.20. Найдите значение выражения

$\log_{1,(3)}\left(\sin 251^\circ \cdot \cos 191^\circ + \cos 101^\circ \cdot \cos 71^\circ\right)$.

§ 4. Показательная функция. Производная показательной функции

Пример 1. Расположите в порядке возрастания значения показательной функции $y_1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}}$; $y_2 = \left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$; $y_3 = \left(\frac{1}{9}\right)^{1,3}$; $y_4 = \left(\frac{1}{9}\right)^{0,8}$.

Решение.

Функция $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ является убывающей, так как $a = \frac{1}{9} \in (0; 1)$.

Поскольку $1,5 > \sqrt{2} > 1,3 > 0,8$, то $\left(\frac{1}{9}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{9}\right)^{1,3} < \left(\frac{1}{9}\right)^{0,8}$.

Ответ: y_2; y_1; y_3; y_4.

Пример 2. Найдите наименьшее значение функции $y = 4^{|x-3|+2}$.

Решение.

Выражение $|x-3| \geqslant 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, тогда $|x-3| + 2 \geqslant 2$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Так как функция $y = 4^t$ возрастает на всей числовой прямой, то $4^{|x-3|+2} \geqslant 4^2$; $4^{|x-3|+2} \geqslant 16$. Таким образом, наименьшим значением функции $y = 4^{|x-3|+2}$ является число 16.

Ответ: 16.

Пример 3. Найдите наибольшее значение функции $y = \left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$.

Решение.

$y = \left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$; $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-x^2+4x-4+6}$; $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$.

Так как $-(x-2)^2 + 6 \leqslant 6$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и $\sqrt{3} > 1$,

то $\left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6} \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^6 = 27$.

Наибольшим значением функции $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$ является число 27.

Ответ: 27.

Производная показательной функции

Рассмотрим касательные к графикам показательной функции с основанием $a > 1$ в точке $(0; 1)$ (рис. 1).

Заметим, что для $a = 2$ касательная образует с осью абсцисс угол α, меньший $45°$, для $a = 3$ — угол β, больший $45°$. Существует такая показательная функция с основанием, большим 2, но меньшим 3, касательная к графику которой в точке $(0; 1)$ образует угол $45°$ с осью абсцисс (рис. 2). Основание этой функции является иррациональным числом, равным

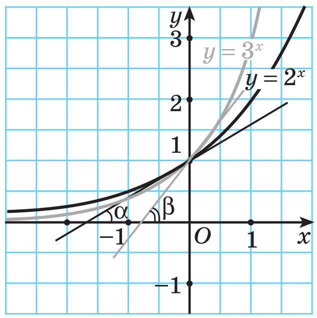


Рис. 1

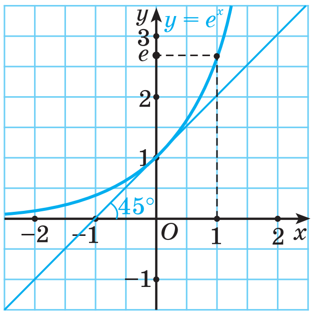


Рис. 2

бесконечной десятичной непериодической дроби 2,7182818284590... . Обозначается это число буквой e.

$$\boxed{e = 2{,}7182818284590\ldots}$$

Воспользуемся геометрическим смыслом производной (производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке) и получим, что производная показательной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ равна 1, так как $\operatorname{tg} 45° = 1$.

Выведем формулу производной показательной функции $y = e^x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - e^0\right)}{\Delta x}.$$

Заметим, что выражение $\dfrac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \dfrac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$ есть отношение приращения функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ к приращению аргумента, а при $\Delta x \to 0$ это отношение равно производной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ и равно 1. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^x\left(e^{\Delta x} - e^0\right)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ равно e^x. Следовательно, $\left(e^x\right)' = e^x$.

Логарифм числа с основанием e называется **натуральным логарифмом** и обозначается $\ln b$, например, $\ln 5 = \log_e 5$.

Выведем формулу производной показательной функции $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

По основному логарифмическому тождеству: $a^x = e^{(\ln a)x}$. По правилу нахождения производной сложной функции получим: $\left(a^x\right)' = \left(e^{(\ln a)x}\right)' = (\ln a)e^{(\ln a)x} = a^x \ln a$.

Следовательно, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. Например, $\left(5^x\right)' = 5^x \ln 5$.

Пример 4. Найдите производную функции:

а) $y = e^x + x^2$; б) $y = e^{-3x}$; в) $y = e^x \cdot \sqrt{x}$; г) $y = \frac{e^{5x-1}}{\sin x}$.

Решение.

а) $y' = \left(e^x + x^2\right)' = \left(e^x\right)' + \left(x^2\right)' = e^x + 2x$;

б) $y' = \left(e^{-3x}\right)' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x}$;

в) $y' = \left(e^x \cdot \sqrt{x}\right)' = \left(e^x\right)' \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = e^x \cdot \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$;

г) $y' = \left(\frac{e^{5x-1}}{\sin x}\right)' = \frac{\left(e^{5x-1}\right)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot e^{5x-1}}{(\sin x)^2} = \frac{5e^{5x-1} \cdot \sin x - \cos x \cdot e^{5x-1}}{\sin^2 x} =$

$= \frac{e^{5x-1} \cdot (5\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$.

Пример 5. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 6^x + \cos x$; б) $f(x) = 3^{x^2-4}$;

в) $f(x) = x^3 \cdot 2^x$; г) $f(x) = \frac{7x-1}{7^x}$.

Решение.

а) $f'(x) = \left(6^x + \cos x\right)' = 6^x \ln 6 - \sin x$;

б) $f'(x) = \left(3^{x^2-4}\right)' = 3^{x^2-4} \cdot \ln 3 \cdot \left(x^2 - 4\right)' = 2x \cdot 3^{x^2-4} \cdot \ln 3$;

в) $f'(x) = \left(x^3 \cdot 2^x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot 2^x + \left(2^x\right)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 2^x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^3 =$

$= 2^x \cdot x^2(3 + x\ln 2)$;

г) $f'(x) = \left(\frac{7x-1}{7^x}\right)' = \frac{(7x-1)' \cdot 7^x - \left(7^x\right)'(7x-1)}{\left(7^x\right)^2} = \frac{7 \cdot 7^x - 7^x \cdot \ln 7 \cdot (7x-1)}{7^{2x}} =$

$= \frac{7^x\left(7 - \ln 7 \cdot (7x-1)\right)}{7^{2x}} = \frac{7 - \ln 7 \cdot (7x-1)}{7^x}$.

4.1. Сравните значения $y_1 = 3^{\sqrt{3}}$; $y_2 = 3^{1,9}$; $y_3 = 3^{1,7}$; $y_4 = 3^{0,98}$ показательной функции $y = 3^x$ и расположите их в порядке убывания.

4.2. На рисунке 3 изображены графики функций $y = 2^x$; $y = 0,5^x$; $y = 4^x$; $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Точка A имеет координаты:

а) $(x_0;\ 2^{x_0})$; б) $(x_0;\ 0{,}5^{x_0})$; в) $(x_0;\ 4^{x_0})$;

г) $(x_0;\ 3^{x_0})$; д) $\left(x_0;\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x_0}\right)$.

Выберите правильный ответ.

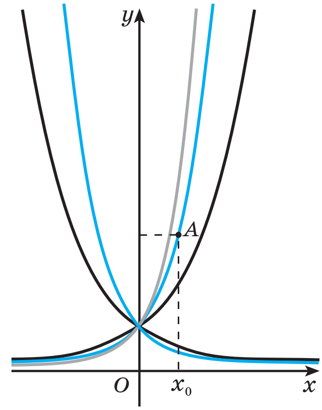


Рис. 3

4.3. Показательная функция задана формулой $f(x) = 25^x$. Найдите:

а) $f(-2)$; б) $f(0)$;

в) $f\left(\frac{1}{3}\right)$; г) $f(\log_5 2)$.

4.4. Найдите значение аргумента, при котором функция $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ принимает значение, равное:

а) $\frac{1}{4}$; б) 64; в) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; г) $32\sqrt{2}$.

4.5. Определите, какая из данных функций является возрастающей на всей области определения, а какая — убывающей:

а) $f(x) = 0{,}25^x - 35$; б) $f(x) = 4 \cdot (0{,}25)^{7-x}$;

в) $f(x) = 3^{1{,}5x-4} \cdot 4^{4x+1}$; г) $f(x) = 10^{2x-5} + x$;

д) $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; е) $f(x) = 6^x + 4^x$.

4.6. Представьте функцию $y = f(x)$ в виде $y = a^x$:

а) $f(x) = 5^{2x} \cdot 25^{-\frac{x}{2}}$ и найдите $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

б) $f(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^{2x} \cdot 4^{-0{,}5x}$ и найдите $f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $f(x) = \dfrac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{2^{2x+4} - 2^{2x+2}}$ и найдите $f(-1)$.

4.7. Найдите множество значений функции:

а) $y = -3^x$; б) $y = 5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{x-4}$; в) $y = 3 - 2^x$; г) $y = 5^{|x|}$.

4.8. Постройте график функции:

а) $y = 3^{|x|}$; б) $y = \left|3^x - 1\right|$; в) $y = 3^{|x|-2}$;

г) $y = 3^{|x-1|}$; д) $y = \left|3^{|x+2|} - 3\right|$; е) $y = \left|\frac{1}{3^{|x|}} - 1\right|$.

4.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = 5^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{\cos x}$; в) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{|\sin x|} - 5$; г) $y = 2^{|\cos x|} + 3$.

4.10. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{\arccos x}$.

4.11. Найдите множество значений функции:

а) $y = 2^{2\sin x - 3}$; б) $y = 5^{\sin x \cos x}$;

в) $y = 3^{(\sin x - \cos x)^2}$; г) $y = 4^{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

4.12. Найдите произведение наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = 4^{\sin^2 x - \cos^2 x + 2}$.

4.13. Найдите множество значений функции:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$;

б) $y = 2^{x + \frac{1}{x}}$;

в) $y = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$;

г) $y = \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right)^{\sin x}$.

4.14. Постройте график функции:

а) $y = 2^{x - |x|}$; б) $y = 2^{|x - 1|} \cdot 0{,}5^{-x}$.

4.15. Верно ли, что график функции $f(x) = 10^x + 0{,}1^x$ симметричен относительно оси ординат?

4.16. Исследуйте на четность (нечетность) функцию:

а) $y = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^x + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x$; б) $y = \frac{5^x - 1}{5^x + 1}$.

4.17. Определите число корней уравнения:

а) $2^x = 1 - 3x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$; в) $3^x = 4 - \sqrt{x}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \operatorname{arctg} x$.

4.18. Запишите в виде натурального логарифма число:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1; е) –2;

ж) –3; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{1}{3}$; к) –0,5; л) $\frac{2}{3}$.

4.19. Найдите значение выражения:

а) $\ln e^3$; б) $e^{\ln 7}$; в) $\ln\frac{1}{e}$; г) $e^{2\ln 5}$.

4.20. Найдите производную функции:

а) $y = e^x - 3x$; б) $y = e^{9x + 2}$; в) $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$; г) $y = \frac{e^{x^2 - 1}}{x^5}$.

4.21. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 3^x + 5x^4$; б) $f(x) = 5^{x^3 - 7x^2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x} \cdot 7^x$; г) $f(x) = \dfrac{\sin x}{6^x}$.

4.22. Вычислите $f'(0)$:

а) $f(x) = e^x \cdot \left(3x^2 + 2x\right)$; б) $f(x) = e^{-x} + \sin x$;

в) $f(x) = 3^{x^2 - 3x - 1}$; г) $f(x) = 3^x - x^4 + 8$.

4.23. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x} - e^{-1}$.

4.24. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = e^{4x - 1}$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$.

4.25. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

4.26. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = e^x - x$; б) $f(x) = x^3 e^{-x}$;

в) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; г) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

4.27. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{2-x}}{\ln 3}$ на отрезке $[-1; 2]$.

§ 5. Показательные уравнения

Выполним несколько тренировочных упражнений на применение тождественных преобразований при решении уравнений и неравенств.

1. Найдите значение выражения 6^{x+1}, если $6^x = 2{,}1$.

Решение.

$6^{x+1} = 6 \cdot 6^x = 6 \cdot 2{,}1 = 12{,}6.$

Ответ: 12,6.

2. Упростите выражение $2^{14x} \cdot 2^{-2x} + 2^{36x} : 4^{12x}$.

Решение.

$$2^{14x} \cdot 2^{-2x} + 2^{36x} : 4^{12x} = 2^{14x + (-2x)} + 2^{36x} : \left(2^2\right)^{12x} = 2^{12x} + 2^{36x} : 2^{24x} =$$

$$= 2^{12x} + 2^{36x - 24x} = 2^{12x} + 2^{12x} = 2 \cdot 2^{12x} = 2^{12x+1}.$$

Ответ: 2^{12x+1}.

3. Сократите дробь $\frac{3^{3x}-6^x}{2^x-9^x}$.

Решение.

$$\frac{3^{3x}-6^x}{2^x-9^x}=\frac{3^{3x}-(2\cdot 3)^x}{2^x-\left(3^2\right)^x}=\frac{3^{3x}-3^x\cdot 2^x}{2^x-3^{2x}}=\frac{3^x\left(3^{2x}-2^x\right)}{2^x-3^{2x}}=-\frac{3^x\left(3^{2x}-2^x\right)}{3^{2x}-2^x}=-3^x.$$

Ответ: -3^x.

4. Найдите значение выражения $0{,}75^x$, если $\frac{3^x+4^{x+1}}{3^{x-1}-2\cdot 4^{x+1}}=-\frac{4}{7}$.

Решение.

Преобразуем равенство

$$\frac{3^x+4^{x+1}}{3^{x-1}-2\cdot 4^{x+1}}=-\frac{4}{7};\quad \frac{3^x+4^x\cdot 4}{\frac{3^x}{3}-2\cdot 4^x\cdot 4}=-\frac{4}{7};\quad \frac{4^x\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x+4\right)}{4^x\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-8\right)}=-\frac{4}{7};$$

$$\frac{0{,}75^x+4}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}75^x-8}=-\frac{4}{7};\quad 7\cdot\left(0{,}75^x+4\right)=-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0{,}75^x-8\right);$$

$$7\cdot 0{,}75^x+28=-\frac{4}{3}\cdot 0{,}75^x+32;\quad \frac{25}{3}\cdot 0{,}75^x=4;\quad 0{,}75^x=\frac{12}{25}.$$

Ответ: $\frac{12}{25}$.

5. Упростите выражение $\frac{4\cdot\left(a\cdot b^2\right)^x-3\cdot\left(b\sqrt{a}\right)^{2x}+a^x\cdot\left(b^4\right)^{\frac{x}{2}}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}$.

Решение.

$$\frac{4\cdot\left(a\cdot b^2\right)^x-3\cdot\left(b\sqrt{a}\right)^{2x}+a^x\cdot\left(b^4\right)^{\frac{x}{2}}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}=\frac{4\cdot a^x\cdot b^{2x}-3\cdot b^{2x}\cdot a^x+a^x\cdot b^{2x}}{a^{x+1}\cdot\left(b^x\right)^2}=\frac{2\cdot a^x\cdot b^{2x}}{a\cdot a^x\cdot b^{2x}}=\frac{2}{a}.$$

Ответ: $\frac{2}{a}$.

6. Упростите выражение $2^x\cdot 3^{2-x}-\frac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2x-2}}$.

Решение.

$$2^x\cdot 3^{2-x}-\frac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2x-2}}=2^x\cdot 3^{2-x}-\frac{\left(2^3\right)^{\frac{x+1}{3}}}{\left(3^2\right)^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+4}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-2}}=$$

$$=\frac{9\cdot 2^x}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^{x-2}}+\frac{2^{x+2}}{3^{x-1}}=\frac{9\cdot 2^x}{3^x}-\frac{2\cdot 9\cdot 2^x}{3^x}+\frac{4\cdot 3\cdot 2^x}{3^x}=\frac{2^x}{3^x}\cdot(9-18+12)=$$

$$=\frac{2^x}{3^x}\cdot 3=2^x\cdot 3^{1-x}.$$

Ответ: $2^x\cdot 3^{1-x}$.

7. Найдите значение выражения $2^x + 2^{-x}$, если $16^x + 16^{-x} = 527$.

Решение.

Возведем обе части равенства $A = 2^x + 2^{-x}$ в квадрат и получим $A^2 = (2^x + 2^{-x})^2$; $A^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x}$; $A^2 = 4^x + 2 + 4^{-x}$, или $A^2 - 2 = 4^x + 4^{-x}$.

Тогда $(A^2 - 2)^2 = (4^x + 4^{-x})^2$; $(A^2 - 2)^2 = 4^{2x} + 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x} + 4^{-2x}$; $(A^2 - 2)^2 = 16^x + 2 + 16^{-x}$. Откуда $(A^2 - 2)^2 - 2 = 16^x + 16^{-x}$.

По условию $16^x + 16^{-x} = 527$. Тогда $(A^2 - 2)^2 - 2 = 527$; $(A^2 - 2)^2 = 529$.

Так как $A^2 - 2 = 4^x + 4^{-x}$, то $A^2 - 2 > 0$, значит, $A^2 - 2 = 23$; $A^2 = 25$.

Поскольку $A = 2^x + 2^{-x}$, то $A > 0$, значит, $A = 5$.

Ответ: 5.

8. Найдите значение выражения 7^{a-b}, если $\dfrac{7^a + 3 \cdot 7^b}{7^a + 7^b} = 2$.

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{7^a + 3 \cdot 7^b}{7^a + 7^b}$ на 7^b и получим

$$\frac{\frac{7^a}{7^b} + 3}{\frac{7^a}{7^b} + 1} = 2; \quad \frac{7^{a-b} + 3}{7^{a-b} + 1} = 2; \quad 7^{a-b} + 3 = 2\left(7^{a-b} + 1\right); \quad 7^{a-b} + 3 = 2 \cdot 7^{a-b} + 2;$$

$7^{a-b} = 1$.

Ответ: 1.

9. Представьте выражение $\dfrac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+2} - 4^{x+1}}$ в виде a^x. В ответ запишите $16a$.

Решение.

$$\frac{3^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+2} - 4^{x+1}} = \frac{3^x\left(3 + 3^2\right)}{4^x\left(4^2 - 4\right)} = \frac{3^x \cdot 12}{4^x \cdot 12} = \frac{3^x}{4^x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x; \quad a = \frac{3}{4}; \; 16a = 12.$$

Ответ: 12.

10. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\sqrt{49^x - 7^x \cdot 2^{y+1} + 4^y} - 2^y}$ при $x = -2$; $y = 103$.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{49^x - 7^x \cdot 2^{y+1} + 4^y} - 2^y} = \frac{1}{\sqrt{7^{2x} - 2 \cdot 7^x \cdot 2^y + 2^{2y}} - 2^y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(7^x - 2^y\right)^2} - 2^y} = \left.\frac{1}{\left|7^x - 2^y\right| - 2^y}\right|_{x=-2;\; y=103} =$$

$$= \frac{1}{\left|7^{-2} - 2^{103}\right| - 2^{103}} = \frac{1}{2^{103} - 7^{-2} - 2^{103}} = \frac{1}{-7^{-2}} = -49.$$

Ответ: -49.

11. Найдите значение выражения $3 \cdot 6^x + 4 \cdot 6^y$, если $6^{\frac{x+y}{2}} = 10$; $6^{\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{3}$.

Решение.

Рассмотрим произведение и частное выражений $6^{\frac{x+y}{2}} = 10$ и $6^{\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{3}$:

$6^{\frac{x+y}{2}} \cdot 6^{\frac{x-y}{2}} = 10 \cdot \frac{1}{3}$; $6^{\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}} = \frac{10}{3}$; $6^x = \frac{10}{3}$;

$6^{\frac{x+y}{2}} : 6^{\frac{x-y}{2}} = 10 : \frac{1}{3}$; $6^{\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}} = 30$; $6^y = 30$.

Тогда значение искомого выражения $3 \cdot 6^x + 4 \cdot 6^y = 3 \cdot \frac{10}{3} + 4 \cdot 30 = 130$.

Ответ: 130.

Рассмотрим несколько примеров решения показательных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\left(\sqrt{7}\right)^{x+3,5} : 3^{x+3,5} = \frac{7}{9}$.

Решение.

$\left(\sqrt{7}\right)^{x+3,5} : 3^{x+3,5} = \frac{7}{9}$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{x+3,5} = \frac{7}{9}$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^{x+3,5} = \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2$; $x + 3,5 = 2$; $x = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

Пример 2. Решите уравнение $\left(5\sqrt[4]{5}\right)^{\frac{x^2-x}{5} - 2} - \sqrt[6]{125} = 0$.

Решение.

$\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{x^2-x}{5} - 2} = \sqrt[6]{5^3}$; $5^{\frac{5}{4}\left(\frac{x^2-x}{5} - 2\right)} = 5^{\frac{1}{2}}$; $\frac{5}{4}\left(\frac{x^2-x}{5} - 2\right) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}\left(x^2 - x\right) - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$;

$x^2 - x - 12 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Ответ: -3; 4.

Пример 3. Решите уравнение $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Решение.

$2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$; $2^{x+3} + 2^x = 3^{x+1} + 3^x$; $2^x\left(2^3 + 1\right) = 3^x\left(3^1 + 1\right)$;

$2^x \cdot 9 = 3^x \cdot 4$; $\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 4. Найдите корень уравнения $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

Решение.

$3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$; $3 \cdot 4^{2x} + \left(4 \cdot 9\right)^x - 2 \cdot 9^{2x} = 0$.

Разделим обе части уравнения на 9^{2x}, $9^{2x} > 0$, и получим $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 2 = 0$.

Пусть $t = \left(\frac{4}{9}\right)^{x}$, $t > 0$, тогда $3t^2 + t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Так как $t > 0$, то $t = \frac{2}{3}$, т. е. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Пример 5. Найдите сумму корней уравнения $\left(2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^{x} + 8\right) \cdot \sqrt{1 - 2x} = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^{x} + 8 = 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0, \end{cases} \\ 1 - 2x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^{x} + 8 = 0, \\ x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решим уравнение $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^{x} + 8 = 0$. Пусть $t = 4^{x}$, $t > 0$, тогда $2t^2 - 17t + 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Получим: $\left[\begin{array}{l} 4^{x} = 8, \\ 4^{x} = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^{3}, \\ 2^{2x} = 2^{-1}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = 3, \\ 2x = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1{,}5, \\ x = -0{,}5. \end{array}\right.$

Условию $x \leqslant \frac{1}{2}$ удовлетворяет $x = -0{,}5$.

Таким образом, корнями уравнения являются числа 0,5 и –0,5. Их сумма равна нулю.

Ответ: 0.

Пример 6. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{2^{x^2 - 2x - 10}} = \sqrt{33 - 2\sqrt{32}} + 1$.

Решение.

Упростим выражение $\sqrt{33 - 2\sqrt{32}} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{32}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{32}\right| = \sqrt{32} - 1$.

Тогда уравнение принимает вид $\sqrt{2^{x^2 - 2x - 10}} = \sqrt{32}$; $2^{x^2 - 2x - 10} = 32$; $2^{x^2 - 2x - 10} = 2^5$; $x^2 - 2x - 10 = 5$; $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Произведение корней данного уравнения равно –15.

Ответ: –15.

Пример 7. Решите уравнение $(\lg 3)^{3x+1} = 16^{\log_2 \lg 3}$.

Решение.

$(\lg 3)^{3x+1} = 16^{\log_2 \lg 3}$; $(\lg 3)^{3x+1} = 2^{4\log_2 \lg 3}$; $(\lg 3)^{3x+1} = \left(2^{\log_2 \lg 3}\right)^4$;

$(\lg 3)^{3x+1} = (\lg 3)^4$; $3x + 1 = 4$; $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 6^x \cdot 5^y = 180. \end{cases}$

Решение.

Разделим первое уравнение системы на второе и получим:

$\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^y = \frac{5}{6}, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-y} = \frac{5}{6}, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 1, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^{y+1} \cdot 5^y = 180; \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^y \cdot 6 \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 6^y \cdot 5^y = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y + 1, \\ 30^y = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

Пример 9. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4^{\sin 2x} + 2^{\sin 2x}$ и $y = 2$.

Решение.

$4^{\sin 2x} + 2^{\sin 2x} = 2$; $2^{2\sin 2x} + 2^{\sin 2x} - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} 2^{\sin 2x} = -2, \\ 2^{\sin 2x} = 1. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней. Решим второе уравнение совокупности: $2^{\sin 2x} = 1$; $\sin 2x = 0$; $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y; \end{cases}$ $\begin{cases} 7 + 3^{2x} = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 6 \cdot 2^y = 3^x - 2^{2y}. \end{cases}$

Пусть $a = 3^x$, $b = 2^y$, тогда система принимает вид $\begin{cases} 7 + a^2 = b + 4a, \\ 11 - 6b = a - b^2; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 4a - b + 7 = 0, \\ b^2 - a - 6b + 11 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - 4a + 4 - b + 3 = 0, \\ b^2 - 6b + 9 - a + 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (a-2)^2 - (b-3) = 0, \\ (b-3)^2 - (a-2) = 0. \end{cases}$

Пусть $m = a - 2$, $n = b - 3$, тогда $\begin{cases} m^2 - n = 0, \\ n^2 - m = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} n = m^2, \\ m^4 - m = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} n = m^2, \\ m(m^3 - 1) = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} n = m^2, \\ \left[\begin{array}{l} m = 0, \\ m = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 1, \\ n = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} m = 0, \\ n = 0. \end{cases} \end{array}\right. \text{ Откуда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 2 = 1, \\ b - 3 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a - 2 = 0, \\ b - 3 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3, \\ b = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x = 3, \\ 2^y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x = 2, \\ 2^y = 3; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \log_3 2, \\ y = \log_2 3. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(1; 2)$; $(\log_3 2; \log_2 3)$.

Пример 11. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 14$.

Решение.

Заметим, что $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3})} =$ $= \sqrt{49 - 48} = 1$, тогда $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} = \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{-1}$ и уравнение принимает вид $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} + \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\cos x}} = 14$.

Пусть $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = t$, тогда $t + t^{-1} = 14$; $t^2 - 14t + 1 = 0$; $t_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Откуда $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 7 - 4\sqrt{3}, \\ \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 7 + 4\sqrt{3}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} (7 + 4\sqrt{3})^{\frac{1}{2\cos x}} = (7 + 4\sqrt{3})^{-1}, \\ (7 + 4\sqrt{3})^{\frac{1}{2\cos x}} = (7 + 4\sqrt{3})^{1}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\cos x} = -1, \\ \dfrac{1}{2\cos x} = 1; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен $-60°$.

Ответ: $-60°$.

Пример 12. Решите уравнение $3^x + 2x - 5 = 0$.

Решение.

$3^x + 2x - 5 = 0$; $3^x = -2x + 5$.

Функция $y = 3^x$ возрастает, а функция $y = -2x + 5$ убывает на множестве действительных чисел, значит, уравнение $3^x = -2x + 5$ имеет не более одного корня. При $x = 1$ данное уравнение обращается в верное числовое равенство, т. е. число 1 является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 13. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$.

Решение.

Оценим левую и правую части уравнения $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$.

По свойству двух взаимно обратных чисел $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$, тогда $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Так как $-1 \leqslant \cos\frac{x}{3} \leqslant 1$, то $-2 \leqslant 2\cos\frac{x}{3} \leqslant 2$. Таким образом, уравнение имеет корни, только если его левая и правая части одновременно равны 2, т. е. $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2, \\ 2\cos\frac{x}{3} = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x = 1, \\ \cos\frac{x}{3} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ \cos\frac{x}{3} = 1; \end{cases}$ $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 14. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $\pi^{|x^2-9|} = \sin\frac{\pi x}{2}$.

Решение.

Оценим левую и правую части данного уравнения.

Поскольку $|x^2 - 9| \geqslant 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и $\pi > 1$, то $\pi^{|x^2-9|} \geqslant 1$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

С другой стороны, $-1 \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} \leqslant 1$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части уравнения равны единице, т. е.

$$\begin{cases} \pi^{|x^2-9|} = 1, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x^2 - 9| = 0, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ \sin\frac{\pi x}{2} = 1. \end{cases}$$

При $x = 3$ получим, что $\sin\frac{3\pi}{2} = -1 \neq 1$, а при $x = -3$ имеем $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

Таким образом, уравнение имеет единственный корень, равный -3.

Ответ: -3.

Пример 15. Найдите произведение корней уравнения
$4 \cdot 4^x + (4x - 13) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$

Решение.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $2^x = t$, т. е. $4 \cdot t^2 + (4x - 13) \cdot t + 3 - x = 0$, тогда $D = (4x - 13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (3 - x) =$
$= 16x^2 - 104x + 169 - 48 + 16x = 16x^2 - 88x + 121 = (4x - 11)^2$.

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(4x-13)+(4x-11)}{8}, \\ t = \dfrac{-(4x-13)-(4x-11)}{8}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4}, \\ t = -x + 3. \end{array}\right. \quad \text{Тогда} \quad \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{1}{4}, \\ 2^x = -x + 3. \end{array}\right.$$

Корнем первого уравнения совокупности является число –2.

Решим второе уравнение совокупности.

Так как функция $y = 2^x$ возрастает, а функция $y = -x + 3$ убывает на множестве действительных чисел, то уравнение $2^x = -x + 3$ имеет не более одного корня. Корнем данного уравнения является число 1.

Произведение корней данного уравнения равно –2.

Ответ: –2.

Пример 16. Найдите количество целых значений a, при которых уравнение $9^x - 5 = 4a^2 - a^4$ имеет корни.

Решение.

$9^x - 5 = 4a^2 - a^4$; $9^x = 4a^2 - a^4 + 5$.

Так как $9^x > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то уравнение имеет корни, если $4a^2 - a^4 + 5 > 0$;
$a^4 - 4a^2 - 5 < 0$; $(a^2 - 5)(a^2 + 1) < 0$; $a^2 - 5 < 0$; $a \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

Целыми значениями a, при которых уравнение имеет корни, являются числа –2; –1; 0; 1; 2. Их количество — 5.

Ответ: 5.

Пример 17. Решите уравнение
$\cos 4^{x+0,5} - \cos^2 4^x + \cos(2,5\pi + 4^{x+0,5}) = 0.$

Решение.

$\cos 4^{x+0,5} - \cos^2 4^x + \cos(2,5\pi + 4^{x+0,5}) = 0;$

$\cos(2 \cdot 4^x) - \cos^2 4^x - \sin(2 \cdot 4^x) = 0.$

Пусть $t = 4^x$, тогда уравнение имеет вид $\cos 2t - \cos^2 t - \sin 2t = 0$;

$$\sin^2 t + 2\sin t \cos t = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin t = 0, \\ 2\cos t + \sin t = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ t = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4^x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 4^x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \log_4(\pi n),\ n \in \boldsymbol{N}, \\ x = \log_4(-\operatorname{arctg} 2 + \pi k),\ k \in \boldsymbol{N}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\log_4(\pi n),\ n \in \boldsymbol{N};\ \log_4(-\operatorname{arctg} 2 + \pi k),\ k \in \boldsymbol{N}$.

5.1. Решите уравнение:

а) $25^x = 5^{3-x}$; б) $0{,}5^{x-12} = 16$; в) $5^{4x-7} = 1$;

г) $(0{,}04)^{2-x} = 25^{-1}$; д) $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; е) $\sqrt{5^{x+2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

5.2. Найдите все корни уравнения:

а) $5^{x^2-2x-1} = 25$; б) $0{,}1^{x^2+x-12} = 1$;

в) $27^{5-x^2} = 3^{x^2-1}$; г) $4^{x^2-8x+12} = \frac{1}{64}$.

5.3. Решите уравнение:

а) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$; б) $10^{x-\sqrt{x^2+5x+1}} = 1000$;

в) $27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$; г) $\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+6}} = 64$.

5.4. Воспользуйтесь свойствами степени и решите уравнение:

а) $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; б) $1000 \cdot 2^x = 5^{-x} \cdot \left(10^{x-1}\right)^x$;

в) $\left(2^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3x}{4}} : 4^{-8} = \frac{12^{16}}{3^{0{,}25x^2}}$; г) $9^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = \sqrt{27^x} \cdot \sqrt[3]{81^{x+3}}$.

5.5. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $(0{,}(3))^{x^2} \cdot 3^{2-2x} = \frac{1}{27}$.

5.6. Решите уравнение $\sqrt[12]{9} - \left(3\sqrt[6]{3}\right)^{\frac{x^2+2x}{7}-1} = 0$.

5.7. Найдите сумму корней уравнения $\left(\frac{25^x}{125}\right)^x - \frac{125^x}{625} = 0$.

5.8. Решите уравнение:

а) $\left(8+3\sqrt{7}\right)^{12x-1} = \left(8-3\sqrt{7}\right)^{3-4x}$;

б) $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{x^2-2} - \left(7+4\sqrt{3}\right)^{4x+3} = 0$.

5.9. Найдите нули функции:

а) $y = 7^x - 3$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$; в) $y = 6^{\frac{x}{2}} - 3$; г) $y = 10^{2x} - 11$.

5.10. Решите уравнение:

а) $9^x = 9 + 8\cdot 3^x$; б) $4^x + 7\cdot 2^{x-1} = 4{,}5$;

в) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; г) $3^{2x}\left(3^{2x+1} + 2\right) = 1$;

д) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 3^{1-x} - 54 = 0$; е) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

5.11. Найдите все корни уравнения $5^{3x+1} + 34\cdot 5^{2x} = 7\cdot 5^x$.

5.12. Решите уравнение $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$.

5.13. Найдите область определения функции $y = \dfrac{5}{2\cdot 3^{2x+3} - 3^{2x+1} - 51}$.

5.14. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $3^x + 3^{3-x} = 12$; б) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

в) $2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x - 7 + 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$; г) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

5.15. Решите уравнение $15\cdot\left(2^x + 2^{-x}\right) = 17\cdot\left(2^x - 2^{-x}\right)$.

5.16. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции $y = 3\cdot 2^{5-3x} - 5\cdot 2^{3x-3}$ и прямой $y = 7$.

5.17. Решите уравнение:

а) $4^{x-2} + 4^{x-1} = 80$; б) $5^x - 3\cdot 5^{x-2} = 110$;

в) $6^{x+1} + 35\cdot 6^{x-1} = 71$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = 36$;

д) $4^{x+1} - 2^{2x-2} = 60$; е) $9^{x+1} + 3^{2x+4} = 30$.

5.18. Найдите все корни уравнения:

а) $5\cdot 2^{x^2-x-1} - 5^{x^2-x} = 0$; б) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6\cdot 3^{2-x}$.

5.19. Найдите нули функции:

а) $y = 2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} - 896$;

б) $y = 4^x - 3^{x-0,5} - 3^{x+0,5} + 2^{2x-1}$;

в) $y = 81^{x-1} - 5^{2x-2} + 4\cdot 9^{2x-3} - 4\cdot 5^{2x-3}$.

5.20. Решите уравнение:

а) $3^{3x+3} + 8\cdot 3^{\frac{3x+1}{2}} = 1$; б) $6^{4x+6} - 5\cdot 6^{\frac{4x+5}{2}} = 1$.

5.21. Решите однородное уравнение:

а) $0{,}6^{3-x} = 2^{x-3}$;
б) $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 10^{x} + 5 \cdot 2^{2x} = 0$;

в) $27 \cdot 16^{x} - 6 \cdot 36^{x} = 8 \cdot 81^{x}$;
г) $3^{2x^2-9} + 25 \cdot 15^{x^2-5} = 2 \cdot 5^{2x^2-8}$;

д) $3 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$;
е) $27^{x} + 12^{x} = 2 \cdot 8^{x}$.

5.22. Найдите значение выражения $1{,}5^{x_1+x_2}$, где $4^{x+1{,}5} + 9^{x} = 6^{x+1}$.

5.23. Решите уравнение $(\lg 5)^{2x-1} = 9^{\log_3 \lg 5}$.

5.24. Найдите произведение корней уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-12+\sqrt{x^2-6}} = 1$.

5.25. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $7^{\sqrt{x+5}} \cdot 7^{\sqrt{2x+8}-7} = \ln e$.

5.26. Решите уравнение:

а) $3^{|\sin x - 2|} = 27$;
б) $5^{|\cos x - 2|} = 125$;

в) $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$;
г) $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$.

5.27. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 9^{\cos x} + 2 \cdot 3^{\cos x}$ и $y = 15$.

5.28. Найдите наименьший положительный корень уравнения $5^{\cos^2 x - \sin^2 x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.29. Решите уравнение $2^{1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = 8$.

5.30. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - \log_2 16$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$.

5.31. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3^{x} - 5} = 11 - 3^{x}$;
б) $\sqrt{2 \cdot 5^{x} + 6} = 5^{x} - 1$;

в) $\sqrt{5^{x} - 1} = 7 - 5^{x}$;
г) $\sqrt{2^{x+1} - 7} = 9 - 2^{x+1}$;

д) $\sqrt{4^{x} - 2^{x} - 2} = \sqrt{4 \cdot 2^{x} - 6}$;
е) $\sqrt{3^{x} - 9^{x}} = \sqrt{3 - 3^{x+1}}$.

5.32. Найдите все корни уравнения $\sqrt{4 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{3x} + 3^{4x}} = 6 \cdot 3^{x} + 9$.

5.33. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $7^{x} + 24^{x} = 25^{x}$;
б) $12^{x} + 5^{x} = 13^{x}$;
в) $5^{x} = 27 - x$;

г) $3^{x} + 5x - 1 = 0$;
д) $2^{x+1} = -x - 1{,}5$;
е) $3^{\frac{x}{2}} = -0{,}5x + 4$.

5.34. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $y = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x$ и прямой $y = 10$;

б) $y = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x$ и прямой $y = 4$.

5.35. Решите уравнение $\left(\sqrt{5} + 2\right)^{\sin x} - \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\sin x} = 4$.

5.36. Найдите произведение корней уравнения

$\left(\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{x-5} + \left(\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{x-5} = 4$.

5.37. Найдите сумму корней уравнения $x \cdot 5^{x-1} + 5 \cdot 5^{\sqrt{7-x}} = 5^x + x \cdot 5^{\sqrt{7-x}}$.

5.38. Решите уравнение:

а) $\sqrt[7]{2^{x-5}} = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + 1\right)^{3x+1}$; б) $\sqrt[10]{6^{7x-1}} - \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - 1\right)^{2x-5} = 0$.

5.39. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения:

а) $2^{2x^2 - 2x - 4} - 15 \cdot 2^{x^2} - 2^{2x+8} = 0$; б) $3^{2x^2 - 4x - 3} - 8 \cdot 3^{x^2} - 3^{4x+5} = 0$;

в) $9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2 + 2x + 3} + 3^{4x+7} = 0$; г) $5^{2x^2} - 6 \cdot 5^{(x+1)(x+3)} = -5^{8x+7}$.

5.40. Решите уравнение:

а) $2^{x^2 - 4x + 5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$; б) $3^x + 3^{-x} = 2\left(1 - \sin^2 \pi x\right)$.

5.41. Найдите количество корней уравнения

$4^{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} + 4^{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} = \sqrt{13 + 6x - 3x^2}$.

5.42. Найдите значение выражения 3^m, где m — сумма корней уравнения $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0$.

5.43. Найдите все корни уравнения:

а) $8 \cdot 2^{|x|} + 7 \cdot 2^x = 30$; б) $15 \cdot 3^{|x|} + 9 \cdot 3^x = 32$.

5.44. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4 \cdot 5^x - 3 \cdot 2^y = -4, \\ 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2^y = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^y = -6, \\ 4^x + 2 \cdot 3^y = 22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 49^{2x+y} = 7, \\ x + 6 = 2y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 16^{2x-y} = 4, \\ x + 2 = 2y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 4, \\ 2^x \cdot 3^y = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \dfrac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32. \end{cases}$

5.45. Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x;\ y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

5.46. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

5.47. Найдите значение выражения $3^{2x_0} + 2y_0$, где $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0, \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11. \end{cases}$

5.48. Найдите все значения числа a, при которых уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4a^2 = \frac{1}{4}$ имеет корни.

5.49. Найдите количество корней уравнения
$\sqrt{6x - x^2 - 5} \cdot \left(3 \cdot 5^{2\sin x - 1} - 2 \cdot 5^{\sin x - 1} - 0{,}2\right) = 0.$

5.50. Найдите произведение корней уравнения
$9^x - (14 - x) \cdot 3^x - 3x + 33 = 0.$

5.51. Решите уравнение $\mathrm{tg}^2\, 2^x - 3\mathrm{tg}\, 2^x + 4 = 3\mathrm{ctg}\, 2^x - \mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2^x\right).$

5.52. Решите уравнение $f'(x) = a$, если:

а) $f(x) = 7e^{x+4}$, $a = \frac{7}{e}$; б) $f(x) = 5e^{7-3x}$, $a = -15$.

5.53. Решите уравнение:

а) $3^x + 5^x = 2^{3x}$; б) $2^x + 3^x + 4^x = 29$.

5.54. Найдите 3^x, где x — наименьший корень уравнения $3^x \cdot 2^{\frac{x}{x-1}} = 36.$

5.55. Решите уравнение:

а) $2^{-x+2} - 2^{-2+x} = 2^{x^2-1} - 2^{1-x^2}$; б) $2^{x^2-3x+1} - 3^{3x-x^2-1} = 4^x - 9^{-x}$.

5.56. Найдите сумму корней уравнения

$\left(26 + 15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = 5.$

§ 6. Показательные неравенства

Пример 1. Решите неравенство $0{,}5^x < 7$.

Решение.

Представим число 7 в виде степени с основанием 0,5 и получим: $0{,}5^x < 7$; $0{,}5^x < 0{,}5^{\log_{0,5} 7}$. Функция $y = 0{,}5^t$ убывает на области определения $\left(a = 0{,}5 \in (0;\ 1)\right)$, значит, $x > \log_{0,5} 7$.

Ответ: $\left(\log_{0,5} 7;\ +\infty\right)$.

Пример 2. На рисунке 4 изображены графики функций $y = -2^x$ и $y = -\frac{8}{x}$. Решите неравенство $-2^x > -\frac{8}{x}$.

Решение.

График функции $y = -2^x$ расположен выше графика функции $y = -\frac{8}{x}$ для $x \in (0;\ 2)$. Значит, решением неравенства $-2^x > -\frac{8}{x}$ является промежуток $(0;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 2)$.

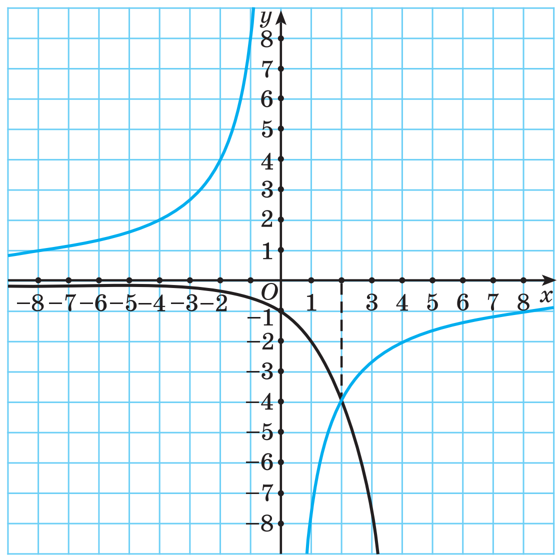


Рис. 4

Пример 3. Решите неравенство $\left(\sqrt{2}\cos 1\right)^{x^2 - 2x} \leqslant \left(\sqrt{2}\cos 1\right)^8$.

Решение.

Поскольку 1 рад $\approx 57°$, $57° > 45°$ и $\cos 1 < \cos 45°$, то $\cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sqrt{2}\cos 1 < 1$. Значит, функция $y = \left(\sqrt{2}\cos 1\right)^t$ является убывающей, и исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 2x \geqslant 8$; $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$; $x \in (-\infty;\ -2] \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2] \cup [4;\ +\infty)$.

Пример 4. Найдите область определения функции $y = \sqrt[14]{1 - 7^{x^2 - x}}$.

Решение.

$1 - 7^{x^2 - x} \geqslant 0$; $7^{x^2 - x} \leqslant 1$; $7^{x^2 - x} \leqslant 7^0$. Функция $y = 7^t$ возрастает на области определения $(a = 7 > 1)$, значит, $x^2 - x \leqslant 0$; $x(x - 1) \leqslant 0$; $x \in [0;\ 1]$.

Ответ: $[0;\ 1]$.

Пример 5. Решите неравенство $8^x - 4^x > 2^{x+1}$.

Решение.

Поскольку $2^x > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то разделим обе части неравенства на 2^x и получим $4^x - 2^x > 2$; $4^x - 2^x - 2 > 0$.

Пусть $t = 2^x$, $t > 0$, тогда $t^2 - t - 2 > 0$; $t \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Так как $t > 0$, то $t \in (2; +\infty)$, значит, $t > 2$, т. е. $2^x > 2$; $x > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Пример 6. Найдите наименьшее целое решение неравенства $9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}$.

Решение.

Так как $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ и $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$, то неравенство

$9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}$ принимает вид $9^x + 8 \cdot 9^x > 4^x + 5 \cdot 4^x$; $9 \cdot 9^x > 6 \cdot 4^x$;

$9 \cdot \frac{9^x}{4^x} > 6$; $\frac{9^x}{4^x} > \frac{6}{9}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^x > \frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$.

Так как $\frac{3}{2} > 1$, то функция $y = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ возрастает на области определения, значит, $x > -\frac{1}{2}$. Наименьшее целое решение неравенства равно нулю.

Ответ: 0.

Пример 7. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 49^x > 0$.

Решение.

Разделим обе части неравенства $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 49^x > 0$ на 49^x, $49^x > 0$, и получим $2 \cdot \left(\frac{4}{49}\right)^x - 9 \cdot \left(\frac{14}{49}\right)^x + 7 > 0$; $2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 7 > 0$.

Пусть $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$, тогда неравенство принимает вид $2t^2 - 9t + 7 > 0$. Нулями функции $y = 2t^2 - 9t + 7$ являются числа 1 и 3,5, значит, $\left[\begin{array}{l} t > 3{,}5, \\ t < 1. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{7}\right)^x > 3{,}5, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x < 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{7}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}, \\ \left(\frac{2}{7}\right)^x < \left(\frac{2}{7}\right)^0. \end{array}\right.$

Так как $\frac{2}{7} \in (0; 1)$, то $\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 0; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Наибольшее целое отрицательное решение неравенства равно -2.

Ответ: -2.

Пример 8. Известно, что график функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, проходит выше прямой $y = 1$ при $x < 0$. Найдите сумму целых значений аргумента из области определения функции $y = \sqrt{a^{x^2 - 6x + 8} - 1}$.

