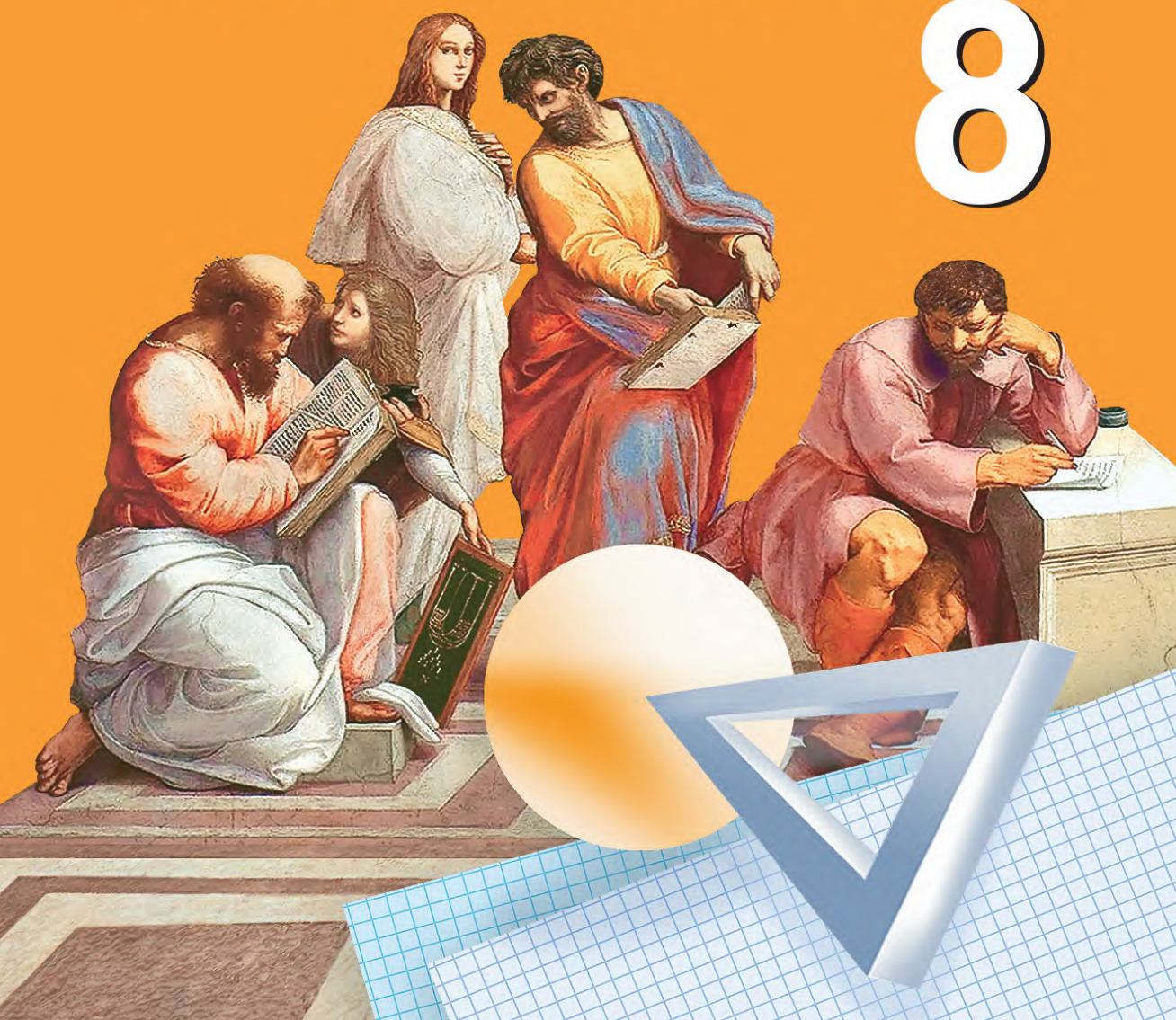




**В. В. Казаков    О. О. Казакова**

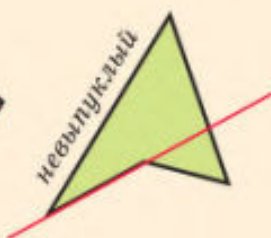
# **ГЕОМЕТРИЯ**

# **8**



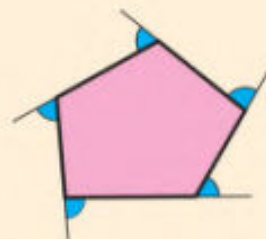


# Многоугольники



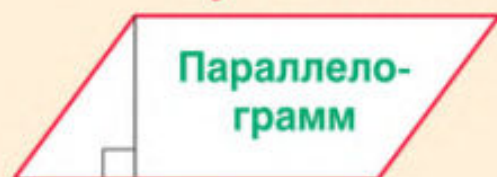
Сумма углов

$$180^\circ (n - 2)$$

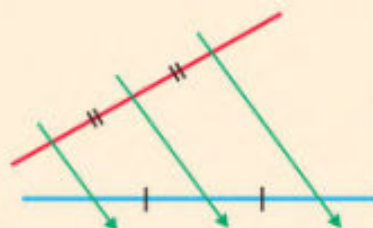


Сумма внешних  $360^\circ$

## 4-угольники



ФАЛЕС (VI в. до н. э.)