Решение.

Так как график функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, проходит выше прямой $y = 1$ при $x < 0$, то функция $y = a^x$ убывает на области определения, значит, $0 < a < 1$.

Найдем область определения функции $y = \sqrt{a^{x^2 - 6x + 8} - 1}$. $a^{x^2 - 6x + 8} - 1 \geqslant 0$; $a^{x^2 - 6x + 8} \geqslant 1$; $a^{x^2 - 6x + 8} \geqslant a^0$, поскольку $0 < a < 1$, то $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$; $x \in [2;\ 4]$.

Сумма целых значений аргумента из области определения функции равна $2 + 3 + 4 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 9. Найдите количество целых решений неравенства $\left(\sqrt{5} - 2\right)^x \geqslant 9 - 4\sqrt{5}$ на промежутке $[0; 18]$.

Решение.

Заметим, что $9 - 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$, и запишем неравенство в виде $\left(\sqrt{5} - 2\right)^x \geqslant \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$. Так как $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$, то $x \leqslant 2$.

На промежутке $[0; 18]$ неравенство имеет три целых решения.

Ответ: 3.

Пример 10. Найдите произведение наибольшего и наименьшего решений неравенства $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} - \left(\sqrt{3 + \sqrt{8}} - 1\right)^x \leqslant 0$.

Решение.

Упростим выражение

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} - 1 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} - 1 = \left|\sqrt{2} + 1\right| - 1 = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}.$$

Тогда неравенство принимает вид $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} - \left(\sqrt{2}\right)^x \leqslant 0$;

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2 + 4x + 1} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^x$; $2^{\frac{x^2 + 4x + 1}{3}} \leqslant 2^{\frac{x}{2}}$; $\dfrac{x^2 + 4x + 1}{3} \leqslant \dfrac{x}{2}$; $2x^2 + 8x + 2 \leqslant 3x$; $2x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$; $x \in \left[-2;\ -\frac{1}{2}\right]$.

Произведение наибольшего и наименьшего решений неравенства равно $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Ответ: 1.

Пример 11. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+2<3\left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

Решение.

Так как $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1$, то $\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Тогда неравенство принимает вид $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+2<\frac{3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}$. Пусть $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $t>0$, тогда $\begin{cases}t+2<\frac{3}{t},\\ t>0;\end{cases}$ $\begin{cases}t^2+2t-3<0,\\ t>0;\end{cases}$ $\begin{cases}t\in(-3;\,1),\\ t>0;\end{cases}$ $t\in(0;\,1)$.

Таким образом, $\left(2+\sqrt{3}\right)^x<1$. Так как $2+\sqrt{3}>1$, то $x<0$. Наибольшее целое решение неравенства равно -1.

Ответ: -1.

Пример 12. Решите двойное неравенство $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9$.

Решение.

Так как $3>1$, то неравенство $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9$ равносильно неравенству $0<\left|x^2-x\right|<2$; $\begin{cases}\left|x^2-x\right|<2,\\ \left|x^2-x\right|>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x<2,\\ x^2-x>-2,\\ x^2-x\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x-2<0,\\ x^2-x+2>0,\\ x(x-1)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+1)<0,\\ x\in \boldsymbol{R},\\ x\neq 0,\\ x\neq 1;\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-1;\,2),\\ x\neq 0,\\ x\neq 1;\end{cases}$ $x\in(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)$.

Ответ: $(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)$.

Пример 13. Найдите количество целых решений неравенства $2^{x^2-4x+5}\leqslant 4x-2-x^2$.

Решение.

Запишем неравенство $2^{x^2-4x+5}\leqslant 4x-2-x^2$ в виде $2^{(x-2)^2+1}\leqslant-(x-2)^2+2$.

Оценим левую часть неравенства: $(x-2)^2+1\geqslant 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$. Так как $2>1$, то $2^{(x-2)^2+1}\geqslant 2^1$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

Оценим правую часть неравенства: $-(x-2)^2+2\leqslant 2$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

Таким образом, левая часть неравенства больше или равна двум при любых значениях переменной, а правая часть этого неравенства меньше или равна двум, т. е. неравенство верно, только если его обе части одновременно равны двум. Таким образом, неравенство $2^{(x-2)^2+1} \leqslant -(x-2)^2+2$ равносильно системе $\begin{cases} 2^{(x-2)^2+1} = 2, \\ -(x-2)^2+2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ x = 2; \end{cases}$ $x = 2$.

Неравенство имеет только одно решение, являющееся целым числом.

Ответ: 1.

Рассмотрим показательные неравенства, которые можно решить заменой выражений на знакосовпадающие.

Заметим, что знак выражения $a^{t_1} - a^{t_2}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(t_1-t_2)$ при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$. Покажем это:

1. Пусть $a > 1$, тогда функция $y = a^t$ возрастающая, и если $t_1 > t_2$, то $a^{t_1} - a^{t_2} > 0$, а если $t_2 > t_1$, то $a^{t_1} - a^{t_2} < 0$. При $a > 1$, т. е. $a - 1 > 0$, если $t_1 > t_2$, то $(a-1)(t_1-t_2) > 0$, а если $t_2 > t_1$, то $(a-1)(t_1-t_2) < 0$, т. е. знак выражения $a^{t_1} - a^{t_2}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(t_1-t_2)$.

2. Пусть $0 < a < 1$, тогда функция $y = a^t$ убывающая, и если $t_1 > t_2$, то $a^{t_1} - a^{t_2} < 0$, а если $t_2 > t_1$, то $a^{t_1} - a^{t_2} > 0$. При $a < 1$, т. е. $a - 1 < 0$, если $t_1 > t_2$, то $(a-1)(t_1-t_2) < 0$, а если $t_2 > t_1$, то $(a-1)(t_1-t_2) > 0$, т. е. знак выражения $a^{t_1} - a^{t_2}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(t_1-t_2)$.

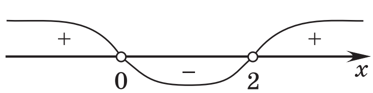
Пример 14. Решите неравенство $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Решение.

$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$; $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x - 25 > 0$; $2^x\left(25 - 5^x\right) - \left(25 - 5^x\right) > 0$; $\left(25 - 5^x\right)\left(2^x - 1\right) > 0$; $\left(5^x - 5^2\right)\left(2^x - 2^0\right) < 0$.

Так как знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\left(f(x) - g(x)\right)$, то неравенство $\left(5^x - 5^2\right)\left(2^x - 2^0\right) < 0$ заменим равносильным ему неравенством $(5-1)(x-2)(2-1)(x-0) < 0$; $x(x-2) < 0$.

Решим полученное неравенство методом интервалов.



$x \in (0; 2)$.

Ответ: (0; 2).

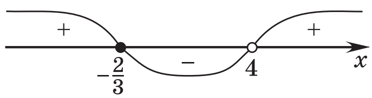
Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{(5\sqrt{5})^x - 0{,}2}{x-4} \geqslant 0.$

Решение.

$\dfrac{\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^x - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0;\quad \dfrac{5^{1{,}5x} - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0.$

Так как знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)$, то неравенство $\dfrac{5^{1{,}5x} - 5^{-1}}{x-4} \geqslant 0$ заменим равносильным ему неравенством $\dfrac{(5-1)\big(1{,}5x - (-1)\big)}{x-4} \geqslant 0;$ $\dfrac{1{,}5x+1}{x-4} \geqslant 0.$

Воспользуемся методом интервалов:



$x \in \left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right] \cup (4;\ +\infty).$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right] \cup (4;\ +\infty).$

Пример 16. Найдите сумму целых решений неравенства

$\left(7^x - 7^{x^2+6}\right)\left(5^{x^2-1} - 5^{2x+7}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6}\right) \geqslant 0.$

Решение.

Так как знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)$, то неравенство

$$\left(7^x - 7^{x^2+6}\right)\left(5^{x^2-1} - 5^{2x+7}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-6}\right) \geqslant 0$$

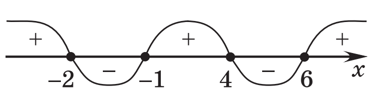
заменим равносильным ему неравенством

$$(7-1)\left(x - x^2 - 6\right)(5-1)\left(x^2 - 1 - 2x - 7\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(5x - x^2 + 6\right) \geqslant 0;$$

$$-\left(-x^2 + x - 6\right)\left(x^2 - 2x - 8\right)\left(-x^2 + 5x + 6\right) \geqslant 0;$$

$$\left(x^2 - x + 6\right)\left(x^2 - 2x - 8\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) \leqslant 0.$$

Так как $x^2 - x + 6 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то $\left(x^2 - 2x - 8\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) \leqslant 0;$ $(x-4)(x+2)(x-6)(x+1) \leqslant 0.$



$x \in [-2;\ -1] \cup [4;\ 6].$

Сумма целых решений неравенства равна 12.

Ответ: 12.

Пример 17. Решите неравенство $x \cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x$.

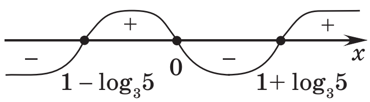
Решение.

$x \cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x$; $x \cdot \left(3^{|x-1|} - 5\right) \geqslant 0$; $x \cdot \left(3^{|x-1|} - 3^{\log_3 5}\right) \geqslant 0$.

Полученное неравенство заменим равносильным ему неравенством $x \cdot (3-1)\left(|x-1| - \log_3 5\right) \geqslant 0$; $x\left(|x-1| - \log_3 5\right) \geqslant 0$.

Найдем нули функции $f(x) = x\left(|x-1| - \log_3 5\right)$.

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ |x-1| = \log_3 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 1 = \log_3 5, \\ x - 1 = -\log_3 5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 + \log_3 5, \\ x = 1 - \log_3 5. \end{array}\right.$$



$x \in \left[1 - \log_3 5;\ 0\right] \cup \left[1 + \log_3 5;\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left[1 - \log_3 5;\ 0\right] \cup \left[1 + \log_3 5;\ +\infty\right)$.

6.1. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < 125^{x+1}$; б) $0{,}25^{1-4x} \leqslant 64$; в) $3^{3x+15} - 1 > 0$;

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-24}$; д) $125^{x+2} - \sqrt[3]{5} > 0$; е) $49 \cdot 7^x > 7^{3x+1}$.

6.2. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x^2} < \left(\frac{9}{49}\right)^4$; б) $2^{x^2} \leqslant 32$; в) $5^{x^2-x+1} \geqslant 125$;

г) $36^{0,5x^2-3} > \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$; д) $16^{0,5x^2-1} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; е) $2^{2x^2-5x-1} > 0{,}5\sqrt[3]{4^{2x}}$.

6.3. Найдите все значения переменной, при которых значение данного выражения не больше единицы:

а) 7^{x^2-25}; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{5x^2-x}$; в) e^{x^3-x}; г) $\pi^{4x^3-x^2}$.

6.4. Используйте свойства степени и решите неравенство:

а) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$; б) $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} - 8^{3x} \geqslant 0$;

в) $\sqrt[5]{27} : 3^{8x-1} \geqslant 9^{5x}$; г) $0{,}5\sqrt{32^{-x}} > \frac{2}{4^x}$;

д) $12^{x-2} \leqslant 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; е) $100 : 2^{3-x^2} \geqslant 5^{3-x^2} \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$.

6.5. Найдите произведение наибольшего и наименьшего целого решений неравенства $e^{x^2} - \frac{1}{e^{12x+27}} \leqslant 0$.

6.6. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

6.7. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{32^{\frac{3x-4}{x}} - 2^{\frac{5x}{2}}}$; б) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{27}}}$.

6.8. Решите неравенство:

а) $0{,}3^{\frac{x^2-16}{x-5}} < 1$; б) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{x+7}{x^2-4}} \geqslant 1$.

6.9. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{x}{x-2}} \geqslant \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{6}{x-1}}$.

6.10. Найдите сумму целых решений неравенства
$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{35}\right)^{3x^2} - \frac{1}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{35}\right)^{15-18x}} \geqslant 0$.

6.11. Решите неравенство:

а) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$; б) $0{,}25^x - 6 \cdot 0{,}5^x \geqslant -5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 < 0$; г) $4^x + 1 \leqslant \frac{5}{2^{1-x}}$;

д) $4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 < 0$; е) $4^{x-3} + 0{,}25 \cdot 0{,}5^{-2x} > 34$.

6.12. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = 5^{2x+1} - 5^x - 4$; б) $y = 4^{x+1} - 16^x - 3$; в) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$.

6.13. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$2^{-3x+1} - 4^{-x} \cdot 7 - 2^{-x+2} < 0$.

6.14. Решите неравенство $4^{\frac{1-2x}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

6.15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 1{,}2^{0{,}5x^2-3} > 0{,}6, \\ 16^x - 6 \cdot 4^x + 8 \geqslant 0. \end{cases}$

6.16. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $f(x) = 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}$ расположен не ниже прямой $y = 6$.

6.17. Решите неравенство:

а) $2^{x+1} \leqslant 3^x$; б) $6^x \geqslant 7^{1-x}$;

в) $36^x - 12^x \geqslant 12 \cdot 4^x$; г) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}} < 0$.

6.18. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $f(x) = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x$ расположен выше оси абсцисс.

6.19. Найдите все решения неравенства:

а) $2^{x+1} - 2^{x-1} \leqslant 1{,}5$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} > 42$;

в) $5^{x-2} + \frac{5^x}{5} \leqslant 150$; г) $2 \cdot 3^{x-6} + 6 \cdot 9^{0{,}5x-2} \leqslant 56$;

д) $4 \cdot 9^{1{,}5x-1} - 27^{x-1} \geqslant 33$; е) $7^{x^2-5x-5} + 7^{x^2-5x-6} \leqslant 8$.

6.20. Решите неравенство $3^{x+1} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} < 10{,}5$.

6.21. Найдите все значения аргумента, при которых функция $f(x) = 2^{x^2+2} - 2^{x^2+3} - 2^{x^2+4} - 5^{x^2+1} + 5^{x^2+2}$ принимает отрицательные значения.

6.22. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{x+3} - 2 \cdot 3^x \geqslant 2\frac{7}{9}, \\ 10^{x^2+2x-3} < 1. \end{cases}$

6.23. Найдите произведение наибольшего целого отрицательного и наибольшего целого положительного решений неравенства

$8^{\frac{1}{x+1}} \cdot 128^{\frac{1}{x+2}} < 64^{\frac{1}{x-1}}$.

6.24. Решите двойное неравенство:

а) $0{,}5 < 2^{1-2x} < 128$; б) $\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} < 27$.

6.25. Найдите сумму целых решений неравенства $-4 < 3^{x^2-2x+1} - 5 \leqslant 22$.

6.26. Выполните замену переменной и решите неравенство:

а) $\dfrac{5^x+1}{0{,}3-5^x}\geqslant 1$; б) $\dfrac{1}{2^x-1}>\dfrac{1}{1-2^{x-1}}$;

в) $\dfrac{7^x-30}{7^{x-1}+1}\leqslant -14$; г) $\dfrac{2^{x+1}-22}{2^x-2}\geqslant 1$.

6.27. Решите неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1$.

6.28. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\left(8-3\sqrt{7}\right)^x\geqslant\left(8+3\sqrt{7}\right)^{\frac{3}{x-4}}$.

6.29. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}0{,}1^{x^2+1}\geqslant 0{,}01,\\4^{2x+3}\geqslant 16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^{0{,}5x^2-3}>0{,}5,\\16^x-6\cdot 4^x+8\geqslant 0.\end{cases}$

6.30. Решите неравенство:

а) $0{,}2<5^{|x+1|}<125$; б) $0{,}5^{\frac{|2x-1|}{x-3}}\cdot\sqrt{20}\geqslant\sqrt{5}$; в) $2x\cdot 7^{x-1}\geqslant|x|$;

г) $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\leqslant 3$; д) $\dfrac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$; е) $0{,}2^{\left|\frac{x-1}{x+3}\right|}<\dfrac{1}{25}$.

6.31. Найдите произведение наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного решений неравенства $3\cdot 2^{|2x|}-5\cdot 6^{|x|}+2\cdot 3^{|2x|}>0$.

6.32. Решите неравенство:

а) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\sin x}>0{,}(6)$; б) $e^{\sin x\cos x}\leqslant e^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

6.33. Найдите все решения неравенства $\dfrac{6}{3^{|\sin x|}-1}>3^{|\sin x|}$.

6.34. Решите неравенство $f'(x)\geqslant b$, если:

а) $f(x)=0{,}25e^{4x-5}$, $b=e^7$; б) $f(x)=2x+e^{7x+1}$, $b=9$.

6.35. Решите неравенство:

а) $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}\geqslant 0$; б) $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}\geqslant 3^{2x^2-6x+3}$.

6.36. Решите неравенство $\sqrt{4^x - 8 \cdot 7^{-x}} < 7^{1-\frac{x}{2}} - 2^{x+1}$.

6.37. Найдите сумму целых решений неравенства $\left(\frac{2\sin 1}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+2x} \geqslant \left(\frac{2\sin 1}{\sqrt{3}}\right)^8$.

6.38. Решите неравенство:

а) $3^x < 4 - x$; б) $2^x > \frac{3-5x}{3}$.

6.39. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} - 1 \geqslant 5\left|\sin\frac{x}{5}\right|$.

6.40. Решите неравенство:

а) $\frac{4^x - 2}{5 - x} \geqslant 0$; б) $\frac{2^x - 1}{125 - 5^x} \leqslant 0$; в) $\frac{x^2 - 4}{2^x - 3} < 0$;

г) $\frac{(5^x - 5)(16 - 2^x)}{3^x} \geqslant 0$; д) $\frac{7^x(81 - 3^x)}{(3^x - 1)(5^x - 2)} \geqslant 0$; е) $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{3^x - 5} > 0$.

6.41. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} < 0$.

6.42. Найдите количество целых решений неравенства

$$9 \cdot 2^x \cdot \sqrt{3+x} + 9x \cdot 2^x + 3 \geqslant 27 \cdot 2^x + \sqrt{3+x} + x$$

на промежутке [–3; 15].

6.43. Решите неравенство:

а) $(x+1)^2 \cdot 3^{x-2} - 3^{x+3} \geqslant 0$; б) $5^{x+2} - (x+2)^2 \cdot 5^{x-1} \geqslant 0$.

6.44. Решите неравенство:

а) $(7x^2 - 6x - 1)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}\right) \geqslant 0$;

б) $\left(10^x - 10^{x^2+2}\right)\left(3^{x^2-4} - 3^{2x+4}\right)\left(0{,}2^{3x} - 0{,}2^{x^2-4}\right) < 0$.

6.45. Найдите произведение целых решений неравенства

$$\left(4x^2 + 4x - 3\right)\left(5^{2x^2} - 5^{x+3}\right) \leqslant 0.$$

§ 7. Свойства логарифмов

Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ b > 0.$$

Десятичный логарифм: $\log_{10} a = \lg a$.

Натуральный логарифм: $\log_e a = \ln a$.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc) \qquad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \qquad \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \qquad a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$$

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c| \ \ (bc > 0)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c| \ \ (bc > 0)$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a |b| \ \ (b \neq 0,\ n = 2k,\ k \in \boldsymbol{Z})$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_{|a|} b \ \ (a \neq 0,\ m = 2k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \neq 0)$$

Пример 1. Найдите значение выражения $\dfrac{2\log_7 2 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9}$.

Решение.

$$\frac{2\log_7 2 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9} = \frac{\log_7 4 - \log_7 36}{\log_7 3 - \log_7 9} = \frac{\log_7 \frac{1}{9}}{\log_7 \frac{1}{3}} = \frac{2\log_7 \frac{1}{3}}{\log_7 \frac{1}{3}} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Сравните значения выражений $\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right)$ и $-64^{0,5}$.

Решение.

$$\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right) = \log_{5^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{5^{\frac{1}{6}}}{5^3}\right) = 3\log_5 5^{-2\frac{5}{6}} = -\frac{17\cdot 3}{6} = -8,5;\quad -64^{0,5} = -8;\quad -8,5 < -8.$$

Ответ: $\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{\sqrt[6]{5}}{125}\right) < -64^{0,5}$.

Пример 3. Вычислите: $\frac{3}{7}\cdot\left(\log_2 32 + 81^{\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14}$.

Решение.

$$\frac{3}{7}\cdot\left(\log_2 32 + 81^{\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot\left(5 + 3^{4\log_3 2}\right)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot\left(5 + 3^{\log_3 16}\right)^{\log_{21} 14} =$$

$$= \frac{3}{7}\cdot(5+16)^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot 21^{\log_{21} 14} = \frac{3}{7}\cdot 14 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 4. Вычислите: $\left(15 + 7^{1+\log_7 9}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4$.

Решение.

$$\left(15 + 7^{1+\log_7 9}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4 = \left(15 + 7\cdot 7^{\log_7 9}\right)\cdot\log_2 3^{\frac{1}{2}}\cdot\log_3 2^2 =$$

$$= (15 + 7\cdot 9)\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2 = 78\cdot\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3} = 78.$$

Ответ: 78.

Пример 5. Дано: $\log_a b = 5$. Найдите $\log_{a^5}\left(a^5\cdot b^5\right)$.

Решение.

$$\log_{a^5}\left(a^5\cdot b^5\right) = \log_{a^5}(ab)^5 = 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\log_a(ab) = \log_a a + \log_a b =$$

$$= 1 + \log_a b\Big|_{\log_a b = 5} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 6. Вычислите: $\frac{\log_{0,4}\log_9 243 + 8^{4\log_{16} 3}}{\log_7 196 - 2\log_7 2}$.

Решение.

$$\frac{\log_{0,4}\log_9 243 + 8^{4\log_{16} 3}}{\log_7 196 - 2\log_7 2} = \frac{\log_{0,4}\frac{5}{2} + 8^{\log_2 3}}{\log_7 196 - \log_7 4} = \frac{\log_{0,4} 0,4^{-1} + 2^{3\log_2 3}}{\log_7 49} = \frac{-1 + 2^{\log_2 27}}{2} =$$

$$= \frac{-1+27}{2} = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 7. Найдите значение выражения

$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6 + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

Решение.

$$\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6 + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3} =$$

$$= \log_4 24 - \log_4 9 \cdot \frac{\log_4 13}{\log_4 9} \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 13} + 3^{\log_5 7} - 3^{\log_5 7} =$$

$$= \log_4 24 - \log_4 6 = \log_4 4 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 8. Найдите значение выражения $\log_3 \sin^5 \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9$.

Решение.

$$\log_3 \sin^5 \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 = 5\log_3 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 = 5 \cdot \frac{1}{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 3} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9 =$$

$$= 5 \cdot \frac{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 9}{\log_{\sin\frac{\pi}{7}} 3} = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 9. Вычислите: $\left(\left(25 - \log_2^2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 7^{\log_7 6}$.

Решение.

$$\left(\left(25 - \log_2^2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 7^{\log_7 6} =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right)\left(5 + \log_2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right)\left(\log_2 32 + \log_2 5\right) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 (32 \cdot 5) \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 160 \cdot \log_{160} 2 + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(\left(5 - \log_2 5\right) \cdot \log_2 160 \cdot \frac{1}{\log_2 160} + \log_2 5\right) \cdot 6 =$$

$$= \left(5 - \log_2 5 + \log_2 5\right) \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30.$$

Ответ: 30.

Пример 10. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$.

Решение.

$$\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5} - \frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5} = \log_5 250 \cdot \log_5 50 - \log_5 10 \cdot \log_5 1250 =$$

$= \log_5 250 \cdot \log_5 (5 \cdot 10) - \log_5 10 \cdot \log_5 (5 \cdot 250) =$

$= \log_5 250 \cdot (\log_5 5 + \log_5 10) - \log_5 10 \cdot (\log_5 5 + \log_5 250) =$

$= \log_5 250 \cdot (1 + \log_5 10) - \log_5 10 \cdot (1 + \log_5 250) =$

$= \log_5 250 + \log_5 250 \cdot \log_5 10 - \log_5 10 - \log_5 10 \cdot \log_5 250 =$

$= \log_5 250 - \log_5 10 = \log_5 25 = 2.$

Ответ: 2.

Пример 11. Найдите значение выражения

$$4^{\log_{0,25} 0,01} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{8 - 2\sqrt{15}}.$$

Решение.

$$4^{\log_{0,25} 0,01} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{8 - 2\sqrt{15}} =$$

$$= 4^{\log_4 100} + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_9 (8 - 2\sqrt{15}) =$$

$$= 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_{3^2} (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_3 \left|\sqrt{5} - \sqrt{3}\right| =$$

$$= 100 + \log_3 \frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \log_3 (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 100 + \log_3 \left(\frac{81}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})\right) =$$

$$= 100 + \log_3 81 = 100 + 4 = 104.$$

Ответ: 104.

Пример 12. Вычислите: $\log_2 \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right|.$

Решение.

$$\log_2 \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right| = \log_2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| =$$

$$= \log_2 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)^{-1} - \left|\log_{0,5} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\right| = \log_2 \left(\frac{2}{2 - \sqrt{3}}\right) - \left|\log_2 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\right| =$$

$$= \log_2 2 - \log_2 (2 - \sqrt{3}) - \left|\log_2 (2 + \sqrt{3}) - \log_2 2\right| =$$

$$= 1 - \log_2 (2 - \sqrt{3}) - \log_2 (2 + \sqrt{3}) + 1 = 2 - (\log_2 (2 - \sqrt{3}) + \log_2 (2 + \sqrt{3})) =$$

$$= 2 - \log_2 ((2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})) = 2 - \log_2 1 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 13. Найдите значение выражения

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\log_{2\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right).$$

Решение.

Так как $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$, то $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}$, тогда получим $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$

$$=\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-1}=$$

$$=-\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=-\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{6}+1\right)}=$$

$$=-\frac{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{6}+1\right)}=-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right).$$

Заметим, что $2\sqrt{6}+7=\left(\sqrt{6}+1\right)^2$, а $2\sqrt{6}+5=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$, тогда исходное выражение принимает вид

$$-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)+\log_{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=$$

$$=-\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^{-1}+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{1}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}+\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)}{\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)}=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{6}-1}{5}=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{\sqrt{6}-1}{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{6}+1\right)}=$$

$$=\log_{\sqrt{6}+1}\frac{1}{\sqrt{6}+1}=\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{6}+1\right)^{-1}=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 14. Найдите значение выражения

$$\frac{3\log_3^2 45-2\cdot\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 45}.$$

Решение.

Пусть $\log_3 45 = a$, $\log_3 5 = b$, тогда выражение принимает вид $\frac{3a^2 - 2ab - b^2}{3a + b}$. Рассмотрим числитель дроби как квадратный трехчлен относительно b и получим $\frac{3a^2 - 2ab - b^2}{3a + b} = -\frac{b^2 + 2ab - 3a^2}{3a + b} = -\frac{(b + 3a)(b - a)}{3a + b} =$ $= -(b - a) = a - b.$

Поскольку $\log_3 45 = a$; $\log_3 5 = b$, то $a - b = \log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 9 = 2.$

Ответ: 2.

Пример 15. Сравните $5^{\sqrt{\log_5 6}}$ и $6^{\sqrt{\log_6 5}}$.

Решение.

Пусть $a = 5^{\sqrt{\log_5 6}}$ и $b = 6^{\sqrt{\log_6 5}}$. Тогда $\log_5 a = \log_5 5^{\sqrt{\log_5 6}} = \sqrt{\log_5 6}$, а $\log_5 b = \log_5 6^{\sqrt{\log_6 5}} = \sqrt{\log_6 5} \cdot \log_5 6 = \frac{1}{\sqrt{\log_5 6}} \cdot \log_5 6 = \sqrt{\log_5 6}$, т. е. $\log_5 a = \log_5 b$, значит, $a = b$.

Ответ: $5^{\sqrt{\log_5 6}} = 6^{\sqrt{\log_6 5}}$.

7.1. Воспользуйтесь свойствами логарифмов и вычислите:

а) $\log_{\frac{1}{12}} 4 + \log_{\frac{1}{12}} 3$; б) $\log_5 \frac{35}{3} + \log_5 \frac{75}{7}$;

в) $\log_6 \frac{1}{3} - \log_6 12$; г) $\log_3 \sqrt{3} + \log_5 75 - \log_5 3$;

д) $\log_7 14 + \log_7 \frac{49}{4} - \log_7 3{,}5$; е) $\lg 20 + \lg 2 - \lg 0{,}04$;

ж) $\log_5 75 - \log_5 9 + \log_5 15$; з) $\frac{\log_{0,9} 32}{\log_{0,9} 17 - \log_{0,9} 34}$.

7.2. Верно ли, что значения выражений являются противоположными числами:

а) $\ln e$ и $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$; б) $\sqrt[3]{-216}$ и $\log_2 21\frac{1}{3} + \log_2 3$?

7.3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\lg 2 + \lg 4}{\lg 16}$; б) $\frac{\ln 81}{\ln 5 - \ln 15}$;

в) $\frac{\log_5^2 10 - \log_5^2 2}{\log_5 20}$; г) $\frac{\log_3 147}{\log_3^2 21 - \log_3^2 7}$.

7.4. Вычислите:

а) $\log_{\frac{1}{6}} 4 + 2\log_{\frac{1}{6}} 3$;

б) $2\log_{49} \frac{12}{7} - \log_7 12 + 9$;

в) $3\log_8 9 - 2\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{81}$;

г) $(3\log_7 2 - \log_7 24) : (\log_7 3 + \log_7 9)$;

д) $\dfrac{\log_8 45 + 2\log_8 \frac{1}{3}}{\log_8 75 - \log_8 3}$;

е) $\dfrac{\lg 81 + \lg 256}{2\lg 3 + 2\lg 4}$;

ж) $\dfrac{\ln 625 + \ln 64}{2\ln 5 + 3\ln 2}$;

з) $\dfrac{\log_3 25 - 4\log_3 2}{0{,}5\log_3 256 - 2\log_3 5}$.

7.5. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$;

б) $\dfrac{2\log_\pi 2 + \log_\pi \sqrt{10}}{\log_\pi 10 - \log_\pi \sqrt{10} + \log_\pi 4}$.

7.6. Зная, что $\log_a b = 5$, найдите значение выражения:

а) $\log_a (a^2 b)$;

б) $\log_a \frac{a}{b^4}$;

в) $\log_a \frac{b^2}{a^3}$;

г) $\log_a \sqrt{ab}$;

д) $\log_a (a\sqrt[3]{b})$;

е) $\log_a \frac{a\sqrt[5]{a}}{\sqrt[4]{b}}$.

7.7. Найдите значение выражения:

а) $\log_5 9 : \log_5 3$;

б) $\log_7 36 : (3\log_7 6)$;

в) $\log_{11} \sqrt[3]{2} : \log_{11} \sqrt[3]{4}$;

г) $\log_3 (\sqrt{3} + 1) : \log_3 (4 + 2\sqrt{3})$.

7.8. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\log_3 \sqrt[5]{9\sqrt[4]{3}}$;

б) $\lg \sqrt[7]{0{,}01\sqrt[3]{10}}$.

7.9. Вычислите:

а) $\log_9 \log_2 \sqrt[6]{4}$;

б) $\log_{0{,}25} \log_{\sqrt{5}} 25$;

в) $\log_{0{,}5}^2 \log_3 \sqrt[4]{3}$;

г) $\log_{0{,}2}^3 \log_{5\sqrt{5}} 5$;

д) $\log_{0{,}25} (\log_2 7 \cdot \log_7 16)$;

е) $\log_3 \left| \log_3 \log_3 \sqrt[9]{3^{0,(3)}} \right|$.

7.10. Упростите выражение $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^7$.

7.11. Вычислите:

а) $\log_{\log_2 \sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{6}} 36\right) + 2$; б) $5^{\frac{\ln 49}{\ln 7}} + \log_{\log_6 36} \log_3 81$.

7.12. Сравните значения выражений $-49^{0,5}$ и $\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{9\sqrt[9]{3}}{81}\right)$.

7.13. Найдите значение выражения $\log_2 \log_5\left(\sqrt{7} - 1\right) - \log_2 \log_5\left(8 - 2\sqrt{7}\right)$.

7.14. Вычислите:

а) $\log_2 \sin 15° + 0{,}2\log_2 \sin^5 750° + \log_2 \cos 375°$;

б) $\log_4\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\log_4\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

7.15. Выразите:

а) $\lg 15$ через $\lg 3$ и $\lg 5$;

б) $\lg 56$ через $\lg 2$ и $\lg 7$;

в) $\lg 0{,}75$ через $\lg 2$ и $\lg 3$.

7.16. Найдите значение выражения:

а) $16^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{7}}$; б) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5 + 2\log_{0,5} 5}$;

в) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7}$; г) $\left(2^{\log_4 10} + 3^{-\log_9 10}\right)^2$;

д) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} - 25^{\log_{125} 8}$; е) $36^{\frac{1}{2} - \log_6 5} + 2^{-\log_{\sqrt{2}} 10}$;

ж) $81^{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2,5} - 1$; з) $5{,}5^{\frac{2}{\log_3 11}} \cdot 2^{\frac{2}{\log_3 11}}$.

7.17. Найдите значение выражения $\left(11^{0,5\log_{\sqrt[3]{11}} 4} - 3^{4\log_{81} 16}\right) : 8^{\log_2 4}$.

7.18. Вычислите:

а) $4^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_3 2} + 2^{\log_4 9}$; б) $5^{\frac{1}{\log_3 5}} \cdot 5^{\log_5^2 4} - 3 \cdot 4^{\log_5 4} + \lg 0{,}01$.

7.19. Известно, что $\log_a b = 6$. Найдите $\log_{b^6}\left(a^6 \cdot b^6\right)$.

7.20. Вычислите:

а) $\log_{12}\left(2\cos 750° + 6^{\log_{36} 3}\right)$; б) $\log_8\left(2\sin\frac{9\pi}{4} + 5^{\log_{25} 2}\right)$;

в) $2^{\log_2 \sin 135° + \log_4 6}$; г) $3^{\log_9 6 - \log_9 \operatorname{tg}^2 60°}$.

7.21. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$; б) $\left(30 - 5^{1+\log_5 4}\right) \cdot \log_2 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

7.22. Вычислите:

а) $(\log_5 4 + \log_4 5 + 2)(\log_5 4 - \log_{20} 4)\log_4 5 - \log_5 4$;

б) $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7)\log_7 2 - \log_2 7$.

7.23. Найдите значение выражения $\sqrt{\log_2^2 7 - 6\log_2 7 + 9} + \frac{1}{\log_7 2}$.

7.24. Вычислите: $\dfrac{3 \cdot \left(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}\right)}{\log_{0,2} \log_2 32 + \log_{27} 9}$.

7.25. Найдите значение выражения:

а) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 - 3\log_3 \sqrt[3]{45}$;

б) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 + 2\log_2 6$;

в) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 36^{\frac{1}{\log_7 6}}$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{15} + \log_{25} 4 - \dfrac{1}{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{5}} + 3^{\frac{\log_2 7}{\log_4 3}}$.

7.26. Упростите выражение $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

7.27. Вычислите: $2^{2\log_{0,5} \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6} - 3\log_{0,25} \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}$.

7.28. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$; б) $\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}$;

в) $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$; г) $\dfrac{\log_3 5}{\log_{405} 3} - \dfrac{\log_3 135}{\log_{15} 3}$;

д) $\dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3} - \dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3}$; е) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

7.29. Найдите значение выражения $\log_a b$, если известно, что $\log^2_{a^3 b}(ab^3) = 9$.

7.30. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{2}} 5 + \left(9 - \log_2^2 25\right)\log_{200} 2$; б) $\log_{14}^2 7 + \dfrac{\log_{14} 98}{\log_2 14}$.

7.31. Сравните $3^{\sqrt{\log_3 2}}$ и $2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

7.32. Вычислите:

а) $\sqrt{\left(\log_3 4 + 9\log_4 3 - 6\right)\log_2 \sqrt{3}} + \log_2 \dfrac{8}{3\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{\left(\log_2 5 + 16\log_5 2 - 8\right)\log_5 2} + 4\log_5 12{,}5$.

7.33. Постройте график функции:

а) $y = 3^{\log_{\sqrt{3}}(x+2)}$; б) $y = 4^{\log_2(x-1)}$.

7.34. Найдите значение выражения:

а) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

7.35. Вычислите:

а) $\log_9 (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \cdot \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} 27$; б) $7^{\log_{49}(5+\sqrt{3})^2} + \left(\sqrt{10}\right)^{\lg(\sqrt{3}-5)^2}$.

7.36. Найдите значение выражения $4\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b}\right) + 3\log_{\sqrt{ab}} b^2 - \dfrac{2}{\log_b a}$, если известно, что $\log_a b = 6$.

7.37. Вычислите: $\left((36 - \log_2^2 6)\log_{384} 2 + \log_2 6\right) \cdot 3^{\log_9 25}$.

7.38. Найдите значение выражения $5^{\log_{16}(28 - 16\sqrt{3}) + \log_4(4 + 2\sqrt{3})}$.

7.39. Вычислите: $\left(3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{5}}} + 7^{\log_{49}(2-\sqrt{5})^2} + 7^{\sqrt{\log_7 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 7}}\right)^2$.

7.40. Найдите значение выражения $7\log_{\sqrt{ab}} \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b} + 3\log_{\sqrt{ab}} b^2 + \dfrac{3{,}2}{\log_b a}$, если $\log_a b = 0{,}25$.

7.41. Вычислите: $\log_{2\sqrt{2}} \sin 70^\circ + \log_{2\sqrt{2}} \sin 50^\circ + \log_{2\sqrt{2}} \sin 10^\circ$.

7.42. Постройте график функции $y = \log_2 \operatorname{tg} x + \log_2 \operatorname{ctg} x$.

7.43. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\log_2^2 20 + \log_2 20 \cdot \log_2 5 - 2\log_2^2 5}{\log_2 20 + 2\log_2 5}$; б) $\dfrac{\log_2^2 18 - 4\log_2^2 3 + 3\log_2 18 + 6\log_2 3}{\log_2 18 + 2\log_2 3}$.

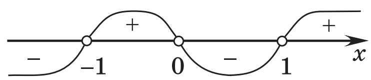
7.44. Вычислите: $\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot 4^{\log_2\sqrt{53}} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^{-\log_9\left(8-3\sqrt{7}\right)^2}$.

§ 8. Логарифмическая функция. Производная логарифмической функции

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \lg\frac{x}{x^2-1}$.

Решение.

Решим неравенство $\frac{x}{x^2-1} > 0$; $\frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$.



$D = (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Ответ: $D = (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 2. Является ли функция $f(x) = \log_3\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ четной?

Решение.

Найдем область определения функции: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$; $\sqrt{1+x^2} > x$. Полученное неравенство верно для любых $x \in \boldsymbol{R}$, значит, $D(f) = \boldsymbol{R}$ — симметрична относительно нуля.

$$f(-x) = \log_3\left(\sqrt{1+(-x)^2} - (-x)\right) = \log_3\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) =$$

$$= \log_3\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = \log_3\left(\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) =$$

$= \log_3\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{-1} = -\log_3\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной.

Ответ: нет, не является.

Пример 3. Докажите, что график функции $y = \log_2\frac{x-1}{x+1}$ симметричен относительно начала координат.

Решение.

Область определения данной функции $D = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ симметрична относительно нуля.

Так как $y(-x) = \log_2\frac{-x-1}{-x+1} = \log_2\frac{x+1}{x-1} = \log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} = -\log_2\frac{x-1}{x+1} = -y(x)$, то функция $y = \log_2\frac{x-1}{x+1}$ является нечетной, и, значит, ее график симметричен относительно начала координат.

Пример 4. Найдите количество всех целых чисел, не входящих в область определения функции $y = \log_3\left(x^2 - 5 - 4|x|\right)$.

Решение.

В область определения данной функции не входят все числа, удовлетворяющие условию $x^2 - 5 - 4|x| \leqslant 0$; $|x|^2 - 4|x| - 5 \leqslant 0$; $(|x| - 5)(|x| + 1) \leqslant 0$; $|x| - 5 \leqslant 0$; $|x| \leqslant 5$; $x \in [-5;\ 5]$.

В полученный промежуток входят 11 целых чисел.

Ответ: 11.

Пример 5. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,5}(x^2 - 4x + 8)$.

Решение.

$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geqslant 4$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Так как функция $y = \log_{0,5} t$ убывает при $t > 0$, то $\log_{0,5}((x-2)^2 + 4) \leqslant \log_{0,5} 4$; $\log_{0,5}((x-2)^2 + 4) \leqslant -2$, т. е. $y \leqslant -2$ при $x \in \boldsymbol{R}$, тогда $E(f) = (-\infty;\ -2]$.

Ответ: $(-\infty;\ -2]$.

Пример 6. Постройте график функции $y = \log_{0,25} x^2$.

Решение.

$y = \log_{2^{-2}} x^2$; $y = -\log_2 |x|$. График функции $y = \log_{0,25} x^2$ изображен на рисунке 5.

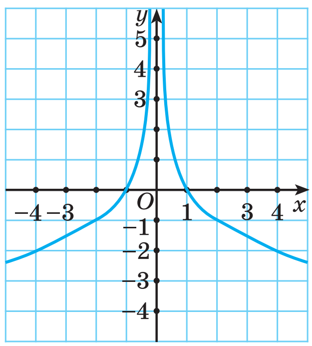


Рис. 5

Пример 7. Найдите область определения и множество значений функции $f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$.

Постройте график этой функции.

Решение.

Найдем область определения функции $f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$;

$$\begin{cases} f(x) = \log_x 1 + 2x, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = 2x, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

График функции $f(x) = \log_x(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 x) + 2x$ изображен на рисунке 6.

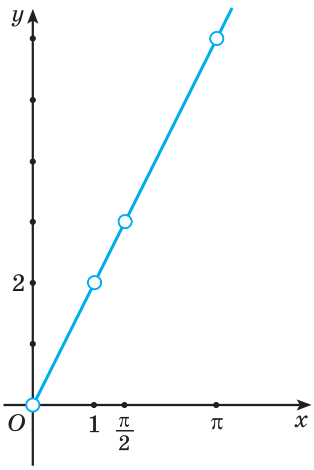


Рис. 6

Производная логарифмической функции

Функции $f(x) = a^x$ и $g(x) = \log_a x$ взаимно обратны.

Поскольку $(a^x)' = a^x \ln a$, то производная функции g в точке $y_0 = f(x_0)$ равна $(g)' = \frac{1}{(f)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$.

Следовательно, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Например, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$, а $(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

Пример 8. Найдите производную функции:

а) $y = \ln x - e^{2x}$; б) $y = \lg(5x - 1)$;

в) $y = \sqrt{x} \cdot \log_3 x$; г) $y = \frac{\log_2 x}{\sin x}$.

Решение.

а) $y' = (\ln x - e^{2x})' = (\ln x)' - (e^{2x})' = \frac{1}{x} - 2e^{2x}$;

б) $y' = (\lg(5x - 1))' = \frac{1}{(5x - 1)\ln 10} \cdot (5x - 1)' = \frac{5}{(5x - 1)\ln 10}$;

в) $y' = (\sqrt{x} \cdot \log_3 x)' = (\sqrt{x})' \cdot \log_3 x + \sqrt{x} \cdot (\log_3 x)' =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log_3 x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \frac{\log_3 x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x \ln 3}$;

г) $y' = \left(\frac{\log_2 x}{\sin x}\right)' = \frac{(\log_2 x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \log_2 x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2} \cdot \sin x - \cos x \cdot \log_2 x}{\sin^2 x}$.

8.1. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 7:

а) $y = \log_2 x$;

б) $y = -\log_2 x$;

в) $y = \log_2(-x)$;

г) $y = -\log_2(-x)$;

д) $y = -2^x$.

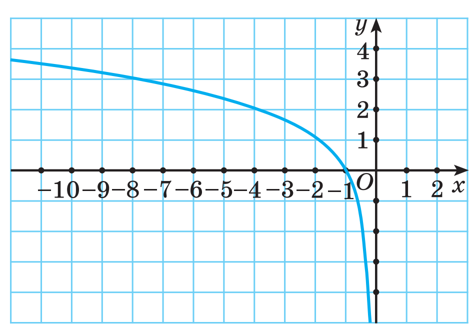


Рис. 7

8.2. Найдите область определения функции:

а) $y = \lg(-x^2 - x)$; б) $y = \log_{0,3}(1 - 4x^2)$;

в) $y = \lg\frac{x^2 - 9}{x}$; г) $f(x) = \sqrt[4]{7} + \log_5\left(1 - \frac{1}{x}\right)$;

д) $y = \lg\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{7}\right)$; е) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-7}{x^2+2x-8} - 1\right)$.

8.3. Верно ли, что:

а) $\ln 5 < \ln 6$; б) $\log_{\frac{3}{7}} 6 < \log_{\frac{3}{7}} 7$?

8.4. Положительным или отрицательным числом является значение выражения:

а) $\log_2 3$; б) $\log_5 \frac{2}{7}$; в) $\log_{0,2} 7$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}78$?

8.5. Сравните с единицей значение выражения:

а) $\log_5 4$; б) $\log_6 7$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 3$; г) $\log_{0,9} \frac{2}{3}$.

8.6. Определите верные неравенства:

а) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} > 3\log_8 26$; б) $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$;

в) $\log_2 5 < \log_3 13$; г) $2^{\log_5 3} > 3^{\log_5 2} + 0{,}01$.

8.7. Найдите два последовательных целых числа, между которыми на координатной прямой находится число:

а) $\log_2 33$; б) $\lg 9999$; в) $\log_5 0{,}041$.

8.8. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2 - x) + \log_2 \frac{1}{x+3}$; б) $y = \log_2(9 - 4x^2) + \frac{5}{\sqrt[4]{x+1}}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\log_3(4-x)}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt{5x - x^2}}{\log_{0,7}(5 - 3x)}$;

д) $f(x) = \lg(8 - x) + \lg(x - 3)^2$; е) $f(x) = \lg(5 - x)^3 + \lg(x - 2)$;

ж) $f(x) = \log_x(10 + 3x - x^2)$; з) $y = \log_{x-2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{2x+3}\right)$.

8.9. Найдите множество значений функции $y = \log_3(x^2 + 2x + 28)$.

8.10. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(23 - x^2 + 4x)$.

8.11. Какая из следующих функций принимает только неотрицательные значения:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(5 + 4x - x^2)$; б) $y = \log_3(5 + 4x + x^2)$;

в) $y = \log_3(3 + 4x - x^2)$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}}(3 + 4x - x^2)$;

д) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 + 4x - x^2)$?