МЕДИАНЫ 2 : 1



### СВОЙСТВА

1. Сумма соседних углов  $180^\circ$ .
2. Диагональ делит на два равных тр-ка.
3. Противоположные стороны равны.
4. Противоположные углы равны.
5. Диагонали делятся пополам.

### ПРИЗНАКИ

1. Если две стороны 4-ка равны и параллельны...
2. Если противоположные стороны 4-ка равны...
3. Если диагонали 4-ка делятся пополам...

### ПРЯМОУГОЛЬНИК



диагонали равны

### РОМБ



диагонали

- 1)  $\perp$
- 2) бис.

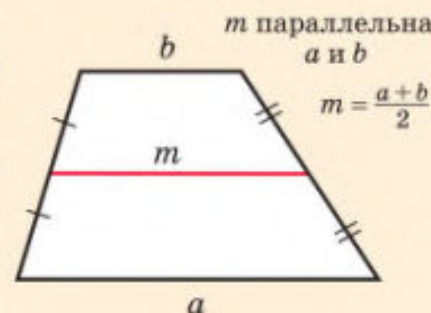


КВАДРАТ

Средняя линия



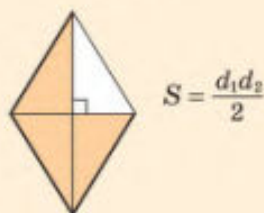
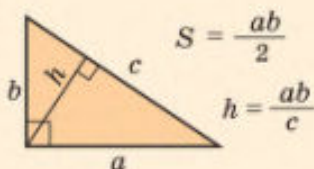
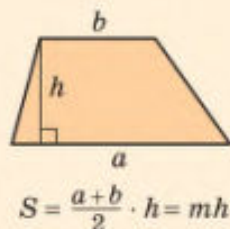
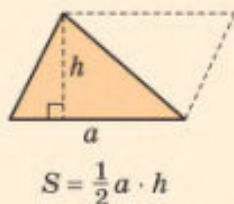
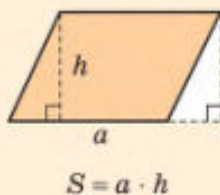
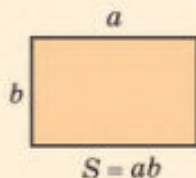
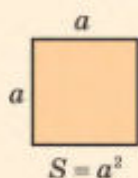
### Трапеция



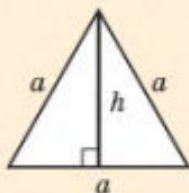
1. Выпуклые мн-ки. Диагональ. Периметр.
2. Сумма углов выпуклого многоугольника.
3. Сумма внешних углов выпуклого мн-ка.
4. Параллелограмм.
5. Свойства параллелограмма.
6. Признаки параллелограмма.
7. Прямоугольник. Свойство диагоналей.
8. Признак прямоугольника.

9. Ромб. Свойство диагоналей ромба. Признаки ромба.
10. Квадрат. Свойства квадрата.
11. Теорема Фалеса. Деление отрезка на равные части.
12. Свойство медиан треугольника.
13. Свойство средней линии треугольника.
14. Трапеция. Свойство средней линии.
15. Свойство углов и диагоналей равнобедренной трапеции.
16. Признаки равнобедренной трапеции.

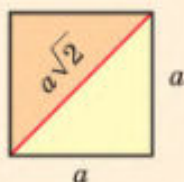
# Площади



## Равносторонний

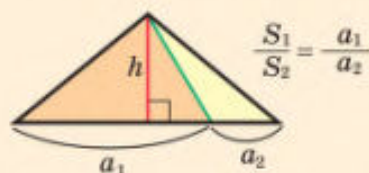


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



диагональ квадрата

## Общая высота

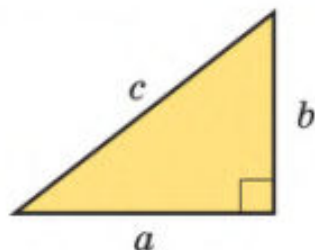


площади относятся как основания

$$S_1 = S_2$$



медиана делит на два равновеликих



## Теорема Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

## Обратная

Пифагоровы тройки:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17)

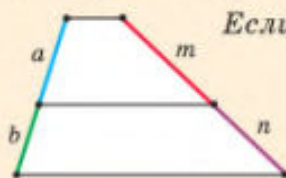
1. Площадь квадрата.
2. Площадь прямоугольника.
3. Площадь параллелограмма.
4. Площадь треугольника.
5. Площадь трапеции.
6. Площадь ромба.
7. Площадь прямоугольного треугольника.
8. Высота, проведенная к гипотенузе.

9. Треугольники с общей высотой.
10. Свойства медианы для площадей.
11. Теорема Пифагора.
12. S и h равностороннего треугольника.
13. Диагональ квадрата.
14. Обратная теорема Пифагора.
15. Пифагоровы тройки.

# Подобные треугольники

## Теорема Фалеса (обобщ.)

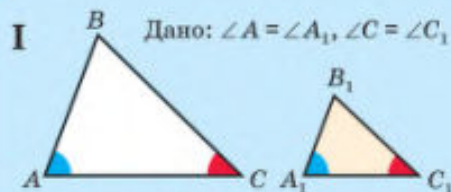
1. Углы – равны.
2. Стороны – пропорциональны.



Если на одной стороне угла отложить...

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

## Признаки подобия

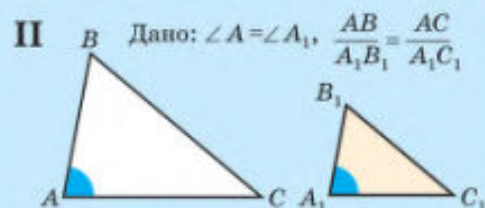
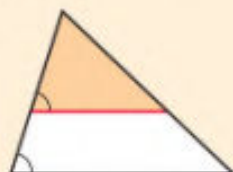


ПО ДВУМ УГЛАМ

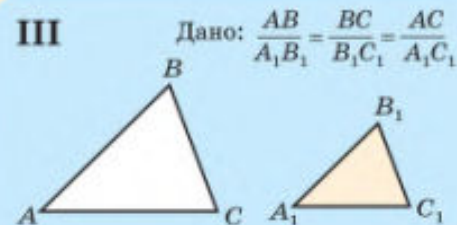
Прямоугольные  
подобны  
по острому углу



Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному

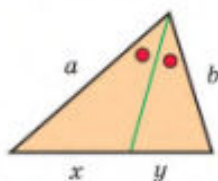


ПО ДВУМ СТОРОНАМ  
И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ



ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

## Свойство биссектрисы треугольника



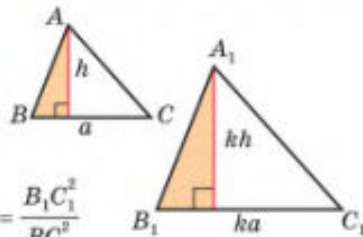
Биссектриса делит...

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

...пропорциональные  
прилежащим сторонам

## Площади подобных треугольников

...как квадраты  
соответствующих  
сторон



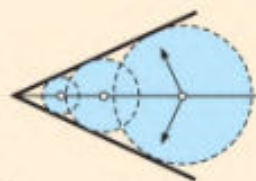
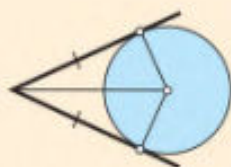
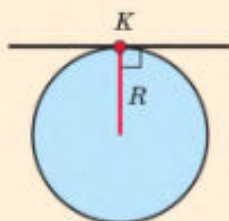
$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot ka \cdot kh}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h} = k^2 = \frac{B_1C_1^2}{BC^2}$$

1. Теорема Фалеса (обобщенная).
2. Деление отрезка в отношении  $m : n$ .
3. Определение подобных треугольников.
4. Свойство прямой, параллельной стороне тр-ка.
5. 1-й признак подобия. Следствие.

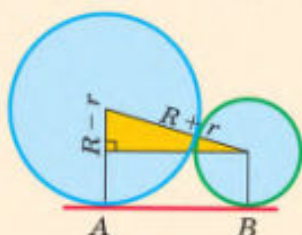
6. 2-й признак подобия.
7. 3-й признак подобия.
8. Свойство биссектрисы треугольника.
9. Отношение площадей подобных треугольников.