8.12. Расположите в порядке убывания числа:

а) $\log_5 0{,}6$; $\log_5 2{,}7$; $\log_5 0{,}2$; $\log_5 \frac{1}{3}$; $\log_5 3{,}5$;

б) $\log_{0,7} 7$; $\log_{0,7} 2{,}9$; $\log_{0,7} 0{,}5$; $\log_{0,7} 3{,}8$; $\log_{0,7} \frac{3}{7}$.

8.13. Докажите, что функция $f(x) = \log_2\left(\frac{3 - x}{3 + x}\right)$ является нечетной.

8.14. Определите знак значения выражения:

а) $\lg(\lg 5)$; б) $\log_{0,3}(\log_3 5)$.

8.15. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\log_5|x - 4|}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$.

8.16. Докажите, что функция:

а) $y = \log_3(7 - x^2) + \frac{\cos\frac{x}{3}}{\log_2|x|}$ является четной;

б) $y = \frac{\sin 5x}{\log_3|x|} \cdot \log_7(10 - x^2)$ является нечетной.

8.17. Функция $y = f(x)$ нечетная и для $x > 0$ задается формулой $f(x) = \log_2 x$. Найдите корни уравнения $f(x) = 3$.

8.18. Постройте график функции:

а) $y = |\log_2 x|$; б) $y = \log_2|x|$;

в) $y = |\log_2(x - 1)|$; г) $y = |\log_2|x| - 2|$.

8.19. Постройте график функции $y = \log_3 \frac{1}{|x|}$.

8.20. Найдите, при каких значениях аргумента графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ совпадают:

а) $f(x) = \log_7(x^3 + x^2 - 6x)$, $g(x) = \log_7(x + 3) + \log_7(x^2 - 2x)$;

б) $f(x) = \log_3(x^3 - 5x^2 + 4x)$, $g(x) = \log_3(1 - x) + \log_3(4x - x^2)$.

8.21. Найдите область определения, множество значений функции $f(x) = \sin^2\left(\lg\frac{1-x}{4+x^2}\right) + \cos^2\left(\lg\frac{1-x}{4+x^2}\right) - 2x$ и постройте ее график.

8.22. Найдите производную функции:

а) $y = \log_2 x + x^5$; б) $y = \lg(x^2 - x)$; в) $y = x^4 \cdot \log_5 x$;

г) $y = \frac{x^2}{\ln x}$; д) $y = \ln(\sin x)$; е) $y = \log_2(\cos x)$;

ж) $y = \ln x^4$; з) $y = \log_3^2 x$; и) $y = \sqrt{\ln x}$.

8.23. Вычислите:

а) $f'(5)$, если $f(x) = 2\ln x - \ln 5$; б) $f'(1)$, если $f(x) = 3^x \cdot \log_3 x$;

в) $f'(2)$, если $f(x) = x^3 - \ln x^2$; г) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = \ln\sin x$.

8.24. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 - \ln x$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = \log_3(3x + 5)$, $x_0 = -1$.

8.25. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x - \ln(5x + 6)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

8.26. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

а) $f(x) = \ln x - x$; б) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

8.27. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = -x^2 + 8\ln x$.

8.28. Исследуйте функцию $f(x) = x^2 - 2\ln x$ и постройте ее график.

8.29. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x - \ln x$ на отрезке $[0{,}5;\ 4]$.

8.30. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $f'(x) + \frac{4}{x} \cdot f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$, если $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$.

§ 9. Логарифмические уравнения

Пример 1. Решите уравнение $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$.

Решение.

$(\lg x^3)^2 - 10\lg x + 1 = 0$; $(3\lg x)^2 - 10\lg x + 1 = 0$; $9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0$.

Пусть $\lg x = t$. Тогда $9t^2 - 10t + 1 = 0$; $t = 1$ или $t = \frac{1}{9}$.

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\lg x = 1,\\ \lg x = \frac{1}{9};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10,\\ x = 10^{\frac{1}{9}};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10,\\ x = \sqrt[9]{10}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt[9]{10}$; 10.

Пример 2. Решите уравнение $\lg^2 100x + \lg^2 10x = 14 + \lg\frac{1}{x}$.

Решение.

$$\lg^2 100x + \lg^2 10x = 14 + \lg\frac{1}{x}; \quad (\lg 100x)^2 + (\lg 10x)^2 = 14 + \lg x^{-1};$$

$$(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 - \lg x; \quad (2 + \lg x)^2 + (1 + \lg x)^2 = 14 - \lg x.$$

Пусть $t = \lg x$, тогда уравнение принимает вид

$$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 = 14 - t; \quad 4 + 4t + t^2 + 1 + 2t + t^2 = 14 - t; \quad 2t^2 + 7t - 9 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}t = -4{,}5,\\ t = 1.\end{array}\right. \text{ Откуда } \left[\begin{array}{l}\lg x = -4{,}5,\\ \lg x = 1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 10^{-4{,}5},\\ x = 10.\end{array}\right.$$

Ответ: $10^{-4{,}5}$; 10.

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(2x - 1) - 2\log_3(2x + 5) = \log_{\frac{1}{2}} 8$.

Решение.

Так как $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, то запишем данное уравнение в виде

$$\log_3(2x - 1) - 2\log_3(2x + 5) = -3; \quad \log_3(2x - 1) + 3 = 2\log_3(2x + 5);$$

$$\begin{cases}\log_3(2x - 1) + \log_3 27 = \log_3(2x + 5)^2,\\ 2x + 5 > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}\log_3(27(2x - 1)) = \log_3(2x + 5)^2,\\ 2x > -5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}54x - 27 = (2x + 5)^2,\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}2x^2 - 17x + 26 = 0,\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 6{,}5,\\ x = 2,\end{array}\right.\\ x > -2{,}5;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}x = 6{,}5,\\ x = 2.\end{array}\right.$$

Ответ: 2; 6,5.

Пример 4. Решите уравнение $5\sqrt{\lg x} + 4\lg\sqrt{\frac{1}{x}} = 2$.

Решение.

$$5\sqrt{\lg x} + 4\lg\sqrt{\frac{1}{x}} = 2; \quad 5\sqrt{\lg x} + 4\lg x^{-\frac{1}{2}} = 2; \quad 5\sqrt{\lg x} - 2\lg x = 2.$$

Пусть $\sqrt{\lg x} = t$, тогда уравнение принимает вид $5t - 2t^2 = 2$; $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$; $t_2 = 0,5$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\lg x} = 2,\\ \sqrt{\lg x} = 0,5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lg x = 4,\\ \lg x = 0,25;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 10^4,\\ x = 10^{0,25}.\end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt[4]{10}$; 10 000.

Пример 5. Решите уравнение

$\log_2\left(2^x - x^2 + 3,5x - 5\right) = \log_2\left(2^x - 1,5x - 1\right)$.

Решение.

$2^x - x^2 + 3,5x - 5 = 2^x - 1,5x - 1$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = 4.\end{array}\right.$

Проверка. При $x = 1$ получим: $\log_2\left(2^1 - 1^2 + 3,5 \cdot 1 - 5\right) = \log_2(-0,5)$ — полученное выражение не имеет смысла.

При $x = 4$ получим: $\log_2\left(2^4 - 4^2 + 3,5 \cdot 4 - 5\right) = \log_2\left(2^4 - 1,5 \cdot 4 - 1\right)$; $\log_2 9 = \log_2 9$ — верное числовое равенство.

Ответ: 4.

Пример 6. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $x + \log_2\left(2^x - 6\right) = \log_2\left(2^{x+2} - 16\right)$.

Решение.

Представим $x = \log_2 2^x$ и запишем уравнение в виде

$\log_2 2^x + \log_2\left(2^x - 6\right) = \log_2\left(2^{x+2} - 16\right)$.

Пусть $t = 2^x$, тогда $\log_2 t + \log_2(t - 6) = \log_2(4t - 16)$; $\begin{cases} t(t - 6) = 4t - 16,\\ t > 6;\end{cases}$

$\begin{cases} t^2 - 10t + 16 = 0,\\ t > 6;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t = 2,\\ t = 8,\end{array}\right.\\ t > 6;\end{cases}$ $t = 8$. Тогда $2^x = 8$; $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример 7. Решите уравнение $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$.

Решение.

Так как $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, то уравнение $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$ запишем в виде $7^{\lg x} = 98 - 7^{\lg x}$; $7^{\lg x} + 7^{\lg x} = 98$; $2 \cdot 7^{\lg x} = 98$; $7^{\lg x} = 49$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Ответ: 100.

Пример 8. Решите уравнение $\log_{-x-1}(4x+25)=2$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x+25=(-x-1)^2, \\ 4x+25>0, \\ -x-1>0, \\ -x-1\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+25=x^2+2x+1, \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-24=0, \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ x>-6\frac{1}{4}, \\ x<-1, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad x=-4.$$

Ответ: -4.

Пример 9. Найдите сумму последовательных целых чисел, между которыми заключена сумма корней (корень, если он единственный) уравнения $0{,}5\log_{2-x}\left(x^2+x-6\right)^2=2$.

Решение.

$$0{,}5\log_{2-x}\left(x^2+x-6\right)^2=2; \quad \log_{2-x}\left|x^2+x-6\right|=2; \quad \begin{cases} \left|x^2+x-6\right|=(2-x)^2, \\ 2-x>0, \\ 2-x\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|x^2+x-6\right|=x^2-4x+4, \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=x^2-4x+4, \\ x^2+x-6=-x^2+4x-4, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5x=10, \\ 2x^2-3x-2=0, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x<2, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x=-\frac{1}{2}.$$

Сумма последовательных целых чисел, между которыми заключен корень данного уравнения, равна -1.

Ответ: -1.

Пример 10. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x+2}\cdot\log_2(4+x)=0$.

Решение.

Уравнение $\sqrt{x+2}\cdot\log_2(4+x)=0$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2=0,\\ x+4>0,\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(4+x)=0,\\ x+2\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2,\\ x>-4,\end{cases}\\ \begin{cases}4+x=1,\\ x\geqslant -2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2,\\ x>-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ x\geqslant -2;\end{cases}\end{array}\right. \quad x=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 11. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$.

Решение.

$7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$; $\left(7^{\log_7 x}\right)^{\log_7 x}+x^{\log_7 x}=14$; $x^{\log_7 x}+x^{\log_7 x}=14$;

$2x^{\log_7 x}=14$; $x^{\log_7 x}=7$. По определению логарифма получим

$\log_7 x=\log_x 7$, тогда $\log_7 x=\dfrac{1}{\log_7 x}$; $\log_7^2 x=1$; $\left[\begin{array}{l}\log_7 x=1,\\ \log_7 x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=\dfrac{1}{7}.\end{array}\right.$

Произведение корней уравнения равно 1.

Ответ: 1.

Пример 12. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $3\log_3^2(2x+1)-4\log_3(2x+1)\cdot\log_3(x+1)+\log_3^2(x+1)=0$.

Решение.

Пусть $a=\log_3(x+1)$, $b=\log_3(2x+1)$, тогда уравнение принимает вид $a^2-4ab+3b^2=0$. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно a и получим, что $a=b$ или $a=3b$. Тогда $\log_3(x+1)=\log_3(2x+1)$ или $\log_3(x+1)=3\log_3(2x+1)$.

Решим уравнение

$\log_3(x+1)=\log_3(2x+1)$; $\begin{cases}x+1=2x+1,\\ x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\ x>-1;\end{cases}$ $x=0$.

Решим уравнение

$\log_3(x+1)=3\log_3(2x+1)$; $\begin{cases}x+1=(2x+1)^3,\\ x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}8x^3+12x^2+5x=0,\\ x>-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x(8x^2+12x+5)=0,\\ x>-1.\end{cases}$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $8x^2 + 12x + 5$ отрицательный, то $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 13. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + \frac{6}{\log_{3x^2-1} 2\sqrt{2}}}.$$

Решение.

$$\log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + \frac{6}{\log_{3x^2-1} 2\sqrt{2}}};$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + 6\log_{2\sqrt{2}}\left(3x^2 - 1\right)}, \\ 3x^2 - 1 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_2\left(3x^2 - 1\right) + 2 = \sqrt{1 + 6 + 4\log_2\left(3x^2 - 1\right)}, \\ x^2 \neq \frac{2}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Пусть $\log_2\left(3x^2 - 1\right) = t$, тогда первое уравнение системы принимает вид

$$2t + 2 = \sqrt{7 + 4t}; \quad \begin{cases} 4 + 8t + 4t^2 = 7 + 4t, \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4t^2 + 4t - 3 = 0, \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -1{,}5, \\ t = 0{,}5, \end{array}\right. \\ t \geqslant -1; \end{cases} \quad t = 0{,}5.$$

Тогда $\log_2\left(3x^2 - 1\right) = 0{,}5$; $3x^2 - 1 = \sqrt{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

С учетом условий системы получим $x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}}$.

Пример 14. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^{x-y} - 2^{7y-x} = 0, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 4^{x-y} - 2^{7y-x} = 0, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 4^{x-y} = 2^{7y-x}, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{2x-2y} = 2^{7y-x}, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 7y - x, \\ \log_9 x = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_3 y - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_9 y^2 - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ \log_9(3y) = \log_9 \frac{y^2}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 3y = \frac{y^2}{9}, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 27, \end{array}\right. \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 81, \\ y = 27. \end{cases}$$

Ответ: (81; 27).

Пример 15. Найдите сумму $x_0 + y_0$, где $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x - y) + \log_2(x + y) = 5, \\ \lg x - \lg 4 = -\lg y + \lg 3, \\ y \ne 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - y^2) = 5, \\ \lg(xy) = \lg 12, \\ x > y, \\ x > 0, \\ y > 0, \\ y \ne 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ xy = 12, \\ x > y, \\ y > 0, \\ y \ne 3. \end{cases}$$

Решим систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ xy = 12: \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x = \frac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 32, \\ x = \frac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} y^4 + 32y^2 - 144 = 0, \\ x = \frac{12}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2 = 4, \\ y^2 = -36, \end{array}\right. \\ x = \frac{12}{y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4, \\ x = \frac{12}{y}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = -6. \end{cases} \end{array}\right.$$

С учетом условий $\begin{cases} x > y, \\ y > 0, \\ y \neq 3 \end{cases}$ получим, что пара чисел (6; 2) является решением системы и $x_0 + y_0 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 16. Решите уравнение

$$\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4.$$

Решение.

Область определения данного уравнения определяется системой неравенств $\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ 2x + 1 \neq 1, \\ -4x^2 + 8x + 5 > 0, \\ 5 - 2x > 0, \\ 5 - 2x \neq 1, \\ 4x^2 + 4x + 1 > 0. \end{cases}$

С учетом этого преобразуем уравнение

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + \log_{5-2x}(2x+1)^2 = 4;$$

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + 2\log_{5-2x}|2x+1| = 4;$$

$$\log_{2x+1}((2x+1)(5-2x)) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$\log_{2x+1}(2x+1) + \log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$1 + \log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 4;$$

$$\log_{2x+1}(5-2x) + 2\log_{5-2x}(2x+1) = 3; \; \log_{2x+1}(5-2x) + \frac{2}{\log_{2x+1}(5-2x)} = 3.$$

Пусть $t = \log_{2x+1}(5-2x)$, тогда $t + \frac{2}{t} = 3$; $t^2 - 3t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \log_{2x+1}(5-2x) = 1, \\ \log_{2x+1}(5-2x) = 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5 - 2x = 2x + 1, \\ 5 - 2x = (2x+1)^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2, \\ x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Учитывая область определения уравнения, получим, что корнями уравнения являются числа 1 и $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 1.

Пример 17. Решите уравнение $\log_2\left(4x^2+1\right)=\log_2 x+8x(1-x)$.

Решение.

$\log_2\left(4x^2+1\right)=\log_2 x+8x(1-x)$; $\log_2\left(4x^2+1\right)-\log_2 x=-8x^2+8x$;

$\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)=-2\left(4x^2-4x+1\right)+2$; $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=-2(2x-1)^2+2$.

По свойству двух взаимно обратных чисел $2x+\frac{1}{2x}\geqslant 2$ при $x>0$.

Так как функция $y=\log_2 t$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$, то $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)\geqslant 2$ при $x>0$.

С другой стороны, $-2(2x-1)^2+2\leqslant 2$ при $x\in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, уравнение $\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=-2(2x-1)^2+2$ равносильно системе уравнений $\begin{cases}\log_2\left(2\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\right)=2,\\ -2(2x-1)^2+2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+\frac{1}{2x}=2,\\ x=\frac{1}{2};\end{cases}$ $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Пример 18. Решите уравнение $\log_3(-\cos x)-\log_9\sin x+\frac{1}{4}=-\log_9 2$.

Решение.

$$\log_3(-\cos x)-\log_9\sin x+\frac{1}{4}=-\log_9 2;$$

$$\log_3(-\cos x)-\frac{1}{2}\log_3\sin x+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\log_3 2;$$

$$\log_3(-\cos x)+\log_3\sqrt[4]{3}=\frac{1}{2}\log_3\sin x-\frac{1}{2}\log_3 2;\qquad \log_3\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)=\frac{1}{2}\log_3\frac{\sin x}{2};$$

$$2\log_3\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)=\log_3\frac{\sin x}{2};\quad \begin{cases}\left(-\sqrt[4]{3}\cos x\right)^2=\frac{\sin x}{2},\\ \cos x<0;\end{cases}\quad \begin{cases}2\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x=0,\\ \cos x<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x-2\sqrt{3}=0,\\ \cos x<0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.\\ \cos x<0.\end{cases}$$

Так как $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$, то уравнение $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ не имеет корней. Тогда $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x < 0. \end{cases}$

С учетом условия $\cos x < 0$ получим $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 8).

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

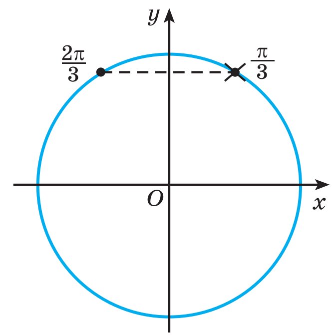


Рис. 8

Пример 19. Решите уравнение $\log_{\cos x}(\cos 2x + 3\cos x) = 0$.

Решение.

$\log_{\cos x}(\cos 2x + 3\cos x) = 0$; $\log_{\cos x}\left(2\cos^2 x - 1 + 3\cos x\right) = 0$.

Пусть $\cos x = t$, тогда уравнение принимает вид $\log_t\left(2t^2 - 1 + 3t\right) = 0$;

$$\begin{cases} 2t^2 - 1 + 3t = 1, \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2t^2 + 3t - 2 = 0, \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ t > 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad t = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\cos x = \frac{1}{2}$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 20. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $2|\sin x| = \log_{\mathrm{ctg} x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$.

Решение.

Выражение $\log_{\mathrm{ctg} x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$ имеет смысл, если $\begin{cases} \mathrm{ctg} x > 0, \\ \mathrm{ctg} x \neq 1, \\ \sin x > 0. \end{cases}$ Так как котангенс и синус некоторого угла x положительны, то x — угол первой четверти. Тогда $\cos x > 0$. Значит, уравнение $2|\sin x| = \log_{\mathrm{ctg} x}\frac{|\cos x|}{\sin x}$ принимает вид $2\sin x = \log_{\mathrm{ctg} x}\frac{\cos x}{\sin x}$; $2\sin x = \log_{\mathrm{ctg} x}\mathrm{ctg} x$; $2\sin x = 1$; $\sin x = \frac{1}{2}$.

Так как x — угол первой четверти, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = 30^\circ + 360^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Наибольший отрицательный корень данного уравнения равен –330°.
Ответ: –330°.

Пример 21. Решите уравнение $\log_2(x - x^2) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2.$

Решение.

Оценим левую и правую части уравнения.

Так как $-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$ и функция $y = \log_2 t$ возрастает при $t > 0$, то $\log_2(x - x^2) \leqslant \log_2 \frac{1}{4}$, т. е. $\log_2(x - x^2) \leqslant -2$.

С другой стороны, $0 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) \leqslant 1$; $-2 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2 \leqslant -1$.

Таким образом, левая часть исходного уравнения не превосходит –2, а правая больше или равна –2, т. е. уравнение равносильно системе $\begin{cases} \log_2(x - x^2) = -2, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) - 2 = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4x}\right) = 0; \end{cases}$ $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 22. Найдите все целые значения a, при которых уравнение $\log_{0,4}(x^6 + 1) = a^4 + 5a^2 - 6$ имеет корни.

Решение.

Так как $x^6 + 1 \geqslant 1$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и функция $y = \log_{0,4} t$ убывает на области определения, то $\log_{0,4}(x^6 + 1) \leqslant 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Тогда уравнение $\log_{0,4}(x^6 + 1) = a^4 + 5a^2 - 6$ имеет корни, если $a^4 + 5a^2 - 6 \leqslant 0$; $(a^2 + 6)(a^2 - 1) \leqslant 0$; $a^2 - 1 \leqslant 0$; $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Целыми значениями a, при которых исходное уравнение имеет корни, являются числа –1; 0; 1.

Ответ: –1; 0; 1.

9.1. Решите уравнение:

а) $\log_3(2x^2 + x - 1) = 2$;
б) $\log_2(3x^2 - 5x - 4) = 3$;
в) $\log_3(4x) = \log_3(x + 1)$;
г) $\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2)$;
д) $\lg(x^2 - 6) - \lg x = 0$;
е) $\log_{0,1}(x^2 - 8) - \log_{0,1} 2x = 0$.

9.2. Найдите нули функции:

а) $f(x) = \log_3(x^2 - x + 1)$; б) $f(x) = \log_2(x^2 - x)$.

9.3. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\log_4(x^2 - 3)}{x - 2} = 0$; б) $\dfrac{\log_3(10 - x^2)}{x + 3} = 0$.

9.4. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$; б) $\log_5 \log_3 \log_{0,5}(x + 1) = 0$.

9.5. Решите уравнение:

а) $\log_2 \sin x = -1$; б) $\lg \cos x = 0$;

в) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x = -1$; г) $\log_3 \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{2}$.

9.6. Найдите абсциссы точек пересечения графика функции:

а) $f(x) = \log_7(|x| + 4)$ и прямой $y = 2$;

б) $f(x) = |\log_2(x + 6) - 2|$ и прямой $y = 2$.

9.7. Решите уравнение:

а) $\log_4^2 x - \log_4 x = 0$; б) $\lg^2 x - 3\lg x = 0$;

в) $\log_3^2 x = 2 - \log_3 x$; г) $3 = \ln^2 x - 2\ln x$.

9.8. Решите уравнение:

а) $\dfrac{17 - \lg x}{4\lg x} = 4\lg x$; б) $\dfrac{1}{5 - 4\lg x} + \dfrac{4}{1 + \lg x} = 3$.

9.9. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_2^2(-x) - 3\log_2(-x) - 4 = 0$; б) $\lg^2(-x) - \lg(-x) - 2 = 0$.

9.10. Решите уравнение:

а) $2\log_4(3x + 2) = 3$; б) $\log_3 x + 4\log_9 x = 9$;

в) $\log_2 x + 6\log_4 x = 8$; г) $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x$.

9.11. Найдите нуль функции $y = \log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x - 2$.

9.12. Решите уравнение:

а) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$; б) $4\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\sqrt{3}} x = 3$.

9.13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2\lg x + \lg y = 2, \\ \lg x - 2\lg y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg(x - y) = 1, \\ \lg x - \lg y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\log_5 x - \log_5 y = 0, \\ x^2 + 3y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ xy + 3x = 2. \end{cases}$

9.14. Решите уравнение:

а) $\log_3^2(3x) + \log_3 x = 5;$ б) $\log_2^2(4x) + 2\log_2 x = -5;$

в) $0{,}5\lg x \cdot \lg(0{,}001) = \lg 0{,}1;$ г) $\log_2(2x^2)\log_2(16x) = 4{,}5\log_2^2 x.$

9.15. Найдите сумму корней уравнения $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4\right) = -1.$

9.16. Решите уравнение:

а) $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1;$

б) $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x;$

в) $2 - \log_2 x = \log_2(3x - 4);$

г) $3 - \log_3(2x - 1) = \log_3(18x - 27);$

д) $\log_2(1 - x) + \log_2(-5x - 2) = 2 + \log_2 3;$

е) $\log_5(4x + 1) + \log_5(x + 1) = \log_5 35 - 1.$

9.17. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = 5 - \log_2(x + 4);$

б) $f(x) = \log_3(2x - 1)$ и $g(x) = 2 - \log_3(x + 1);$

в) $f(x) = \log_{0,6}(4x + 1) - 1$ и $g(x) = \log_{0,6}(8x).$

9.18. Найдите все корни уравнения:

а) $\lg\sin x = \lg\cos x + \lg 2;$ б) $\log_2 \sin 2x + \log_{\frac{1}{2}} \cos x = \frac{1}{2}.$

9.19. Решите уравнение:

а) $\log_2(2x + 3) + \log_2(x + 2) = \log_2(-2x - 1);$

б) $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x - 1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2;$

в) $\log_3(4x) + \log_3(9x) + \log_3 x = \log_3(18x) + \log_3(3x).$

9.20. Найдите точку пересечения графика функции
$f(x) = \log_3\left(\sqrt{x + 6} + \sqrt{3x + 7} - 12\right)$ с осью абсцисс.

9.21. Решите уравнение:

а) $\lg(x - 2)^2 = 2\lg 2;$ б) $\lg(2x + 3)^4 = 4\lg 3;$

в) $2\lg x^2 + \lg^2(-x) = 5;$ г) $3\log_2 x^2 + \log_2^2(-x) = 7.$

9.22. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_4 (x+2)^2 + \log_4 (10-x)^2 = 4 + \log_4 x^2$;

б) $\log_4 (7-x)^2 + \log_4 (5+x)^2 = 4 + \log_4 (5-x)^2$;

в) $2 + \lg\left(1 + 4x^2 - 4x\right) - \lg\left(19 + x^2\right) = 2\lg(1-2x)$;

г) $\log_2\left(9x^2 + 1 - 6x\right) - \log_2\left(4 + x^2\right) = 2\log_2(1-3x) - 3$.

9.23. Решите уравнение:

а) $\log_2\left(2^{x+1} - 8\right) = x$;

б) $\log_3\left(6 + 3^{x-2}\right) = x - 1$;

в) $\log_6\left(5 + 6^{-x}\right) = x + 1$;

г) $2x - \lg\left(5^{2x} + 4x - 16\right) = \lg 4^x$;

д) $\lg 6 - \lg\left(2^x + 1\right) = x(1 - \lg 5)$;

е) $\log_2\left(2^x - 5\right) - \log_2\left(2^x - 2\right) = 2 - x$.

9.24. Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = \log_2\left(9 - 2^x\right)$ и $y = 10^{\lg(3-x)}$?

9.25. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2x}\lg 2 = \lg\left(2^{\frac{1}{x}} - 2\right)$;

б) $\log_8\left(4^{x^2-1} - 1\right) + \frac{2}{3} = \log_8\left(2^{x^2+2} - 7\right)$.

9.26. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1, \\ 3^{x-y} = 27^{\frac{2}{3}}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{3y-x}, \\ \log_9 x - \log_3 y = 1. \end{cases}$

9.27. Найдите нули функции $y = \lg(\lg x) + \lg\left(\lg x^3 - 2\right)$.

9.28. Решите уравнение:

а) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 x^2 + \log_3 x^3 - 6$;

б) $\log_3 x \cdot \log_4 x = \log_3 x^3 + \log_4 x^4 - 12$.

9.29. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-4} \cdot \log_2(x-2) = 0$;

б) $\sqrt{3x+18} \cdot \log_4(x+4) = 0$.

9.30. Найдите произведение корней уравнения:

а) $\left(3x^2 - 4x - 7\right)\log_3(2-x) = 0$;

б) $\left(x^2 - 3x - 4\right) \cdot \log_5(3x-8) = 0$.

9.31. Решите уравнение:

а) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$;

б) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$;

в) $\log_{1-x}(3-x) = \log_{3-x}(1-x)$;

г) $\log_2(1-x) = 1 + 6\log_{1-x} 2$;

д) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$;

е) $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

9.32. Найдите нули функции $y = \log_{2x} x + \log_{8x^2} x$.

9.33. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_{(x-6)^2}\left(x^2 - 5x + 9\right) = \frac{1}{2}$; б) $\log_{x+1}\left(x^2 + x - 6\right)^2 = 4$.

9.34. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\log_x \sqrt{3x+4} = 1$.

9.35. Решите уравнение $\log_{x^2-6x+8}\left(\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2 + 2x\right)\right) = 0$.

9.36. Найдите произведение корней уравнения $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

9.37. Решите систему уравнений $\begin{cases} \lg\left(4x^2 + y^2\right) = \lg 15 + 1, \\ \lg(2x + y) + \lg(2x - y) = \lg 0{,}5 + 2. \end{cases}$

9.38. Решите уравнение:

а) $16^{\log_4 x} + 2x = 15$; б) $36^{\log_6 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1$;

в) $9^{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - 0{,}5x - 9\right)} = 25^{\log_{\frac{1}{5}}(7 - 0{,}5x)}$; г) $16^{\log_{\frac{1}{4}}\left(2x^2 + 2x + 0{,}5\right)} = 49^{\log_{\frac{1}{7}}(x + 1{,}5)}$.

9.39. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $2^{1 + \log_2 x} + 4^{1 + \log_2 x} = 110$; б) $15 + \lg\frac{1}{x} = 2\sqrt{\lg x}$;

в) $49^{\log_{0,5}^2 x} - 8 \cdot 7^{\log_{0,5}^2 x} + 7 = 0$; г) $\left|1 - \log_{\frac{1}{6}} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{\frac{1}{6}} x\right|$.

9.40. Найдите произведение корней уравнения $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$.

9.41. Решите уравнение:

а) $\log_{1-2x}\left(6x^2 - 5x + 1\right) - \log_{1-3x}\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 2$;

б) $\log_{3x+7}\left(9 + 12x + 4x^2\right) + \log_{2x+3}\left(6x^2 + 23x + 21\right) = 4$.

9.42. Найдите все корни уравнения:

а) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$; б) $\sqrt{\log_x \sqrt{0{,}5x}} \cdot \log_{0,5} x = -1$.

9.43. Решите уравнение:

а) $\log_2^2 x + (x - 1) \cdot \log_2 x = 6 - 2x$;

б) $(x + 1) \cdot \log_3^2 x + 4x \cdot \log_3 x - 16 = 0$.

9.44. Воспользуйтесь свойствами функций и решите уравнение:

а) $\log_2\left(1 + x^2\right) = \log_2 x + 2x - x^2$; б) $\log_2\left(3 + 2x - x^2\right) = \sin^2(\pi x) + 2$.

9.45. Найдите все корни уравнения:

а) $\log_2(-\sin x) - \log_4 \cos x + \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{3}$;

б) $\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0$.

9.46. Решите уравнение:

а) $2^{\log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x + \ldots} = 4^{\log_2 x}$, где $|\log_2 x| < 1$;

б) $3^{\log_{\sqrt{3}}\left(1 - \cos x + \cos^2 x - \cos^3 x + \ldots\right)} = \sqrt[3]{81}$.

9.47. Найдите все корни уравнения $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \cdot \log_3(x - 2) = 0$.

9.48. Найдите сумму корней уравнения $\sin 2x \cdot \lg\left(-x^2 + 4x + 5\right) = 0$.

9.49. Решите уравнение $1 - \cos(\pi \lg x) = 2\sin(0{,}5\pi \lg x)$.

9.50. Найдите значение выражения $27^{\ln x_0}$, где x_0 — наибольший корень уравнения $\sin(\pi \ln x) + \sin\left(\pi \ln x^2\right) + \sin\left(\pi \ln x^3\right) = 0$, принадлежащий промежутку $(-\infty; e)$.

9.51. Решите уравнение $\lg(\arcsin x) = 0$.

9.52. Найдите наименьшее значение суммы $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \log_{|x|}\left(2 - \log_2 y\right) = 1, \\ y^2 + 2^{2 - |x|} = 2. \end{cases}$

9.53. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\log_3\left(x^2 + 4x + 13\right) + \log_5\left(4x^2 + 16x + 17\right) = 2$.

9.54. Найдите все целые значения a, при которых уравнение $\log_6\left(x^2 + 6\right) = \frac{a + 2}{2a - 4}$ имеет корни.

§ 10. Логарифмические неравенства

Пример 1. Решите неравенство $\log_{\sqrt{31} - \sqrt{21}}\left(x^2 - 9\right) \geqslant 0$.

Решение.

Сравним с единицей основание логарифма:

$\sqrt{31} - \sqrt{21} \vee 1$; $\sqrt{31} \vee 1 + \sqrt{21}$; $\left(\sqrt{31}\right)^2 \vee \left(1 + \sqrt{21}\right)^2$; $31 \vee 1 + 2\sqrt{21} + 21$; $9 \vee 2\sqrt{21}$; $4{,}5 \vee \sqrt{21}$; $20{,}25 < 21$, значит, $\sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

Тогда неравенство $\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}\left(x^2-9\right) \geqslant 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-9 \leqslant 1, \\ x^2-9>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-10 \leqslant 0, \\ x^2-9>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right], \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty); \end{cases} \quad x \in \left[-\sqrt{10};\ -3\right) \cup \left(3;\ \sqrt{10}\right].$$

Ответ: $\left[-\sqrt{10};\ -3\right) \cup \left(3;\ \sqrt{10}\right]$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_3^2 x \leqslant 9$.

Решение.

$\log_3^2 x \leqslant 9;\quad (\log_3 x)^2 \leqslant 9;\quad -3 \leqslant \log_3 x \leqslant 3.$

Так как основание логарифма больше единицы, то $\frac{1}{27} \leqslant x \leqslant 27$.

Ответ: $\left[\frac{1}{27};\ 27\right]$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4$.

Решение.

$\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4;$

$2\log_3(x+1) - 2\log_3(x-1) > 2\log_3 2;$

$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) > \log_3 2;$

$\log_3(x+1) > \log_3 2 + \log_3(x-1);$

$\log_3(x+1) > \log_3(2x-2).$

Так как основание логарифма больше единицы, то полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x+1>2x-2, \\ 2x-2>0; \end{cases} \quad \begin{cases} -x>-3, \\ x>1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<3, \\ x>1; \end{cases} \quad x \in (1;\ 3).$$

Ответ: $(1;\ 3)$.

Пример 4. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{0,5}(x+1)}$.

Решение.

Область определения функции $y = \sqrt{\log_{0,5}(x+1)}$ совпадает с множеством решений неравенства $\log_{0,5}(x+1) \geqslant 0$. Так как основание логарифма принадлежит промежутку $(0;\ 1)$, то полученное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+1 \leqslant 1, \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x>-1; \end{cases}$ $x \in (-1;\ 0]$.

Ответ: $D(y) = (-1;\ 0]$.

Пример 5. Решите неравенство $\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$.

Решение.

$\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$; $(\log_2 x + 1)(\log_2 x + 2) \geqslant 0$;

$\left[\begin{array}{l}\log_2 x \geqslant -1,\\ \log_2 x \leqslant -2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x \geqslant \frac{1}{2},\\ 0 < x \leqslant \frac{1}{4};\end{array}\right.$ $x \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Пример 6. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\lg^2 x - 3\lg x - 4 < 0$.

Решение.

Пусть $t = \lg x$, тогда неравенство принимает вид $t^2 - 3t - 4 < 0$; $(t - 4)(t + 1) < 0$; $-1 < t < 4$. Тогда $-1 < \lg x < 4$; $0{,}1 < x < 10\,000$.

Наибольшим целым решением неравенства является число 9999.

Ответ: 9999.

Пример 7. Решите неравенство $\log_2^2(-x) + \log_2 x^2 - 3 < 0$.

Решение.

$\log_2^2(-x) + \log_2 x^2 - 3 < 0$; $\log_2^2(-x) + 2\log_2|x| - 3 < 0$;

$\log_2^2(-x) + 2\log_2(-x) - 3 < 0$.

Пусть $\log_2(-x) = t$, тогда неравенство принимает вид $t^2 + 2t - 3 < 0$; $t \in (-3;\ 1)$. Получим: $-3 < \log_2(-x) < 1$; $\log_2 \frac{1}{8} < \log_2(-x) < \log_2 2$; $\frac{1}{8} < -x < 2$; $-2 < x < -\frac{1}{8}$.

Ответ: $\left(-2;\ -\frac{1}{8}\right)$.

Пример 8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x-2}{8-x} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}$.

Решение.

$\log_{5^{-1}} \frac{x-2}{8-x} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}$; $\log_5 \left(\frac{x-2}{8-x}\right)^{-1} \geqslant \log_5 \frac{x}{8-x}$; $\begin{cases}\frac{8-x}{x-2} \geqslant \frac{x}{8-x},\\ \frac{x}{8-x} > 0;\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{64-14x}{(x-2)(8-x)} \geqslant 0,\\ \frac{x}{x-8} < 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x \in \left(2;\ 4\frac{4}{7}\right] \cup (8;\ +\infty),\\ x \in (0;\ 8);\end{cases}$ $x \in \left(2;\ 4\frac{4}{7}\right]$.

Ответ: $\left(2;\ 4\frac{4}{7}\right]$.

Пример 9. Найдите сумму целых решений неравенства $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение.

$3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad 3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant 3^{-\frac{1}{2}}$; $\quad \log_{0,25}(1-x) \geqslant -\frac{1}{2}$; $\quad \begin{cases} 1-x \leqslant 2, \\ 1-x > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 1; \end{cases}$

$x \in [-1;\ 1)$. Найдем сумму целых решений неравенства: $-1+0=-1$.

Ответ: -1.

Пример 10. Решите неравенство $2\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}(x^2-x-2) \geqslant 1$.

Решение.

$2\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}(x^2-x-2) \geqslant 1$;

$2\log_{0,5}(x-2) \geqslant \log_{0,5} 0,5 + \log_{0,5}(x^2-x-2)$;

$2\log_{0,5}(x-2) \geqslant \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right)$; $\quad \begin{cases} \log_{0,5}(x-2)^2 \geqslant \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right), \\ x-2 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2 \leqslant \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, \\ x-2 > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2-4x+4 \leqslant \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3,5x + 5 \leqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leqslant 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \in [2;5], \\ x > 2; \end{cases}$ $\quad x \in (2;\ 5]$.

Ответ: $(2;\ 5]$.

Пример 11. Найдите сумму целых решений неравенства
$\log_{0,5}(x-4) - \log_{0,5}(x+2) - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$.

Решение.

Неравенство определено, если выполняется система условий

$\begin{cases} x-4 > 0, \\ x+2 > 0, \\ \frac{x+2}{x-4} \neq 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -2; \end{cases}$ $\quad x > 4$.

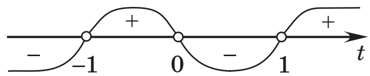
Запишем неравенство $\log_{0,5}(x-4) - \log_{0,5}(x+2) - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$ в виде

$\log_{0,5}\frac{x-4}{x+2} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad -\log_2\frac{x-4}{x+2} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$;

$\log_2\left(\frac{x-4}{x+2}\right)^{-1} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad \log_2\frac{x+2}{x-4} - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0$; $\quad \log_2\frac{x+2}{x-4} - \frac{1}{\log_2\frac{x+2}{x-4}} > 0$.

Пусть $\log_2 \frac{x+2}{x-4} = t$, тогда $t - \frac{1}{t} > 0$; $\frac{t^2-1}{t} > 0$; $\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0$.

Решим полученное неравенство методом интервалов:



$$t \in (-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty);\ \left[\begin{array}{l} -1 < t < 0, \\ t > 1. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} -1 < \log_2 \frac{x+2}{x-4} < 0, \\ \log_2 \frac{x+2}{x-4} > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \frac{x+2}{x-4} < \log_2 1, \\ \log_2 \frac{x+2}{x-4} > \log_2 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \frac{x+2}{x-4} < 1, \\ \frac{x+2}{x-4} > 2. \end{array}\right.$

Учитывая условие $x > 4$, получим: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x-4) < x+2 < x-4, \\ x+2 > 2(x-4); \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x-4 < 2x+4 < 2x-8, \\ x+2 > 2x-8; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4 > x-4, \\ 2x+4 < 2x-8, \end{cases} \\ x+2 > 2x-8; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -8, \\ 0x < -12, \end{cases} \\ -x > -10; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x < 10; \end{array}\right. \quad x < 10.$$

Таким образом, $x \in (4;\ 10)$.

Сумма целых решений неравенства равна 35.

Ответ: 35.

Пример 12. Решите неравенство $\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)} < 2$.

Решение.

$$\frac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)} < 2; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 6x-1 < 1, \\ \log_{\frac{1}{4}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{4}}(6x-1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 6x-1 > 1, \\ \log_{\frac{1}{4}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{4}}(6x-1)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}, \\ 3x+1 > (6x-1)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ 3x+1 < (6x-1)^2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ x(12x-5)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>\frac{1}{3},\\ x(12x-5)>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ 0<x<\frac{5}{12},\end{cases}\\ \begin{cases}x>\frac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>\frac{5}{12};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{6}<x<\frac{1}{3},\\ x>\frac{5}{12};\end{array}\right. \quad x\in\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{12};\ +\infty\right).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{12};\ +\infty\right)$.

Пример 13. Решите неравенство $\frac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,4}\left(x^2+1\right)}\geqslant 0$.

Решение.

Так как $x^2+1\geqslant 1$ при $x\in \boldsymbol{R}$ и функция $y=\log_{0,4}t$ убывает на области определения, то $\log_{0,4}\left(x^2+1\right)\leqslant 0$ при $x\in \boldsymbol{R}$. Тогда исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases}x^2(x-2)^2\leqslant 0,\\ \log_{0,4}\left(x^2+1\right)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{cases}$ $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 14. Найдите количество целых решений неравенства $\log_9\left(x^2-4x+5\right)\geqslant\log_{11}\left(4x-x^2-3\right)$.

Решение.

Запишем неравенство $\log_9\left(x^2-4x+5\right)\geqslant\log_{11}\left(4x-x^2-3\right)$ в виде $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant\log_{11}\left(1-(x-2)^2\right)$.

Выражение $(x-2)^2+1\geqslant 1$ при $x\in \boldsymbol{R}$. Так как функция $y=\log_9 t$ возрастает на области определения, то $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant\log_9 1$; $\log_9\left((x-2)^2+1\right)\geqslant 0$.

Вместе с тем $1-(x-2)^2\leqslant 1$ при $x\in \boldsymbol{R}$ и функция $y=\log_{11}t$ возрастает при $t>0$. Тогда $\log_{11}\left(1-(x-2)^2\right)\leqslant 0$ при $1-(x-2)^2>0$.

Таким образом, исходное неравенство справедливо при всех допустимых значениях переменной, т. е. неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 1-(x-2)^2>0, \\ (x-2)^2+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)^2<1, \\ x\in \boldsymbol{R}; \end{cases}$ $(x-2)^2<1;$ $-1<x-2<1;$ $1<x<3.$

Неравенство имеет одно целое решение.

Ответ: 1.

Пример 15. Решите неравенство $\sqrt{7-\log_2 x}+\log_2 x^2>4.$

Решение.

$\sqrt{7-\log_2 x}+\log_2 x^2>4;$ $\sqrt{7-\log_2 x}>4-2\log_2 x.$

Пусть $\log_2 x=t$, тогда неравенство принимает вид $\sqrt{7-t}>4-2t;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-2t<0, \\ 7-t\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-2t\geqslant 0, \\ 7-t>(4-2t)^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>2, \\ t\leqslant 7, \end{cases} \\ \begin{cases} t\leqslant 2, \\ 4t^2-15t+9<0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2<t\leqslant 7, \\ \begin{cases} t\leqslant 2, \\ 0{,}75<t<3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2<t\leqslant 7, \\ 0{,}75<t\leqslant 2; \end{array}\right. \quad 0{,}75<t\leqslant 7.$$

Тогда $0{,}75<\log_2 x\leqslant 7;$ $\sqrt[4]{8}<x\leqslant 128.$

Ответ: $\left(\sqrt[4]{8};\, 128\right].$

Пример 16. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_5\left(\log_3\dfrac{x-2}{x+2}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+2}{x-2}\right).$

Решение.

$$\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+2}{x-2}\right); \quad \log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<-\log_5\left(-\log_3\frac{x+2}{x-2}\right);$$

$$\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<-\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right); \quad \log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)+\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0;$$

$$2\log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0; \quad \log_5\left(\log_3\frac{x-2}{x+2}\right)<0;$$

$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-2}{x+2} < 1, \\ \log_3 \dfrac{x-2}{x+2} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2} < 3, \\ \dfrac{x-2}{x+2} > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{-2x-8}{x+2} < 0, \\ \dfrac{-4}{x+2} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2} > 0, \\ \dfrac{4}{x+2} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2); \end{cases}$

$x \in (-\infty; -4)$.

Наибольшим целым решением неравенства является число -5.

Ответ: -5.

Пример 17. Решите неравенство $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$.

Решение.

Оценим левую и правую части неравенства $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$.

$\log_2 (x(1-x)) = \log_2 (-x^2 + x) = \log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$. Так как $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и функция $y = \log_2 t$ возрастает на области определения, то $\log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \leqslant \log_2 \frac{1}{4}$; $\log_2 \left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \leqslant -2$.

Поскольку $0 \leqslant \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| \leqslant 1$, то $-2 \leqslant \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2 \leqslant -1$.

Таким образом, левая часть неравенства не превосходит -2 при допустимых значениях переменной, а правая — больше или равна -2 при $x \neq 0$. Тогда неравенство $\log_2 (x(1-x)) < \left|\sin \frac{\pi}{x}\right| - 2$ равносильно системе $\begin{cases} x(1-x) > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Пример 18. Верно ли, что множеством решений неравенства $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ является промежуток $(0; 9]$?

Решение.

При $x > 0$ неравенство $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x \leqslant \dfrac{20}{x+1}. \end{cases}$

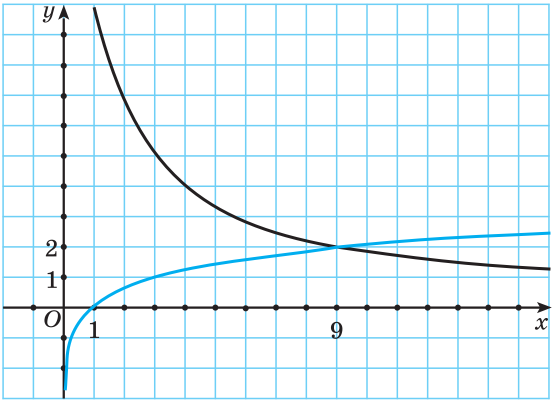


Рис. 9

Построим графики функций $f(x) = \log_3 x$ и $g(x) = \frac{20}{x+1}$ при $x > 0$ (рис. 9).