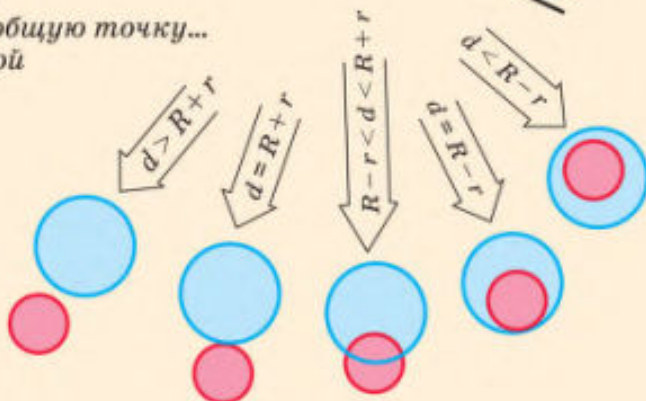
# Окружности



Касательная имеет единственную общую точку...  
Радиус перпендикулярен касательной

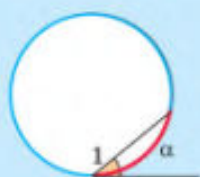
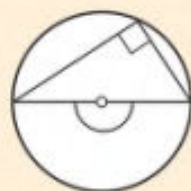
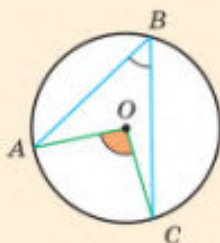


$$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

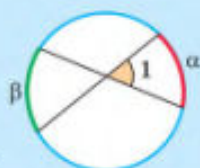


## Вписанный – половине центрального угла!

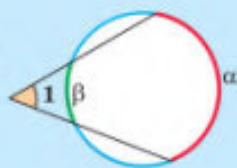
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$$



$$\angle 1 = \frac{1}{2} \alpha$$

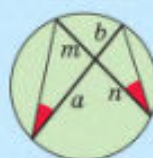


$$\angle 1 = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$



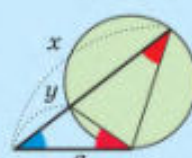
$$\angle 1 = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$\frac{a}{m} = \frac{n}{b}$$



$$ab = mn$$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{a}$$



$$a^2 = xy$$

1. Касательная. Признак касательной.
2. Свойство касательной.
3. Свойство касательных, проведенных из одной точки.
4. Построение касательной.
5. Свойство окружностей, вписанных в угол.
6. Взаимное расположение окружностей.
7. Длина отрезка общей внешней касательной.
8. Центральный угол. Градусная мера дуги. Вписанный угол.

9. Свойство вписанного угла.
10. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.
11. Вп. угол, опирающийся на диаметр.
12. Угол между касательной и хордой.
13. Угол между хордами.
14. Угол между секущими.
15. Свойство пересекающихся хорд.
16. Свойство касательной и секущей.





В. В. Казаков О. О. Казакова

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 8 класса  
учреждений образования, реализующих образовательные  
программы общего среднего образования,  
с русским языком обучения и воспитания

*Допущено  
Министерством образования  
Республики Беларусь*

2-е издание, исправленное и дополненное

Минск  
«Адукацыя і выхаванне»  
2024

*Правообладатель Адукацыя і выхаванне*

УДК 514(075.3=161.1)  
ББК 22.151я721  
К14

В оформлении обложки использован фрагмент фрески  
Рафаэля Санти «Афинская школа»

Рецензент

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики  
Белорусского государственного университета  
(кандидат физико-математических наук, доцент *Г. О. Кукрак*)

**Казаков, В. В.**

**К14** Геометрия : учебное пособие для 8-го класса учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования, с русским языком обучения и воспитания / В. В. Казаков, О. О. Казакова. — 2-е издание, исправленное и дополненное. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2024. — 208 с. : ил.

ISBN 978-985-03-4083-2.

Предыдущее издание было выпущено в издательстве «Народная асвета» в 2018 г.

УДК 514(075.3=161.1)  
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-4083-2

© Казаков В. В., 2018  
© Казаков В. В., Казакова О. О., 2024, с изменениями  
© Оформление. Государственное предприятие «Народная асвета», 2018  
© Оформление. Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”», 2024



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Ребята! В 8-м классе вы продолжите изучение геометрии. Вы уже знаете, что геометрия рассматривает геометрические фигуры и их свойства. Ниже мы вспомним, какие фигуры вы изучили в 7-м классе. А пока посмотрите вокруг себя. Окна, двери, стены зданий имеют прямоугольную форму. Прямоугольник — самая распространенная рукотворная геометрическая форма. Форма Солнца, Луны, планет, в том числе и нашей Земли, среза ствола дерева, яблока или апельсина свидетельствует о том, что для природы характерны округлые формы.

В 8-м классе мы изучим и прямоугольники, и окружности.

### Панорама геометрии 8-го класса

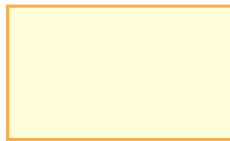
В первой главе вам предстоит познакомиться с двумя важными видами четырехугольников: *параллелограммом* и *трапецией*.