Поскольку $f(9) = \log_3 9 = 2$ и $g(9) = \frac{20}{10} = 2$ и график функции $f(x) = \log_3 x$ расположен ниже графика функции $g(x) = \frac{20}{x+1}$ на промежутке $(0; 9)$, то решением неравенства $(x+1)\log_3 x \leqslant 20$ является промежуток $(0; 9]$.

Ответ: верно.

Пример 19. Решите неравенство $\log_2(1-3x) < \frac{13+5x}{4}$.

Решение.

Решим неравенство $\log_2(1-3x) < \frac{13+5x}{4}$ графическим методом.

Пусть $1 - 3x = t$, тогда $x = \frac{1-t}{3}$ и $\frac{13+5x}{4} = \frac{13+5\cdot\frac{1-t}{3}}{4} = \frac{44-5t}{12}$ и исходное неравенство принимает вид $\log_2 t < \frac{44-5t}{12}$.

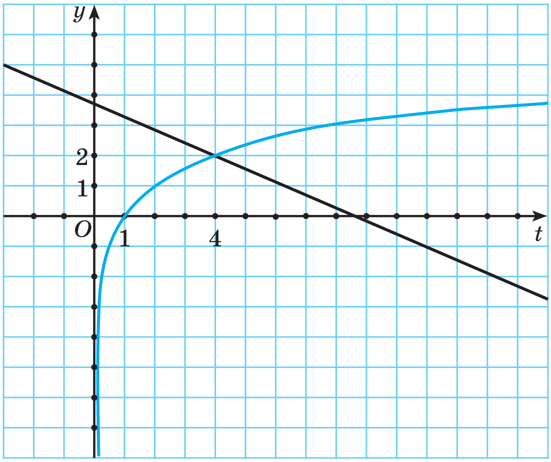


Рис. 10

Построим графики функций $y = \log_2 t$ и $y = \frac{44-5t}{12}$ (рис. 10). Графики данных функций пересекаются в точке $(4; 2)$ (в этом необходимо убедиться с помощью проверки). График функции $y = \log_2 t$ расположен ниже графика функции $y = \frac{44-5t}{12}$ при $0 < t < 4$. Тогда $0 < 1 - 3x < 4$; $-1 < x < \frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$\log_{7-4\sqrt{3}}\left(4x^2-20x+25\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0.$$

Решение.

Заметим, что $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$, а $2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$, тогда исходное неравенство принимает вид

$$\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\left(4x^2-20x+25\right)+\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0;$$

$$\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}(2x-5)^2-\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right)\geqslant 0;$$

$$\log_{\left|2-\sqrt{3}\right|}|2x-5|\geqslant\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right);\ \log_{2-\sqrt{3}}|2x-5|\geqslant\log_{2-\sqrt{3}}\left(x^2-x-2\right).$$

Так как $0<2-\sqrt{3}<1$, то полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}|2x-5|\leqslant x^2-x-2,\\ |2x-5|>0;\end{cases}\quad \begin{cases}2x-5\leqslant x^2-x-2,\\ 2x-5\geqslant -x^2+x+2,\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-3x+3\geqslant 0,\\ x^2+x-7\geqslant 0,\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty),\\ x\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ +\infty\right),\\ x\neq 2{,}5;\end{cases}$$

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ 2{,}5\right)\cup(2{,}5;\ +\infty).$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\ 2{,}5\right)\cup(2{,}5;\ +\infty)$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4.$$

Решение.

$$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right)\leqslant 4;$$

$$\log_{2x+1}\left((2x+1)(5-2x)\right)+\log_{5-2x}(1+2x)^2\leqslant 4;$$

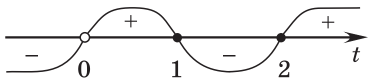
$$\log_{2x+1}\left((2x+1)(5-2x)\right)+2\log_{5-2x}|1+2x|\leqslant 4;$$

$$1+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(1+2x)\leqslant 4;$$

$$\log_{2x+1}(5-2x)+\frac{2}{\log_{2x+1}(5-2x)}-3\leqslant 0.$$

Пусть $\log_{2x+1}(5-2x)=t$, тогда неравенство принимает вид

$$t+\frac{2}{t}-3\leqslant 0;\ \ \frac{t^2-3t+2}{t}\leqslant 0;\ \ \frac{(t-1)(t-2)}{t}\leqslant 0.$$



$$t\in(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2],\ \text{или}\ \left[\begin{array}{l} t<0,\\ 1\leqslant t\leqslant 2.\end{array}\right.$$

Поскольку $t=\log_{2x+1}(5-2x)$, то $\left[\begin{array}{l}\log_{2x+1}(5-2x)<0,\\ 1\leqslant\log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2.\end{array}\right.$

Решим первое неравенство совокупности:

$$\log_{2x+1}(5-2x)<0;\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1>1,\\ 5-2x<1,\\ 5-2x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x+1<1,\\ 5-2x>1;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x>2,\\ x<2{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}-0{,}5<x<0,\\ x<2;\end{cases}\end{array}\right.\ \ x\in(-0{,}5;\ 0)\cup(2;\ 2{,}5).$$

Решим второе неравенство совокупности:

$$1\leqslant\log_{2x+1}(5-2x)\leqslant 2;\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1>1,\\ 2x+1\leqslant 5-2x\leqslant(2x+1)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x+1<1,\\ 2x+1\geqslant 5-2x\geqslant(2x+1)^2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ 2x+1\leqslant 5-2x,\\ 5-2x\leqslant 4x^2+4x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}-0{,}5<x<0,\\ 2x+1\geqslant 5-2x,\\ 5-2x\geqslant 4x^2+4x+1;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x\leqslant 1,\\ 2x^2+3x-2\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-0{,}5<x<0,\\ x\geqslant 1,\\ 2x^2+3x-2\leqslant 0;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x\leqslant 1,\\ 2x^2+3x-2\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-0{,}5<x<0,\\ x\geqslant 1,\\ -2\leqslant x\leqslant 0{,}5;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x\leqslant 1,\\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[0{,}5;\ +\infty),\end{cases}\\ x\in\varnothing;\end{array}\right.\quad x\in[0{,}5;\ 1].$$

Таким образом, получим $x \in (-0,5;\ 0) \cup [0,5;\ 1] \cup (2;\ 2,5)$.

Ответ: $(-0,5;\ 0) \cup [0,5;\ 1] \cup (2;\ 2,5)$.

Пример 22. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}\left(x^2+2x+1\right) \leqslant 3-\log_{-x-1}\left(-x^2-5x-4\right).$$

Решение.

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x+1)^2+\log_{-x-1}\left((-x-1)(x+4)\right)-3 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}|x+1|+1+\log_{-x-1}(x+4)-3 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}(-x-1)+\log_{-x-1}(x+4)-2 \leqslant 0;$$

$$\log_{x+4}(-x-1)+\frac{1}{\log_{x+4}(-x-1)}-2 \leqslant 0.$$

Пусть $t=\log_{x+4}(-x-1)$, тогда неравенство принимает вид $t+\frac{1}{t}-2 \leqslant 0$;

$$\frac{t^2-2t+1}{t} \leqslant 0;\quad \frac{(t-1)^2}{t} \leqslant 0;\quad \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t<0. \end{array}\right.$$

Поскольку $t=\log_{x+4}(-x-1)$, то $\left[\begin{array}{l} \log_{x+4}(-x-1)=1, \\ \log_{x+4}(-x-1)<0. \end{array}\right.$

Решим уравнение совокупности:

$$\log_{x+4}(-x-1)=1;\quad \begin{cases} -x-1=x+4, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2,5, \\ x>-4, \\ x\neq -3; \end{cases} \quad x=-2,5.$$

Решим неравенство совокупности:

$$\log_{x+4}(-x-1)<0;\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+4<1, \\ -x-1>1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+4>1, \\ -x-1<1, \\ -x-1>0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4<x<-3, \\ x<-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>-3, \\ x>-2, \\ x<-1; \end{cases} \end{array}\right. \quad x \in (-4;\ -3) \cup (-2;\ -1).$$

Таким образом, получим $x \in (-4;\ -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2;\ -1)$.

Ответ: $(-4;\ -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2;\ -1)$.

Пример 23. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств
$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01x > 0, \\ \frac{1}{x} < 1000. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01x > 0, \\ \frac{1}{x} < 1000; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01 + \lg x > 0, \\ \frac{1}{x} - 1000 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg^2 x + \lg x - 2 > 0, \\ \frac{1 - 1000x}{x} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lg x - 1)(\lg x + 2) > 0, \\ \frac{1000x - 1}{x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x > 1, \\ \lg x < -2, \end{array}\right. \\ \frac{1000x - 1}{x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 10, \\ 0 < x < 0{,}01, \end{array}\right. \\ x \in (-\infty; 0) \cup (0{,}001; +\infty); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0;\ 0{,}01) \cup (10;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (0{,}001;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in (0{,}001;\ 0{,}01) \cup (10;\ +\infty).$$

Наименьшим целым решением системы неравенств является число 11.
Ответ: 11.

Решение логарифмических неравенств заменой выражений на знакосовпадающие

Покажем, что знак выражения $\log_a t_1 - \log_a t_2$ совпадает со знаком выражения $(a - 1)(t_1 - t_2)$ при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

1. Пусть $a > 1$, тогда функция $y = \log_a t$ возрастающая, и если $t_1 > t_2 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 > 0$, а если $t_2 > t_1 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 < 0$. При $a > 1$, т. е. $a - 1 > 0$, если $t_1 > t_2$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) > 0$, а если $t_2 > t_1$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) < 0$, т. е. знак выражения $\log_a t_1 - \log_a t_2$ совпадает со знаком выражения $(a - 1)(t_1 - t_2)$.

2. Пусть $0 < a < 1$, тогда функция $y = \log_a t$ убывающая, и если $t_1 > t_2 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 < 0$, а если $t_2 > t_1 > 0$, то $\log_a t_1 - \log_a t_2 > 0$. При $a < 1$, т. е. $a - 1 < 0$, если $t_1 > t_2$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) < 0$, а если $t_2 > t_1$, то $(a - 1)(t_1 - t_2) > 0$, т. е. знак выражения $\log_a t_1 - \log_a t_2$ совпадает со знаком выражения $(a - 1)(t_1 - t_2)$.

Пример 24. Решите неравенство $\log_{x-2}(2x - 7) < 1$.

Решение.

$\log_{x-2}(2x - 7) < 1;\ \log_{x-2}(2x - 7) < \log_{x-2}(x - 2);$

$\log_{x-2}(2x - 7) - \log_{x-2}(x - 2) < 0.$

Так как знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то неравенство $\log_{x-2}(2x-7) - \log_{x-2}(x-2) < 0$ заменим равносильной системой

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ 2x-7>0, \\ (x-2-1)(2x-7-(x-2))<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>2, \\ x\neq 3, \\ x>3{,}5, \\ (x-3)(x-5)<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>3{,}5, \\ 3<x<5; \end{cases} \quad x \in (3{,}5;\ 5).$$

Ответ: $(3{,}5;\ 5)$.

Пример 25. Решите неравенство $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

Решение.

$$\log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x) - \log_{x^2} x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1, \\ (x^2-1)(3-2x-x^2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq -1, \\ (x^2-1)(x^2+2x-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1, \\ x\neq -1, \\ x\in(-3;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x \in (-3;\ -1).$$

Ответ: $(-3;\ -1)$.

Пример 26. Решите неравенство $\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$.

Решение. *Первый способ.*

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0; \quad \log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > \log_{x+3} 1;$$

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \log_{x+3} 1 > 0.$$

Так как знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$,

$g(x) > 0$, то неравенство $\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \log_{x+3} 1 > 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3 \neq 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0, \\ (x+3-1)\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1\right) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ -1 < x < 1, \\ (x+2)\frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1, \\ x \in (-\infty;\ -2) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1); \end{cases}$$

$x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

Второй способ. Данное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ 1-x^2 > 0, \\ \frac{2x^2}{1-x^2} < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ \frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -1 < x < 1, \\ x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1); \end{cases} \end{array}\right. \quad x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1).$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

Пример 27. Решите неравенство $\log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8} \leqslant 1$.

Решение. *Первый способ.*

$\log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8} \leqslant 1$; $\log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8} - \log_{x-1}(x-1) \leqslant 0$.

Так как знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ при условии, что $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то неравенство $\log_{x-1}\frac{x^2-x-6}{2x-8} - \log_{x-1}(x-1) \leqslant 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-1 \neq 1, \\ \frac{x^2-x-6}{2x-8} > 0, \\ (x-1-1)\left(\frac{x^2-x-6}{2x-8} - (x-1)\right) \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \frac{x^2-x-6}{2x-8} > 0, \\ (x-2)\frac{x^2-9x+14}{2x-8} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x \in (-2;\ 3) \cup (4;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ 4) \cup [7;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty).$$

Второй способ.

$$\log_{x-1} \frac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \leqslant 1; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \geqslant x - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} \leqslant x - 1, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} > 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 < x < 2, \\ \dfrac{x^2 - 9x + 14}{2x - 8} \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \dfrac{x^2 - 9x + 14}{2x - 8} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{2x - 8} > 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (1;\ 2), \\ x \in (-\infty;\ 2] \cup (4;\ 7], \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (2;\ +\infty), \\ x \in [2;\ 4) \cup [7;\ +\infty), \\ x \in (-2;\ 3) \cup (4;\ +\infty); \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (1;\ 2), \\ x \in (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty); \end{array} \right. \quad x \in (1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty).$$

Ответ: $(1;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup [7;\ +\infty)$.

10.1. Решите неравенство:

а) $\log_{16}(3x + 1) \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\log_4(7 - x) < 3$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) \geqslant -2$; г) $\log_{\frac{1}{4}}(5x - 1) \geqslant -0{,}5$;

д) $\log_3(2x - 1) \geqslant 0$; е) $\log_2(3x - 5) \leqslant 0$.

10.2. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{\log_{0,2}(x - 1)}$; б) $f(x) = \sqrt{\lg(2 - x)}$;

в) $f(x) = \sqrt{2 - \log_4 x}$; г) $f(x) = \sqrt[4]{5 - \log_2(2x)}$.

10.3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2\left(x^2-2x-2\right)>0, \\ 2^{2x^2+5x+2}>1. \end{cases}$

10.4. Решите неравенство:

а) $\log_{0,9}\left(x^2-4x\right)>\log_{0,9}(4x+1)$; б) $\log_{0,5}\left(x^2-5x+6\right)\geqslant -1$;

в) $\log_3\left(x^2-2x+1\right)\leqslant 2$; г) $\log_2\left(x^2-6x+9\right)\leqslant 2$;

д) $\log_2\left(x^2+4x+11\right)\geqslant \log_{0,5}125$; е) $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(x^2+4x+11-4\sqrt{3}\right)<2$.

10.5. Найдите сумму целых решений неравенства $\log_{\cos\frac{\pi}{7}}(x^2-7x)\geqslant \log_{\cos\frac{\pi}{7}}(3x+11)$.

10.6. Решите неравенство:

а) $\log_{0,7}\frac{5x+1}{x-4}>\log_{0,7}3$; б) $\log_7\frac{2x}{x-2}<1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x-1}{x+2}>1$; г) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{2-3x}{x}\geqslant -1$;

д) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{x+4}<-2$; е) $\log_3\frac{x}{6-x}\leqslant \log_{\frac{1}{3}}\frac{x-3}{6-x}$.

10.7. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{1-\log_{\frac{1}{3}}x}+\frac{1}{x-1}$; б) $f(x)=\sqrt{2-\log_{\frac{1}{2}}(x+5)}-\frac{1}{x+1}$.

10.8. Решите неравенство:

а) $\log_3^2 x-2\log_3 x\leqslant 3$; б) $\log_{0,5}^2 x-4\log_{0,5}x+3\leqslant 0$;

в) $\log_3^2 x>4$; г) $\lg^2 x-\lg x<0$;

д) $5\lg x-\lg^2 x-4<0$; е) $2\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_{\frac{1}{3}}x+2\geqslant 0$.

10.9. Решите неравенство $\log_3^2(-x)-\log_3 x^2-3<0$.

10.10. Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений неравенства $\log_{0,2}^2(x-1)\leqslant 9$.

10.11. Верно ли, что неравенство $\log_5 x+\log_{25}x<\log_{0,2}\sqrt{3}$ не имеет целых решений?

10.12. Решите неравенство:

а) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)\leqslant 14+\lg\frac{1}{x}$; б) $\log_3^2(3x)+\log_3 x\leqslant 2\log_{\sqrt{3}}3$.

10.13. Решите двойное неравенство $0 < \log_2 \frac{x-5}{4} \leqslant 3$.

10.14. Решите неравенство:

а) $\log_{0,6} \log_2 x > -1$;

б) $\log_{0,8} \log_3 x > -1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 (x-1) > 0$;

г) $2 + \log_{0,5} \left(\log_3 (7-x)\right) > 0$.

10.15. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = 1 + \log_{0,25} \left(\log_3 (4-x)\right)$ принимает положительные значения.

10.16. Решите неравенство:

а) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0$;

б) $\log_{0,3} \log_2 \frac{3x-1}{2-x} > 0$;

в) $\log_2 \log_{0,5} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1$;

г) $\log_{0,5} \lg \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$.

10.17. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \log_{0,6} (3x-7)$;

б) $f(x) = \log_3 \log_{\frac{1}{7}} (6+5x)$.

10.18. Найдите сумму целых решений неравенства:

а) $\log_{0,5} \left(\log_3 (x-2)\right) \geqslant -1$;

б) $\log_{0,5} \log_2 \left(x^2 - 2\right) \geqslant 0$.

10.19. Решите неравенство:

а) $\lg(7-x) + \lg x > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (10-x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4{,}5 - 1$;

в) $\log_3 \left(6+x^2\right) - \log_3 (x-2) < 1 + \log_3 (x+2)$;

г) $\lg 5 + \lg(x+4) \leqslant 1 - \lg(3x-2) + \lg(5x+2)$.

10.20. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{\log_{0,2}\left(x^2 - 4x + 4\right)}{x^2 + 2x + 8} \geqslant 0$.

10.21. Решите неравенство:

а) $2\log_{\frac{1}{2}} (1-x) < \log_{\frac{1}{2}} (3x+1)$;

б) $2\log_4 (x+1) - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-5) < 3$;

в) $\log_9 (2x-1) \geqslant \log_3 x$;

г) $1 + \log_{\sqrt{3}} x > \log_3 (6-7x)$.

10.22. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \log_{0,4} \log_4 \frac{5-x}{x-2}$;

б) $f(x) = \log_5 \log_{0,5} \frac{3-x}{x+2}$.

10.23. Решите неравенство
$\log_{9-4\sqrt{5}}\left(9x^2-24x+16\right)+\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+x-2\right)\geqslant 0.$

10.24. Найдите множество решений неравенства:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)^2\geqslant -2;$ б) $\log_4(x+2)^2\leqslant 3.$

10.25. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}>32,\\ \log_4(x-6)^2\leqslant 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{2x-6}<\frac{1}{27},\\ \log_3(1-x)^2\leqslant 2.\end{cases}$

10.26. Решите неравенство:

а) $0{,}3^{\log_2(3x-2)}\geqslant 0{,}09;$ б) $0{,}2^{\log_3(2x+3)}\leqslant 0{,}04;$ в) $3^{\log_{0,5}(2x-1)}\geqslant\frac{1}{9}.$

10.27. Решите неравенство:

а) $5^{\log_5(4-9x)}<31;$ б) $10^{\lg(3x-2)}\leqslant 7;$ в) $9^{\log_3(-x)}<4.$

10.28. Воспользуйтесь методом замены переменной и решите неравенство:

а) $\log_2^2(4x)+2\log_2 x-11<0;$ б) $\log_2(3x+1)\cdot\log_{0,5}(6x+2)<-6;$

в) $\log_x 9-\log_3^2(3x)\leqslant -2;$ г) $\log_x 10+\frac{1}{1-\lg x}>1.$

10.29. Решите неравенство $\log_3\left(4^x+1\right)+\log_{4^x+1}3>2{,}5.$

10.30. Найдите все решения неравенства:

а) $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}\leqslant\frac{3}{4};$ б) $\log_{\sqrt{2}}\left(5^x-1\right)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2.$

10.31. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{1+\log_{0,5}^2 x}{1+\log_{0,5} x}<1.$

10.32. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{2}{\log_2 x+1}\geqslant 1.$

10.33. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x^2+4x-5}{\lg(x+2)}\geqslant 0.$

10.34. Решите неравенство $\frac{5^{x^2}-625}{\log_x(x-1)}\geqslant 0.$

10.35. Решите двумя способами неравенство $\log_{x+3}\frac{x-1}{x+1}\leqslant\log_{x+3}2.$

10.36. Решите неравенство:

а) $\log_{5x+4} 3 < 0$; б) $\log_x (x-2) \leqslant 2$;

в) $\log_x \left(2x^2 - 3x\right) \leqslant 1$; г) $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}} \left(10x^2 + x - 2\right) \leqslant 0$;

д) $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$; е) $\log_{3^2 - x^2} \left(1,5 - |1 - x|\right) \leqslant 0$.

10.37. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_x \log_9 \left(3^x - 9\right) < 1$.

10.38. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} (2x+1)}{\log_{\frac{1}{3}} (4x-1)} < 2$.

10.39. Решите уравнение $\left|\log_{0,25} (x+3) - 5\right| - \left|2 - \log_{0,25} (x+3)\right| = 3$.

10.40. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{\log_{0,8}\left(x^2 - 4x + 5\right)}{x^3 - 5x^2 + 4x} \leqslant 0$.

10.41. Найдите все решения неравенства $\dfrac{\log_{0,5}\left(x^2 + 2\right)}{x^2(x+1)^2} \leqslant 0$.

10.42. Решите неравенство:

а) $\log_2 x^3 - 3 < \sqrt{7 + \log_2 x}$; б) $\sqrt{\log_4^2 x - 2} \geqslant \log_2 \dfrac{x}{4} - 1$.

10.43. Верно ли, что множеством решений неравенства $(0,25)^{x-3} + \log_{0,5} x \geqslant 3$ является промежуток $(0; 2]$?

10.44. Решите неравенство $\log_2 (x(1-x)) \leqslant \left|\cos \dfrac{\pi}{4x}\right| - 2$.

10.45. Найдите количество чисел вида $\dfrac{\pi m}{4}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, являющихся решением неравенства $\log_{|\sin x|}\left(x^2 - 8x + 23\right) > \dfrac{3}{\log_2 |\sin x|}$.

10.46. Решите неравенство:

а) $\left|\left|\log_3 x + 2\right| - 3\right| < 1$; б) $\left|\log_3 x\right| < \left|\log_3^2 \dfrac{x}{9}\right|$.

10.47. Решите неравенство $\left(\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}\right) \lg\left(x^2 + \dfrac{9}{25}\right) > 0$.

§ 11. Методы решения систем уравнений

Рассмотрим множество уравнений

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; ..., \; f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$.

Если необходимо найти все наборы значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых каждое из уравнений рассматриваемого множества обращается в верное числовое равенство, то говорят, что задана ***система уравнений***:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ..., \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Каждый такой упорядоченный набор значений переменных называется ***решением системы уравнений***. Множество решений системы уравнений представляет собой пересечение множеств решений всех уравнений.

Множество решений системы уравнений может быть пустым. В этом случае говорят, что система не имеет решений. ***Решить систему уравнений*** — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Две системы уравнений называются ***равносильными***, если множества их решений совпадают. Системы, которые не имеют решений, также считаются равносильными. При решении систем уравнений стараются заменить исходную систему более простой равносильной системой.

Методы решения систем уравнений

1. Метод подстановки

Для решения системы уравнений с двумя переменными методом подстановки нужно:

① Выразить одну из переменных из первого уравнения.
② Подставить это выражение во второе уравнение.
③ Решив второе уравнение, найти значение переменной.
④ Подставить найденное значение в выражение для первой переменной.
⑤ Вычислить значение первой переменной.
⑥ Записать ответ в виде упорядоченной пары чисел.

Пример 1. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 5, \\ 3(2y + 5) + 8y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 5, \\ 6y + 15 + 8y = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y + 5, \\ 14y = -14; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y + 5, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \cdot (-1) + 5, \\ y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

Ответ: (3; –1).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y, \\ (5 - y)y = 4. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы: $y^2 - 5y + 4 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Подставим каждое из значений переменной y в первое уравнение системы: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 - 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - 4, \\ y = 4 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: (4; 1); (1; 4).

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x^2 + 16xy + 4y^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x^2 + 16x(2 - 2x) + 4(2 - 2x)^2 = 1. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы:

$x^2 + 16x(2 - 2x) + 4(2 - 2x)^2 = 1$; $x^2 + 32x - 32x^2 + 4(4 - 8x + 4x^2) = 1$;

$x^2 + 32x - 32x^2 + 16 - 32x + 16x^2 = 1$; $-15x^2 = -15$; $x^2 = 1$; $x = 1$ или $x = -1$.

При $x = 1$ $y = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

При $x = -1$ $y = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$.

Таким образом, решениями системы уравнений являются пары чисел (1; 0); (–1; 4).

Ответ: (1; 0); (–1; 4).

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5). \end{cases}$

Решение.

Разложим на множители квадратный трехчлен $2x^2 + x - 3$.

$2x^2 + x - 3 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$; $x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1$, $x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$.

Тогда $2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3)$ и система

$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5) \end{cases}$ принимает вид $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)(2x+3) = (x-1)(y+5); \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)\big((2x+3) - (y+5)\big) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ (x-1)(2x - y - 2) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 2x - 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ y = 2x - 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - y - 3y = 7, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - x(2x-2) - 3(2x-2) = 7, \\ y = 2x - 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1{,}25, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0{,}25, \\ y = 2x - 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1{,}25, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0{,}25, \\ y = -2{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1; –1,25); (–0,25; –2,5).

2. Метод сложения

Система двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} f_1(x;\ y) = g_1(x;\ y), \\ f_1(x;\ y) \pm f_2(x;\ y) = g_1(x;\ y) \pm g_2(x;\ y). \end{cases}$

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 7y = 3, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$

Решение.

Решим данную систему методом сложения, преобразовав уравнения так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными:

$$\begin{cases}2x+7y=3,\\3x+5y=-1\end{cases}\left|\begin{array}{l}\cdot 3\\\cdot(-2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}6x+21y=9,\\-6x-10y=2\end{cases}\Big|+ \Leftrightarrow \begin{cases}11y=11,\\2x+7y=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=1,\\2x+7\cdot 1=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$$

Ответ: (–2; 1).

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+y=7,\\|y-x|=2.\end{cases}$

Решение.

Раскроем модуль во втором уравнении системы и получим: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y=7,\\y-x=2,\end{cases}\\\begin{cases}2x+y=7,\\y-x=-2.\end{cases}\end{array}\right.$

Решим каждую полученную систему методом сложения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y=7,\\x-y=-2,\end{cases}\Big|+\\\begin{cases}2x+y=7,\\x-y=2;\end{cases}\Big|+\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x=5,\\x-y=-2,\end{cases}\\\begin{cases}3x=9,\\x-y=2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\frac{2}{3},\\y=3\frac{2}{3},\end{cases}\\\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(1\frac{2}{3};\ 3\frac{2}{3}\right)$; (3; 1).

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+5x+3y=12,\\2y-7x=8.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}2x^2+5x+3y=12,\\2y-7x=8;\end{cases}\left|\begin{array}{l}\cdot 2\\\cdot(-3)\end{array}\right. \quad \begin{cases}4x^2+10x+6y=24,\\-6y+21x=-24;\end{cases}\Big|+ \quad \begin{cases}4x^2+31x=0,\\2y-7x=8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(4x+31)=0,\\2y-7x=8;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\4x+31=0,\end{array}\right.\\2y-7x=8;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=-7\frac{3}{4},\end{array}\right.\\2y-7x=8;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=4,\end{cases}\\\begin{cases}x=-7\frac{3}{4},\\y=-23\frac{1}{8}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: (0; 4); $\left(-7\frac{3}{4}; -23\frac{1}{8}\right)$.

Пример 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$

Решение.

Сложим уравнения системы и получим $x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$. Полученное равенство равносильно системе $\begin{cases} x = y, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

С помощью проверки убедимся, что пара чисел (1; 1) является решением данной системы уравнений.

Ответ: (1; 1).

3. Метод замены переменных

Пример 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{8}{x+y} + \dfrac{5}{y-3x} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{5}{x+y} - \dfrac{3}{y-3x} = 4. \end{cases}$

Решение.

Пусть $a = \dfrac{1}{x+y}$, $b = \dfrac{1}{y-3x}$, тогда исходную систему уравнений можно заменить системой $\begin{cases} 8a + 5b = \dfrac{3}{2}, \\ 5a - 3b = 4. \end{cases}$

Для решения полученной системы используем метод сложения:

$$\begin{cases} 8a + 5b = \dfrac{3}{2}, \Big| \cdot 3 \\ 5a - 3b = 4; \Big| \cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 24a + 15b = \dfrac{9}{2}, \\ 25a - 15b = 20; \end{cases} \Bigg| + \quad \begin{cases} 49a = \dfrac{49}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вернемся к замене:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y-3x} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ y - 3x = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 4, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

Пример 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{2y + 3x} = -0{,}2, \\ \dfrac{1}{3x + 2y} - 2y + 3x = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

Решение.

Пусть $a = 3x + 2y$, $b = 3x - 2y$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = -0{,}2, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} + b = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{1}{a} - \frac{a}{5} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5 - a^2}{5a} = -\frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \frac{5 - a^2}{a} = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ 5 - a^2 = -4a, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ a^2 - 4a - 5 = 0, \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{a}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 5, \\ a = -1, \end{array}\right. \\ a \neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 5, \\ b = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = \frac{1}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 3x - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = -1, \\ 3x - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x = 4, \\ 3x - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} 6x = -\frac{4}{5}, \\ 3x - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ 3 \cdot \frac{2}{3} - 2y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ 3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right) - 2y = \frac{1}{5}; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ -2y = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ 2y = -\frac{3}{5}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = 1{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{15}, \\ y = -\frac{3}{10}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right)$; $\left(-\frac{2}{15}; -\frac{3}{10}\right)$.

Пример 11. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{12}{3x^2 - 2y} + \frac{17}{2x^2 + 3y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$

Решение.

Пусть $a = \frac{1}{3x^2 - 2y}$; $b = \frac{1}{2x^2 + 3y}$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 12a + 17b = 3, \\ 6a + 34b = 3; \ \big| \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{cases} 12a + 17b = 3, \\ -12a - 68b = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} -51b = -3, \\ 12a + 17b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ 12a + 17 \cdot \frac{1}{17} = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ 12a + 1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{17}, \\ a = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Выполним обратную замену:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2-2y}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{2x^2+3y}=\dfrac{1}{17};\end{cases}\quad \begin{cases}3x^2-2y=6, & \big|\cdot(-2)\\ 2x^2+3y=17; & \big|\cdot 3\end{cases}\quad \begin{cases}-6x^2+4y=-12,\\ 6x^2+9y=51;\end{cases}$$

$$\begin{cases}13y=39,\\ 3x^2-2y=6;\end{cases}\quad \begin{cases}y=3,\\ 3x^2-2\cdot 3=6;\end{cases}\quad \begin{cases}y=3,\\ x^2=4;\end{cases}\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}\\ &\begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Ответ: $(2; 3)$; $(-2; 3)$.

Пример 12. Найдите произведение $x_0\cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}-\dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}=1,\\ \dfrac{10\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}+\dfrac{3}{x-y\sqrt{2}}=1.\end{cases}$

Решение.

Пусть $a=\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}$, тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases}a-b=1,\\ 5a+3b=1;\end{cases}\quad \begin{cases}3a-3b=3,\\ 5a+3b=1;\end{cases}\quad \begin{cases}8a=4,\\ a-b=1;\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ a-b=1;\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{x+y\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{x-y\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y\sqrt{2}=4\sqrt{2},\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=4\sqrt{2}-2,\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ x-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ 2\sqrt{2}-1-y\sqrt{2}=-2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2\sqrt{2}-1,\\ y=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Тогда произведение

$$x_0\cdot y_0=\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}=3{,}5\sqrt{2}.$$

Ответ: $3{,}5\sqrt{2}$.

Пример 13. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{8}{x^2+yx}+\dfrac{5}{y^2-3xy}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{5}{x^2+yx}-\dfrac{3}{y^2-3xy}=4.\end{cases}$

Решение.

Пусть $a = \frac{1}{x^2 + yx}$, $b = \frac{1}{y^2 - 3xy}$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 8a + 5b = \frac{3}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 24a + 15b = \frac{9}{2}, \\ 25a - 15b = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} 49a = \frac{49}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ 5a - 3b = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \frac{1}{x^2 + yx} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y^2 - 3xy} = -\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + yx = 2, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases}$

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 3xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 3y^2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1; 1); (–1; –1).

Пример 14. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $t = \frac{x + y}{x - y}$, тогда уравнение принимает вид $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$; $6t^2 - 13t + 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, \\ t = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \frac{x + y}{x - y} = \frac{2}{3}, \\ \frac{x + y}{x - y} = \frac{3}{2}; \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x + 3y = 2x - 2y, \\ 2x + 2y = 3x - 3y, \end{array}\right. \\ x \neq y; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -5y, \\ x = 5y, \end{array}\right. \\ x \neq y; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = -5y, \\ x = 5y. \end{array}\right.$

При $x = -5y$ второе уравнение системы принимает вид $-5y \cdot y = 5$; $y^2 = -1$. Полученное уравнение не имеет корней.

При $x = 5y$ получим $5y \cdot y = 5$; $y^2 = 1$; $y = 1$ или $y = -1$.

Тогда решениями системы являются пары чисел (5; 1) и (–5; –1).

Ответ: (5; 1); (–5; –1).

Пример 15. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = 2{,}5, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Решение.

Пусть $t = \frac{x + y}{x - y}$, тогда первое уравнение системы принимает вид $t + \frac{1}{t} = 2{,}5$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Откуда $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=2,\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ x^2+y^2=20;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=2,\\ x^2+y^2=20,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2},\\ x^2+y^2=20;\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3y,\\ 9y^2+y^2=20,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-3y,\\ 9y^2+y^2=20;\end{array}\right.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=3y,\\ y^2=2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=-3y,\\ y^2=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$

При $y_1=\sqrt{2}$ получим $x_1=3\sqrt{2}$.

При $y_2=-\sqrt{2}$ получим $x_2=-3\sqrt{2}$.

При $y_3=\sqrt{2}$ получим $x_3=-3\sqrt{2}$.

При $y_4=-\sqrt{2}$ получим $x_4=3\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(-3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; $\left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Пример 16. Решите систему уравнений $\left\{\begin{array}{l}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11.\end{array}\right.$

Решение.

Пусть $x+y=t$, тогда первое уравнение системы $\left\{\begin{array}{l}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11\end{array}\right.$ запишем в виде $t^2-2t-15=0$; $\left[\begin{array}{l}t=5,\\ t=-3.\end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l}x+y=5,\\ x+y=-3.\end{array}\right.$

При $x+y=5$ получим систему $\left\{\begin{array}{l}x+y=5,\\ x+xy+y=11;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x+y=5,\\ xy=6;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=2,\\ y=3,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3,\\ y=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$

При $x+y=-3$ имеем $\left\{\begin{array}{l}x+y=-3,\\ x+xy+y=11;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x+y=-3,\\ xy=14;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x=-y-3,\\ (-y-3)y=14;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x=-y-3,\\ y^2+3y+14=0.\end{array}\right.$

Так как уравнение $y^2+3y+14=0$ не имеет корней $(D<0)$, то система не имеет решений.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел (2; 3); (3; 2).

Ответ: (2; 3); (3; 2).

4. Использование графиков уравнений

Пример 17. Найдите количество решений системы уравнений
$$\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 + y^2 - 47 = 2x - 2y. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему к виду
$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 49. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения системы $y = \dfrac{6}{x}$ является гипербола, а графиком уравнения $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 49$ является окружность с центром в точке (1; –1) и радиусом 7 (рис. 11).

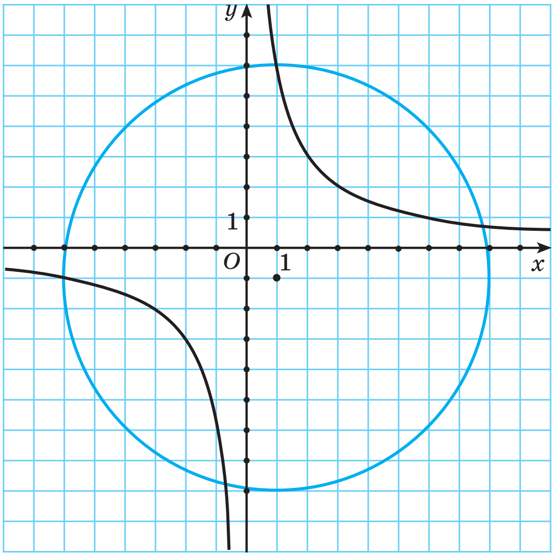


Рис. 11

Графики уравнений имеют четыре общие точки, значит, соответствующая система имеет четыре решения.

5. Метод умножения и деления уравнений системы

Система двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) = g_1(x; y) \cdot g_2(x; y), \end{cases}$ если не существует таких пар $(x; y)$, при которых оба выражения $f_1(x; y)$ и $g_1(x; y)$ одновременно обращаются в нуль.

Система двух уравнений с двумя переменными $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ \dfrac{f_1(x; y)}{f_2(x; y)} = \dfrac{g_1(x; y)}{g_2(x; y)}, \end{cases}$ если не существует таких пар $(x; y)$, при которых выражения $f_2(x; y)$ и $g_2(x; y)$ обращаются в нуль.

Пример 18. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 + 2xy = 15, \\ 2x^2 + xy = 5. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y^2 + 2xy = 15, \\ 2x^2 + xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y + 2x) = 15, \\ x(2x + y) = 5. \end{cases}$$

Данная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \dfrac{y(y + 2x)}{x(2x + y)} = \dfrac{15}{5}, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 3, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x(2x + y) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x(2x + 3x) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ 5x^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1; 3); (–1; –3).

Пример 19. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x - 3)^4 (y - 5)^5 = 1, \\ (x - 3)^5 (y - 5)^4 = 1. \end{cases}$

Решение.

Разделим первое уравнение системы $\begin{cases} (x - 3)^4 (y - 5)^5 = 1, \\ (x - 3)^5 (y - 5)^4 = 1 \end{cases}$ на второе и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{y - 5}{x - 3} = 1, \\ (x - 3)^5 (y - 5)^4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x - 3)^5 (y - 5)^4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x - 3)^5 (x - 3)^4 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ (x - 3)^9 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ x - 3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 5 = x - 3, \\ x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 6, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 6).

6. Решение симметрических систем уравнений

Многочлен $F(x; y)$ называется *симметрическим*, если при замене x на y и y на x он не изменяется.

Например, x^4+y^4; $x^2+y^2-5x^2y^2+x+y+1$ — симметрические многочлены. Все симметрические многочлены могут быть выражены через простейшие симметрические многочлены $a=x+y$ и $b=xy$, например:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b;\quad x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=a^2-b;$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ab.$$

Уравнение $F(x;\,y)=0$ называется *симметрическим*, если $F(x;\,y)$ — симметрический многочлен. Система, все уравнения которой симметрические, называется *симметрической*.

Для решения симметрических систем используется замена $a=x+y$ и $b=xy$.

Пример 20. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=17,\\ x+xy+y=9.\end{cases}$

Решение.

Запишем уравнения системы в виде $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=17,\\ (x+y)+xy=9.\end{cases}$

Пусть $a=x+y$, $b=xy$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases}a^2-2b=17,\\ a+b=9;\end{cases}\quad \begin{cases}a^2-2(9-a)=17,\\ b=9-a;\end{cases}\quad \begin{cases}a^2+2a-35=0,\\ b=9-a;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-7,\\ a=5,\end{array}\right.\\ b=9-a;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-7,\\ b=16,\end{cases}\\ \begin{cases}a=5,\\ b=4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=-7,\\ xy=16,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=5,\\ xy=4.\end{cases}\end{array}\right.$ Первая система совокупности не имеет решений, а решениями второй системы являются пары чисел $(1;\,4)$ и $(4;\,1)$.

Ответ: $(1;\,4)$; $(4;\,1)$.

Пример 21. Решите систему уравнений $\begin{cases}xy+2x+2y=5,\\ x^2+y^2+3x+3y=8.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}xy+2x+2y=5,\\ x^2+y^2+3x+3y=8;\end{cases}\quad \begin{cases}xy+2(x+y)=5,\\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)=8.\end{cases}$$

Пусть $a = x + y$; $b = xy$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} b + 2a = 5, \\ a^2 - 2b + 3a = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ a^2 - 2(5 - 2a) + 3a = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ a^2 + 7a - 18 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a, \\ \left[\begin{array}{l} a = -9, \\ a = 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -9, \\ b = 23, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$ Вернемся к замене: $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -9, \\ xy = 23, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система совокупности не имеет решений. Решением второй системы совокупности является пара чисел (1; 1).

Ответ: (1; 1).

Пример 22. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + xy + y = 1 + 2\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

Решение.

Запишем систему $\begin{cases} x + xy + y = 1 + 2\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} (x + y) + xy = 1 + 2\sqrt{2}, \\ (x + y)^2 - 2xy = 3 \end{cases}$

и выполним замену $a = x + y$, $b = xy$, тогда $\begin{cases} a + b = 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2b = 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 - 2\left(-a + 1 + 2\sqrt{2}\right) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a + 1 + 2\sqrt{2}, \\ a^2 + 2a - 4\sqrt{2} - 5 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы $a^2 + 2a - 4\sqrt{2} - 5 = 0$;

$$D = 2^2 - 4\left(-4\sqrt{2} - 5\right) = 4 + 16\sqrt{2} + 20 = 24 + 16\sqrt{2} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2;$$

$$a_1 = \frac{-2 + 4 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{-2 - 4 - 2\sqrt{2}}{2} = -3 - \sqrt{2}.$$

Тогда $b_1 = -\left(1 + \sqrt{2}\right) + 1 + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ и $b_2 = -\left(-3 - \sqrt{2}\right) + 1 + 2\sqrt{2} = 4 + 3\sqrt{2}$.

Тогда при $a_1 = 1 + \sqrt{2}$ и $b_1 = \sqrt{2}$ получим

$$\begin{cases} x + y = 1 + \sqrt{2}, \\ xy = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

При $a_2 = -3 - \sqrt{2}$ и $b_2 = 4 + 3\sqrt{2}$ получим:

$$\begin{cases} x + y = -3 - \sqrt{2}, \\ xy = 4 + 3\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - 3 - \sqrt{2}, \\ \left(-y - 3 - \sqrt{2}\right)y = 4 + 3\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y - 3 - \sqrt{2}, \\ y^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)y + 4 + 3\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)y + 4 + 3\sqrt{2} = 0$;

$$D = \left(3 + \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(4 + 3\sqrt{2}\right) = 9 + 6\sqrt{2} + 2 - 16 - 12\sqrt{2} = -5 - 6\sqrt{2} < 0,$$

т. е. уравнение не имеет корней.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $\left(1; \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}; 1\right)$.

Ответ: $\left(1; \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}; 1\right)$.

7. Решение однородных систем уравнений

Многочлен $F(x;\ y)$ называется *однородным многочленом степени m*, если все его члены имеют одну и ту же степень m.

Например, $2x^3 + y^3 - 2x^2y$ — однородный многочлен третьей степени.

Система уравнений вида $\begin{cases} F_1(x;\ y) = 0, \\ F_2(x;\ y) = 0, \end{cases}$ где $F_1(x;\ y)$ и $F_2(x;\ y)$ — однородные многочлены одной и той же степени m, называется *однородной системой степени m*.

Для решения однородных систем используют метод сложения, чтобы сначала заменить одно из уравнений системы однородным уравнением. Решив полученное однородное уравнение, одну из переменных выражают через вторую переменную. Затем используют метод подстановки.

Пример 23. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x и получим:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3y, \\ x = -y, \end{array}\right. \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ (3y)^2 - 3y \cdot y - 2 \cdot 3y - 3y = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 - (-y)y - 2(-y) - 3y = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 - y - 6 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x = 3y,\\ \left[\begin{array}{l}y = 2,\\ y = -\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = -y,\\ \left[\begin{array}{l}y = 2,\\ y = -\dfrac{3}{2};\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x = 6,\\ y = 2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = -1{,}5,\\ y = -0{,}5,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = -2,\\ y = 2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x = 1{,}5,\\ y = -1{,}5.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: (6; 2); (–1,5; –0,5); (–2; 2); (1,5; –1,5).

Пример 24. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2 - 3xy + y^2 = 3,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$

Решение.

Умножим первое уравнение системы $\begin{cases}2x^2 - 3xy + y^2 = 3,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6\end{cases}$ на –2 и получим $\begin{cases}-4x^2 + 6xy - 2y^2 = -6,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы, тогда $\begin{cases}-3x^2 + 8xy - 4y^2 = 0,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6.\end{cases}$

Рассмотрим уравнение $3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0$ как квадратное относительно x. $D = (8y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4y^2 = 64y^2 - 48y^2 = 16y^2$.

$x_1 = \dfrac{8y - 4y}{6} = \dfrac{2y}{3}$, $x_2 = \dfrac{8y + 4y}{6} = 2y$.

При $x = \dfrac{2y}{3}$ получим $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{2y}{3} \cdot y - 2y^2 = 6;\end{cases}$

$\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{2y}{3} \cdot y - 2y^2 - 6 = 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x = \dfrac{2y}{3},\\ y^2 = -27.\end{cases}$ Система не имеет решений.

При $x = 2y$ имеем $\begin{cases}x = 2y,\\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 2y,\\ (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot y - 2y^2 = 6;\end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решениями системы являются пары чисел (2; 1); (–2; –1).

Ответ: (2; 1); (–2; –1).

8. Использование различных методов решения систем уравнений

Пример 25. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$$

Решение.

Вычтем первое уравнение системы из второго и получим:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - x = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - y)(x + y) - (x - y) = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - y)(x + y - 1) = 0, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{array}\right. \\ x^2 + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x = 1 - y, \end{array}\right. \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$$

При $x = y$ получим уравнение $y^2 + y - 3 = 0$. При $x = 1 - y$ получим уравнение $(1 - y)^2 + y - 3 = 0$; $y^2 - y - 2 = 0$. Так как полученные уравнения имеют по два различных корня $(D > 0)$, то исходная система уравнений имеет четыре решения.

Пример 26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x + 5y + 3xy = 15, \\ x^2 + y^2 - x - y + xy = 1. \end{cases}$$

Решение.