Посмотрите на параллелограмм, изображенный на рисунке, и подумайте, почему эта фигура так называется.

Упомянутый нами *прямоугольник* является разновидностью параллелограмма. Прямоугольник — это параллелограмм с прямыми углами. А *квадрат* — частный случай прямоугольника. Это прямоугольник с равными сторонами.



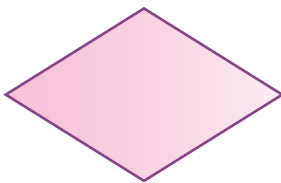
*параллелограмм*



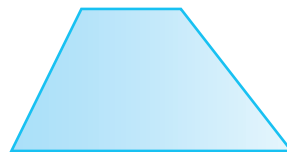
*прямоугольник*



*квадрат*



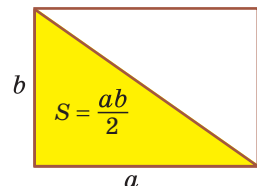
*ромб*

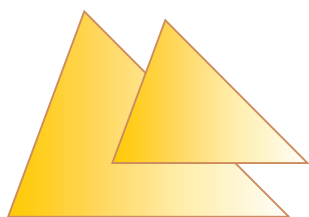


*трапеция*

Еще одним частным случаем параллелограмма является *ромб* — параллелограмм с равными сторонами. *Трапеция*, в отличие от параллелограмма, имеет только две параллельные стороны.

Во второй главе будут выведены *формулы площадей* некоторых плоских фигур: параллелограмма, треугольника, трапеции. В частности, вы узнаете, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т. е.  $S = \frac{ab}{2}$ . Это легко объясняется, например, тем, что прямоугольник со





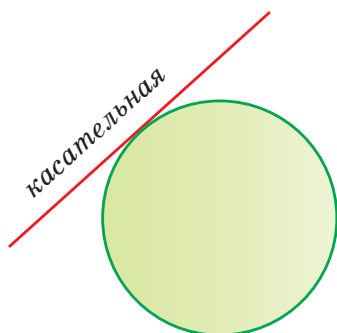
подобные

сторонами  $a$  и  $b$ , площадь которого  $S = ab$ , разбивается диагональю на два равных прямоугольных треугольника с катетами  $a$  и  $b$ .

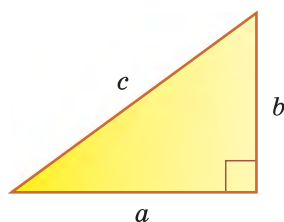
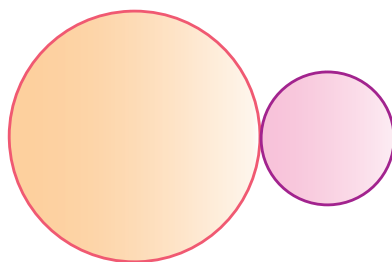
Далее вы узнаете, какие треугольники называются *подобными*. Это треугольник и его увеличенная или уменьшенная копия.

У равных треугольников соответствующие стороны и углы равны. У подобных же треугольников соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны. Например, каждая сторона одного из подобных треугольников может быть в 2 раза больше соответствующей стороны другого треугольника.

Завершит курс геометрии 8-го класса глава «Окружность». Древние греки считали окружность совершенной фигурой, душой геометрии. Вы узнаете о *касательной* к окружности, о *касающихся* окружностях, о *вписанных* и *центральных* углах окружности, познакомитесь с некоторыми важными свойствами окружностей.



касающиеся окружности



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Без сомнения, главным событием в геометрии 8-го класса будет ваше знакомство со знаменитой **ТЕОРЕМОЙ ПИФАГОРА** о свойстве сторон прямоугольного треугольника, которая звучит так: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы».

### Как работать с учебным пособием

В учебном пособии «Геометрия» для 8-го класса четыре главы. В каждой главе несколько параграфов, каждый из которых содержит:

- а) теоретический материал: определения, теоремы и следствия из них;
- б) ключевые задачи;
- в) задачи для самостоятельного решения.

*Ключевые задачи* являются образцами, где показаны приемы решения и варианты оформления задач. Поэтому они разбираются учителем вместе




с классом. Кроме того, в ключевых задачах рассмотрены дополнительные свойства геометрических фигур.

*Все свойства, доказанные в ключевых задачах, относятся к теоретической части. При решении других задач можно ссылаться на эти свойства как на известные геометрические факты.*

В начале каждой главы приводится *карта главы*, где изображены фигуры, изучаемые в данной главе. В каждом параграфе полужирным шрифтом выделены формулировки теорем и термины, определения которых необходимо знать. Все главы содержат дополнительный материал под рубриками: «**Реальная геометрия**», «**Моделирование**», «**Геометрия 3D**», с которыми вы уже знакомы из курса геометрии 7-го класса.

### Внимание!

Задания рубрики «Решаем самостоятельно» дифференцированы по пяти уровням усвоения учебного материала.

Материал, отмеченный знаком , предназначен для изучения математики на повышенном уровне. Он может предлагаться учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению математики.

## Три секрета успеха в геометрии

**Секрет 1.** Знание ВСЕХ теорем (в 8-м классе их 40).

**Секрет 2.** Знание ДОКАЗАТЕЛЬСТВ теорем, указанных в учебной программе по математике.

**Секрет 3.** Умение решить любую КЛЮЧЕВУЮ задачу пособия.



На обложке учебного пособия изображен фрагмент фрески великого итальянского художника эпохи Возрождения Рафаэля Санти «Афинская школа». При помощи **Интернета** выясните, кто изображен на этом фрагменте, как звали стоящую на картине девушку и чем она знаменита.

Желаем вам успехов в освоении геометрии в 8-м классе.

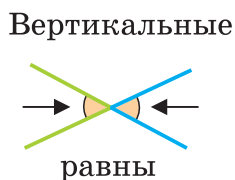
## Повторение курса геометрии 7-го класса

В 7-м классе мы познакомились с простейшими геометрическими фигурами и их свойствами. Вспомним некоторые из них.

- 1) Свойство смежных и свойство вертикальных углов.
- 2) Признаки равенства треугольников.
- 3) Свойства и признаки равнобедренного треугольника.
- 4) Теорема о сумме углов треугольника.
- 5) Свойства и признаки параллельных прямых.
- 6) Окружность, радиус, хорда, диаметр, круг.
- 7) Свойство катета прямоугольного треугольника с углом, равным  $30^\circ$ .

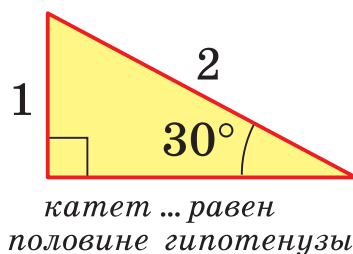
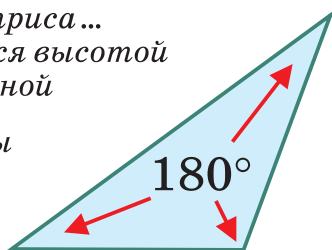
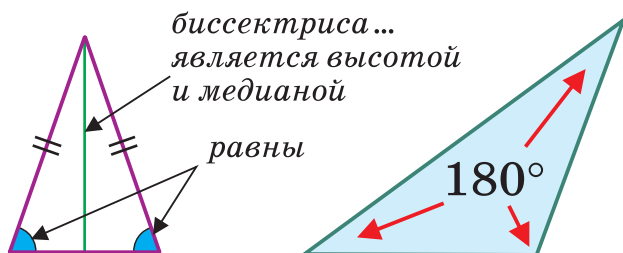
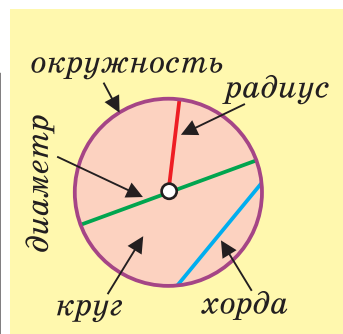
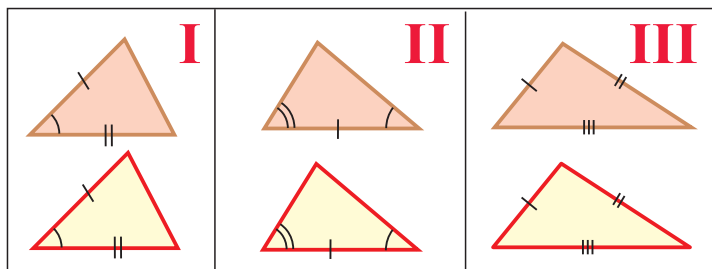


УГЛЫ

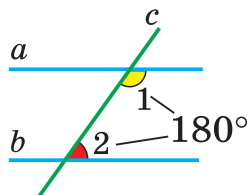
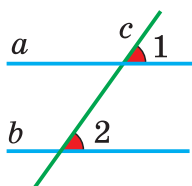
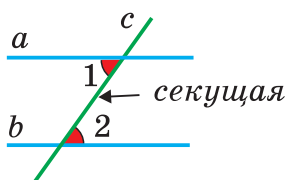


7 кл.