Сложим первое и второе уравнения системы:

$2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4xy = 16.$

Разделим обе части полученного уравнения на два:

$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy = 8,$ запишем уравнение в виде

$(x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) = 8,$ или $(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0.$

Пусть $x + y = t$, тогда $t^2 + 2t - 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -4, \\ t = 2. \end{array}\right.$ Таким образом, $\left[\begin{array}{l} x + y = -4, \\ x + y = 2. \end{array}\right.$

Вернемся к исходной системе и запишем ее в виде:

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x+y=-4,\\&x+y=2,\end{aligned}\right.\\ x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x+y=-4,\\x^2+y^2-x-y+xy=1,\end{cases}\\&\begin{cases}x+y=2,\\x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=-y-4,\\x^2+y^2-x-y+xy=1,\end{cases}\\&\begin{cases}x=-y+2,\\x^2+y^2-x-y+xy=1;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=-y-4,\\(-y-4)^2+y^2-(-y-4)-y+(-y-4)y=1,\end{cases}\\&\begin{cases}x=-y+2,\\(2-y)^2+y^2-(2-y)-y+(2-y)y=1;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+8y+16+y^2+y+4-y-y^2-4y=1,\end{cases}\\&\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-4y+4+y^2-2+y-y+2y-y^2=1;\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+4y+20=1,\end{cases}\\&\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+2=1;\end{cases}\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}x=-y-4,\\y^2+4y+19=0,\end{cases}\\&\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+1=0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Уравнение $y^2+4y+19=0$ не имеет корней $\left(D=4^2-4\cdot1\cdot19<0\right)$.

Решим систему $\begin{cases}x=-y+2,\\y^2-2y+1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-y+2,\\(y-1)^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-y+2,\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

Таким образом, пара чисел $(1;\,1)$ является решением исходной системы уравнений.

Ответ: $(1;\,1)$.

Пример 27. Найдите наибольшую из сумм x_0+y_0, где $(x_0;\,y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases}|x-3|+|y|=10,\\x^2-6x+y^2-10y=39.\end{cases}$

Решение.

Запишем систему в виде $\begin{cases}|x-3|+|y|=10,\\(x-3)^2+y^2-10y=48.\end{cases}$

Пусть $t = |x - 3|$, $t \geqslant 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} t + |y| = 10, \\ t^2 + y^2 - 10y = 48; \end{cases} \quad \begin{cases} t = 10 - |y|, \\ (10 - |y|)^2 + y^2 - 10y = 48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 10 - |y|, \\ y^2 - 5y - 10|y| + 26 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

При $y < 0$ получим $y^2 + 5y + 26 = 0$; $D < 0$, т. е. уравнение не имеет корней.

При $y \geqslant 0$ получим $y^2 - 15y + 26 = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = 13, \\ y = 2. \end{array}\right.$

Если $y = 13$, то $t = 10 - 13 < 0$.

Если $y = 2$, то $t = 8$, т. е. $|x - 3| = 8$; $\left[\begin{array}{l} x = -5; \\ x = 11. \end{array}\right.$

Решениями исходной системы уравнений являются пары чисел $(-5; 2)$ и $(11; 2)$.

Наибольшая из сумм $x_0 + y_0$ равна 13.

Пример 28. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2(y + 2)^2 + x^4 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему $\begin{cases} x^2(y + 2)^2 + x^4 = 1, \\ 3x^2 + 4xy + y^2 = -1 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x^2(y + 2)^2 = 1 - x^4, \\ 4x^2 + 4xy + y^2 - x^2 = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2(y + 2)^2 = 1 - x^4, \\ (2x + y)^2 = x^2 - 1. \end{cases}$ Заметим, что система имеет решения, если $1 - x^4 \geqslant 0$ и $x^2 - 1 \geqslant 0$, что возможно, только если $x = 1$ или $x = -1$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ (y + 2)^2 = 0, \\ (2 + y)^2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ (y + 2)^2 = 0, \\ (-2 + y)^2 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Вторая система совокупности не имеет решений. Таким образом, исходная система имеет единственное решение (1; –2).

Пример 29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 = 0, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$5x^2 - 4xy + 3y^2 + 18x - 16y + 25 = 0;\ 5x^2 - (4y - 18)x + 3y^2 - 16y + 25 = 0;$$

$$D = (4y - 18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3y^2 - 16y + 25) =$$

$$= 16y^2 - 144y + 324 - 60y^2 + 320y - 500 =$$

$$= -44y^2 + 176y - 176 = -44(y^2 - 4y + 4) = -44(y - 2)^2.$$

Уравнение имеет решение, если $-44(y - 2)^2 \geqslant 0$, т. е. $y = 2$.

Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 - 7xy + y^2 + 34x - 11y + 28 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ 10x^2 + 20x + 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ (x + 1)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: (–1; 2).

11.1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} + \dfrac{y - x}{3} = 8, \\ \dfrac{x + y}{3} - \dfrac{y - x}{4} = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{8} - \dfrac{y - x}{6} = 4, \\ \dfrac{3x + y}{4} + \dfrac{5y - 2x}{3} = 5. \end{cases}$

11.2. Найдите сумму $x_0 + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{3x - 7}{4} - \dfrac{2y - 3}{5} = 1, \\ \dfrac{2x - y}{2} - 1 = y - 2. \end{cases}$

11.3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - 2\sqrt{7}, \\ 2y - \dfrac{6x}{\sqrt{7}} = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 5y = 12 + 5\sqrt{2}, \\ 3x - 2\sqrt{2}y = 1. \end{cases}$

11.4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{y-2}{x-1} = 2, \\ y - 2x = x^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-3} = 1, \\ (x+1)(y-3) = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-5)(y-3) = 0; \\ \dfrac{3x+y}{x-y+8} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+3)(y-4) = 0; \\ \dfrac{2y-x+5}{x+y+7} = 3. \end{cases}$

11.5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2)(y+1) = 12, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+2y)^2 - (3x+y)^2 = 8, \\ y - 2x = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 17; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x + y - 2xy = -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1. \end{cases}$

11.6. Найдите значение выражения $(x_0 + y_0)$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$

11.7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+2y} + \dfrac{8}{y} = 5, \\ \dfrac{10}{x+2y} - \dfrac{2}{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{27}{2x-y} + \dfrac{32}{x+3y} = 7, \\ \dfrac{45}{2x-y} - \dfrac{48}{x+3y} = -1. \end{cases}$

11.8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

11.9. Найдите наименьшее из произведений $x_0 \cdot y_0$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2 y = 12. \end{cases}$

11.10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (3x - 2y)(x - 4y) = 0, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 4)(y - 1) = x^2 + 5x + 4, \\ x^2 - y - 3x + 8 = 0. \end{cases}$

11.11. Найдите наименьшее значение выражения $4(x_0 + y_0)$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x - 1)(y + 5). \end{cases}$

11.12. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 - 3x - y + 22 = 0, \\ (x - 3)(y - 2) = y^2 - 3y + 2. \end{cases}$$

11.13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x + y} - \dfrac{x + y}{x} = 1, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x - y)^2 - 11(x - y) + 5 = 0, \\ 2x + 3y = 25; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - 2y)^2 + 6(x - 2y) - 55 = 0; \\ (x - y)^2 + 6(x - y) + 5 = 0. \end{cases}$

11.14. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x + 3y} + \dfrac{x + 3y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x - y} + \dfrac{x - y}{xy} = 2{,}5. \end{cases}$$

11.15. Найдите наибольшее значение выражения $(x_0 + y_0)$, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} |x - 2| + |y - 5| = 1, \\ y - |x - 2| = 5. \end{cases}$

11.16. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 4xy + y = 6, \\ x^2 y + xy^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 1 = x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5. \end{cases}$

11.17. Найдите наименьшее значение выражения $x_0 - y_0$, где $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

11.18. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 3y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x - 5y = -4, \\ -2x^2 - 6y^2 + 2x + 15y = 6. \end{cases}$

11.19. Найдите значение выражения $n \cdot S$, где n — количество решений, а S — наименьшая из сумм $x_0 + y_0$, зная, что $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x^2 - 2|x|y + y^2 = 4, \\ x^2 - 3|x|y - y^2 = 3. \end{cases}$

11.20. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + y^4x^2 = 80. \end{cases}$

11.21. Найдите значение выражения $x_0 + y_0$, где $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 65, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

11.22. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - |y - x| + 2y^2 = 8, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

11.23. Найдите значение выражения $n \cdot S$, где n — количество решений, а S — наименьшая из сумм $x_0 + y_0$, зная, что $(x_0;\ y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

§ 12. Методы решения систем неравенств

Пример 1. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{3} > \dfrac{2x+7}{3} - \dfrac{148}{21}, \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+1)}{6} \leqslant \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{13-x}{2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{3} > \dfrac{2x+7}{3} - \dfrac{148}{21}, \; \Big| \cdot 21 \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+1)}{6} \leqslant \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{13-x}{2}; \; \Big| \cdot 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(3x+5) + 7(10-3x) > 7(2x+7) - 148, \\ 2 \cdot 7x - 11(x+1) \leqslant 2(3x-1) - 3(13-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 15 + 70 - 21x > 14x + 49 - 148, \\ 14x - 11x - 11 \leqslant 6x - 2 - 39 + 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} -26x > -184, \\ -6x \leqslant -30; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7\dfrac{1}{13}, \\ x \geqslant 5; \end{cases} \quad x \in \left[5;\, 7\dfrac{1}{13}\right).$$

Сумма целых решений неравенства равна $5 + 6 + 7 = 18$.

Ответ: 18.

Пример 2. Стороны треугольника выражаются различными целыми числами. Найдите, какую длину может иметь третья сторона, если длины двух других сторон 5 и 8, а периметр не превосходит 20.

Решение.

Пусть x — длина третьей стороны треугольника. Так как сумма длин любых двух сторон треугольника должна быть больше длины третьей стороны, то составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 5 + 8 > x, \\ 5 + x > 8, \\ 8 + x > 5, \\ 5 + 8 + x \leqslant 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 13, \\ x > 3, \\ x > -3, \\ x \leqslant 7; \end{cases} \quad x \in (3;\, 7].$$

Так как стороны треугольника выражаются целыми числами, то третья сторона треугольника может быть равна 4, 5, 6 или 7.

Ответ: 4, 5, 6 или 7.

Пример 3. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 - 1 < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение.

$\begin{cases} 2x - x^2 - 1 < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ -2x \geqslant -3; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ x \leqslant 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 1, \\ x \leqslant 1{,}5; \end{cases}$

$x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 1{,}5]$.

Наибольшим целым решением системы неравенств является число 0.

Ответ: 0.

Пример 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0. \end{cases}$

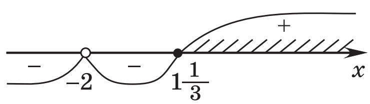
Решение.

$\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-4) > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 2 - 3x + 12 > x + 5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x > -5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 2{,}5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0. \end{cases}$

Воспользуемся методом интервалов и решим второе неравенство системы:

$\dfrac{3x-4}{(x+2)^2} \geqslant 0;$



$\left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Получим: $\begin{cases} x \in (-\infty;\ 2{,}5), \\ x \in \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right); \end{cases}$ $x \in \left[1\frac{1}{3};\ 2{,}5\right)$.

Ответ: $\left[1\frac{1}{3};\ 2{,}5\right)$.

Пример 5. Найдите количество целых чисел из области определения функции $f(x) = \sqrt[4]{7-2x} - \lg(10 - x^2 + 3x)$.

Решение.

Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств:

$\begin{cases} 7 - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 3x + 10 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 7 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 3{,}5, \\ x \in (-2;\ 5); \end{cases}$

$x \in (-2;\ 3{,}5]$. В промежутке $(-2;\ 3{,}5]$ находятся 5 целых чисел.

Ответ: 5.

Пример 6. Решите систему неравенств $\begin{cases}(7+x)^{-1} \geqslant \dfrac{1}{6}, \\ (7+x)^2 < 36.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}(7+x)^{-1} \geqslant \dfrac{1}{6}, \\ (7+x)^2 < 36;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x+7} \geqslant \dfrac{1}{6}, \\ -6 < x+7 < 6;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{1}{x+7} - \dfrac{1}{6} \geqslant 0, \\ -13 < x < -1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x+1}{x+7} \leqslant 0, \\ -13 < x < -1;\end{cases} \quad \begin{cases}x \in (-7; -1], \\ -13 < x < -1.\end{cases}$$

Ответ: $(-7; -1)$.

Пример 7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \leqslant 1, \\ |4-2x| \leqslant 1.\end{cases}$$

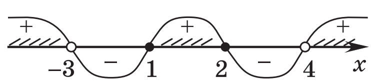
Решение.

$$\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \leqslant 1, \\ |4-2x| \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} - 1 \leqslant 0, \\ |2x-4| \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{2x-14-x^2+x+12}{x^2-x-12} \leqslant 0, \\ -1 \leqslant 2x-4 \leqslant 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-x-12} \leqslant 0, \\ 3 \leqslant 2x \leqslant 5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-12} \geqslant 0, \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \geqslant 0, \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5.\end{cases}$$

Воспользуемся методом интервалов и решим первое неравенство системы:

$\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \geqslant 0;$



$x \in (-\infty; -3) \cup [1; 2] \cup (4; +\infty).$

Получим: $\begin{cases}x \in (-\infty; -3) \cup [1; 2] \cup (4; +\infty), \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5;\end{cases}$ $\quad x \in [1{,}5; 2].$

Ответ: $[1{,}5; 2]$.

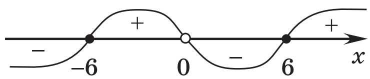
Пример 8. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{36}{x} - x \leqslant 0, \\ \dfrac{|12-2x|(x^2+3x+8)}{|x|-3} \leqslant 0.\end{cases}$$

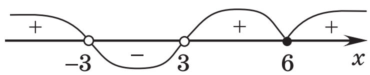
Решение.
Заметим, что $x^2 + 3x + 8 > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$ (так как $a = 1 > 0$ и $D < 0$).

Тогда исходную систему можно записать в виде: $\begin{cases} \dfrac{36 - x^2}{x} \leqslant 0, \\ \dfrac{|12 - 2x|}{|x| - 3} \leqslant 0. \end{cases}$

Воспользуемся методом интервалов для решения каждого неравенства системы:

1) $\dfrac{x^2 - 36}{x} \geqslant 0;$ 

$x \in [-6;\ 0) \cup [6;\ +\infty).$

2) $\dfrac{|12 - 2x|}{|x| - 3} \leqslant 0;$ 

$x \in (-3;\ 3) \cup \{6\}.$

$\begin{cases} x \in [-6;\ 0) \cup [6; +\infty), \\ x \in (-3;\ 3) \cup \{6\}; \end{cases}$ $x \in (-3;\ 0) \cup \{6\}.$

Найдем сумму целых решений системы неравенств: $-2 + (-1) + 6 = 3$.
Ответ: 3.

12.1. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(2x + 1) + x > 3x + 1, \\ \dfrac{2x - 1}{3} \geqslant \dfrac{3x - 2}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{2} \geqslant 3, \\ (x - 2)^2 > x(x - 4). \end{cases}$

12.2. Найдите наибольшее целое положительное решение системы неравенств $\begin{cases} x - 4 \leqslant 1 - \dfrac{x - 1}{4}, \\ 2x - 0{,}5 > \dfrac{x}{2} - 1{,}5. \end{cases}$

12.3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x - 3| \leqslant 4, \\ |x - 6| \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |8x - 1| \leqslant 3, \\ |2x + 1| \geqslant -5. \end{cases}$

12.4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 25 \geqslant 0, \\ x^2 + 6x - 27 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x^2 - 4x \leqslant 0. \end{cases}$

12.5. Найдите сумму целых решений системы неравенств
$$\begin{cases} 50 - 5x \geqslant x^2, \\ x^2 - 4x + 4 > 0. \end{cases}$$

12.6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x - 24 \leqslant 0. \end{cases}$

12.7. Найдите все решения системы неравенств $\begin{cases} (x+2)(x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ x^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$

12.8. Решите систему неравенств $\begin{cases} |x^2 - 4x| < 2, \\ |x+1| < 5. \end{cases}$

12.9. Найдите область определения функции
$$y = \frac{x+3}{\sqrt{|4x+1| - 5}} - \sqrt[4]{2x^2 - x + 3}.$$

12.10. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{10}{9x - 10} > \dfrac{9x^2}{10 - 9x}, \\ \dfrac{9x^2}{9x^2 + 16} < \dfrac{16}{9x^2 + 16}. \end{cases}$

§ 13. Системы линейных уравнений с n переменными ($n \geqslant 2$)

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

Для решения систем линейных уравнений с n переменными ($n \geqslant 2$) в элементарной математике используют *метод Гаусса*, который состоит в последовательном исключении переменных способом сложения.

Пример. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

Решение.

Решим данную систему уравнений методом Гаусса.

1) Выберем одно из уравнений системы, лучше то, в котором коэффициент перед x равен 1, это уравнение $x + 2y + 3z = 5$.

Обе части этого уравнения умножим на –3:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 6, \\ -3x - 6y - 9z = -15, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

2) Сложим первое и второе уравнение и запишем сумму уравнений на втором месте, а на первом — уравнение $x + 2y + 3z = 5$: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

Умножим уравнение $x + 2y + 3z = 5$ на –2: $\begin{cases} -2x - 4y - 6z = -10, \\ -5y - 7z = -9, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

Сложим первое и третье уравнения и запишем эту сумму на третьем месте: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ -y - 5z = -9. \end{cases}$

3) Умножим третье уравнение на –5 и сложим со вторым:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 5y + 25z = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ 18z = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ -5y - 7z = -9, \\ z = 2. \end{cases}$$

4) Найдем значения переменных y и x из второго и первого уравнений: $-5y = -9 + 7z = -9 + 14$, $y = -1$; $x = 5 - 2y - 3z = 5 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 1$.

Ответ: (1; –1; 2).

13.1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + 2z = -2, \\ -x + y - 3z = -7, \\ 2x + 3y + z = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y + z = -5, \\ -2x + y - 3z = -3, \\ -x + 4y + 6z = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x - 3y + z = 8, \\ -2x - y - 3z = 0, \\ -x + 4y + 6z = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x + y - 3z = 3, \\ -x + 4y + 6z = 13. \end{cases}$

§ 14. Задачи с параметрами
Линейные уравнения с параметрами

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, а a и b — некоторые действительные числа (параметры), называется линейным.

Количество решений линейного уравнения зависит от значения параметров a и b. Все возможные случаи, возникающие при решении линейных уравнений, отразим в блок-схеме (рис. 12).

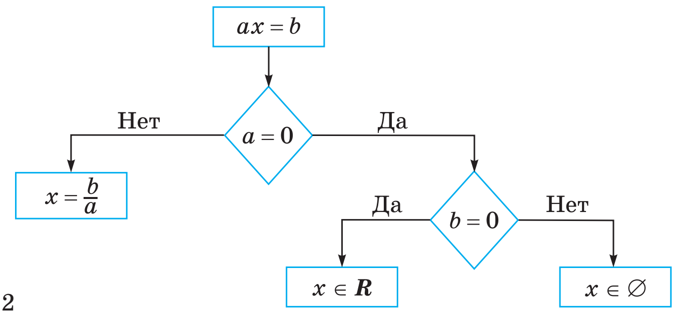


Рис. 12

Пример 1. Решите уравнение $a^2x - 3 = 9x + a$ относительно x.

Решение.

Приведем данное линейное уравнение к стандартному виду:

$$a^2x - 3 = 9x + a \Leftrightarrow a^2x - 9x = a + 3 \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = a + 3 \qquad (1)$$

Следуя схеме, рассмотрим два случая для коэффициента при x:

1) если $a^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 3$, то $x = \dfrac{a+3}{a^2-9} = \dfrac{1}{a-3}$;

2) если $a^2 - 9 = 0$, то

а) при $a = -3$ уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = 0$, отсюда получим, что x — любое действительное число;

б) при $a = 3$ уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = 9$, отсюда следует, что при данном значении параметра уравнение не имеет корней.

Ответ: если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x = \dfrac{1}{a-3}$;
если $a = -3$, то x — любое действительное число;
если $a = 3$, то уравнение не имеет корней.

Пример 2. При каких значениях параметра k уравнение $2(k - 2x) = kx + 3$ не имеет корней?

Решение.

Приведем заданное линейное уравнение к стандартному виду:
$2(k - 2x) = kx + 3 \Leftrightarrow (k + 4)x = 2k - 3.$

Уравнение не имеет корней, если $k + 4 = 0$ и $2k - 3 \neq 0$, т. е. $k = -4$ и $k \neq 1{,}5$, откуда $k = -4$.

Ответ: $k = -4$.

Пример 3. Сколько решений имеет уравнение $|x + 2| = ax$ в зависимости от параметра a?

Решение.

По определению модуля получим, что уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x + 2 = ax,\\ x + 2 \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-(x + 2) = ax,\\ x + 2 < 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a - 1)x = 2,\\ x \geqslant -2,\end{cases}\\ \begin{cases}(a + 1)x = -2,\\ x < -2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему:

1) если $a = 1$, то система не имеет решений (так как уравнение $0 \cdot x = 2$ не имеет решений);

2) если $a \neq 1$, то $\begin{cases}x = \dfrac{2}{a - 1},\\ x \geqslant -2.\end{cases}$

В этом случае система имеет одно решение $x = \dfrac{2}{a - 1}$ при $\dfrac{2}{a + 1} \geqslant -2$, т. е. при $a \leqslant 0$ и $a > 1$, и не имеет решений при $a \in (0; 1)$.

Решим вторую систему:

1) если $a = -1$, то система не имеет решений (так как уравнение $0 \cdot x = -2$ не имеет решений);

2) если $a \neq -1$, то $\begin{cases}x = -\dfrac{2}{a + 1},\\ x < -2.\end{cases}$

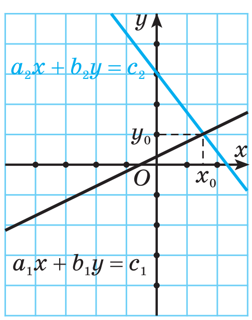
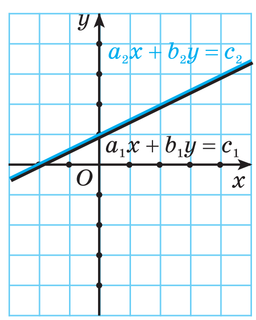
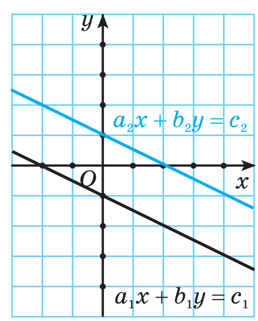
В этом случае система имеет одно решение $x = -\dfrac{2}{a + 1}$ при $\dfrac{2}{a + 1} < -2$, т. е. при $-1 < a < 0$, и не имеет решений при $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Объединив решения систем, получим ответ.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ уравнение имеет 1 решение,
при $a \in (-1; 0)$ уравнение имеет 2 решения,
при $a \in (0; 1]$ уравнение не имеет решений.

Системы двух линейных уравнений с параметрами

В зависимости от значений коэффициентов при переменных и свободных членов такие системы могут иметь единственное решение, бесконечно много решений и не иметь решений.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Система линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Количество решений системы</td><td>Имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$</td><td>Имеет бесконечно много решений $\left(x_0;\ \dfrac{c_1 - a_1x_0}{b_1}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$</td><td>Не имеет решений</td></tr>
<tr><td>Отношения между коэффициентами и свободными членами</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$</td></tr>
<tr><td>Графическая интерпретация</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Пример 4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ay = a \end{cases}$ не имеет решений?

Решение.

Система уравнений не имеет решений, если:

$$\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{6}{a}, \\ \frac{3}{5} \neq \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10, \\ a \neq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 10.$$

Ответ: $a = 10$.

Пример 5. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 3x + (a-1)y = a + 1, \\ (a+1)x + y = 3 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение.

Система уравнений имеет бесконечно много решений, если:

$$\begin{cases} \frac{3}{a+1} = a - 1, \\ \frac{3}{a+1} = \frac{a+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4, \\ \left[\begin{array}{l} a + 1 = 3, \\ a + 1 = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Ответ: $a = 2$.

Квадратные уравнения с параметрами

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где x — переменная, а a, b и c — некоторые действительные числа (параметры), называется квадратным. Количество решений квадратного уравнения зависит от его дискриминанта.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, для которых квадратное уравнение $(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ имеет два корня.

Решение.

Так как по условию уравнение является квадратным, то $a \neq -1$. Найдем дискриминант:

$$D = 4(a+1)^2 - 4(a+1)(a-2) = 12(a+1).$$

Квадратное уравнение имеет два корня, если $D > 0$, т. е. если $12(a+1) > 0 \Leftrightarrow a > -1$.

Ответ: $a \in (-1; +\infty)$.

Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 + x - a = 0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $2x^2 - 7x + 6 = 0$?

Решение.

Корнями уравнения $2x^2 - 7x + 6 = 0$ являются $x_1 = 2$, $x_2 = 1,5$. По условию задачи числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 1,5$ должны обращать уравнение

$2x^2 + x - a = 0$ в верное числовое равенство, поэтому для определения параметра a получим два уравнения $\left[\begin{array}{l} 8 + 2 - a = 0, \\ 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10, \\ a = 6. \end{array}\right.$

Ответ: $a = 10$, $a = 6$.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

Решение.

Пусть x_0 — общий корень двух данных уравнений. Тогда должны выполняться условия

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + 1 - x_0 - a = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(a - 1) = a - 1, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0. \end{cases}$$

При $a = 1$ решением первого уравнения системы является $x_0 \in \boldsymbol{R}$, однако второе уравнение решений не имеет (так как $D = -3 < 0$). Следовательно, и система решений не имеет.

При $a \neq 1$ первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 1$. Система будет иметь решения тогда и только тогда, когда данный корень является также корнем второго уравнения. Поэтому, подставляя его во второе уравнение, находим $a = -2$.

Таким образом, при $a = -2$ оба уравнения имеют общий корень $x_0 = 1$.

Ответ: $a = -2$.

Расположение корней квадратного трехчлена

Пример 9. При каких значениях параметра a все корни уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат интервалу $(0; 3)$?

Решение.

Для того чтобы все корни квадратного уравнения лежали в интервале между 0 и 3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ 0 < \frac{a}{2} < 3, \\ f(0) > 0, \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8 \geqslant 0, \\ 0 < a < 6, \\ 2 > 0, \\ 11 - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right), \\ 0 < a < 6, \\ a < 3\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решив данную систему, найдем $a \in \left[2\sqrt{2};\ 3\frac{2}{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left[2\sqrt{2};\ 3\frac{2}{3}\right)$.

Пример 10. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a-1)x^2 - 4ax + 4(a+3) = 0$ больше -2?

Решение. *Первый способ.*

1) При $a = 1$ уравнение не является квадратным, значит, $a = 1$ не подходит, так как в этом случае уравнение имеет один корень.

2) Исследуем уравнение при $a > 1$.

Для того чтобы оба корня квадратного уравнения были больше -2 (рис. 13), необходимо и достаточно выполнение условий:

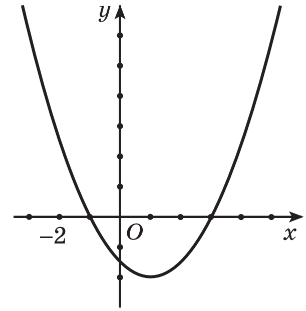


Рис. 13

$$\begin{cases} a > 1, \\ D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > -2, \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 16a^2 - 16(a-1)(a+3) > 0, \\ \dfrac{4a}{2(a-1)} > -2, \\ 4(a-1) + 8a + 4(a+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2a-1}{a-1} > 0, \\ a > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(1;\ 1\frac{1}{2}\right).$$

3) Исследуем уравнение при $a < 1$.

Для того чтобы оба корня квадратного уравнения были больше -2 (рис. 14), необходимо и достаточно выполнение условий:

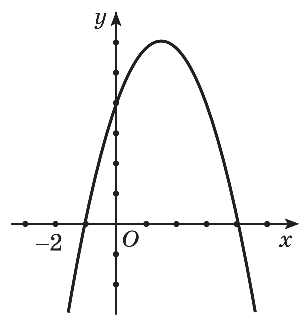


Рис. 14

$$\begin{cases} a < 1, \\ D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > -2, \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 16a^2 - 16(a-1)(a+3) > 0, \\ \dfrac{4a}{2(a-1)} > -2, \\ 4(a-1) + 8a + 4(a+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2a-1}{a-1} > 0, \\ a < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right).$$

Объединив данные решения, получим $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1;\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1;\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Второй способ. Часто при решении задач с квадратными уравнениями удобно использовать теорему Виета.

Теорема Виета

Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. Так как $x_1>-2$, $x_2>-2$, то $x_1+2>0$, $x_2+2>0$.

Для того чтобы два числа были положительными, необходимо и достаточно, чтобы сумма этих чисел и их произведение были положительными.

Поэтому решим систему: $\begin{cases} D>0, \\ (x_1+2)(x_2+2)>0, \\ (x_1+2)+(x_2+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+4>0, \\ (x_1+x_2)+4<0. \end{cases}$

По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{4a}{a-1}$, $x_1\cdot x_2=\frac{4(a+3)}{a-1}$.

Подставив выражения в систему, получим:

$$\begin{cases} 16a^2-16(a-1)(a+3)>0, \\ \dfrac{4(a+3)}{a-1}+\dfrac{8a}{a-1}+4>0, \\ \dfrac{4a}{a-1}+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{16a+8}{a-1}>0, \\ \dfrac{8a-4}{a-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1;\ 1{,}5).$$

Ответ: $a\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1;\ 1{,}5)$.

Квадратные неравенства с параметрами

Пример 11. Решите относительно x неравенство
$mx^2-2(m-1)x+(m+2)<0$.

Решение.

Так как в условии задачи не указано, что неравенство является квадратным, то при решении данного неравенства с другими возможными случаями следует рассмотреть и случай $m=0$.

1) Пусть $m=0$. Тогда неравенство примет вид $2x+2<0$, откуда $x<-1$.

2) Пусть $m>0$ и $D=4(m-1)^2-4m(m+2)=4(1-4m)<0$, т. е. $m\in\left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. Тогда неравенство не имеет решений (рис. 15).

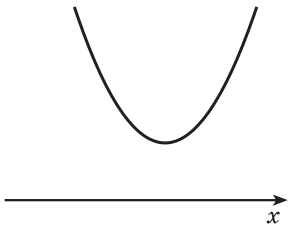


Рис. 15

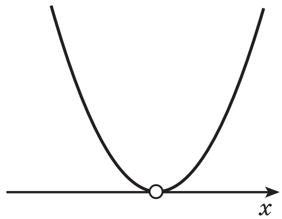


Рис. 16

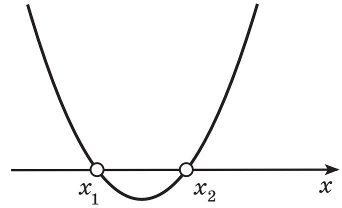


Рис. 17

3) Пусть $m > 0$ и $D = 4(1 - 4m) = 0$, т. е. $m = \frac{1}{4}$. Как и в предыдущем случае, неравенство решений не имеет (рис. 16).

4) Пусть $m > 0$ и $D = 4(1 - 4m) > 0$, т. е. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. Тогда $x \in (x_1; x_2)$, где $x_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$, $x_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$ (рис. 17).

5) Пусть $m < 0$ и $D = 4(1 - 4m) < 0$. Тогда $m \in \varnothing$. Следовательно, такой случай невозможен.

6) Пусть $m < 0$ и $D = 4(1 - 4m) = 0$. Данный случай так же, как и предыдущий, невозможен.

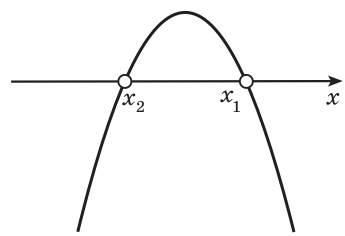


Рис. 18

7) Пусть $m < 0$ и $D = 4(1 - 4m) > 0$, т. е. $m \in (-\infty; 0)$. Тогда $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$, где $x_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$, $x_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$. Так как $m < 0$, то x_2 — меньший корень, а x_1 — больший (рис. 18).

Ответ: если $m \in (-\infty; 0)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}\right) \cup \left(\frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}; +\infty\right)$, если $m = 0$, то $x \in (-\infty; -1)$, если $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$, то $x \in \left(\frac{m - 1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}; \frac{m - 1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}\right)$, если $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то $x \in \varnothing$.

Пример 12. Определите все значения параметра m, при которых неравенство $(m - 1)x^2 + (m + 1)x + m + 1 > 0$ справедливо для любых действительных значений x.

Решение.

Пусть $m = 1$, тогда исходное неравенство примет вид $2x + 2 > 0$. Оно выполняется не при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть $m \neq 1$. Квадратный трехчлен $f(x) = (m-1)x^2 + (m+1)x + m + 1$ принимает положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$ (график лежит выше оси абсцисс) тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} m-1>0, \\ D=(m+1)^2-4(m-1)(m+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0, \\ -3m^2+2m+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1, \\ 3m^2-2m-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1, \\ \left[\begin{array}{l} m<-1, \\ m>\frac{5}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad m>\frac{5}{3}.$$

Ответ: $m \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Пример 13. Найдите все значения параметра m, при которых всякое решение неравенства $1 \leqslant x \leqslant 2$ является решением неравенства $x^2 - mx + 1 \leqslant 0$.

Решение.

Задача может быть переформулирована следующим образом: при каких значениях m множество решений неравенства $x^2 - mx + 1 \leqslant 0$ содержит отрезок [1; 2], т. е. при каких значениях m корни трехчлена располагаются так, как показано на рисунке 19.

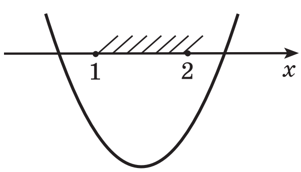


Рис. 19

Положение параболы определяется условиями:

$$\begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \leqslant 0, \\ 5-2m \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant 2{,}5.$$

Ответ: $m \in [2{,}5; +\infty)$.

Пример 14. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств

$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k$ и $x^2 + 2kx \leqslant 3k^2 - 8k + 4$.

Решение.

Исходная задача может быть переформулирована следующим образом. Найти все значения параметра k, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2+4kx+3k^2-2k-1>0, \\ x^2+2kx-3k^2+8k-4 \leqslant 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Найдем все значения параметра k, при которых система не имеет решений. При любом фиксированном k корнями квадратного уравнения $x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 = 0$ являются числа $x_1 = k - 2$, $x_2 = -3k + 2$. Поэтому множество решений второго неравенства системы есть интервал, образуемый точками, лежащими между данными корнями. Система не имеет решений, если множество решений первого неравенства не содержит этот интервал, а это будет тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} f(x_1) \leqslant 0, \\ f(x_2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8k^2 - 14k + 3 \leqslant 0, \\ -6k + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}, \text{ где}$$

$f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1.$

Таким образом, система не имеет решений при $k \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Значит, при $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ данная система имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Графический метод решения задач с параметрами

Пример 15. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $|x^2 - 8x + 7| = a$?

Решение.

Построим на координатной плоскости xOy график функции $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ (рис. 20). Графиком функции $y = a$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами $(0; a)$.

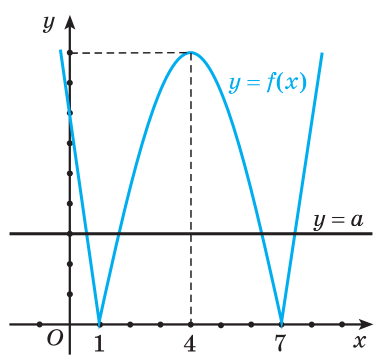


Рис. 20

Данное уравнение имеет столько же корней, сколько точек пересечения имеют графики функций $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ и $y = a$ при фиксированном значении a.

Делаем вывод, что графики не пересекаются, если $a < 0$; имеют две точки пересечения, если $a = 0$; имеют четыре точки пересечения, если $0 < a < 9$; имеют три точки пересечения, если $a = 9$; имеют две точки пересечения, если $a > 9$.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то корней нет, если $a \in \{0\} \cup (9; +\infty)$ — два корня, если $a \in (0; 9)$ — четыре корня, если $a = 9$ — три корня.

Использование свойств функций при решении задач с параметрами

Пример 16. Решите систему уравнений с параметром a

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = 3a. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение.

Сложив первое уравнение со вторым, а затем вычтя из второго уравнения первое, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 4a, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 4a, \\ \cos(x + y) = 2a. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2), а следовательно, и система (1) имеют решения тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет следующей системе неравенств: $\begin{cases} -1 \leqslant 4a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant 2a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}.$

Именно при этих значениях a система (1) имеет решение.

Итак, пусть $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда из системы (2) получаем

$$\begin{cases} x - y = \pm\arccos 4a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \pm\arccos 2a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}\arccos 4a \pm \frac{1}{2}\arccos 2a + \pi(n + k),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \pm\frac{1}{2}\arccos 2a \mp \frac{1}{2}\arccos 4a + \pi(k - n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, то решений нет;

если $a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, то $x = \pm\frac{1}{2}\arccos 4a \pm \frac{1}{2}\arccos 2a + \pi(n + k)$,

$n, k \in \boldsymbol{Z}$, $y = \pm\frac{1}{2}\arccos 2a \mp \frac{1}{2}\arccos 4a + \pi(k - n)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 17. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{-x^2 + 2x - 3} \cdot \log_2(|a| + 2) + 3^{-2 - |a|} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3) = 0$$

имеет единственный корень?

Решение.

Приведем логарифмы к одному основанию и умножим обе части уравнения на $3^{|a|+2+x^2-2x+3} \neq 0$, получим равносильное уравнение
$3^{|a|+2}\log_2(|a|+2) = 3^{x^2-2x+3}\log_2(x^2-2x+3)$.

Обозначим $u = |a| + 2$ и $v = x^2 - 2x + 3$. Заметим, что $u \geqslant 2$, $v \geqslant 2$. Рассмотрим функцию $f(t) = 3^t \log_2 t$. Так, если $y = 3^t$ и $y = \log_2 t$ — возрастающие положительные функции при $t \geqslant 2$, то и произведение этих функций, т. е. функция $f(t)$ также монотонно возрастающая функция. Имеем $f(u) = f(v)$. Для возрастающих функций это равенство выполняется только лишь при $u = v$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)^2 = |a|$.

Рассмотрим графики функций $f_1(x) = (x-1)^2$ и $f_2(x) = |a|$ (рис. 21).

Уравнение имеет единственный корень в том случае, если прямая $y = |a|$ проходит через вершину параболы $y = (x-1)^2$, т. е. уравнение имеет единственное решение при $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

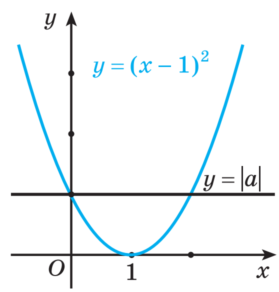


Рис. 21

14.1. Сколько корней может иметь уравнение:

а) $a \cdot x = 7$; б) $0 \cdot x = a$?

14.2. При каких значениях a уравнение $(5 + a)x = a + 2$ имеет единственный корень?

14.3. При каких значениях a уравнение $(7 + a)x = a - 5$ не имеет корней?

14.4. При каких значениях a уравнение $(2a + 3)x = 3a + 2$ имеет бесконечно много корней?

14.5. Решите уравнение относительно x:

а) $(a + 14)x = 7$; б) $(2a + 7)x = a$;
в) $(a + 7)x = a + 2$; г) $a(x - 3) = 0$;
д) $(a - 1)(x - 3) = 3$; е) $(a^2 - 25)x = a + 5$;
ж) $(a - 2)x = (4 - 2a)x + 3$; з) $2(a + 2x) = ax + 3$.

14.6. При каких значениях параметра b уравнение $1 + 2x - bx = 4 + x$ имеет отрицательное решение?

14.7. При каких значениях параметра b уравнение $2 + 4x - bx = 3 + x$ имеет положительное решение?

14.8. При каких значениях a уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$ не имеет решений?

14.9. При каких значениях a уравнение $(a^2 - 4)x = a + 2$ имеет бесконечно много решений?

14.10. При каких значениях a уравнение $(a^2 + 8a + 16)x = a + 4$ имеет единственное решение?

14.11. Решите уравнение относительно x:

а) $|x + 2| = a$; б) $|x - 3| = ax$; в) $|3x + 6| = ax$.

14.12. Сколько решений может иметь система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 7y = 5, \\ 4x + 3y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ ax + 6y = 14; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x + 5y = 6? \end{cases}$

14.13. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a + 3)x + 2y = 4, \\ x - ay = 10 \end{cases}$ имеет единственное решение?

14.14. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений?

14.15. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + (a + 1)y = 1, \\ x + 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

14.16. Для каждого значения параметра определите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + ay = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (a + 4)x + y = 5, \\ 2x + ay = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (a^2 - 9)x + 4y = 20, \\ (a - 3)x + 2y = 2a. \end{cases}$

14.17. При каких значениях параметра b система уравнений $\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение при любых значениях параметра a?

14.18. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2x - 6a = 0$ не имеет корней?

14.19. При каких значениях параметра a уравнение $3x^2 + 7ax + 5 = 0$ имеет два корня?

14.20. При каких значениях параметра a уравнение $2ax^2 - 8x + 8 = 0$ имеет один корень?

14.21. При каких значениях параметра a только один из корней уравнения $3x^2 + x + 2a - 3 = 0$ равен нулю?

14.22. При каких значениях параметра a только один из корней уравнения $x^2 + (a+3)x + |a| - 3 = 0$ равен нулю?

14.23. При каких значениях параметра a уравнение
$3x^2 + (a-1)x + 1 - a^2 = 0$ имеет единственный корень, равный нулю?

14.24. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - 2x + 1 = a$;
б) $(2x-1)^2 = a$;
в) $a^2x^2 - 4 = 0$;
г) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$;
д) $2x^2 - (a-1)x + a + 1 = 0$;
е) $(x-1)^2 + (x-a)^2 = 0$;
ж) $(a+1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$;
з) $(a-1)x^2 - 2a(x+1) - 1 = 0$;
и) $(a+1)x^2 - 2(a+1)x + a - 2 = 0$;
к) $(a^2+1)x^2 - 2(x-a)(1+ax) + 1 = 0$.

14.25. При каких значениях параметра a все корни уравнения $a^2x^2 - ax - 2 = 0$ лежат вне отрезка [–1; 1]?

14.26. При каких значениях параметра a больший корень уравнения $x^2 + 4x - (a-1)(a-5) = 0$ принадлежит промежутку [0; 1)?

14.27. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $ax^2 - (a+1)x + a + 3 = 0$ имеют разные знаки.

14.28. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - 2(a-2)x + 3a + a^2 = 0$ меньше –1.

14.29. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2 + a + 1)x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

14.30. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

14.31. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax - a = 0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $ax_1 < x_2^2$?

14.32. При каких значениях параметра a неравенство
$x^2 - (a+2)x + 8a + 1 > 0$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$?

14.33. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x^2}{24} + ax - a + 1 < 0$ не имеет решений?

14.34. Решите относительно x неравенство:

а) $x^2 - ax + 3 \leqslant 0$;
б) $x^2 + 2x - a > 0$;
в) $ax^2 + 3x - 4 \geqslant 0$;
г) $9x^2 + 12ax + 5a^2 \leqslant 4a - 4$;
д) $16x^2 + 13a^2 + 4a > 24ax - 1$;
е) $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 3 > 0$;
ж) $\frac{x^2}{a} - 2x - \frac{x}{a} + a + 1 > 0$.

14.35. При каких значениях параметра b неравенство не имеет решений:

а) $bx^2 + 4bx + 5 \leqslant 0$;
б) $bx^2 + (2b+3)x + b - 1 \geqslant 0$;
в) $(4 - b^2)x^2 + 2(b+2)x - 1 > 0$?

14.36. При каких значениях параметра m неравенство $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ выполняется для любых $x \in (1;\ 2)$?

14.37. При каких значениях параметра a неравенство $(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выполняется при всех $x \in [1;\ 3]$?

14.38. При каких значениях параметра a неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$ справедливо для любых $|x| < 1$?

14.39. При каких значениях параметра a неравенство $(x - 2a - 1)(x - a) < 0$ выполняется при всех $x \in [1;\ 2]$?

14.40. При каких значениях параметра m из неравенства $x^2 - (3m+1)x + m > 0$ следует неравенство $x > 1$?

14.41. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

14.42. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ является решением неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$?

14.43. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше любого решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geqslant 0$?

14.44. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 22). Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при $a = 2$?

14.45. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 23). Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при $a = 1$?

14.46. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 24). Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при $a = 0{,}5$?

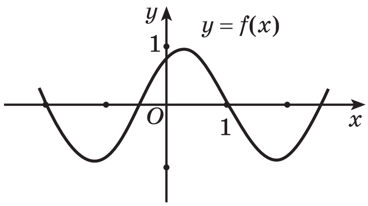


Рис. 22

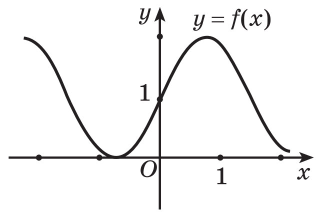


Рис. 23

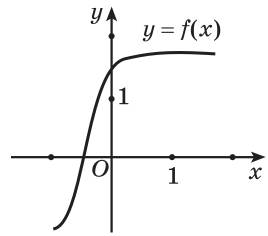


Рис. 24

14.47. Определите количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значений параметра a, зная, что функция $y = f(x)$ задана графически:

а) рис. 25; б) рис. 26; в) рис. 27.

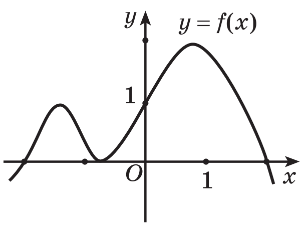


Рис. 25

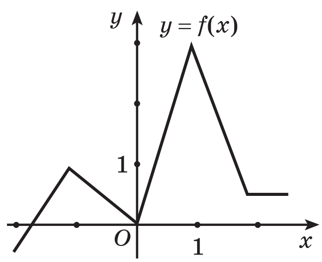


Рис. 26

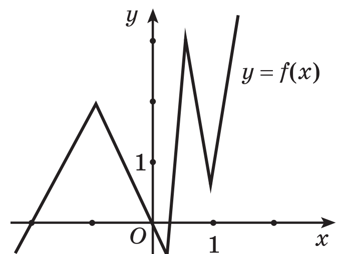


Рис. 27

14.48. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 28). При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет 2 решения?

14.49. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 29). При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет 3 решения?

14.50. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 30). При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = a$ имеет 1 решение?

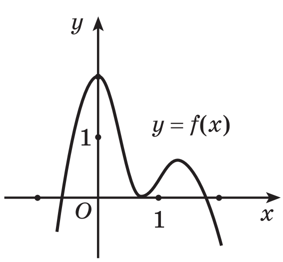


Рис. 28

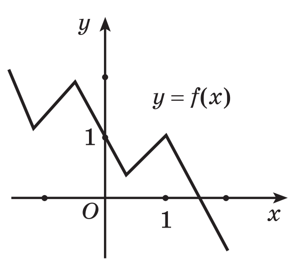


Рис. 29

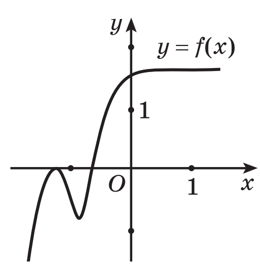


Рис. 30

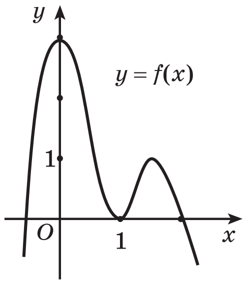


Рис. 31

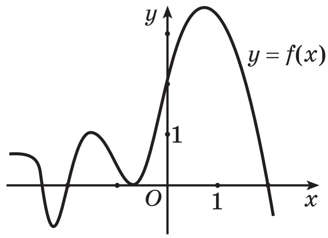


Рис. 32

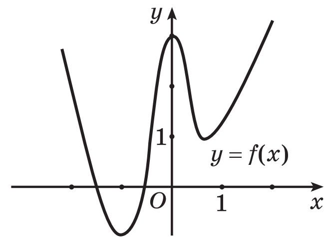


Рис. 33

14.51. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 31). При каких значениях параметра a хотя бы один корень уравнения $f(x) = a$ больше 1?

14.52. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 32). При каких значениях параметра a все корни уравнения $f(x) = a$ положительны?

14.53. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 33). При каких значениях параметра a хотя бы один корень уравнения $f(x) = a$ меньше 2?

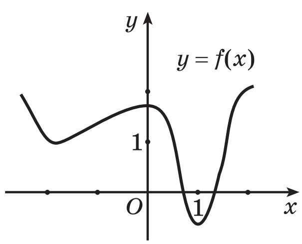


Рис. 34

14.54. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 34). При каких значениях параметра a все корни уравнения $f(x) = a$ принадлежат промежутку $(-2; 2)$?

14.55. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 35). При каких значениях параметра a все корни уравнения $f(x) = a$ лежат за пределами отрезка $[-1; 1]$?

14.56. Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 36). При каких значениях параметра a все корни уравнения $f(x) = a$ принадлежат отрезку $[1; 4]$?

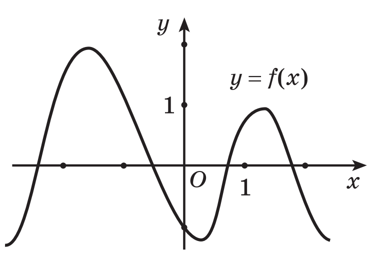


Рис. 35

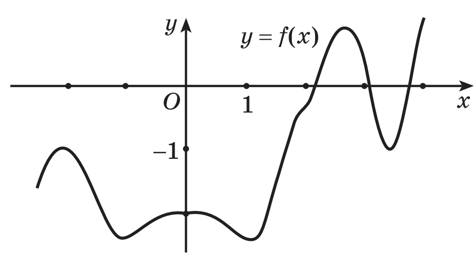


Рис. 36

14.57. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение:

а) $ax^2 + |x - 1| = 0$;　　б) $x^2 + a|x - 2| = 0$;

в) $x^2 + 2|x - a| = 0$;　　г) $|x - a| = x - 2$;

д) $|x + 1| = x - a$;　　е) $|x - 2| = ax$;

ж) $|x - 4| = \frac{a}{x}$;　　з) $||2x| - 6| = x + a$?

14.58. Решите относительно x уравнение:

а) $|a + x| + |2 + x| = 2 - a$;　　б) $x + \sqrt{x} = a$;　　в) $2|x| + |x - 1| = a$.

14.59. При каких значениях параметра a уравнение $\sin x = a$ не имеет корней?

14.60. При каких значениях параметра a уравнение $2^x = a$ имеет корни?

14.61. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 = a$ имеет корни?

14.62. При каких значениях параметра a уравнение $3\cos x = 4a + 1$ имеет корни?

14.63. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 = 2a + 4$ не имеет корней?

14.64. При каких значениях параметра a уравнение $3 \cdot 2^x - 1 = 4a$ имеет корни?

14.65. При каких значениях параметра a уравнение
$\sin^2 x + 3\cos^2 x = \frac{a - 2}{3}$ не имеет корней?

14.66. При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2 + 2} = 2a + 3$ не имеет корней?

14.67. Решите относительно x уравнение:

а) $2\sin(x + 3) = 3a + 1$;　　б) $3\cos(x - 1) = 4a - 7$;

в) $2^{x^2 + 2x} = a + 5$;　　г) $\log_2(2x - x^2) = 2a - 3$;

д) $2^{|x|+3} = a^2 + 2a$;　　е) $3 \cdot 5^{x^2 + 4x + 16} = 2a^2 + 3a + 6$.

14.68. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ не имеет корней?

14.69. При каких значениях параметра a уравнение
$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = a^2 - 3a + 2$ имеет корни?

14.70. При каких значениях параметра a уравнение
$3 \cdot 2^{x^2 + 4x + 6} = a^2 - 5a + 18$ имеет корни?

§ 15. Случайные, достоверные, невозможные и элементарные события

Теория вероятностей, как и другие разделы математики, связана с решением практических задач. Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII в. и связано с исследованиями Б. Паскаля (1623—1662), П. Ферма (1601—1665) и Х. Гюйгенса (1629—1695) в области теории азартных игр.

В теории вероятностей на основе схемы азартных игр можно составлять модели случайных явлений. С помощью многократного повторения одного и того же опыта эти модели позволяют наблюдать, изучать и экспериментально проверять законы случайных явлений.

Вплоть до настоящего времени примеры из области азартных игр и аналогичные им задачи на «игральный кубик» широко употребляются при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, иллюстрирующие основные законы и правила теории вероятностей. При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода карт хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Математические законы теории вероятностей — отражение реальных законов, объективно существующих в массовых случайных явлениях природы и общества. При изучении этих явлений в теории вероятностей применяется математический метод, логически точный и строгий, как в других разделах математики.

Познакомимся с основными понятиями теории вероятностей.

Наблюдение явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно, в теории вероятностей принято называть **испытанием**. Результат, исход испытания называется **событием.**

Например,

а) сдача экзамена — это испытание; получение определенной отметки — событие;

б) выстрел — это испытание; попадание в определенную область мишени — событие;

Подбрасывание монеты — это **испытание**

в) подбрасывание игрального кубика — это испытание; появление того или иного числа очков на нем — событие;

г) вынимание шара из урны с разноцветными шарами — это испытание; появление шара того или иного цвета — событие.

Появление цифры или герба — это **событие**

Событие называется **достоверным**, если в результате данного испытания оно **обязательно произойдет**.

Например,

а) выпадение натурального числа, не большего 6, при подбрасывании игрального кубика (игральным кубиком считается куб, на каждой из шести граней которого изображены точки от 1 до 6);

б) появление белого шара при вынимании шаров из урны, в которой находятся только белые шары;

в) падение в условиях земного тяготения подброшенной монеты вниз.

Достоверное событие — закипание воды при нормальном атмосферном давлении при температуре 100 °C

Событие называется **невозможным**, если в результате данного испытания оно **не может произойти**.

Например,

а) выпадение натурального числа, большего 7, при подбрасывании игрального кубика;

б) появление черного шара при вынимании шаров из урны, в которой находятся только белые шары;

в) в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

Невозможное событие — в Минске ночью ярко светит солнце

Событие называется **случайным**, если в результате данного испытания оно **может произойти, а может и не произойти**.

Например,

а) выпадение числа 2 при подбрасывании игрального кубика;

б) при подбрасывании монеты выпадет цифра;

в) при выстреле в мишень пуля попадет в «десятку»;

г) по пути в школу вы встретите 10 велосипедистов;

д) из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Случайное событие

Событие (исход) называется **элементарным**, если его **нельзя разложить на другие события.**

Например, выпадение четного числа при подбрасывании игрального кубика не является элементарным событием, поскольку его можно разложить на другие события:

- выпадение числа 2;
- выпадение числа 4;
- выпадение числа 6.

Эти события уже нельзя разложить на другие, они являются элементарными.

Событие называется **противоположным** к событию A, если **оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит A.**

Событие, противоположное к событию A, обозначается $\overline{A}$.

Например, рассмотрим испытание, состоящее в подбрасывании игрального кубика.

а) Событие A — при подбрасывании кубика выпадет четное число: 2, 4, 6.

Событие, противоположное к событию A, т. е. $\overline{A}$ — выпадет нечетное число: 1, 3, 5.

б) Событие B — при подбрасывании кубика выпадет число меньше трех: 1, 2.

Событие, противоположное к событию B, т. е. $\overline{B}$ — выпадет число, большее или равное трем: 3, 4, 5, 6.

Испытание — подбрасывание монеты.

Событие A — выпал герб

Событие $\overline{A}$ — выпала цифра

Пример 1. Каким (достоверным, невозможным или случайным) является событие:

а) трехкратное выпадение числа 3 при подбрасывании игрального кубика три раза;

б) выпадение числа, кратного трем, при подбрасывании игрального кубика четыре раза;

в) выпадение трех различных чисел, сумма которых равна 20, при подбрасывании игрального кубика три раза;

г) выпадение двух чисел, сумма которых не превышает 12, при подбрасывании игрального кубика два раза?

Решение.

а) трехкратное выпадение числа 3 при подбрасывании игрального кубика три раза является случайным событием, так как оно может произойти, а может и не произойти в результате испытания — подбрасывания игрального кубика три раза;

б) выпадение числа, кратного трем, при подбрасывании игрального кубика четыре раза является случайным событием;

в) выпадение трех различных чисел, сумма которых равна 20, при подбрасывании игрального кубика три раза является невозможным событием, так как максимально возможная сумма выпавших чисел равна 18;

г) выпадение двух чисел, сумма которых не превышает 12, при подбрасывании игрального кубика два раза является достоверным событием, так как максимально возможная сумма равна 12.

Пример 2. Подбрасывают два кубика. Назовите событие, противоположное событию:

а) выпадет хотя бы одна шестерка;

б) выпадут разные числа;

в) на первом кубике выпадет число, большее, чем на втором.

Решение.

а) Не выпадет ни одной шестерки.

б) Выпадут одинаковые числа.

в) На первом кубике выпадет число, меньшее или равное числу на втором кубике.

Пример 3. Какое из следующих событий является элементарным:

а) выпадение числа, кратного 3, при подбрасывании игрального кубика;

б) выпадение числа, кратного 4, при подбрасывании игрального кубика;

в) выпадение нечетного числа, кратного 3, при подбрасывании игрального кубика;

г) выпадение числа, которое при делении на три дает в остатке 2, при подбрасывании игрального кубика?

Решение.

а) Событие «выпадение числа, кратного 3, при подбрасывании игрального кубика» не является элементарным, так как его можно разложить на другие события:

- выпадение числа 3;
- выпадение числа 6.

б) Событие «выпадение числа, кратного 4, при подбрасывании игрального кубика» является элементарным, так как в результате подбрасывания игрального кубика выпадает только одно число, кратное 4.

в) Событие «выпадение нечетного числа, кратного 3, при подбрасывании игрального кубика» является элементарным, так как в результате подбрасывания игрального кубика выпадает только одно нечетное число, кратное 3.

г) Событие «выпадение числа, которое при делении на три дает в остатке 2, при подбрасывании игрального кубика» не является элементарным, так как его можно разложить на другие события:

- выпадение числа 2;
- выпадение числа 5.

Пример 4. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания:

а) выигрыш, проигрыш, ничья в шахматной партии;

б) выигрыш, проигрыш в футбольном матче;

в) выигрыш, проигрыш при игре в баскетбол;

г) попадание, промах при выстреле по мишени.

Решение.

а) Указаны все возможные исходы шахматной партии.

б) Не указан возможный результат — ничья.

в) Указаны все возможные исходы при игре в баскетбол.

г) Указаны все возможные исходы при стрельбе по мишени.

15.1. В ящике находится 25 стандартных и 6 бракованных однотипных деталей. Событие «наугад выбранная деталь оказалась бракованной» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.2. Событие «компьютер не потребует ремонта в течение гарантийного срока» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.3. Событие «появление четного номера при выдаче номерка в гардеробе театра» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.4. На тарелке 20 одинаковых по виду пирожков: 2 с мясом, 16 с капустой и 2 с вареньем. Наугад выбирают один пирожок. Событие «выбран пирожок с капустой» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.5. Событие «выпадение четного числа при подбрасывании игрального кубика 7 раз» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.6.Событие «выпадение нечетного числа при подбрасывании игрального кубика 12 раз» является:

а) элементарным; б) случайным;
в) достоверным; г) невозможным.

Выберите правильный ответ.

15.7. Невозможным является событие:

а) выпадение четного числа при подбрасывании игрального кубика три раза;

б) выпадение четного числа при подбрасывании игрального кубика четыре раза;

в) выпадение трех одинаковых чисел при подбрасывании игрального кубика три раза;

г) выпадение двух чисел, сумма которых равна 13, при подбрасывании игрального кубика два раза.

Выберите правильный ответ.

15.8. Достоверным является событие:

а) выпадение четного числа при подбрасывании игрального кубика четыре раза;

б) выпадение четырех одинаковых чисел при подбрасывании игрального кубика четыре раза;

в) выпадение трех одинаковых чисел при подбрасывании игрального кубика три раза;

г) выпадение двух чисел, сумма которых не превышает 12, при подбрасывании игрального кубика два раза.

Выберите правильный ответ.

15.9. Приведите примеры достоверных, невозможных, случайных событий при некотором испытании.

15.10. На 6 карточках изображены числа от 1 до 6. Наудачу выбирают одну карточку. Все возможные исходы этого испытания есть появление:

а) числа, кратного двум или кратного трем;

б) простого или составного числа;

в) натурального числа, не большего 6;

г) числа, меньшего 6.

Выберите правильный ответ.

15.11. Дважды подбрасывают монету. Все возможные исходы испытания:

а) двукратное выпадение герба; двукратное выпадение цифры;

б) выпадение цифры при первом подбрасывании, герба — при втором; выпадение герба при первом подбрасывании, цифры — при втором;

в) выпадение цифры при первом подбрасывании, герба — при втором; выпадение герба при первом подбрасывании, цифры — при втором, двукратное выпадение герба, двукратное выпадение цифры;

г) двукратное выпадение герба, двукратное выпадение цифры; выпадение герба, выпадение цифры.

Выберите правильный ответ.

15.12. Производится два выстрела по мишени. Множество всех исходов образуют события:

а) ни одного попадания, два попадания;

б) нет промаха, есть хотя бы один промах;

в) есть хотя бы одно попадание, два промаха;

г) ни одного попадания, хотя бы одно попадание.

Выберите правильный ответ.

15.13. Опишите все возможные исходы при одновременном подбрасывании двух монет.

15.14. Производится опрос, связанный с анализом жилищных условий работников фирмы. Каждому из опрашиваемых задают два вопроса:

- Удовлетворены ли вы качеством жилья?
- Удовлетворены ли вы удаленностью квартиры от места работы?

Опишите все возможные исходы опроса, если опрошены три сотрудника.

§ 16. Классическое определение вероятности

Рассмотрим ситуацию. В пакете 15 конфет: 10 шоколадных и 5 карамелек. Вынимаем одну конфету наугад. Возможно, она окажется шоколадной. В пользу этого события имеется 10 шансов — говорят, благоприятных исходов для этого события 10. Благоприятных исходов для появления карамельки — 5. Число всех возможных исходов испытания равно числу всех конфет, т. е. 15.

Обозначим событие «появление шоколадной конфеты» через A.

Найдем отношение числа благоприятных этому событию исходов к числу всех возможных исходов: $\frac{10}{15}$.

В этом случае говорят, что найдена вероятность появления события A и записывают: $P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

> **Вероятностью события** A называется отношение числа благоприятных исходов появлению события A к числу всевозможных исходов испытания: $P(A) = \frac{m}{n}$, где $P(A)$ — вероятность события A, m — число элементарных исходов испытания, благоприятных появлению события A, n — общее число возможных элементарных исходов испытания.

Это классическое определение вероятности, им можно воспользоваться, если число всевозможных исходов испытания конечно, а все элементарные исходы равновозможны. Исходы некоторого испытания считают равновозможными, если нет объективных преимуществ для появления некоторых из них.

Пример 1. Найдите вероятность события A: «при подбрасывании игрального кубика выпало число, не меньшее 4».

Решение.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Число всех возможных исходов испытания равно 6, а благоприятных событию «выпало число, не меньшее 4», равно 3.

Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Пример 2. Студент хотел бы, чтобы на экзамене ему достался любой из 25 билетов, которые он хорошо подготовил. Какова вероятность того, что ему достанется хорошо подготовленный билет, если всего их 30?

Решение.

Число всех возможных исходов испытания «выбор билета» равно 30, а благоприятных событию A — «достался хорошо подготовленный билет» — 25.

Тогда $P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Пример 3. В урне 15 шаров: 10 белых и 5 красных. Вынимают один шар. Какова вероятность того, что будет вынут красный шар?

Решение.

Испытание — вынимают шар. Число всевозможных исходов этого испытания равно числу всех шаров — 15.

Событие A — появление красного шара. Число благоприятных событию A исходов равно числу красных шаров — 5.

Вероятность события A: $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Из 33 карточек, на каждой из которых написана одна из букв русского алфавита, по очереди вынимают три карточки. Какова вероятность появления слова «ура»?

Решение.

Испытание состоит в том, что наугад вынимают 3 карточки из 33. Число всевозможных исходов равно числу размещений из 33 по 3, т. е. A_{33}^3.

Число благоприятных исходов событию A — появление подряд идущих букв «у», «р», «а» — равно 1. Вероятность события A:

$$P(A) = \frac{1}{A_{33}^3} = \frac{1}{33 \cdot 32 \cdot 31} = \frac{1}{32\,736}.$$

Ответ: $\frac{1}{32\,736}$.

Пример 5. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Наугад вынимают 3 детали. Найдите вероятность того, что все три вынутые детали окрашенные.

Решение.

Испытание — наугад вынимают 3 детали. Число всевозможных исходов равно числу сочетаний из 15 элементов по 3 — C_{15}^3, так как порядок расположения элементов не важен, и выбирают 3 элемента из 15.

Число благоприятных исходов событию A — появление трех окрашенных деталей — равно числу сочетаний из 10 элементов по 3 — C_{10}^3, так как порядок расположения элементов не важен, и выбирают 3 элемента из 10.

Вероятность того, что все три детали окрашенные: $P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$.

Ответ: $\frac{24}{91}$.

> Вероятность невозможного события равна нулю.

Так как для невозможного события A при данном испытании число благоприятных исходов равно нулю, то $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Пример 6. Найдите вероятность события «при подбрасывании игрального кубика выпало число не меньше 7».

Решение.

Поскольку событие «при подбрасывании игрального кубика выпало число не меньше 7» является невозможным, то его вероятность равна нулю.

Ответ: 0.

Пример 7. В ящике 8 шаров с номерами от 1 до 8. Вынули один шар. Какова вероятность того, что шар имеет номер, превосходящий 8?

Решение.

Событие «появление шара с номером, превосходящим число 8» является невозможным. Его вероятность равна нулю, т. е. $P(A) = 0$.

Ответ: 0.

Вероятность достоверного события равна 1.

Поскольку для достоверного события A при данном испытании число благоприятных исходов равно n, то $P(A) = \frac{n}{n} = 1$.

Пример 8. Какова вероятность события «выпадение двух чисел, сумма которых не превышает 12, при подбрасывании игрального кубика два раза»?

Решение.

Поскольку событие «выпадение двух чисел, сумма которых не превышает 12, при подбрасывании игрального кубика два раза» является достоверным, то его вероятность равна 1.

Ответ: 1.

Пример 9. Найдите вероятность события A и противоположного ему события $\bar{A}$, если событие A:

а) «при подбрасывании игрального кубика выпало четное число»;

б) «при подбрасывании игрального кубика выпало число меньше трех».

Решение.

а) Число всех возможных исходов испытания равно 6, а благоприятных событию A «выпало четное число» равно 3. Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Событие «выпало нечетное число» является противоположным событию A. Найдем вероятность события $\bar{A}$. Число всех возможных исходов испытания равно 6, а благоприятных событию $\bar{A}$ «выпало нечетное число» равно 3. Получим, что $P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Число всех возможных исходов испытания равно 6, а благоприятных событию A «выпало число меньше трех» равно 2. Тогда $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Событие «выпало число, больше или равное трем» является противоположным событию A. Найдем вероятность события $\bar{A}$. Число всех возможных исходов испытания равно 6, а благоприятных событию $\bar{A}$ «выпало число, больше или равное трем» равно 4. Получим, что $P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Обобщим полученные результаты:

Событие A	$P(A)$	Событие $\bar{A}$	$P(\bar{A})$	$P(A)+P(\bar{A})$
Выпало четное число	$\frac{1}{2}$	Выпало нечетное число	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
Выпало число меньше трех	$\frac{1}{3}$	Выпало число, больше или равное трем	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

Вероятность противоположного события можно вычислить по формуле $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Доказательство. Пусть опыт может закончиться одним из n равновозможных исходов, m из которых благоприятны для наступления события A. Тогда остальные $n-m$ исходов благоприятны для наступления события $\bar{A}$. Поэтому $P(\bar{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A)$.

Пример 10. В урне 5 белых, 6 красных и 7 синих шаров. Какова вероятность того, что наугад выбранный шар окажется не синим?

Решение.

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

Рассмотрим событие A — шар окажется синим. Тогда событие, противоположное событию A, т. е. $\bar{A}$ — шар окажется не синим.

Найдем вероятность события A. Число всех возможных исходов испытания равно числу шаров, т. е. 18, а число исходов испытания, благоприятных событию «шар окажется синим», равно числу синих шаров, т. е. 7. Тогда $P(A)=\frac{7}{18}$. По формуле $P(\bar{A})=1-P(A)$ получим: $P(\bar{A})=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$.

Ответ: $\frac{11}{18}$.

Пример 11. В ящике находятся однотипные детали: 10 стандартных и 3 нестандартные. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных 3 деталей окажется хотя бы одна нестандартная?

Решение.

Рассмотрим событие A — хотя бы одна деталь из 3 окажется нестандартной. Тогда событие, противоположное событию A, т. е. $\bar{A}$ — ни одна деталь не окажется нестандартной.

Найдем $P(\bar{A})=\frac{C_{10}^3}{C_{13}^3}=\frac{60}{143}$, тогда $P(A)=1-\frac{60}{143}=\frac{83}{143}$.

16.1. В ящике 12 шаров: 3 белых, 4 черных, 5 красных. Вынули один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар черный?

16.2. Верно ли, что вероятность события «при подбрасывании игрального кубика выпало четное число» равна $\frac{1}{2}$?

16.3. Какова вероятность события «при подбрасывании игрального кубика выпало число, кратное 3»?

16.4. Какова вероятность события «при подбрасывании игрального кубика выпало простое число»?

16.5. В классе 25 человек, из них 13 мальчиков. Какова вероятность того, что сегодня дежурит по классу девочка?

16.6. В партии из 15 деталей 3 детали бракованные. Наугад выбирают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

16.7. В коробке лежит только 5 синих и 7 черных карандашей. Какова вероятность взять из коробки наугад: а) ручку; б) карандаш; в) черный карандаш?

16.8. Выбраны все нечетные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет:

а) нечетным;

б) четным?

16.9. В ящике 12 шаров с номерами от 1 до 12. Вынули один шар. Какова вероятность того, что этот шар имеет номер:

а) не превосходящий 8;

б) взаимно простой с 4;

в) сумма которого с числом 4 не превосходит 10?

16.10. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. На экзамене студент должен ответить на 2 вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит на оба вопроса?

16.11. Из 7 лотерейных билетов два выигрышных. Выбирают три билета. Какова вероятность, что ровно один билет из трех выбранных выигрышный?

16.12. В шахматном турнире участвуют 16 человек, которые будут разделены по жребию на две группы по 8 человек. Какова вероятность того, что два наиболее сильных участника будут играть в одной группе?

§ 17. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Определение

Суммой событий A и B называется событие, которому благоприятны все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий A или B.

Например, подбросили две монеты. Событие A — «герб выпал на первой монете», событие B — «герб выпал на второй монете». Сумма событий $A + B$ — «выпал хотя бы один герб».

Определение

Произведением событий A и B называется событие, которому благоприятны все исходы, благоприятные и событию A, и событию B одновременно.

Например, подбросили две монеты. Событие A — «герб выпал на первой монете», событие B — «герб выпал на второй монете». Произведение событий AB — «выпали два герба».

Например, произведено два выстрела по мишени. Событие A — попадание в цель при первом выстреле. Событие B — попадание в цель при втором выстреле по мишени. Произведение событий AB — мишень поражена дважды.

Определение

Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность наступления события A не зависит от того, произошло событие B или не произошло.

Например, подбросили две монеты. Событие A — «герб выпал на первой монете», событие B — «герб выпал на второй монете». Событие A независимо от события B.

Например, в урне 10 шаров: 5 белых, 5 красных. Вынимают один за другим два шара. Событие A — «второй раз вынули белый шар», событие B — «первый раз вынули белый шар». Вероятность события A зависит от того, произошло ли событие B. A зависит от B.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство.

Пусть в результате некоторого испытания могут появиться события A или B. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ — элементарные исходы, благоприятные событию A при данном испытании, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ — элементарные исходы, благоприятные событию B при данном испытании. Тогда сумме событий $A + B$ благоприятны все исходы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$. Так как события A и B несовместны, то среди всех этих исходов нет повторяющихся.

Пусть всего исходов данного испытания n. Тогда

$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$. Теорема доказана.

Пример 1. В урне 15 шаров: 5 белых, 5 красных и 5 синих. Вынимают один шар. Какова вероятность появления не синего шара?

Решение.

Нужно найти вероятность появления красного (событие A) или белого (событие B) шара. Так как события A и B несовместны, то по теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема о произведении вероятностей

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Доказательство.

Пусть в результате некоторого испытания (например, вынимаются 2 шарика по одному из одной и второй урны. Какова вероятность, что оба шарика будут черного цвета, если в первой — 4 белых, 5 черных, во второй — 3 черных 8 белых?) могут появиться независимые события A и B.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ — элементарные исходы, благоприятные событию A при данном испытании, а всевозможных исходов — n; $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ — элементарные исходы, благоприятные событию B при данном испытании, а всевозможных исходов — f. Тогда благоприятных событию AB исходов по правилу умножения mk, а всевозможных исходов испытания по этому же правилу равно nf, значит, $P(AB) = \frac{mk}{nf} = \frac{m}{n}\frac{k}{f} = P(A)P(B)$.

Для приведенного примера число благоприятных исходов будет равно числу всевозможных пар черных шариков, по правилу произведения их число равно $5 \cdot 3 = 15$. Число всевозможных исходов равно числу всевозможных пар шариков, их число $9 \cdot 11 = 99$.

Вероятность того, что оба шарика будут черного цвета, равна $\frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 11} = \frac{5}{33}$.

Пример 2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле первого стрелка 0,7, второго — 0,8. Найдите вероятность того, что при одном залпе мишень будет поражена дважды.

Решение.

Так как события A — попадание первого стрелка и B — попадание второго независимы, то по теореме о произведении вероятностей будем иметь $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Ответ: 0,56.

Пример 3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле первого стрелка 0,7, второго — 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе (выстреле каждого из стрелков) мишень будет поражена.

Решение.

Пусть событие A — «мишень поражена». Рассмотрим противоположное событие $\bar{A}$ — «мишень не поражена». Это значит, что и первый, и второй стрелок промахнулись. Вероятность промаха при одном выстреле первого стрелка $1 - 0{,}7 = 0{,}3$, второго — $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Тогда вероятность того, что мишень не поражена, равна произведению вероятностей промаха каждого из стрелков, т. е. $P(\bar{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Откуда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ: 0,94.

17.1. Подбросили две монеты. Рассмотрены события:

A — «герб выпал на первой монете»,

B — «герб выпал на второй монете»,

C — «герб выпал на двух монетах»,

D — «герб выпал только на второй монете»,

E — «герб выпал только на одной монете».

Каким событиям из этого списка соответствует событие:

а) $A \cdot B$; б) $A + B$; в) $A \cdot \bar{B}$?

17.2. Подбросили две монеты. Если событие A — «герб выпал на первой монете», событие B — «герб выпал на второй монете», то событие $A\bar{B} + B\bar{A}$ означает:

а) не выпало ни одного герба; б) выпал только один герб;
в) выпало два герба; г) выпал герб на одной из монет.
Выберите правильный ответ.

17.3. Подбросили две монеты. Если событие A — «герб выпал на первой монете», событие B — «герб выпал на второй монете», то событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$ означает:

а) выпал ровно один герб; б) выпала хотя бы одна цифра;
в) выпало две цифры; г) выпал хотя бы один герб.
Выберите правильный ответ.

17.4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле первого стрелка 0,9, второго — 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) при одном залпе мишень будет поражена только вторым стрелком;
б) при одном выстреле мишень будет поражена только один раз.

17.5. В урне 10 шаров, из которых 4 белых. Наудачу вынимают 3 шара. Найдите вероятность того, что хотя бы один шар белый.

17.6. Подброшены три игральных кубика. Найдите вероятность того, что на каждой из выпавших граней:

а) появится число 5;
б) появится одинаковое число;
в) появятся хотя бы два разных числа;
г) все числа будут разные.

17.7. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле первого стрелка 0,9, второго — 0,8. Найдите вероятность того, что при:

а) одном залпе мишень будет поражена;
б) одном залпе мишень не будет поражена;
в) двух залпах мишень не будет поражена.

17.8. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найдите вероятность того, что студент знает три предложенных экзаменатором вопроса.

17.9. В ящике 10 деталей, 6 из которых окрашены. Извлекают 4 детали по одной. Найдите вероятность того, что:

а) все они окажутся окрашенными;

б) хотя бы одна деталь будет окрашенной;

§ 18. Условные вероятности. Формула полной вероятности

Определение

Пусть A и B — наблюдаемые события в эксперименте. Условной вероятностью $P(A/B)$ называется вероятность события A в предположении, что событие B уже произошло.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**.

Пример 1. Партия электрических приборов на 20 % изготовлена заводом № 1, на 40 % — заводом № 2, на 10 % — заводом № 3, на 30 % — заводом № 4. Для завода № 1 вероятность выпуска бракованного прибора равна 0,01, для завода № 2 — 0,008, для завода № 3 — 0,02, для завода № 4 — 0,005. Какова вероятность того, что выбранный из партии прибор окажется бракованным?

Решение.

Гипотеза H_1 — выбранный прибор изготовлен на заводе № 1, $P(H_1) = 0{,}2$.

Гипотеза H_2 — выбранный прибор изготовлен на заводе № 2, $P(H_2) = 0{,}4$.

Гипотеза H_3 — выбранный прибор изготовлен на заводе № 3, $P(H_3) = 0{,}1$.

Гипотеза H_4 — выбранный прибор изготовлен на заводе № 4, $P(H_4) = 0{,}3$.

Событие A — прибор бракованный.

$P(A/H_1)$ — вероятность того, что прибор, изготовленный первым заводом, бракованный, $P(A/H_1) = 0{,}01$.

$P(A/H_2)$ — вероятность того, что прибор, изготовленный вторым заводом, бракованный, $P(A/H_2) = 0{,}008$.

$P(A/H_3)$ — вероятность того, что прибор, изготовленный третьим заводом, бракованный, $P(A/H_3)=0{,}02$.

$P(A/H_4)$ — вероятность того, что прибор, изготовленный четвертым заводом, бракованный, $P(A/H_4)=0{,}005$.

По формуле полной вероятности будем иметь:

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+P(H_4)P(A/H_4)$.

$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}01+0{,}4\cdot 0{,}008+0{,}1\cdot 0{,}02+0{,}3\cdot 0{,}005=0{,}0087$.

Ответ: 0,0087.

Формула Байеса

Пусть событие A может произойти лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятность того, что оно произошло вместе с событием H_k, равна

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},$$

где $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)$.

Пример 2. Имеется 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок попадет из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, из винтовки без оптического прицела — 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что стрелок поразил мишень из винтовки с оптическим прицелом?

Решение.

Гипотеза H_1 — стрелок выбрал винтовку с оптическим прицелом, $P(H_1)=0{,}4$.

Гипотеза H_2 — стрелок выбрал винтовку без оптического прицела, $P(H_2)=0{,}6$.

$P(A/H_1)$ — вероятность того, что стрелок попадает в цель из винтовки с оптическим прицелом, $P(A/H_1)=0{,}95$.

$P(A/H_2)$ — вероятность того, что стрелок попадает в цель из винтовки без оптического прицела, $P(A/H_2)=0{,}8$.

По формуле полной вероятности будем иметь:

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}4\cdot 0{,}95+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}86$.

Тогда по формуле Байеса вероятность того, что мишень будет поражена из винтовки с оптическим прицелом, равна $P(H_1/A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}86} = \frac{19}{43}$.

Ответ: $\frac{19}{43}$.

18.1. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных. Из одной урны вынимают шар. Тогда полную группу гипотез составляют:

а) H_1 — шар вынут из первой урны, H_2 — шар вынут из второй урны;

б) H_1 — белый шар вынут из первой урны, H_2 — черный шар вынут из второй урны;

в) H_1 — шар вынут из первой урны, H_2 — шар вынут из второй урны, H_3 — шар вынут из первой или из второй урны;

г) H_1 — белый шар вынут из первой урны, H_2 — белый шар вынут из второй урны; H_3 — вынут черный шар.

Выберите правильный ответ.

18.2. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных. Из одной урны вынимают шар. Если событие H_1 — шар вынут из первой урны, событие H_2 — шар вынут из второй урны, событие A — вынут белый шар, то $P(A/H_1)$ — это:

а) вероятность того, что шар вынут из первой урны;

б) вероятность того, что белый шар вынут из первой урны;

в) вероятность того, что выбрана первая урна;

г) вероятность вынуть белый шар из первой урны.

Выберите правильный ответ.

18.3. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных. Из одной урны вынимают шар. Если событие H_1 — шар вынут из первой урны, событие H_2 — шар вынут из второй урны, событие A — вынут белый шар, то $P(H_1/A)$ — это:

а) вероятность того, что шар вынут из первой урны;

б) вероятность того, что белый шар вынут из первой урны;

в) вероятность того, что выбрана первая урна;

г) вероятность вынуть белый шар из первой урны.

Выберите правильный ответ.

18.4. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных. Из одной урны вынимают шар. Какова вероятность вынуть белый шар?

18.5. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой — 4 белых и 8 черных. Из одной урны вынимают шар, он оказался белым. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

18.6. Два цеха производят одинаковые детали, которые затем поступают на общий конвейер. В первом цеху выпускается в два раза больше деталей, чем во втором. Вероятность выпуска качественной детали в первом цеху равна 0,6, а во втором — 0,84. Событие A — наудачу выбранная деталь качественная, событие H_1 — деталь изготовлена в первом цеху, событие H_2 — деталь изготовлена во втором цеху. Найдите: а) $P(H_2)$; б) $P(A/H_1)$.

18.7. Два цеха производят одинаковые детали, которые затем поступают на общий конвейер. В первом цеху выпускается в два раза больше деталей, чем во втором. Вероятность выпуска качественной детали в первом цеху равна 0,6, а во втором — 0,84. Найдите вероятность того, что наудачу выбранная с конвейера деталь:

а) оказалась качественной;
б) произведена в первом цеху;
в) произведена во втором цеху.

18.8. Детали на сборку поступают из трех автоматов. Из первого автомата их поступило 1000, из второго — 2000, из третьего — 2500. Известно, что первый автомат дает $0{,}3\ \%$ бракованных деталей, второй — $0{,}2\ \%$, третий — $0{,}4\ \%$. Найдите вероятность:

а) попадания на сборку бракованной детали;
б) того, что бракованная деталь произведена первым автоматом;
в) того, что бракованная деталь произведена вторым автоматом.

18.9. Приборы одного наименования изготовляются двумя предприятиями. Первое поставляет $\frac{2}{3}$ всех изделий, второе — $\frac{1}{3}$. Надежность приборов первого предприятия — 0,9, а второго — 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) выбран надежный прибор;
б) выбранный надежный прибор изготовлен на первом предприятии;
в) выбранный надежный прибор изготовлен на втором предприятии.

18.10. Один из трех независимо работающих элементов устройства отказал. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2, 0,4, 0,3. Найдите вероятность того, что:

а) отказал первый элемент;
б) отказал второй элемент;
в) отказали первый и второй элементы.

§ 19. Понятие о геометрической вероятности

Определение

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Тогда вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством $P = \frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}$ и называется геометрической вероятностью (на прямой).

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Тогда вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством $P = \frac{\text{Площадь } g}{\text{Площадь } G}$ и называется геометрической вероятностью (на плоскости).

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V: $P = \frac{\text{Объем } v}{\text{Объем } V}$ — и называется геометрической вероятностью (в пространстве).

В определении предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок l (на фигуру g) пропорциональна длине этого отрезка (площади этой фигуры) и не зависит от ее расположения относительно отрезка L (фигуры G).

Свойства геометрической вероятности

1. Для любой части отрезка значение вероятности является неотрицательным числом, не превосходящим 1. Для самого отрезка значение вероятности равно 1.

2. Если части X и Y не имеют общих точек (несовместны), то $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$.

Пример 1. ***«Сложение треугольника»***

На отрезок длины 1 бросают наудачу 2 точки. Они разбивают отрезок на три отрезка. Какова вероятность того, что из полученных трех отрезков можно сложить треугольник?

Решение.

1. Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше суммы других.

2. Так как сумма трех отрезков равна 1, то каждый из отрезков должен быть меньше $\frac{1}{2}$.

3. Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy.

Координаты любых двух точек должны удовлетворять двойным неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки $(x; y)$, принадлежащей квадрату со стороной 1.

4. Полученный квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения координат наудачу брошенных точек на отрезки x и y. Если точки x и y лежат на отрезке, то длины сторон треугольника удовлетворяют условиям:

при $x \leqslant y$ $\begin{cases} x < (y - x) + (1 - y), \\ y - x < x + (1 - y), \\ 1 - y < x + (y - x), \end{cases}$ после преобразований получим систему неравенств $\begin{cases} x < 0{,}5, \\ y < x + 0{,}5, \\ 0{,}5 < y, \\ x \leqslant y, \end{cases}$ которая на плоскости определяет треугольник (рис. 37);

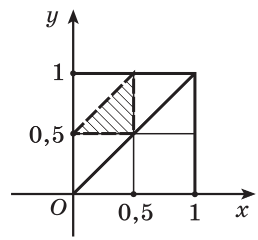


Рис. 37

при $x > y$ система $\begin{cases} x > 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ y > x - 0{,}5, \\ x > y \end{cases}$ определяет на плоскости еще один треугольник (рис. 38).

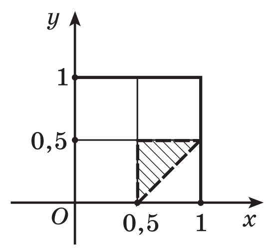


Рис. 38

5. Заштрихованные треугольники можно рассматривать как фигуру g. Площади этих треугольников составляют $\frac{1}{8}$ квадрата. Тогда $g = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$; $G = 1$. Следовательно, вероятность построить треугольник $P = \frac{g}{G} = \frac{1}{4}$.

Пример 2. ***«Сколько толкать автомобиль»***

На автомобильной магистрали через каждые 20 км установлены станции технического обслуживания. Какова вероятность того, что сломавшийся на трассе автомобиль придется толкать до ближайшей станции больше 1 км?

Решение.

1. На языке геометрической вероятности это выбор случайной точки на отрезке длиной 20 км.

2. Благоприятными исходами события будет попадание в точки, отстоящие от концов отрезка не более, чем на 1 км, такие точки занимают отрезки длиной 1 км от начала и 1 км от конца: $P = \frac{l}{L} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Замечание: магистраль может не быть прямой линией, тогда точка выбирается уже не на отрезке, а на кривой, но поскольку вероятность зависит только от длины, то ответ не изменится.

Пример 3. ***«Рулетка»***

Известным примером устройства для выбора случайного попадания служит так называемая рулетка (волчок, вертушка). В центре рулетки закреплена стрелка, которая раскручивается и останавливается в случайном положении. Какова вероятность того, что стрелка рулетки остановится на каком-либо секторе?

Решение.

1. Круг рулетки разбит на секторы с разной угловой величиной.

2. Вероятность того, что стрелка вертушки остановится на каком-либо секторе, равна отношению длины ограничивающей его дуги (благоприятные исходы) к длине всей окружности $P = \frac{\alpha r}{2\pi r} = \frac{\alpha}{2\pi}$.

Пример 4. ***«Круг в квадрате»***

В квадрат со стороной a бросают случайную точку. Какова вероятность того, что она попадет во вписанный в этот квадрат круг?

Решение.

$G = a^2$, $g = \pi \cdot r^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$. Тогда $P = \frac{g}{G} = \frac{\pi \cdot a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$.

19.1. На отрезок [–2; 2] бросают случайную точку. Какова вероятность того, что ее координата будет:

а) положительной; б) больше 1; в) больше $\frac{1}{2}$?

19.2. В круг радиуса 2 бросают случайную точку. С какой вероятностью расстояние от этой точки до центра круга будет:

а) меньше 1; б) меньше $\frac{1}{2}$; в) больше 1; г) больше $\frac{1}{2}$?

19.3. В круг радиуса 2 бросают случайную точку. С какой вероятностью она попадет в концентрический круг радиуса 1?

19.4. Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найдите вероятность того, что длина отрезанного куска ленты составит не менее 80 см.

19.5. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами линии электропередач произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

19.6. На отрезке L длиной 20 см помещен меньший отрезок длиной 10 см. Найдите вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

19.7. В треугольник со сторонами $a = 9$; $b = 13$; $c = 16$ вписан круг. Точка M произвольно ставится в треугольник. Найдите вероятность того, что точка попадет в круг.

19.8. На шахматной доске случайным образом выбирают точку. Какова вероятность того, что она попадет на белую клетку?

19.9. В шар вписан куб. Точку наудачу бросают в шар. Какова вероятность того, что она попадет в куб?

§ 20. Понятие случайной величины

Примеры случайной величины:

1) число машин, проезжающих за 1 ч через некоторый перекресток;

2) число писем, поступающих в некоторое почтовое отделение за один день;

3) число попаданий в цель при стрельбе по мишени.

В каждом из примеров речь идет о величине, которая характеризует случайное событие. Каждая из этих величин может принимать соответствующее значение в зависимости от случайного исхода испытания.

Определение

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случайного исхода некоторого испытания.

Пример 1. На завод поступила партия, состоящая из N подшипников:

m_1 — число подшипников с внешним диаметром x_1,

m_2 — число подшипников с внешним диаметром x_2,

...

m_n — число подшипников с внешним диаметром x_n.

Внешний диаметр вынутого наудачу подшипника можно рассматривать как случайную величину, принимающую значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, с соответствующими вероятностями $p_1 = \frac{m_1}{N}$, $p_2 = \frac{m_2}{N}$, ..., $p_n = \frac{m_n}{N}$.

Пример 2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Случайная величина — число отказавших элементов.

Занесем в таблицу значения этой случайной величины и соответствующие вероятности этих значений.

Число отказавших элементов	0	1	2	3
P — вероятности	0,729	0,243	0,027	0,001

Этой таблицей задан закон распределения случайной величины. Поясним, что случайная величина принимает значение, равное нулю, если все три элемента не отказали, т. е. вероятность произведения: $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729$. Если отказал только один элемент, то вероятность этого значения случайной величины равна $3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$ и т. д.

Если случайная величина может принимать лишь конечное число возможных значений, то она называется **дискретной.**

Законом распределения дискретной случайной величины (рядом распределения) называется перечень всех ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения дискретных величин удобнее всего представлять в виде таблицы.

X — значения случайной величины	1	2	3	...	n
P — вероятности	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Определение

Найдем среднее значение случайной величины в примере 1:

$$x_{\text{ср}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{N} = \frac{m_1}{N}x_1 + \frac{m_2}{N}x_2 + \ldots + \frac{m_n}{N}x_n;$$

$$x_{\text{ср}} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Это значение называется **математическим ожиданием случайной величины.**

Обозначается математическое ожидание $M(x)$.

Вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Пример 3. Найдем математическое ожидание числа отказавших элементов в примере 2.

$M(x) = 0 \cdot 0{,}729 + 1 \cdot 0{,}243 + 2 \cdot 0{,}027 + 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}3.$

20.1. Выпущено 1000 лотерейных билетов. На 100 билетов выпадет выигрыш 10 р., на 50 билетов — 20 р., на 20 билетов — 100 р., на 5 билетов выпадет выигрыш 200 р. Остальные билеты — без выигрыша.

а) Закон распределения случайной величины — выигрыша случайно купленного билета имеет следующий вид:

1)

x	0	10	20	100	200
p	0,825	0,1	0,05	0,02	0,005

2)

x	0	100	50	20	5
p	0,825	0,1	0,05	0,02	0,005

3)

x	0	10	20	100	200
p	0,825	0,01	0,005	0,002	0,0005

4)

x	0	100	20	100	200
p	0,825	0,1	0,5	0,2	0,05

Выберите правильный ответ.

б) Каково математическое ожидание случайной величины — выигрыша случайно купленного билета?

20.2. У стрелка 4 патрона. Он стреляет по мишени, пока не попадет или пока не закончатся патроны. Вероятность попадания равна 0,25. Найдите:

а) закон распределения случайной величины — количества выстрелов до окончания стрельбы;

б) математическое ожидание количества выстрелов.

20.3. Пусть x — число гербов, выпавших при четырех подбрасываниях правильной монеты. Найдите:

а) закон распределения случайной величины x;

б) математическое ожидание случайной величины x.

20.4. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Вероятность попадания одним выстрелом равна 0,2. Найдите:

а) закон распределения случайной величины — числа выстрелов до второго попадания;

б) математическое ожидание числа выстрелов до второго попадания.

20.5. Автомобиль встречает 4 светофора, каждый из которых пропускает его с вероятностью 0,5. Найдите:

а) закон распределения случайной величины — числа светофоров до первой остановки машины;

б) математическое ожидание числа светофоров до первой остановки машины.