## Признаки равенства треугольников



## Свойства и признаки параллельных прямых



А теперь вы можете проверить уровень своих геометрических знаний, полученных в 7-м классе, решив за 30 минут тест из 10 задач. Выпишите номера выбранных вами ответов, сравните их с ответами одноклассников. Посчитайте набранное вами число баллов: каждая задача оценивается в 10 баллов. Если вы набрали 60 баллов, то ваша отметка «6» баллов, если 100 баллов, то — «10» баллов. Успешного выполнения теста!

## Тест по геометрии за 7-й класс

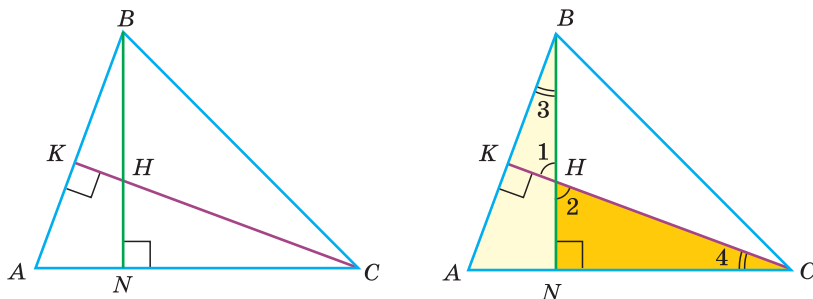
Условия задач	Ответы на выбор
1. Один из смежных углов равен $30^\circ$ . Найдите градусную меру другого угла.	а) $30^\circ$ ; б) $130^\circ$ ; в) $150^\circ$ ; г) $170^\circ$ .
2. Сумма двух вертикальных углов равна $100^\circ$ . Найдите величину одного из этих углов.	а) $80^\circ$ ; б) $50^\circ$ ; в) $40^\circ$ ; г) $100^\circ$ .
3. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 8 см. Найдите периметр треугольника.	а) 28 см; б) 20 см; в) 30 см; г) 32 см.
4. Два угла треугольника равны $30^\circ$ и $50^\circ$ . Найдите третий угол.	а) $90^\circ$ ; б) $130^\circ$ ; в) $80^\circ$ ; г) $100^\circ$ .
5. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $40^\circ$ . Найдите угол при основании.	а) $55^\circ$ ; б) $85^\circ$ ; в) $70^\circ$ ; г) $140^\circ$ .
6. Углы 1 и 2 — накрест лежащие при параллельных прямых $a$ и $b$ и секущей $c$ . Известно, что $\angle 1 + \angle 2 = 130^\circ$ . Найдите величину $\angle 1$ .	а) $65^\circ$ ; б) $70^\circ$ ; в) $50^\circ$ ; г) $25^\circ$ .
7. Внешние углы при двух вершинах треугольника равны $100^\circ$ и $125^\circ$ . Найдите внешний угол при третьей вершине.	а) $225^\circ$ ; б) $45^\circ$ ; в) $145^\circ$ ; г) $135^\circ$ .
8. Из вершины развернутого угла $AOB$ в одну полуплоскость относительно прямой $AB$ проведены лучи $OC$ и $OD$ , луч $OC$ проходит внутри угла $AOD$ , $\angle COD = 70^\circ$ . Найдите угол между биссектрисами углов $AOC$ и $BOD$ .	а) $60^\circ$ ; б) $55^\circ$ ; в) $110^\circ$ ; г) $125^\circ$ .
9. Из вершины прямого угла $C$ прямоугольного треугольника $ABC$ , у которого $\angle B = 30^\circ$ , $AB = 36$ см, проведена высота $CH$ . Найдите длину отрезка $HB$ .	а) 27 см; б) 24 см; в) 18 см; г) 30 см.
10. В треугольнике $ABC$ биссектрисы углов $B$ и $C$ пересекаются в точке $O$ . Найдите величину угла $BOC$ , если угол $A$ равен $80^\circ$ .	а) $160^\circ$ ; б) $130^\circ$ ; в) $100^\circ$ ; г) $120^\circ$ .

Сейчас ответим на вопрос: КАК РЕШАТЬ СЛОЖНУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ? Для примера рассмотрим задачу 229\* из учебного пособия «Геометрия» для 7-го класса и проанализируем поиск решения такой задачи.

**Задача 229\*** (7-й класс). В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $BN$  и  $CK$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если  $CH = AB$ .

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $BN$  и  $CK$  — высоты,  $CH = AB$ .

Найти:  $\angle ACB$ .



**Анализ поиска решения задачи.**

При решении геометрической задачи полезно найти величины всех возможных углов и всех возможных отрезков, а также установить равенство каких-то углов и каких-то отрезков, которое не дано непосредственно в условии задачи. Обратимся к нашей задаче.