20.6. Баскетболист в среднем забрасывает штрафной мяч в корзину с вероятностью 0,5. Найдите:

а) закон распределения штрафных мячей, попавших в цель подряд;

б) математическое ожидание числа штрафных мячей, заброшенных подряд.

§ 21. Элементы математической статистики

Математическая статистика — наука о математических методах анализа данных, полученных при проведении массовых наблюдений (измерений, опытов).

Основным методом всех статистических исследований является выборочный метод. Он заключается в том, что в реальном исследовании наблюдается не вся совокупность явлений или объектов, которые изучаются, а лишь какая-то их часть.

Например, при определении рейтинга телевизионной передачи практически невозможно выяснить мнение всех телезрителей, поэтому проводят выборочное обследование лишь малой их части.

Вся совокупность явлений или объектов, подлежащих статистическому исследованию, называется **генеральной совокупностью.**

Элементами генеральной совокупности могут быть объекты любой природы: люди, природные явления, числа, физические эксперименты и т. д.

Из всей генеральной совокупности для обследования выбирают небольшое (по сравнению с генеральной совокупностью) конечное множество элементов, которые составляют **случайную выборку**.

Выборкой можно считать ряд (последовательность) данных (чаще всего числовых), полученных в результате статистического наблюдения. Такой ряд называют **статистическим**.

Пример 1. Числовой ряд, представляющий собой итоговые оценки по математике учащихся 11-го класса:

8 4 5 4 4 8 5 6 6 9 5 4 5 7 7 5 9 9 5 5 4 10 7 8 6

Пример 2. Случайная выборка из 25 учащихся 8-го класса с данными об их росте:

166 165 163 166 168 165 168 170 165 165 165 165 164 168 165 164 161 166 166 167 164 163 168 167 167

В статистике упорядочение данных, полученных в выборке, называют **ранжированием**, а упорядоченный по возрастанию статистический ряд — **вариационным рядом**.

Например: статистический ряд —

2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3,

полученный по нему вариационный ряд —

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5.

Если задан статистический ряд $x_1, x_2, ..., x_n$, то **среднее арифметическое** всех членов данного ряда, т. е. $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$, называется ***выборочным средним***.

Пример 3. Учащийся получил в течение первой учебной четверти следующие отметки по математике: 7, 4, 6, 6, 5, 4, 5, 6, 6, 5. Найдем его *средний балл*, т. е. среднее арифметическое всех членов ряда:

$$\overline{x} = \frac{7 + 4 + 6 + 6 + 5 + 4 + 5 + 6 + 6 + 5}{10} = 5{,}4.$$

Значение 5,4 — выборочное среднее данного статистического ряда.

Выборочное среднее дает неполное представление о поведении изучаемой величины. Например, на планете Меркурий средняя температура +15 °C. Исходя из этого статистического показателя, можно подумать, что на Меркурии умеренный климат, удобный для жизни людей. Однако на самом деле это не так. Температура на Меркурии колеблется от –150 °C до +350 °C.

А в примере с оценками по математике средняя оценка (при округлении получится 5) кажется не совсем справедливой, ведь наибольшее число отметок — это отметки «6».

Модой числового ряда называют число, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Можно сказать, что оно в этом ряду самое «модное». Для примера с отметками мода равна 6.

Моду можно использовать *не только в числовых рядах*. Если, например, опросить большую группу учащихся, какой школьный предмет им нравится больше всего, то модой этого ряда ответов окажется тот предмет, который будут называть чаще остальных. Мода широко используется при изучении спроса и проведении других социологических исследований. Например, при решении вопроса, в какое время и какие открывать авиарейсы и т. п., предварительно изучается спрос и выявляется мода — наиболее часто встречающийся заказ.

Медианой вариационного ряда называют число этого ряда (или полусумму двух его чисел), которое будет находиться ровно посередине ряда.

***Чтобы найти медиану статистического ряда, нужно*:**

① Ранжировать статистический ряд и получить вариационный ряд.

② Если вариационный ряд содержит нечетное количество чисел, то нужно взять число, которое находится ровно посередине.

Если же ряд содержит четное количество чисел, то нужно взять два средних числа и найти их полусумму.

Например, рассмотрим ряд оценок 7; 4; 6; 6; 5; 4; 5; 6; 6; 5.

① Ранжируем его и получим 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7.

② Ряд содержит четное количество чисел, нужно взять два средних числа 5 и 6 и найти их полусумму, медиана равна 5,5.

Рассмотрим статистический ряд 15; 13; 12; 16; 14; 12; 13; 14; 16 — возраст членов команды на спортивных соревнованиях.

① Ранжируем ряд и получим 12 12 13 13 14 14 15 16 16.

② Вариационный ряд содержит нечетное количество чисел, возьмем число, которое находится посередине — это 14.

Достоинством медианы является ее бóльшая по сравнению со средним арифметическим *устойчивость к ошибкам*. Представим себе, что при записи числового ряда 15; 13; 12; 16; 14; 12; 13; 14; 16 произошла ошибка: число 15 заменили на 5. Тогда среднее арифметическое возраста изменится с 13,9 на 12,8, а медиана останется прежней.

Но чтобы получить более полное представление о поведении статистического ряда в целом, нужно знать, насколько сильно его значения различаются между собой, как сильно они разбросаны, рассеяны.

Размах — это разность наибольшего и наименьшего значений выборки.

Размах может добавить много полезной информации к другим характеристикам. Так, для температуры на Меркурии, где средняя температура, около +15 °C, размах равен 350 °C – (–150 °C) = 500 °C.

Размах не всегда несет достоверную информацию, так как на его величину может сильно повлиять какое-то одно (возможно, ошибочное) значение выборки.

Мерой разброса может быть величина, которую можно назвать **средним отклонением от среднего:** сначала находят среднее значение $\bar{x}$, затем вычисляют среднее арифметическое всех отклонений от этого среднего:

$$\frac{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})}{n}.$$

Результат может оказаться равным нулю, поскольку какая-то часть значений ряда лежит слева от среднего, а какая-то — справа.

Для того чтобы этого избежать, рассматривается **дисперсия числового ряда** $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$ — среднее арифметическое квадратов отклонений значений вариационного ряда от среднего.

21.1. В течение года Петя получил следующие отметки за контрольные по алгебре: две «четверки», две «шестерки», две «восьмерки» и две «девятки». Какой из следующих рядов его оценок является вариационным:

а) 4, 6, 8, 9; б) 4, 4, 8, 8, 6, 6, 9, 9;
в) 4, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 9; г) 9, 9, 8, 8, 6, 6, 4, 4?

Назовите выборочное среднее и медиану его оценок.

21.2. Дан ряд из шести чисел: 18, 25, 24, 25, 36, 43. Определите, какая из средних характеристик находится следующим образом:

а) $18 + 25 + 24 + 25 + 36 + 43 = 171$; $171 : 6 = 28{,}5$;
б) $(25 + 25) : 2 = 25$.

21.3. Найдите медиану следующего ряда данных:
а) 1; 7; 8; 4; 9; 5; 2;
б) $\frac{5}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}$.

21.4. Какую среднюю характеристику можно использовать в нечисловых рядах?

21.5. Какая средняя характеристика наиболее устойчива к случайным ошибкам при записи данных?

21.6. Найдите для числового ряда 1, 2, 3, 4, x возможные значения x, при которых:

а) выборочное среднее ряда равняется 3;

б) мода равняется 3;

в) медиана равняется 3, зная, что x принимает натуральные значения, не превышающие 10.

21.7. Данные о времени (в формате ч:мин) дорожно-транспортных происшествий на улицах Минска в течение одних суток приведены в виде ранжированного ряда: 0:15, 0:55, 1:20, ..., 21:30, 21:45, 22:10, 22:35. Какую среднюю характеристику следует использовать для результативного анализа:

а) выборочное среднее; б) моду;
в) медиану; г) размах?

21.8. Имеются данные о температуре воздуха в первой декаде апреля: 2 6 8 4 12 10 2 4 6 7. Найдите дисперсию этого числового ряда.

Тест 1. Рациональные уравнения

Условия	Варианты ответов
1. Найдите произведение корней уравнения $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$.	а) –9; б) –36; в) 0; г) –12; д) –6.
2. Решите уравнение $\left(x^2+5x+6\right)^2+\left(x^2+6x+9\right)^2=0$.	а) –3; б) –2; –3; в) –5; –6; г) 0; д) –9.
3. Найдите сумму корней уравнения $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$.	а) –3; б) –1; в) $\frac{4}{9}$; г) 0; д) –2.
4. Найдите сумму корней уравнения $\left(x^2-6x+8\right)^2-9x^2-6x=1$.	а) 7; б) 63; в) 12; г) 9; д) 27.
5. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.	а) 1,5; б) 2; в) –2; г) 0,5; д) 1.
6. Найдите произведение корней уравнения $x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)=24$.	а) –4; б) –24; в) 6; г) –6; д) 18.

Продолжение

7. Найдите сумму корней уравнения $x^2+5x+6=\frac{3}{x^2+x}$.	а) 3; б) –6; в) –3; г) –1; д) 0.
8. Найдите сумму корней уравнения $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.	а) 9; б) –18; в) 4; г) –1; д) 0.
9. Найдите значение выражения $n\cdot S$, где n — число корней уравнения $x^2-5x+\frac{35}{x}+\frac{49}{x^2}=14$, а S — их сумма.	а) 40; б) –14; в) –28; г) 10; д) 20.
10. Найдите число целых корней уравнения $\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2+14\cdot\frac{x^2-1}{x^2-25}-15\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^2=0$.	
11. Найдите сумму корней уравнения $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$.	
12. Найдите наибольший корень уравнения $\left(x^2+4x+3\right)^2+\left(x^2-2x-15\right)^2=36(x+3)^2$.	
13. Найдите удвоенную сумму корней уравнения $2\left(x^2-x+1\right)^2=x^2\left(8x^2-5x+5\right)$.	
14. Найдите сумму корней уравнения $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{45}{16}$.	
15. Найдите произведение корней уравнения $\frac{x^2+x-7}{x^2+5}=\frac{x-5}{2x^2+3}$.	

Тест 2. Уравнения с модулем

Условия	Варианты ответов
1. Выберите уравнение, не имеющее корней: 1) $\lvert x+1\rvert=0$; 2) $\lvert x-7\rvert-8=0$; 3) $\lvert x\rvert=4$; 4) $\lvert x-6\rvert+1=0$; 5) $\lvert x+1\rvert=\lvert -2\rvert$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $\lvert x\rvert=\lvert 2x-5\rvert$.	а) 5; б) $6\frac{2}{3}$; в) 2; г) –5; д) $1\frac{2}{3}$.
3. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\lvert\lvert 3x+1\rvert+x+1\rvert=2$.	а) –1; б) –0,5; в) 0,25; г) 0; д) 0,5.
4. Найдите произведение корней (корень, если он единственный) уравнения $x^2+2x=8\frac{\lvert x+4\rvert}{4+x}$.	а) –8; б) 2; в) –64; г) 8; д) 4.
5. Решите уравнение $\lvert x^2+11x+28\rvert=\lvert x^2-14\rvert$.	а) $-3\frac{9}{11}$; б) –3,5; –2; в) $-3\frac{9}{11}$; –3,5; –2; г) 0; д) $-3\frac{9}{11}$; 2; 3,5.
6. Найдите число корней уравнения $\lvert x^2-2x-3\rvert=x-3$ на отрезке [–3; 5].	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

Продолжение

7. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $x^2 - 4\lvert x+1\rvert + 5x + 4 = 0$.	а) –1,5; б) –4,5; в) –0,5; г) –2,5; д) –3.
8. Решите уравнение $\lvert x^2 + x - 2\rvert + x^2 + x - 2 = 0$.	а) –2; 1; б) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) [–2; 1]; д) [–1; 2].
9. Найдите произведение корней уравнения $\dfrac{x^2 + 5\lvert x\rvert + 6}{x^2 - 9} = 2$.	а) –16; б) –4; в) –64; г) –9; д) –100.
10. Найдите значение выражения $6 \cdot S$, где S — сумма корней уравнения $\lvert x+3\rvert + \lvert 2x-1\rvert = 8$.	
11. Найдите число корней уравнения $\dfrac{1}{\lvert x^2 - 5x + 6\rvert} = \dfrac{\lvert x - 1{,}5\rvert}{x^2 - 5x + 6}$.	
12. Найдите значение выражения $5 \cdot S$, где S — сумма корней уравнения $4\lvert 5x+8\rvert - 25x^2 = 80x + 64$.	
13. Найдите сумму всех целых значений аргумента, при которых функция $y = \dfrac{5-x}{\lvert x+3\rvert + \lvert x-5\rvert - 8}$ не определена.	
14. Найдите сумму натуральных корней уравнения $\lvert 5x - x^2 - 8\rvert + \lvert x - 9\rvert = x^2 - 6x + 17$.	
15. Найдите сумму целых корней уравнения $\dfrac{\lvert x^2 - 6x + 8\rvert + \lvert x^2 - 6x + 5\rvert - 3}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$.	

Тест 3. Неравенства с модулем

Условия	Варианты ответов
1. Выберите неравенство, равносильное неравенству $\lvert x\rvert \geqslant -1$: 1) $\lvert x\rvert - 1 \leqslant 0$; 2) $\lvert x\rvert \leqslant 0$; 3) $\lvert x\rvert > 0$; 4) $\lvert x\rvert \geqslant 0$; 5) $\lvert x\rvert - 1 \geqslant 0$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Решите неравенство $\lvert 3 - x\rvert \leqslant 3$.	а) $(-\infty; 6]$; б) $[6; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[0; 6]$; д) $[3; +\infty)$.
3. Решите неравенство $\sqrt[5]{y^5} \geqslant \sqrt[4]{y^4}$.	а) $(-\infty; 0]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$; д) 0.
4. Решите неравенство $\lvert 3x - 2\rvert x < 1$.	а) $(-\infty; 1)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; в) $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$; г) $(1; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$.
5. Найдите произведение целых решений неравенства $\lvert x^2 - 2x - 7\rvert \leqslant 4$.	а) 12; б) –12; в) 6; г) 24; д) 32.

Продолжение

6. Найдите сумму целых решений неравенства $\lvert 9 - x^2 \rvert + 8x < 0$.	а) -45; б) -35; в) -44; г) -36; д) -32.
7. Найдите сумму наибольшего целого отрицательного и наибольшего целого положительного решений неравенства $\lvert x^2 + 3x - 9 \rvert - \lvert x^2 - 3x - 9 \rvert < 0$.	а) -6; б) -9; в) -4; г) -1; д) -2.
8. Решите неравенство $\lvert x - 2x^2 \rvert > 2x^2 - x$.	а) $(-0{,}5;\ 0)$; б) $(0;\ 0{,}5)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (0;\ +\infty)$; д) $\varnothing$.
9. Решите неравенство $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt{5} - 4 \geqslant \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.	а) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right]$; в) $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right] \cup [1;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; д) $[1;\ +\infty)$.
10. Найдите значение выражения $9 \cdot x_0$, где x_0 — наибольшее решение неравенства $\lvert 3x - 1 \rvert \geqslant (3x - 1)^2$.	
11. Найдите количество целых решений неравенства $\frac{\lvert x - 1 \rvert}{3 - x} \geqslant \frac{\lvert x - 1 \rvert}{3 - 2x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.	
12. Найдите произведение целых решений неравенства $\frac{2x^2 - 3\lvert x \rvert + 3}{x^2 + 1} \leqslant 1$.	

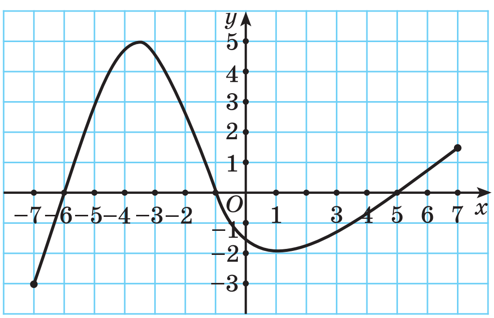
Продолжение

13. Найдите наименьшее целое решение неравенства $(\lvert x\rvert - 1)(2x^2 + x - 1) \leqslant 0$.
14. Найдите сумму целых решений неравенства $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{\lvert x^2 - 4\rvert} \leqslant 0$.
15. Найдите количество целых решений неравенства $\lvert 3x + 1\rvert + 2 + \dfrac{3}{\lvert 3x + 1\rvert - 2} \leqslant \dfrac{1}{\lvert 3x + 1\rvert + 2}$.

Тест 4. Функции и их свойства

Условия	Варианты ответов
1. Выберите функцию, график которой получен из графика функции $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ сдвигом его на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вверх вдоль оси ординат.	а) $y = \dfrac{k}{x + 2} + 3$; б) $y = \dfrac{k}{x - 2} + 3$; в) $y = \dfrac{k}{x + 3} - 2$; г) $y = \dfrac{k}{x + 2} - 3$; д) $y = \dfrac{k}{x - 3} + 2$.
2. Даны функции $y = x$, $y = \sqrt{x^2}$ и $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$. Укажите номер верного утверждения: 1) графики всех функций совпадают; 2) графики первой и второй функций совпадают; 3) графики первой и третьей функций совпадают; 4) графики второй и третьей функций совпадают; 5) графики всех функций различны.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

3. Прямая проходит через точки (2; 0) и (1; 2). Выберите точку, через которую также проходит данная прямая: 1) (–1; 2); 2) (0; –4); 3) (–19; 42); 4) (50; –98); 5) (–25; 52).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. На рисунке 41 изображен график функции $y = f(x)$. Укажите неверное утверждение: 1) $D = [-7; 7]$; 2) $E = [-3; 5]$; 3) $y > 0$ при $x \in (-6; -1) \cup (5; 7]$; 4) функция убывает на промежутке (–1; 5); 5) нулями функции являются числа –6; –1; 5.  Рис. 41	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
5. Выберите промежуток (объединение промежутков), который не может являться областью определения нечетной функции: 1) (–10; 10); 2) $[-5; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 5]$; 3) [–1; 3]; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 5) $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
6. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$.	а) (1; 5); б) (–3; –2); в) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; г) (–5; –1); д) (2; 3).

Продолжение

7. Выберите все нечетные функции: 1) $y = -7x^3$; 2) $y = \frac{x}{\|x\|}$; 3) $y = -\sqrt{2x}$; 4) $y = \|x-5\| + \|x+5\|$; 5) $y = -6\|x\| - 8$.	а) 1); 2); б) 4); 5); в) 1); 2); 3); г) 1); 3); 4); д) 1); 2); 5).
8. Найдите расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$.	а) 3; б) 5; в) 4; г) 7; д) 1.
9. Найдите множество значений функции $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$.	а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$; в) $(-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$.

10. Найдите расстояние между нулями функций $y = \sqrt{x-1} - 5$ и $y = x^3 + 8$.

11. Найдите количество целых значений аргумента, при которых значения функции $y = |2x - 8| - |x + 6|$ отрицательны.

12. На рисунке 42 изображен график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Точки $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ принадлежат данному графику. Найдите значение выражения $x_1 \cdot x_2 + y_3$.

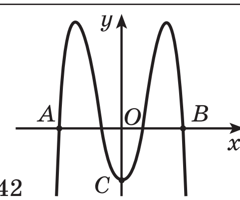


Рис. 42

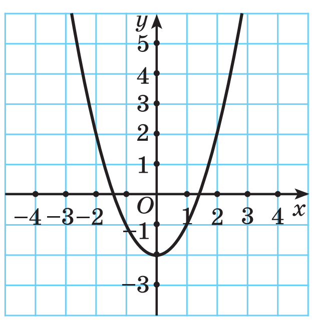
13. Найдите, сколько целых чисел из промежутка [–11; 45] принадлежит области определения функции $y = \sqrt{x^2 - x + 5} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

14. Найдите наибольшее целое отрицательное значение переменной, при котором график функции $y = \frac{9}{x}$ расположен выше биссектрисы I и III координатных углов.

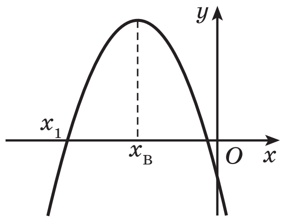
Продолжение

15. Пусть функция $y = f(x)$ является четной и определена на множестве действительных чисел, а уравнение $f(x) = -3$ имеет ровно семь различных корней. Найдите $f(0)$.

Тест 5. Квадратичная функция

Условия	Варианты ответов
1. Выберите параболу, осью симметрии которой является прямая $x = -6$: 1) $y = 3(x-6)^2 - 8$; 2) $y = x^2 - 6x + 2$; 3) $y = x^2 + 12x - 1$; 4) $y = -2(x-4)^2 - 6$; 5) $y = 2x^2 - 24x + 7$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберите функцию, график которой изображен на рисунке 43: 1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = (x-2)^2$; 4) $y = (x+2)^2$; 5) $y = x^2 - 2x$.  Рис. 43	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Продолжение

3. На рисунке 44 изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.  Рис. 44 Выберите неверное утверждение: 1) $f(x_1) = 0$; 2) $f(3) < f(0)$; 3) $f(10) < 0$; 4) $f(0) = 0$; 5) $f(x_в) \geqslant f(x_0)$, где $x_0 \in \boldsymbol{R}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Для параболы $y = -(x+4)^2 - 5$ выберите неверное утверждение: 1) точка с координатами (–4; –5) является вершиной параболы; 2) парабола пересекает ось ординат в точке (0; –5); 3) множеством значений функции является промежуток $(-\infty; -5]$; 4) функция возрастает на промежутке $(-\infty; -4]$; 5) осью симметрии параболы является прямая $x = -4$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
5. Найдите, при каких значениях аргумента функция $y = (3 - x)(7x + 2)$ принимает отрицательные значения.	а) $(-\infty; -3) \cup \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$; б) $\left(-\frac{2}{7}; 3\right)$; в) $(-\infty; -3{,}5) \cup (3; +\infty)$; г) $\left(-3; \frac{2}{7}\right)$; д) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup (3; +\infty)$.

Продолжение

<table>
<tr><td>

6. На рисунке 45 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$.

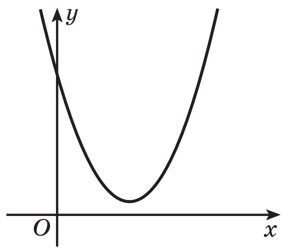


Рис. 45

Определите знаки коэффициентов a, b и c.
</td><td>

а) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$;
б) $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$;
в) $a > 0$; $b < 0$; $c = 0$;
г) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$;
д) $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$.
</td></tr>
<tr><td>

7. Найдите, при каком значении a функция $y = x^2 - (a + 6)x + 7$ является четной.
</td><td>

а) 0;
б) 6;
в) –7;
г) –6;
д) 7.
</td></tr>
<tr><td>

8. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -x^2 + x - 1$ расположен не выше оси абсцисс.
</td><td>

а) $(1; +\infty)$;
б) $[0; 1]$;
в) $(-\infty; +\infty)$;
г) $(-\infty; -1)$;
д) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.
</td></tr>
<tr><td>

9. Областью определения функции $y = x^2 - 2x + 3$ является отрезок $[-1; 2]$. Найдите множество значений этой функции.
</td><td>

а) [3; 6];
б) [2; 6];
в) [2; 3];
г) [1; 3];
д) [–1; 2].
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

10. Квадратичная функция задана формулой $y = ax^2 - (a + 2)x + 2$. Найдите наибольшее целое число, принадлежащее множеству значений данной функции, если ее осью симметрии является прямая $x = -0{,}5$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

11. Найдите значение выражения $k + b$, где $y = kx + b$ — уравнение прямой, проходящей через точки пересечения графиков функций $y = x^2 + 2x$ и $y = 6x - x^2$.
</td></tr>
</table>

Продолжение

12. График функции $y = f(x)$ получен из графика функции $g(x) = 3x^2$ сдвигом его на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $x = 5$.
13. Известно, что нулями функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ являются числа $-2 + 2\sqrt{3}$ и $24 - 2\sqrt{3}$. Найдите абсциссу вершины параболы.
14. Найдите сумму двух чисел, разность которых равна 40, а произведение — наименьшее из возможных.
15. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = (x-1)(x-7)(x-4)(x+2) + 100$.

Тест 6. Упрощение тригонометрических выражений

Условия	Варианты ответов
1. Выберите возможное равенство: 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{\pi}{3}$; 3) $\cos\alpha = \sqrt[12]{1{,}08}$; 4) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin 12^\circ}$; 5) $\cos\alpha = -7^0$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберите выражение, значение которого отрицательно: 1) $\sin\frac{18\pi}{19}$; 2) $\cos(-49^\circ)$; 3) $\mathrm{tg}3$; 4) $\cos(-297^\circ)$; 5) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Вычислите: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.	а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) -1; д) 2.

Продолжение

4. Вычислите: $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sin^2 \frac{29\pi}{4}} - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{4}$.	а) $-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$; д) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.
5. Упростите выражение $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$.	а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) 1; г) $\cos\alpha$; д) $\operatorname{tg}\alpha$.
6. Вычислите: $\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^4 \frac{13\pi}{12}$.	а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. Найдите значение выражения $4\sin 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ$.	а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 2; д) 4.

Продолжение

8. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.	а) $\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) 2; д) 4.
9. Найдите значение выражения $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 200^\circ}}$.	а) $-\cos 50^\circ$; б) $\sin 50^\circ$; в) $\cos 50^\circ$; г) $-\sin 50^\circ$; д) $\mathrm{tg}\, 50^\circ$.
10. Найдите произведение наибольшего и наименьшего значений выражения $3\sin 7\alpha + 3\cos 7\alpha$.	
11. Найдите значение выражения $9\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$, если $\cos(\pi - 4\alpha) = -\dfrac{1}{3}$.	
12. Вычислите $\dfrac{\cos 0{,}5t \cdot \sin^3 0{,}5t}{\sin t - 2\sin 2t + \sin 3t}$, если $\cos t = \dfrac{1}{16}$.	
13. Упростите выражение $\left(\dfrac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}\right)^4$ и найдите его значение при $\alpha = \dfrac{\pi}{18}$.	
14. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}\, 9^\circ - \mathrm{tg}\, 63^\circ + \mathrm{tg}\, 81^\circ - \mathrm{tg}\, 27^\circ$.	
15. Известно, что $\sqrt{13} - 13\sin\dfrac{2\alpha}{3} + 12\sqrt{13}\cos^2\dfrac{\alpha}{3} = 0$. Найдите значение выражения $\left(2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{3}\right)^2$.	

Тест 7. Тригонометрические уравнения

Условия	Варианты ответов
1. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(2x - \frac{\pi}{18}\right) = 0$.	а) $40°$; б) $90°$; в) $100°$; г) $10°$; д) $50°$.
2. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $4\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$.	а) $-120°$; б) $-150°$; в) $-135°$; г) $-60°$; д) $-90°$.
3. Найдите количество корней уравнения $2\operatorname{tg} x + 1 = -3\operatorname{ctg}(-x)$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = 0$.	а) $\frac{\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$.
5. Найдите количество корней уравнения $3\sin^2(5\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x)\cdot\cos(x - 7\pi) = 2$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.	а) 9; б) 5; в) 7; г) 6; д) 8.
6. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)^2 - 4\cos^2 x\sin^2 x = -0{,}5\sqrt{2}$.	а) $45°$; б) $78{,}75°$; в) $33{,}75°$; г) $56{,}25°$; д) $11{,}25°$.

Продолжение

7. Найдите (в градусах) сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корней уравнения $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.	а) $-15°$; б) $30°$; в) $15°$; г) $45°$; д) $35°$.
8. Найдите количество корней уравнения $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
9. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 3\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x + 4 = 0$.	а) $150°$; б) $120°$; в) $60°$; г) $45°$; д) $135°$.
10. Найдите (в градусах) сумму корней (корень, если он единственный) уравнения $8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$, принадлежащих интервалу $[-215°; -180°]$.	
11. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 2\sqrt{2}$.	
12. Найдите (в градусах) сумму корней уравнения $(3\cos x + \cos 2x + 2)\sqrt{\mathrm{ctg}x} = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.	
13. Найдите количество корней уравнения $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.	
14. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{ctg}x = -\sqrt{3}$.	
15. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.	

Ответы к тематическим тестам

Тест 1

1. б). **2.** а). **3.** д). **4.** г). **5.** г). **6.** а). **7.** в). **8.** в). **9.** д). **10.** 2. **11.** –9. **12.** 5. **13.** –1. **14.** 0. **15.** 2.

Тест 2

1. г). **2.** б). **3.** б). **4.** б). **5.** в). **6.** а). **7.** д). **8.** г). **9.** в). **10.** –8. **11.** 1. **12.** –24. **13.** 9. **14.** 45. **15.** 7.

Тест 3

1. г). **2.** г). **3.** г). **4.** а). **5.** г). **6.** б). **7.** д). **8.** б). **9.** а). **10.** 6. **11.** 4. **12.** 4. **13.** –1. **14.** –22. **15.** 1.

Тест 4

1. б). **2.** д). **3.** в). **4.** г). **5.** в). **6.** г). **7.** а). **8.** б). **9.** г). **10.** 28. **11.** 13. **12.** –2. **13.** 54. **14.** –4. **15.** –3.

Тест 5

1. в). **2.** а). **3.** г). **4.** б). **5.** д). **6.** г). **7.** г). **8.** в). **9.** б). **10.** 2. **11.** 4. **12.** 241. **13.** 11. **14.** 0. **15.** 19.

Тест 6

1. д). **2.** в). **3.** г). **4.** д). **5.** а). **6.** д). **7.** а). **8.** д). **9.** в). **10.** –18. **11.** 4. **12.** –1. **13.** 9. **14.** 4. **15.** 52.

Тест 7

1. д). **2.** г). **3.** в). **4.** д). **5.** г). **6.** в). **7.** а). **8.** г). **9.** д). **10.** –210. **11.** –195. **12.** 600°. **13.** 8. **14.** 90°. **15.** –315°.

Рекомендации по выполнению тематических тестов

Тест 1

1. Пусть $\frac{x+3}{x-3}=t$, тогда уравнение $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$ принимает вид $t+\frac{1}{t}=3\frac{1}{3}$, т. е. $t+\frac{1}{t}=3+\frac{1}{3}$, значит, $\left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \frac{x+3}{x-3}=3, \\ \frac{x+3}{x-3}=\frac{1}{3}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+3=3(x-3), \\ 3(x+3)=x-3, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+3=3x-9, \\ 3x+9=x-3, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x\neq 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Произведение корней уравнения равно –36.

2. Так как $(x^2+5x+6)^2\geqslant 0$ при $x\in \boldsymbol{R}$ и $(x^2+6x+9)^2\geqslant 0$ при $x\in \boldsymbol{R}$, то равенство $(x^2+5x+6)^2+(x^2+6x+9)^2=0$ возможно, только если оба слагаемых одновременно равны нулю, т. е. $\left\{\begin{array}{l} x^2+5x+6=0, \\ x^2+6x+9=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x=-3; \end{array}\right.$ $x=-3.$

3. Пусть $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=t$, тогда уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$ принимает вид $t+\frac{1}{t}=\frac{17}{4}$; $t+\frac{1}{t}=4\frac{1}{4}$; $t+\frac{1}{t}=4+\frac{1}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2=4, \\ \left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{1}{4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+1}=2, \\ \frac{x}{x+1}=-2, \\ \frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}, \\ \frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2(x+1), \\ x=-2(x+1), \\ 2x=x+1, \\ -2x=x+1, \end{array}\right. \\ x\neq -1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-\frac{2}{3}, \\ x=1, \\ x=-\frac{1}{3}, \end{array}\right. \\ x\neq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-\frac{2}{3}, \\ x=1, \\ x=-\frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Сумма корней уравнения равна –2.

4. Запишем уравнение $(x^2-6x+8)^2-9x^2-6x=1$ в виде

$(x^2-6x+8)^2-9x^2-6x-1=0$; $(x^2-6x+8)^2-(9x^2+6x+1)=0$;

$(x^2-6x+8)^2-(3x+1)^2=0.$

По формуле разности квадратов получим

$$\left(\left(x^2-6x+8\right)-(3x+1)\right)\left(\left(x^2-6x+8\right)+(3x+1)\right)=0;$$

$$\left(x^2-6x+8-3x-1\right)\left(x^2-6x+8+3x+1\right)=0;\ \left(x^2-9x+7\right)\left(x^2-3x+9\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9x+7=0, \\ x^2-3x+9=0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней $(D<0)$. Воспользуемся теоремой Виета и получим, что сумма корней первого уравнения совокупности равна 9.

5. Пусть $x^2-x=t$, тогда уравнение $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$ принимает вид $\frac{t}{t+1}-\frac{t+2}{t-2}=1;$ $\frac{t(t-2)-(t+2)(t+1)-(t+1)(t-2)}{(t+1)(t-2)}=0;$

$$\frac{t^2-2t-\left(t^2+3t+2\right)-\left(t^2-t-2\right)}{(t+1)(t-2)}=0;\ \frac{t^2-2t-t^2-3t-2-t^2+t+2}{(t+1)(t-2)}=0;\ \frac{-t^2-4t}{(t+1)(t-2)}=0;$$

$$\begin{cases} t(t+4)=0, \\ t\neq-1;\ 2; \end{cases} \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-4. \end{array}\right. \text{Тогда} \left[\begin{array}{l} x^2-x=0, \\ x^2-x=-4; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x(x-1)=0, \\ x^2-x+4=0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет корней $(D<0)$. Корнями первого уравнения являются числа 0 и 1. Их среднее арифметическое равно 0,5.

6. Запишем уравнение $x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)=24$ в виде

$$x^2\left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)=24;\ \left(x^4-3x^2\right)\left(x^4-3x^2+2\right)=24.$$

Пусть $x^4-3x^2=t$, тогда $t(t+2)=24;$ $t^2+2t-24=0;$ $\left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=4. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x^4-3x^2=-6, \\ x^4-3x^2=4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^4-3x^2+6=0, \\ x^4-3x^2-4=0. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней $(D<0)$. Решим второе уравнение: $x^4-3x^2-4=0;$ $\left[\begin{array}{l} x^2=4, \\ x^2=-1; \end{array}\right.$ $x^2=4;$ $x=2$ или $x=-2$.

Произведение корней уравнения равно –4.

7. Запишем уравнение $x^2+5x+6=\frac{3}{x^2+x}$ в виде $(x+2)(x+3)=\frac{3}{x(x+1)}$.

Тогда при $x\neq-1;\ 0$ получим $x(x+1)(x+2)(x+3)=3;$

$$x(x+3)(x+1)(x+2)=3;\ \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=3.$$

Пусть $x^2+3x=t$, тогда $t(t+2)=3$; $t^2+2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=1. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x^2+3x=-3, \\ x^2+3x=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+3x+3=0, \\ x^2+3x-1=0. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней ($D<0$). Сумма корней второго уравнения равна -3.

8. Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то запишем уравнение $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ в виде $\frac{4x}{x\left(4x-8+\frac{7}{x}\right)}+\frac{3x}{x\left(4x-10+\frac{7}{x}\right)}=1$;

$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$

Пусть $4x-8+\frac{7}{x}=t$, тогда $\frac{4}{t}+\frac{3}{t-2}=1$; $\frac{4(t-2)+3t-t(t-2)}{t(t-2)}=0$;

$\frac{4t-8+3t-t^2+2t}{t(t-2)}=0$; $\frac{-t^2+9t-8}{t(t-2)}=0$; $\left\{\begin{array}{l} t^2-9t+8=0, \\ t\neq 0, \\ t\neq 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=8, \end{array}\right. \\ t\neq 0, \\ t\neq 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=8. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 4x-8+\frac{7}{x}=1, \\ 4x-8+\frac{7}{x}=8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4x-9+\frac{7}{x}=0, \\ 4x-16+\frac{7}{x}=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{4x^2-9x+7}{x}=0, \\ \frac{4x^2-16x+7}{x}=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4x^2-9x+7=0, \\ 4x^2-16x+7=0, \end{array}\right. \\ x\neq 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней ($D<0$). Сумма корней второго уравнения равна $\frac{16}{4}=4$.

9. Запишем уравнение $x^2-5x+\frac{35}{x}+\frac{49}{x^2}=14$ в виде $\left(x^2+\frac{49}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{7}{x}\right)=14.$

Пусть $x-\frac{7}{x}=t$, тогда $\left(x-\frac{7}{x}\right)^2=t^2$; $x^2-2\cdot x\cdot\frac{7}{x}+\frac{49}{x^2}=t^2$;

$x^2-14+\frac{49}{x^2}=t^2$; $x^2+\frac{49}{x^2}=t^2+14.$

Таким образом, уравнение $\left(x^2+\frac{49}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{7}{x}\right)=14$ принимает вид

$(t^2+14)-5t=14$; $t^2-5t=0$; $\left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=5. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} x-\frac{7}{x}=0, \\ x-\frac{7}{x}=5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-7=0, \\ x^2-5x-7=0, \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности имеет два корня, сумма которых равна нулю. Второе уравнение совокупности также имеет два корня. Сумма корней второго уравнения равна 5.

Найдем значение искомого выражения $n \cdot S = 4 \cdot 5 = 20$.

10. Запишем уравнение $\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2 + 14 \cdot \frac{x^2-1}{x^2-25} - 15\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^2 = 0$ в виде $\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2 + 14 \cdot \frac{x-1}{x+5} \cdot \frac{x+1}{x-5} - 15\left(\frac{x+1}{x-5}\right)^2 = 0$ и выполним замену: $a = \frac{x-1}{x+5}$, $b = \frac{x+1}{x-5}$, тогда $a^2 + 14ab - 15b^2 = 0$. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно a и получим $\left[\begin{array}{l} a=-15b, \\ a=b. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+5} = -15 \cdot \frac{x+1}{x-5}, \\ \frac{x-1}{x+5} = \frac{x+1}{x-5}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-5) = -15(x+1)(x+5), \\ (x-1)(x-5) = (x+1)(x+5), \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4x^2+21x+20=0, \\ x=0, \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-1\frac{1}{4}, \\ x=0, \end{array}\right. \\ x \neq -5, \\ x \neq 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-1\frac{1}{4}, \\ x=0. \end{array}\right.$

Уравнение имеет два целых корня.

11. Запишем уравнение $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$ в виде $(x^2+x-20)(x^2+8x-20) = 18x^2$. Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, то разделим обе части уравнения на x^2 и получим:

$\frac{(x^2+x-20)(x^2+8x-20)}{x^2} = 18$; $\left(\frac{x^2+x-20}{x}\right)\left(\frac{x^2+8x-20}{x}\right) = 18$;

$\left(x+1-\frac{20}{x}\right)\left(x+8-\frac{20}{x}\right) = 18.$

Пусть $x-\frac{20}{x}=t$, тогда $(t+1)(t+8)=18$; $t^2+9t-10=0$; $\left[\begin{array}{l}t=-10,\\ t=1.\end{array}\right.$

Таким образом, $\left[\begin{array}{l}x-\frac{20}{x}=-10,\\ x-\frac{20}{x}=1;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+10x-20=0,\\ x^2-x-20=0,\end{array}\right.\\ x\neq 0.\end{array}\right.$

Оба уравнения совокупности имеют корни, причем сумма корней первого уравнения равна –10, а сумма корней второго уравнения равна 1. Тогда сумма корней исходного уравнения равна –9.

12. Разложим на множители квадратные трехчлены x^2+4x+3 и $x^2-2x-15$ и получим $(x+1)^2(x+3)^2+(x-5)^2(x+3)^2-36(x+3)^2=0$;

$(x+3)^2\left((x+1)^2+(x-5)^2-36\right)=0$; $\left[\begin{array}{l}(x+3)^2=0,\\ (x+1)^2+(x-5)^2-36=0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x^2-4x-5=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=5,\\ x=-1.\end{array}\right.$ Наибольший корень уравнения равен 5.

13. Запишем уравнение $2\left(x^2-x+1\right)^2=x^2\left(8x^2-5x+5\right)$ в виде $2\left(x^2-x+1\right)^2=x^2\left(3x^2+5x^2-5x+5\right)$; $2\left(x^2-x+1\right)^2=x^2\left(3x^2+5\left(x^2-x+1\right)\right)$ и выполним замену: $a=x^2-x+1$, $b=x^2$, тогда $2a^2=b(3b+5a)$; $2a^2-5ab-3b^2=0$. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно a и получим $\left[\begin{array}{l}a=3b,\\ a=-\frac{b}{2}.\end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=3x^2,\\ x^2-x+1=-\frac{x^2}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x^2+x-1=0,\\ 3x^2-2x+2=0.\end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней ($D<0$). Сумма корней первого уравнения равна $-\frac{1}{2}$. Удвоенная сумма корней уравнения равна –1.

14. В левой части уравнения $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{45}{16}$ выделим квадрат суммы: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}-2\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{45}{16}$;

$$\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16};\quad \left(\frac{x(x+1)+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16};$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{45}{16}.$$

Пусть $\frac{2x^2}{x^2-1}=t$, тогда $t^2-t-\frac{45}{16}=0.$ $D=1+4\cdot\frac{45}{16}=\frac{49}{4};$ $\left[\begin{array}{l} t=-\frac{5}{4}, \\ t=\frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \frac{2x^2}{x^2-1}=-\frac{5}{4}, \\ \frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{9}{4}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 13x^2=5, \\ x^2=9, \end{array}\right. \\ x\neq 1, \\ x\neq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{5}{13}}, \\ x=-\sqrt{\frac{5}{13}}, \\ x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Сумма корней уравнения равна 0.

15. Заметим, что суммы числителя и знаменателя обеих дробей одинаковы, прибавим к обеим частям исходного уравнения единицу и получим:

$$\frac{x^2+x-7}{x^2+5}+1=\frac{x-5}{2x^2+3}+1;\quad \frac{x^2+x-7+x^2+5}{x^2+5}=\frac{x-5+2x^2+3}{2x^2+3};$$

$$\frac{2x^2+x-2}{x^2+5}=\frac{2x^2+x-2}{2x^2+3};\quad \frac{2x^2+x-2}{x^2+5}-\frac{2x^2+x-2}{2x^2+3}=0;$$

$$\left(2x^2+x-2\right)\left(\frac{1}{x^2+5}-\frac{1}{2x^2+3}\right)=0;\quad \left(2x^2+x-2\right)\cdot\frac{2x^2+3-\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+5\right)\left(2x^2+3\right)}=0;$$

$$\left(2x^2+x-2\right)\cdot\frac{x^2-2}{\left(x^2+5\right)\left(2x^2+3\right)}=0.$$

Так как $x^2+5>0$ при $x\in\boldsymbol{R}$ и $2x^2+3>0$ при $x\in\boldsymbol{R}$, то

$$\left(2x^2+x-2\right)\left(x^2-2\right)=0;\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-2=0, \\ x^2-2=0. \end{array}\right.$$

Оба уравнения совокупности имеют корни. Произведение корней первого уравнения равно –1, а второго — (–2). Произведение корней исходного уравнения равно 2.

Тест 2

1. Из предложенных уравнений не имеет корней уравнение $|x-6|+1=0$, которое можно записать в виде $|x-6|=-1$, а модуль не может быть равен отрицательному числу.

2. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

Решим уравнение $|x| = |2x - 5|$; $\left[\begin{array}{l} x = 2x - 5, \\ x = -2x + 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Сумма корней уравнения равна $6\frac{2}{3}$.

3. $\big||3x + 1| + x + 1\big| = 2$; $\left[\begin{array}{l} |3x+1| + x + 1 = 2, \\ |3x+1| + x + 1 = -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |3x+1| = 1 - x, \\ |3x+1| = -x - 3; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x + 1 = 1 - x, \\ 3x + 1 = -1 + x, \end{array}\right. \\ 1 - x \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3x + 1 = -x - 3, \\ 3x + 1 = x + 3, \end{array}\right. \\ -x - 3 \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \leqslant -3; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Среднее арифметическое корней уравнения равно $-0{,}5$.

4. Для решения уравнения $x^2 + 2x = 8\frac{|x+4|}{4+x}$ воспользуемся определением модуля и получим:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x + 4 > 0, \\ x^2 + 2x = 8, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x + 4 < 0, \\ x^2 + 2x = -8; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > -4, \\ x^2 + 2x - 8 = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -4, \\ x^2 + 2x + 8 = 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 2, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -4, \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad x = 2.$$

5. $|x^2 + 11x + 28| = |x^2 - 14|$; $\left[\begin{array}{l} x^2 + 11x + 28 = x^2 - 14, \\ x^2 + 11x + 28 = -x^2 + 14; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 11x = -42, \\ 2x^2 + 11x + 14 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -3\frac{9}{11}, \\ x = -2, \\ x = -3{,}5. \end{array}\right.$$

6. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0. \end{array}\right.$

Решим уравнение $\left|x^2-2x-3\right|=x-3.$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=x-3,\\x^2-2x-3=-x+3,\end{array}\right.\\x-3\geqslant 0;\end{cases}\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-3x=0,\\x^2-x-6=0,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x(x-3)=0,\\x=3,\\x=-2,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3,\\x=-2,\end{array}\right.\\x\geqslant 3;\end{cases}\quad x=3.$$

Уравнение имеет единственный корень. Число 3 принадлежит отрезку $[-3;\ 5]$.

7. Для решения уравнения $x^2-4|x+1|+5x+4=0$ воспользуемся определением модуля и получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x^2-4(x+1)+5x+4=0,\end{cases}\\\begin{cases}x+1<0,\\x^2+4(x+1)+5x+4=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -1,\\x^2+x=0,\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\x^2+9x+8=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -1,\\\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=0,\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\\left[\begin{array}{l}x=-8,\\x=-1;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=0,\\x=-8.\end{array}\right.$$

Среднее арифметическое корней уравнения равно $\frac{-1+0-8}{3}=-3.$

8. Запишем уравнение $\left|x^2+x-2\right|+x^2+x-2=0$ в виде $\left|x^2+x-2\right|=-\left(x^2+x-2\right).$

Уравнение вида $\left|f(x)\right|=-f(x)$ равносильно неравенству $f(x)\leqslant 0.$

Решим неравенство $x^2+x-2\leqslant 0;\quad x\in[-2;\ 1].$

9. Так как $x^2=|x|^2$, то запишем уравнение $\frac{x^2+5|x|+6}{x^2-9}=2$ в виде $\frac{|x|^2+5|x|+6}{|x|^2-9}=2$ и выполним замену $|x|=t$.

Тогда $\frac{t^2+5t+6}{t^2-9}=2;\quad \frac{(t+2)(t+3)}{(t-3)(t+3)}=2;\quad \begin{cases}\frac{t+2}{t-3}=2,\\t\neq -3;\end{cases}\quad\begin{cases}t+2=2(t-3),\\t\neq -3,\\t\neq 3;\end{cases}$

$$\begin{cases}t=8,\\t\neq -3,\\t\neq 3;\end{cases}\quad t=8.$$

Откуда $|x|=8;$ $x=8$ или $x=-8$ и произведение корней данного уравнения равно -64.

10. Для решения данного уравнения воспользуемся методом промежутков. Раскроем модули на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$; $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant -3,\\ -(x+3)-(2x-1)=8,\end{cases}\\ \begin{cases}-3 < x < \frac{1}{2},\\ x+3-(2x-1)=8,\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant \frac{1}{2},\\ x+3+2x-1=8;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant -3,\\ x=-3\frac{1}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}-3 < x < \frac{1}{2},\\ x=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x \geqslant \frac{1}{2},\\ x=2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=-3\frac{1}{3},\\ x=2.\end{array}\right.$$

Тогда $6 \cdot S = 6 \cdot \left(-3\frac{1}{3}+2\right) = -8$.

11. Поскольку $\left|x^2-5x+6\right| > 0$, а $|x-1{,}5| \geqslant 0$ при допустимых значениях переменной, то уравнение $\frac{1}{\left|x^2-5x+6\right|} = \frac{|x-1{,}5|}{x^2-5x+6}$ имеет корни, если $x^2-5x+6>0$, т. е. $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

В этом случае получим $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{|x-1{,}5|}{x^2-5x+6}$, т. е. $|x-1{,}5| = 1$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. Значит, $\left[\begin{array}{l}x-1{,}5=1,\\ x-1{,}5=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2{,}5,\\ x=0{,}5.\end{array}\right.$

С учетом условия $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ получим, что исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0{,}5$.

12. Запишем уравнение $4|5x+8|-25x^2 = 80x+64$ в виде $4|5x+8| = 25x^2+80x+64$ и получим $4|5x+8| = (5x+8)^2$, или $4|5x+8| = |5x+8|^2$. Пусть $|5x+8| = t$, тогда $4t = t^2$; $t^2-4t=0$; $\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=4.\end{array}\right.$

Значит, $\left[\begin{array}{l}|5x+8|=0,\\ |5x+8|=4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5x+8=0,\\ 5x+8=4,\\ 5x+8=-4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-1{,}6,\\ x=-0{,}8,\\ x=-2{,}4.\end{array}\right.$

$5 \cdot S = 5 \cdot (-1{,}6-0{,}8-2{,}4) = -24$.

13. Функция $y = \dfrac{5 - x}{|x+3| + |x-5| - 8}$ не определена при $|x+3| + |x-5| - 8 = 0$; $|x+3| + |x-5| = 8$.

Решим полученное уравнение, используя геометрический смысл модуля. Рассмотрим точки $P(x)$, $A(-3)$ и $B(5)$, тогда $PA = |x+3|$, а $PB = |x-5|$. Решить данное уравнение — значит найти все точки координатной прямой, сумма расстояний от каждой из которых до точек с координатами –3 и 5 равна 8, т. е. $PA + PB = 8$.

Отметим на координатной прямой точки $A(-3)$ и $B(5)$ и заметим, что длина отрезка AB равна 8 (рис. 40).

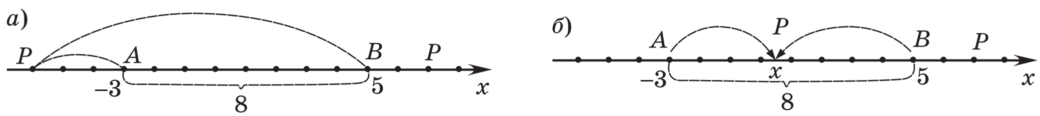


Рис. 40

1) Если точка $P(x)$ расположена левее точки $A(-3)$ (или правее точки $B(5)$), то сумма расстояний от точки $P(x)$ до точек $A(-3)$ и $B(5)$ больше 8, т. е. $PA + PB > 8$.

2) Если точка $P(x)$ принадлежит отрезку AB, то $PA + PB = 8$.

Таким образом, корнями данного уравнения являются все числа, принадлежащие отрезку AB, т. е. $x \in [-3; 5]$.

Сумма всех целых чисел, принадлежащих отрезку $[-3; 5]$, равна 9.

14. Так как $|a| = |-a|$, то запишем уравнение в виде

$|x^2 - 5x + 8| + |x - 9| = x^2 - 6x + 17.$

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 8$. $D = 25 - 40 < 0$, а первый коэффициент $a = 1 > 0$, значит, $x^2 - 5x + 8 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $|x^2 - 5x + 8| = x^2 - 5x + 8$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и уравнение принимает вид $x^2 - 5x + 8 + |x - 9| = x^2 - 6x + 17$; $|x - 9| = -x + 9$. Полученное уравнение равносильно неравенству $x - 9 \leqslant 0$; $x \leqslant 9$. Таким образом, решением исходного уравнения является промежуток $(-\infty; 9]$. Сумма натуральных корней уравнения равна 45.

15. Уравнение $\dfrac{|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| - 3}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = 3, \\ 25 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=3,$ используя геометрический смысл модуля, и получим $-8\leqslant x^2-6x\leqslant -5,$ тогда $\begin{cases}x^2-6x\leqslant -5,\\ x^2-6x\geqslant -8;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-6x+5\leqslant 0,\\ x^2-6x+8\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in[1;\ 5],\\ x\in(-\infty;\ 2]\cup[4;\ +\infty);\end{cases}\quad x\in[1;\ 2]\cup[4;\ 5].$$

С учетом условия $25-x^2>0;$ $x^2<25;$ $x\in(-5;\ 5)$ получим $x\in[1;\ 2]\cup[4;\ 5).$

Сумма целых корней уравнения равна $1+2+4=7.$

Тест 3

1. Множеством решений неравенства $|x|\geqslant -1$ является множество всех действительных чисел $(x\in \boldsymbol{R}).$

Из предложенных неравенств верным для любых значений переменной является неравенство $|x|\geqslant 0.$

2. $|3-x|\leqslant 3;$ $|x-3|\leqslant 3;$ $-3\leqslant x-3\leqslant 3;$ $0\leqslant x\leqslant 6;$ $x\in[0;\ 6].$

3. Неравенство $\sqrt[5]{y^5}\geqslant\sqrt[4]{y^4}$ равносильно неравенству $y\geqslant|y|,$ которое выполнятся для $y\in[0;\ +\infty).$

4. Для решения неравенства $|3x-2|x<1$ воспользуемся определением модуля и получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\ (3x-2)x<1,\end{cases}\\ \begin{cases}3x-2<0,\\ -(3x-2)x<1;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant \frac{2}{3},\\ 3x^2-2x-1<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{2}{3},\\ -3x^2+2x-1<0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant \frac{2}{3},\\ 3x^2-2x-1<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{2}{3},\\ 3x^2-2x+1>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant \frac{2}{3},\\ x\in\left(-\frac{1}{3};\ 1\right),\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{2}{3},\\ x\in \boldsymbol{R};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in\left[\frac{2}{3};\ 1\right),\\ x\in\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right);\end{array}\right.\quad x\in(-\infty;\ 1).$$

5. Неравенство $\left|x^2-2x-7\right|\leqslant 4$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-2x-7\leqslant 4,\\ x^2-2x-7\geqslant -4;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-2x-11\leqslant 0,\\ x^2-2x-3\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in\left[1-2\sqrt{3};\ 1+2\sqrt{3}\right],\\ x\in(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty);\end{cases}$$

$x \in \left[1-2\sqrt{3};\ -1\right] \cup \left[3;\ 1+2\sqrt{3}\right]$. Найдем произведение целых решений неравенства: $-2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

6. Запишем неравенство $\left|9-x^2\right| + 8x < 0$ в виде $\left|x^2-9\right| < -8x$. Полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-9<-8x, \\ x^2-9>8x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+8x-9<0, \\ x^2-8x-9>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-9;\ 1), \\ x \in (-\infty;\ -1) \cup (9;\ +\infty); \end{cases} \quad x \in (-9;\ -1).$$

Сумма целых решений неравенства равна –35.

7. Запишем исходное неравенство в виде $\left|x^2+3x-9\right| < \left|x^2-3x-9\right|$ и перейдем к равносильному неравенству $\left(x^2+3x-9\right)^2 < \left(x^2-3x-9\right)^2$;
$\left(x^2+3x-9\right)^2 - \left(x^2-3x-9\right)^2 < 0$;
$\left(\left(x^2+3x-9\right)-\left(x^2-3x-9\right)\right)\left(\left(x^2+3x-9\right)+\left(x^2-3x-9\right)\right) < 0$;
$\left(x^2+3x-9-x^2+3x+9\right)\left(x^2+3x-9+x^2-3x-9\right) < 0$; $6x\left(2x^2-18\right) < 0$;
$x(x-3)(x+3) < 0$; $x \in (-\infty;\ -3) \cup (0;\ 3)$.

Сумма наибольшего целого отрицательного и наибольшего целого положительного решений неравенства равна $-4+2=-2$.

8. Неравенство вида $\left|f(x)\right| > f(x)$ равносильно неравенству $f(x) < 0$. Таким образом, неравенство $\left|x-2x^2\right| > 2x^2-x$ запишем в виде $\left|2x^2-x\right| > 2x^2-x$ и перейдем к решению равносильного неравенства $2x^2-x<0$; $x(2x-1)<0$; $x \in (0;\ 0{,}5)$.

9. Преобразуем выражение $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2$.

Тогда неравенство примет вид $\sqrt{9x^2-6x+1} + \sqrt{5} - 4 \geqslant \sqrt{5} - 2$;

$\sqrt{9x^2-6x+1} \geqslant 2$; $\sqrt{(3x-1)^2} \geqslant 2$; $|3x-1| \geqslant 2$.

Неравенство вида $\left|f(x)\right| \geqslant g(x)$ равносильно совокупности неравенств

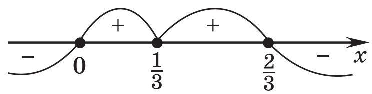
$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right. \text{ Тогда } \left[\begin{array}{l} 3x-1 \geqslant 2, \\ 3x-1 \leqslant -2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -\frac{1}{3}; \end{array}\right. \quad x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty).$$

10. Так как $a^2 = |a|^2$, то запишем неравенство $|3x-1| \geqslant (3x-1)^2$ в виде $|3x-1| \geqslant |3x-1|^2$; $|3x-1| - |3x-1|^2 \geqslant 0$; $|3x-1|\big(1-|3x-1|\big) \geqslant 0$.

Найдем нули выражения $|3x-1|\big(1-|3x-1|\big)$.

$$|3x-1|\big(1-|3x-1|\big) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} |3x-1| = 0, \\ |3x-1| = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x-1 = 0, \\ 3x-1 = 1, \\ 3x-1 = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = \frac{2}{3}, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Воспользуемся методом интервалов:



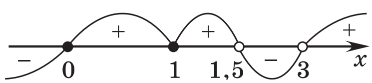
$x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Значение искомого выражения равно $9 \cdot \frac{2}{3} = 6$.

11. $\frac{|x-1|}{3-x} \geqslant \frac{|x-1|}{3-2x}$; $\quad \frac{|x-1|}{3-x} - \frac{|x-1|}{3-2x} \geqslant 0$; $\quad |x-1| \cdot \left(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3-2x}\right) \geqslant 0$;

$|x-1| \cdot \frac{3-2x-3+x}{(3-x)(3-2x)} \geqslant 0$; $\quad |x-1| \cdot \frac{-x}{(3-x)(3-2x)} \geqslant 0$; $\quad |x-1| \cdot \frac{x}{(x-3)(2x-3)} \leqslant 0$.

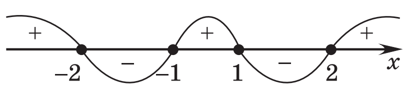
Воспользуемся методом интервалов:



$x \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (1{,}5; 3)$.

На отрезке [–1; 3] неравенство имеет четыре целых решения.

12. Так как $x^2 + 1 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то неравенство $\frac{2x^2 - 3|x| + 3}{x^2 + 1} \leqslant 1$ равносильно неравенству $2x^2 - 3|x| + 3 \leqslant x^2 + 1$; $x^2 - 3|x| + 2 \leqslant 0$; $|x|^2 - 3|x| + 2 \leqslant 0$; $\big(|x|-1\big)\big(|x|-2\big) \leqslant 0$. Воспользуемся методом интервалов:

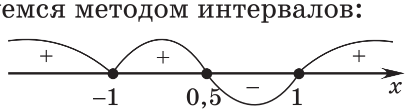


$x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$.

Произведение целых решений неравенства равно 4.

13. $\big(|x|-1\big)\big(2x^2 + x - 1\big) \leqslant 0$; $\big(|x|-1\big)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$.

Воспользуемся методом интервалов:



$x \in \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Наименьшее целое решение неравенства равно –1.

14. Неравенство $\frac{x^2+4x-21}{|x^2-4|} \leqslant 0$ равносильно системе $\begin{cases} x^2+4x-21 \leqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$

$x \in [-7;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ 3]$.

Сумма целых решений неравенства равна –22.

15. $|3x+1| + 2 + \frac{3}{|3x+1|-2} \leqslant \frac{1}{|3x+1|+2}$.

Пусть $|3x+1| = t$, $t \geqslant 0$, тогда неравенство принимает вид

$t+2+\frac{3}{t-2} \leqslant \frac{1}{t+2}$; $\quad t+2+\frac{3}{t-2}-\frac{1}{t+2} \leqslant 0$; $\quad t+2+\frac{3(t+2)-(t-2)}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$;

$\frac{(t-2)(t+2)^2+3t+6-t+2}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$; $\quad \frac{t^3+4t^2+4t-2t^2-8t-8+3t+6-t+2}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$;

$\frac{t^3+2t^2-2t}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$; $\quad \frac{t\left(t-\left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\left(t-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)}{(t-2)(t+2)} \leqslant 0$. Так как $t \geqslant 0$, то полученное неравенство равносильно неравенству $\frac{t\left(t-\left(-1+\sqrt{3}\right)\right)}{t-2} \leqslant 0$, т. е. $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant t < 2. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} |3x+1| = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant |3x+1| < 2; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} 3x+1 = 0, \\ \sqrt{3}-1 \leqslant 3x+1 < 2, \\ -2 < 3x+1 \leqslant 1-\sqrt{3}; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}, \\ \sqrt{3}-2 \leqslant 3x < 1, \\ -3 < 3x \leqslant -\sqrt{3}; \end{array}\right.$

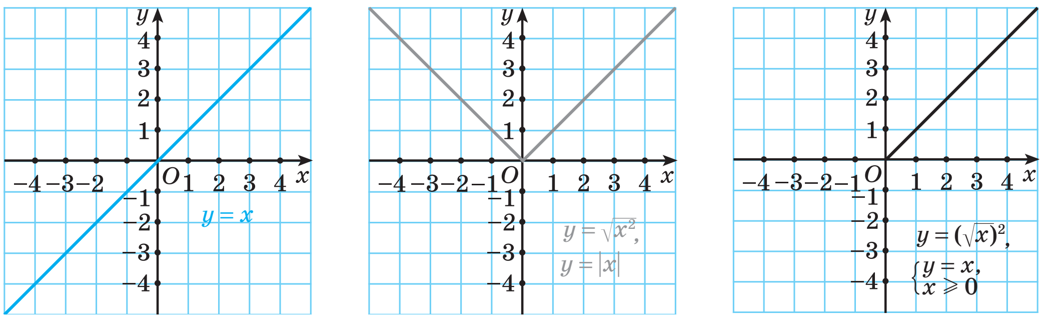
$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3}, \\ \frac{\sqrt{3}-2}{3} \leqslant x < \frac{1}{3}, \\ -1 < x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}; \end{array}\right.$ $\quad x \in \left(-1;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3};\ \frac{1}{3}\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Неравенство имеет одно целое решение.

Тест 4

1. График функции $y = \frac{k}{x-2}+3$ получен из графика функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ сдвигом его на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вверх вдоль оси ординат.

2. Построим графики функций, $y = x$, $y = \sqrt{x^2}$ и $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.



Графики всех функций различны.

3. Составим уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки $(2;\ 0)$ и $(1;\ 2)$. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ 2 = k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} k = -2, \\ 2 = k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} k = -2, \\ b = 4. \end{cases}$ Искомая прямая имеет вид $y = -2x + 4$.

Прямая $y = -2x + 4$ проходит через точку с координатами $(-19;\ 42)$, так как $42 = -2 \cdot (-19) + 4$ — верное числовое равенство.

4. Неверным является утверждение 4), поскольку на промежутке $(-1;\ 5)$ функция и возрастает, и убывает.

5. Если функция обладает свойством четности или нечетности, то ее область определения должна быть симметрична относительно нуля. Из предложенных вариантов ответов несимметричным относительно начала координат является отрезок $[-1;\ 3]$. Таким образом, областью определения нечетной функции не может являться промежуток 3).

6. Область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$ совпадает с множеством решений неравенства

$-x^2 - 6x - 5 > 0;\ x^2 + 6x + 5 < 0;\ (x + 5)(x + 1) < 0;\ x \in (-5;\ -1)$.

7. 1) $y = -7x^3;\ y(-x) = -7(-x)^3 = 7x^3 = -y(x)$ — функция нечетная;

2) $y = \dfrac{|x|}{x};\ y(-x) = \dfrac{|-x|}{-x} = -\dfrac{|x|}{x} = -y(x)$ — функция нечетная;

3) $y = -\sqrt{2x};\ D(y) = [0;\ +\infty)$ — область определения функции не симметрична относительно начала координат, значит, функция не является ни четной, ни нечетной;

4) $y = |x - 5| + |x + 5|;\ y(-x) = |-x - 5| + |-x + 5| = |x + 5| + |x - 5| = y(x)$ — функция четная;

5) $y = -6|x| - 8$; $y(-x) = -6|-x| - 8 = -6|x| - 8 = y(x)$ — функция четная.

Таким образом, нечетными являются функции 1) и 2).

8. Центром окружности $x^2 + y^2 = 1$ является точка $A(0; 0)$, а центром окружности $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$ — точка $B(3; -4)$.

По формуле расстояния между двумя точками

$\left(AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)$ найдем $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (0+4)^2} = 5$.

9. $y = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$; $y = \dfrac{(x+6)(x-1)}{x-1}$; $\begin{cases} y = x + 6, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Так как $x \neq 1$, то $y \neq 1 + 6$; $y \neq 7$. Таким образом, $E = (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

10. Найдем нули функций $y = \sqrt{x-1} - 5$ и $y = x^3 + 8$.

1) $\sqrt{x-1} - 5 = 0$; $\sqrt{x-1} = 5$; $x - 1 = 25$; $x = 26$.

2) $x^3 + 8 = 0$; $x^3 = -8$; $x = -2$.

Расстояние между нулями данных функций равно $|26 - (-2)| = 28$.

11. Выясним, при каких значениях аргумента значения функции $y = |2x - 8| - |x + 6|$ отрицательны. Для этого решим неравенство

$|2x - 8| - |x + 6| < 0$; $|2x - 8| < |x + 6|$; $(2x - 8)^2 < (x + 6)^2$;

$(2x-8)^2 - (x+6)^2 < 0$; $(2x - 8 - x - 6)(2x - 8 + x + 6) < 0$; $(x - 14)(3x - 2) < 0$;

$x \in \left(\dfrac{2}{3}; 14\right)$. Неравенство имеет 13 целых решений.

12. В точке $C(x_3; y_3)$ график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$ пересекает ось ординат, значит, $x_3 = 0$, тогда $y_3 = -1$.

Абсциссы точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются нулями функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Найдем нули данной функции: $-9x^4 + 10x^2 - 1 = 0$; $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Пусть $x^2 = t$, тогда $9t^2 - 10t + 1 = 0$.

$D = 100 - 4 \cdot 9 = 64$; $t_1 = \dfrac{10 - 8}{18} = \dfrac{1}{9}$; $t_2 = \dfrac{10 + 8}{18} = 1$.

Откуда $x^2 = \dfrac{1}{9}$ или $x^2 = 1$, тогда $x = \dfrac{1}{3}$, $x = -\dfrac{1}{3}$, $x = 1$, $x = -1$.

Таким образом точки A и B имеют координаты $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$. Найдем значение выражения $x_1 \cdot x_2 + y_3 = -1 \cdot 1 + (-1) = -2$.

13. Найдем область определения функции $y = \sqrt{x^2 - x + 5} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

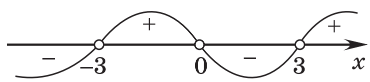
$$\begin{cases} x^2 - x + 5 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - x + 5$ меньше нуля, значит, неравенство $x^2 - x + 5 \geqslant 0$ верно для $x \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, решением системы неравенств будет решение неравенства $x^2 - 1 > 0$; $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Промежутку $[-11; 45]$ принадлежат 54 целых числа из области определения данной функции.

14. Прямая $y = x$ является биссектрисой I и III координатных углов. Значения переменной, для которых график функции $y = \dfrac{9}{x}$ расположен выше графика функции $y = x$, удовлетворяют неравенству $\dfrac{9}{x} > x$; $\dfrac{9 - x^2}{x} > 0$;

$\dfrac{(x-3)(x+3)}{x} < 0$;



$x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3)$.

Наибольшим целым отрицательным значением переменной, удовлетворяющим неравенству $\dfrac{9}{x} > x$, является число -4.

15. Так как функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и является четной, то прямая $y = -3$ пересекает график данной функции в точках, абсциссы которых симметричны относительно начала координат. Так как уравнение $f(x) = -3$ имеет ровно семь различных корней (т. е. количество точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = -3$ — нечетное), то график функции $y = f(x)$ и прямая $y = -3$ имеют общую точку, принадлежащую оси ординат. Тогда $f(0) = -3$.

Тест 5

1. Осью симметрии параболы является прямая $x = x_в$.

Найдем абсциссу вершины каждой параболы:

1) $y = 3(x - 6)^2 - 8$; $x_в = 6$;

2) $y = x^2 - 6x + 2$; $x_в = \dfrac{6}{2} = 3$;

3) $y = x^2 + 12x - 1$; $x_в = \dfrac{-12}{2} = -6$;

4) $y = -2(x - 4)^2 - 6$; $x_в = 4$;

5) $y = 2x^2 - 24x + 7$; $x_в = \dfrac{24}{4} = 6$.

Таким образом, прямая $x = -6$ является осью симметрии параболы $y = x^2 + 12x - 1$.

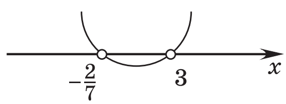
2. Так как вершиной параболы является точка с координатами **(0; –2)**, а ветви параболы направлены вверх, то парабола имеет вид $y = ax^2 - 2$. Из предложенных вариантов ответов данный вид имеет парабола $y = x^2 - 2$.

3. Неверное утверждение 4). Поскольку график данной функции пересекает ось ординат в точке с отрицательной ординатой, то $f(0) < 0$.

4. Неверным является утверждение 2). Найдем координаты точки пересечения параболы $y = -(x+4)^2 - 5$ и оси ординат. При $x = 0$ получим $y = -(0+4)^2 - 5 = -21$. Таким образом, парабола $y = -(x+4)^2 - 5$ пересекает ось ординат в точке **(0; –21)**.

5. Решим неравенство $(3 - x)(7x + 2) < 0$;

$(x - 3)(7x + 2) > 0$; $x_1 = -\frac{2}{7}$; $x_2 = 3$.



$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup (3; +\infty)$.

6. Так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось ординат в точке с координатами **(0; *c*)**, т. е. $c > 0$.

Абсцисса вершины параболы положительна, т. е. $-\frac{b}{2a} > 0$, поскольку $a > 0$, то $b < 0$.

7. Квадратичная функция является четной, если имеет вид $y = ax^2 + c$, т. е. второй коэффициент равен нулю. Тогда $a + 6 = 0$; $a = -6$.

8. График функции $y = -x^2 + x - 1$ расположен не выше оси абсцисс для всех значений аргумента, при которых $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$; $x^2 - x + 1 \geqslant 0$; $D < 0$; $x \in \boldsymbol{R}$.

9. Найдем наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $y = x^2 - 2x + 3$ на отрезке $[-1; 2]$.

Найдем абсциссу вершины параболы $x_в = 1$. Так как абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[-1; 2]$, то найдем значение функции в вершине параболы и на концах данного отрезка.

При $x = -1$ $y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6$.

При $x = 1$ $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$.

При $x = 2$ $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$.

Таким образом, наибольшее значение данной функции на отрезке $[-1;\ 2]$ равно 6, а наименьшее значение равно 2, т. е. множеством значений функции является отрезок $[2;\ 6]$.

10. Найдем абсциссу вершины параболы $x_в = \frac{a+2}{2a}$. Так как осью симметрии параболы является прямая $x = -0{,}5$, то $x_в = -0{,}5$, т. е. $\frac{a+2}{2a} = -\frac{1}{2}$; $2a + 4 = -2a$; $4a = -4$; $a = -1$.

При $a = -1$ получим $y = -x^2 - x + 2$ и ордината вершины параболы равна $y_в = -(-0{,}5)^2 + 0{,}5 + 2 = 2{,}25$.

Так как ветви параболы направлены вниз, то $E = (-\infty;\ 2{,}25]$. Наибольшее целое число из множества значений данной функции равно 2.

11. Найдем координаты точек пересечения графиков данных функций: $x^2 + 2x = 6x - x^2$; $2x^2 - 4x = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$

При $x = 0$ получим $y = 0$, а при $x = 2$ получим $y = 8$.

Таким образом, прямая $y = kx + b$ проходит через точки с координатами $(0;\ 0)$ и $(2;\ 8)$. Тогда $b = 0$, а $k = \frac{8}{2} = 4$, т. е. $k + b = 4$.

12. Функция $y = f(x)$, график которой получен из графика функции $g(x) = 3x^2$ сдвигом его на 4 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вниз вдоль оси ординат, имеет вид $f(x) = 3(x+4)^2 - 2$.

Тогда $f(5) = 3(5+4)^2 - 2 = 3 \cdot 81 - 2 = 241$.

13. Абсцисса вершины параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$ является серединой отрезка $[x_1;\ x_2]$, где x_1; x_2 — нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Тогда $x_в = \frac{-2 + 2\sqrt{3} + 24 - 2\sqrt{3}}{2} = 11$.

14. Пусть x — первое число, тогда $(40 + x)$ — второе число. Их произведение равно $x(x + 40)$. Рассмотрим функцию $f(x) = x(x + 40)$ и найдем, при каком значении переменной данная функция принимает свое наименьшее значение.

Так как ветви параболы $f(x) = x^2 + 40x$ направлены вверх, то своего наименьшего значения функция достигает в вершине, т. е. $x = x_в = -20$. Тогда первое число равно -20, а второе — 20, и их сумма равна 0.

15. Запишем функцию $f(x) = (x-1)(x-7)(x-4)(x+2) + 100$ в виде

$f(x) = (x-1)(x-4)(x-7)(x+2) + 100;$

$f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x - 14) + 100;$

$f(x) = (x^2 - 5x + 4)((x^2 - 5x + 4) - 18) + 100;$
$f(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 18(x^2 - 5x + 4) + 100;$
$f(x) = (x^2 - 5x + 4)^2 - 18(x^2 - 5x + 4) + 81 + 19;$
$f(x) = ((x^2 - 5x + 4) - 9)^2 + 19;$ $f(x) = (x^2 - 5x - 5)^2 + 19.$

Так как $(x^2 - 5x - 5)^2 + 19 \geqslant 19$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то наименьшим значением данной функции является число 19.

Тест 6

1. Так как $\cos\alpha \in [-1; 1]$, то из предложенных равенств возможно равенство $\cos\alpha = -7^0$; $\cos\alpha = -1$.

2. Определим знак каждого выражения:

1) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, так как $\frac{18\pi}{19}$ — угол второй четверти, а синус во второй четверти положителен;

2) $\cos(-49°) > 0$, так как $(-49°)$ — угол четвертой четверти, а косинус в четвертой четверти положителен;

3) $\operatorname{tg}3 < 0$, так как 3 радиана — угол второй четверти, а тангенс во второй четверти отрицателен;

4) $\cos(-297°) > 0$, так как $(-297°)$ — угол первой четверти, а косинус в первой четверти положителен;

5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$, так как $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ — угол третьей четверти, а котангенс в третьей четверти положителен.

Таким образом, отрицательно значение выражения 3).

3. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + 2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$

4. Пусть $A = \sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{4}} - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{4}$.

1) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = -\sin\frac{14\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} =$

$= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2) $\sin^2\frac{29\pi}{4} = \sin^2\left(6\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{4} = \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

3) $\operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1.$

4) $A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$

5. Воспользуемся формулами сложения и получим

$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60^\circ\cos\alpha - \sin 60^\circ \sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

6. Воспользуемся формулами приведения:

$$A = \sin^4\frac{23\pi}{12} - \cos^4\frac{13\pi}{12} = \sin^4\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) - \cos^4\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12}.$$

По формуле разности квадратов получим:

$$A = \sin^4\frac{\pi}{12} - \cos^4\frac{\pi}{12} = \left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{12} - \cos^2\frac{\pi}{12} = -\left(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. $4\sin 20^\circ + \operatorname{tg}20^\circ = 4\sin 20^\circ + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} =$

$$= \frac{2\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + 2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ + 2\sin 30^\circ\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{40^\circ+80^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-80^\circ}{2}}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ\cos(-20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

8. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$

$$= \frac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = 4.$$

9. $A=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 200^\circ}{2}}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 100^\circ}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|\cos 100^\circ|}$. Так как $\cos 100^\circ<0$, то

$A=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 100^\circ}=\sqrt{\frac{1+\cos 100^\circ}{2}}=\sqrt{\cos^2 50^\circ}=|\cos 50^\circ|$.

Так как $\cos 50^\circ>0$, то $A=\cos 50^\circ$.

10. $3\sin 7\alpha+3\cos 7\alpha=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7\alpha\right)=$

$=3\sqrt{2}(\cos 45^\circ\sin 7\alpha+\sin 45^\circ\cos 7\alpha)=3\sqrt{2}\sin(45^\circ+7\alpha)$.

Так как $-1\leqslant\sin(45^\circ+7\alpha)\leqslant 1$, то $-3\sqrt{2}\leqslant 3\sqrt{2}\sin(45^\circ+7\alpha)\leqslant 3\sqrt{2}$.

Таким образом, наименьшее значение данного выражения равно $-3\sqrt{2}$, а наибольшее — $3\sqrt{2}$. Их произведение равно $-3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=-18$.

11. Так как $\cos(\pi-4\alpha)=-\cos 4\alpha$, то $\cos 4\alpha=\frac{1}{3}$.

Упростим выражение

$9\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=9\cos^4 2\alpha=9\left(\cos^2 2\alpha\right)^2=9\left(\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)^2=$

$=\frac{9}{4}(1+\cos 4\alpha)^2\Big|_{\cos 4\alpha=\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=4.$

12. $\frac{\cos 0{,}5t\cdot\sin^3 0{,}5t}{\sin t-2\sin 2t+\sin 3t}=\frac{\cos 0{,}5t\cdot\sin 0{,}5t\cdot\sin^2 0{,}5t}{(\sin t+\sin 3t)-2\sin 2t}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cos 0{,}5t\cdot\sin 0{,}5t\cdot\sin^2 0{,}5t}{2\sin\frac{t+3t}{2}\cos\frac{t-3t}{2}-2\sin 2t}=$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin t\cdot\sin^2 0{,}5t}{2\sin 2t\cos t-2\sin 2t}=\frac{\frac{1}{2}\sin t\cdot\frac{1-\cos t}{2}}{2\sin 2t\cos t-2\sin 2t}=\frac{\frac{1}{2}\sin t\cdot\frac{1-\cos t}{2}}{2\sin 2t(\cos t-1)}=\frac{\sin t(1-\cos t)}{8\sin 2t(\cos t-1)}=$

$=-\frac{\sin t}{8\sin 2t}=-\frac{\sin t}{16\sin t\cos t}=-\frac{1}{16\cos t}\Big|_{\cos t=\frac{1}{16}}=-\frac{1}{16\cdot\frac{1}{16}}=-1.$

13. $\left(\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}\right)^4=\left(\frac{(\cos\alpha+\cos 5\alpha)-(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)}{(\sin\alpha+\sin 5\alpha)-(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)}\right)^4=$

$=\left(\frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha-2\cos 3\alpha\cos\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-2\sin 3\alpha\cos\alpha}\right)^4=\left(\frac{2\cos 3\alpha(\cos 2\alpha-\cos\alpha)}{2\sin 3\alpha(\cos 2\alpha-\cos\alpha)}\right)^4=\left(\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}\right)^4=$

$$= (\operatorname{ctg} 3\alpha)^4 \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{18}} = \left(\operatorname{ctg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{18}\right)\right)^4 = \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9.$$

14. $\operatorname{tg}9° - \operatorname{tg}63° + \operatorname{tg}81° - \operatorname{tg}27° = \operatorname{tg}9° + \operatorname{tg}81° - \operatorname{tg}63° - \operatorname{tg}27° =$

$$= \operatorname{tg}9° + \operatorname{ctg}9° - \operatorname{tg}63° - \operatorname{ctg}63° = \frac{\sin 9°}{\cos 9°} + \frac{\cos 9°}{\sin 9°} - \frac{\sin 63°}{\cos 63°} - \frac{\cos 63°}{\sin 63°} =$$

$$= \frac{\sin^2 9° + \cos^2 9°}{\cos 9° \sin 9°} - \frac{\sin^2 63° + \cos^2 63°}{\cos 63° \sin 63°} = \frac{1}{\cos 9° \sin 9°} - \frac{1}{\cos 63° \sin 63°} =$$

$$= \frac{2}{2\cos 9° \sin 9°} - \frac{2}{2\cos 63° \sin 63°} = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\sin 126°} = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\sin 54°} =$$

$$= \frac{2\sin 54° - 2\sin 18°}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{2(\sin 54° - \sin 18°)}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{2 \cdot 2\sin\frac{54° - 18°}{2}\cos\frac{54° + 18°}{2}}{\sin 18° \sin 54°} =$$

$$= \frac{4\sin 18° \cos 36°}{\sin 18° \sin 54°} = \frac{4\cos 36°}{\sin 54°} = \frac{4\sin 54°}{\sin 54°} = 4.$$

15. Разделим обе части равенства $\sqrt{13} - 13\sin\frac{2\alpha}{3} + 12\sqrt{13}\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0$ на $\sqrt{13}$ и получим $1 - \sqrt{13}\sin\frac{2\alpha}{3} + 12\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$

$\sin^2\frac{\alpha}{3} + \cos^2\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} + 12\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$

$\sin^2\frac{\alpha}{3} - 2\sqrt{13}\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} + 13\cos^2\frac{\alpha}{3} = 0;$ $\left(\sin\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13}\cos\frac{\alpha}{3}\right)^2 = 0;$

$\sin\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13}\cos\frac{\alpha}{3} = 0.$

Разделим обе части последнего равенства на $\cos\frac{\alpha}{3}$ и получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \sqrt{13} = 0;$ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} = \sqrt{13}.$ Тогда $\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 4 \cdot 13 = 52.$

Тест 7

1. Переведем $\frac{\pi}{18}$ в градусную меру: $\frac{\pi}{18} = \frac{180°}{18} = 10°.$

$\cos(2x - 10°) = 0;$ $2x - 10° = 90° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $2x = 100° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $x = 50° + 90°n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Наименьший положительный корень уравнения равен 50°.

2. $4\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x + 3 = 0;$ $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)^2 = 0;$ $2\sin x + \sqrt{3} = 0;$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z};$ $x = (-1)^{n+1} \cdot 60° + 180°n,$ $n \in \boldsymbol{Z}.$

Наибольший отрицательный корень данного уравнения равен –60°.

3. $2\operatorname{tg}x + 1 = -3\operatorname{ctg}(-x)$; $2\operatorname{tg}x + 1 = 3\operatorname{ctg}x$; $2\operatorname{tg}x + 1 = \dfrac{3}{\operatorname{tg}x}$.

Пусть $\operatorname{tg}x = t$, тогда уравнение принимает вид $2t + 1 = \dfrac{3}{t}$; $2t^2 + t - 3 = 0$; $t \neq 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1{,}5, \\ t = 1. \end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x = -1{,}5, \\ \operatorname{tg}x = 1. \end{array}\right.$

Построим графики функций $y = \operatorname{tg}x$, $y = -1{,}5$ и $y = 1$ (рис. 46) и найдем количество точек пересечения этих графиков на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

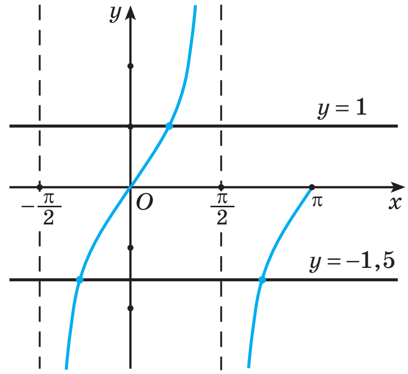


Рис. 46

На промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ данное уравнение имеет три корня.

4. Уравнение $\dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ 1 - 2\cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отметим на единичной окружности числа $\dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 47). Учитывая условие $\cos x \neq \dfrac{1}{2}$ получим, что числа вида $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, и $\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, не являются корнями данного уравнения.

Наименьшим положительным корнем уравнения является число $\dfrac{2\pi}{3}$.

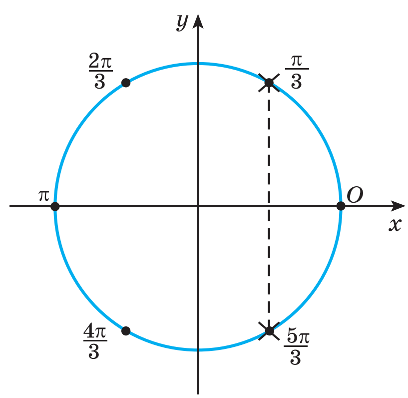


Рис. 47

5. Воспользуемся формулами приведения и представим уравнение

$$3\sin^2(5\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x) \cdot \cos(x - 7\pi) = 2$$

в виде $3\sin^2(\pi + x) - \cos(1{,}5\pi + x) \cdot \cos(\pi - x) = 2$; $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2$.

Затем получим

$$3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x); \quad \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Так как значения переменной, при которых $\cos x = 0$, не являются корнями данного уравнения, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получим $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение принимает вид $t^2 + t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 1. \end{array}\right.$

Откуда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -2, \\ \operatorname{tg} x = 1. \end{array}\right.$

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = -2$ и $y = 1$ (рис. 48) и найдем количество точек пересечения этих графиков на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

На промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ данное уравнение имеет шесть корней.

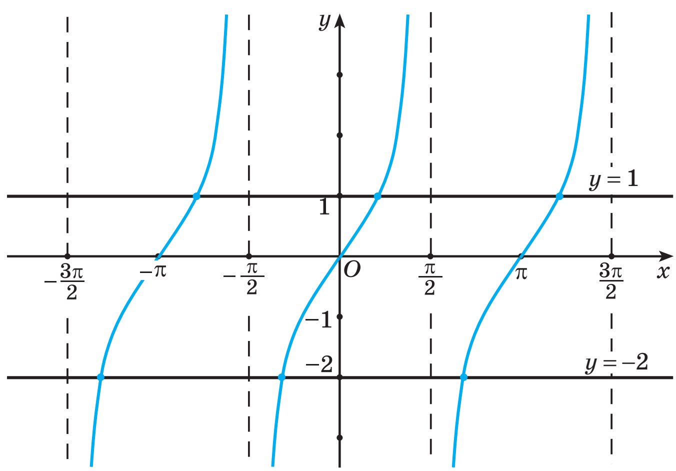


Рис. 48

6. Для преобразования левой части уравнения

$(\sin^2 x - \cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x \sin^2 x = -0{,}5\sqrt{2}$

воспользуемся формулами двойного угла и получим:

$\cos^2 2x - \sin^2 2x = -0{,}5\sqrt{2}$; $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm 33{,}75° + 90° n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьший положительный корень данного уравнения равен $33{,}75°$.

7. Так как $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, то запишем уравнение

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ в виде $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0;\quad 2\sin\frac{3x-\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{2}\cos\frac{3x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+x}{2}=0;$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2x=0;\quad \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \cos 2x=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{6}=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=30^\circ+180^\circ n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=45^\circ+90^\circ n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -45°. Наименьший положительный корень уравнения равен 30°. Их сумма равна -15°.

8. Воспользуемся формулой синуса двойного угла и получим:

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0;\ \cos x\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=0;\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x+\sqrt{3}\sin x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ 1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

На промежутке $[0;\ 2\pi]$ первое и второе уравнения совокупности имеют по два корня. Таким образом, уравнение имеет четыре корня на данном промежутке.

9. Запишем уравнение в виде $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+3(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)+4=0$.

Пусть $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=t$. Возведем обе части этого равенства в квадрат

$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2=t^2;\ \operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x=t^2;\ \operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x+2=t^2;$$

$\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=t^2-2$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$t^2-2+3t+4=0;\quad t^2+3t+2=0;\quad \left[\begin{array}{l}t=-1,\\ t=-2.\end{array}\right.$ Откуда $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-1,\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-2.\end{array}\right.$

По свойству двух взаимно обратных чисел $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$. Тогда первое уравнение совокупности не имеет корней.

Рассмотрим второе уравнение совокупности:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-2;\ \operatorname{tg}x=-1;\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ x=-45^\circ+180^\circ n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Наименьший положительный корень уравнения равен 135°.

10. Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и получим
$8\sin^4 x + 13\cos 2x = 7$; $8\sin^4 x + 13\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 7$;
$8\sin^4 x - 26\sin^2 x + 6 = 0$; $4\sin^4 x - 13\sin^2 x + 3 = 0$.

Пусть $\sin^2 x = t$, $t \in [0; 1]$, тогда уравнение принимает вид $4t^2 - 13t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{4}, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Так как $t \in [0; 1]$, то $t = \frac{1}{4}$, т. е. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.

Откуда $2\sin^2 x = \frac{1}{2}$; $-2\sin^2 x = -\frac{1}{2}$; $1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}$;
$\cos 2x = \frac{1}{2}$; $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
$x = \pm 30° + 180° n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Интервалу $[-215°; -180°]$ принадлежит корень $-210°$.

11. Пусть $\sin x - \cos x = t$, $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Возведем обе части этого равенства в квадрат: $(\sin x - \cos x)^2 = t^2$; $\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = t^2$; $\sin 2x = 1 - t^2$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $\sqrt{2}\left(1 - t^2\right) = \sqrt{3}t - 2\sqrt{2}$;
$\sqrt{2}t^2 + \sqrt{3}t - 3\sqrt{2} = 0$; $D = 3 + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 27$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ t = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l} t = -\sqrt{6}, \\ t = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$ Так как $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$, то $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$, т. е. $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и получим
$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x + 45° = \pm 150° + 360° n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
$\left[\begin{array}{l} x = 105° + 360° n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -195° + 360° n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен $-195°$.

12. Уравнение $(3\cos x + \cos 2x + 2)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$ равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} x = 0,\\ \begin{cases}3\cos x + \cos 2x + 2 = 0,\\ \operatorname{ctg} x \geqslant 0,\\ \sin x \neq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Корнями уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$ являются числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Решим уравнение $3\cos x + \cos 2x + 2 = 0$. По формуле косинуса двойного угла получим $3\cos x + 2\cos^2 x - 1 + 2 = 0;$ $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0;$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2},\\ \cos x = -1.\end{array}\right.$$

Так как $\sin x \neq 0$, то значения переменной, при которых $\cos x = -1$, не являются корнями данного уравнения.

Рассмотрим уравнение $\cos x = -\frac{1}{2};$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\operatorname{ctg} x \geqslant 0$, то корнями данного уравнения являются числа $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,$ $m \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, исходное уравнение имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$, и $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,$ $m \in \boldsymbol{Z}$.

Промежутку $[0;\ 2\pi]$ принадлежат корни $90°$, $270°$ и $240°$. Их сумма равна $600°$.

13. Умножим обе части уравнения $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ на $2\sin x$ и получим уравнение $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x$.

Полученное уравнение и уравнение $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$ не являются равносильными, поскольку числа вида $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, являются корнями уравнения $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x$, но не являются корнями исходного уравнения.

Решим уравнение $2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8} \cdot 2\sin x;$

$\sin 2x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4}\sin x;$ $2\sin 2x \cos 2x \cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{4}\sin x;$

$\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2}\sin x;$ $2\sin 4x \cos 4x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin x;$ $\sin 8x = \sin x;$

$\sin 8x - \sin x = 0;\quad 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{9x}{2} = 0;\quad \left[\begin{array}{l}\sin\frac{7x}{2} = 0,\\ \cos\frac{9x}{2} = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\frac{7x}{2} = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}7x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 9x = \pi + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{2\pi n}{7},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{9},\ m \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Из первой серии корней промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $\frac{4\pi}{7}$; $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{8\pi}{7}$; $\frac{10\pi}{7}$.

Из второй серии — числа $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; π; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{13\pi}{9}$.

Учитывая то, что $x = \pi$ не является корнем исходного уравнения, получим, что уравнение имеет восемь корней на заданном промежутке.

14. Уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ имеет корни, если $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$ и $\sin x \neq 0$.

Воспользуемся формулой тангенса суммы и получим уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3};\quad \frac{\operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3};\quad \frac{3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}.$$

Выполненные преобразования не являются равносильными, так как в первоначальном уравнении числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, принадлежат области определения уравнения, а в полученном уравнении — нет.

Необходимо проверить, являются ли числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, корнями исходного уравнения: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\sqrt{3}$;

$-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ — верное равенство, значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — корни данного уравнения.

Решим уравнение $\frac{3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\sqrt{3}$;

$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = -3\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x$; $-3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Наименьший положительный корень данного уравнения равен $\frac{\pi}{2} = 90°$.

15. Оценим левую и правую части уравнения $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) =$$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Так как $-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, то $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$.

Таким образом, левая часть уравнения не превосходит $\sqrt{2}$.

Вместе с тем $\sqrt{2} + \sin^4 4x \geqslant \sqrt{2}$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, равенство $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$ возможно, если обе части уравнения одновременно равны $\sqrt{2}$, т. е. исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{2} + \sin^4 4x = \sqrt{2};\end{cases} \quad \begin{cases}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin^4 4x = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \sin 4x = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi m}{4},\ m \in \boldsymbol{Z};\end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Наибольший отрицательный корень данного уравнения равен

$\frac{\pi}{4} - 2\pi = -315°$.

Содержание

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

Сборник задач по алгебре

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*.
Художественный редактор *Е. А. Проволович*.
Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*.
Корректоры *О. С. Козицкая, В. С. Бабеня, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 06.03.2020. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,38. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 50 500 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			