1) Самое простое, что можно отметить, так это равенство вертикальных углов 1 и 2. Из прямоугольных треугольников  $BKH$  и  $CNH$  следует, что  $\angle 3 = \angle 4$  (сумма острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ ).

2) Снова вернемся к условию задачи и подумаем, как объединить условия:  $AB = CH$  и  $\angle 3 = \angle 4$ . Можно прийти к идее рассмотрения прямоугольных треугольников  $ANB$  и  $HNC$ . У них равны острые углы 3 и 4 и равны гипотенузы  $AB$  и  $CH$ . Значит,  $\triangle ANB = \triangle HNC$  по гипотенузе и острому углу (признак равенства прямоугольных треугольников).

3) После доказательства равенства треугольников обычно записывают, что следует из этого равенства. В нашем случае:  $AN = HN$  и  $BN = CN$ .

4) Обратимся к тому, что следует найти:  $\angle ACB$ . Как этот угол связан со сторонами  $BN$  и  $NC$ ? Очевидно, следует рассмотреть треугольник  $BNC$ . Он равнобедренный ( $BN = CN$ ) и прямоугольный ( $BN$  — высота). Тогда  $\angle NCB = \angle NBC = 45^\circ$  (углы при основании равнобедренного треугольника равны).

Ответ:  $\angle ACB = 45^\circ$ .

Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия» для 8-го класса можно найти на сайте: <http://eior.by> (Единый информационно-образовательный ресурс). Выберите в меню «8 класс», «Геометрия». В соответствующей теме нажмите кнопку «Дополнительные материалы».



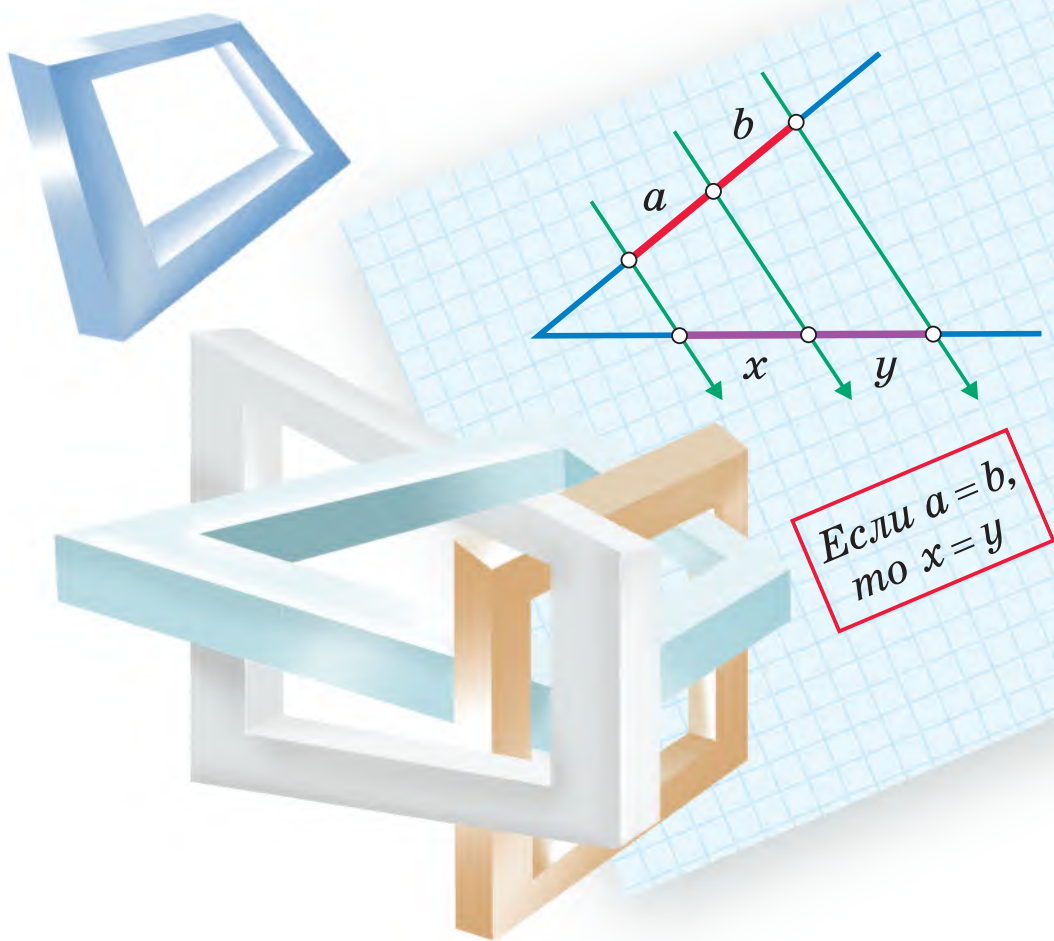


## Глава I

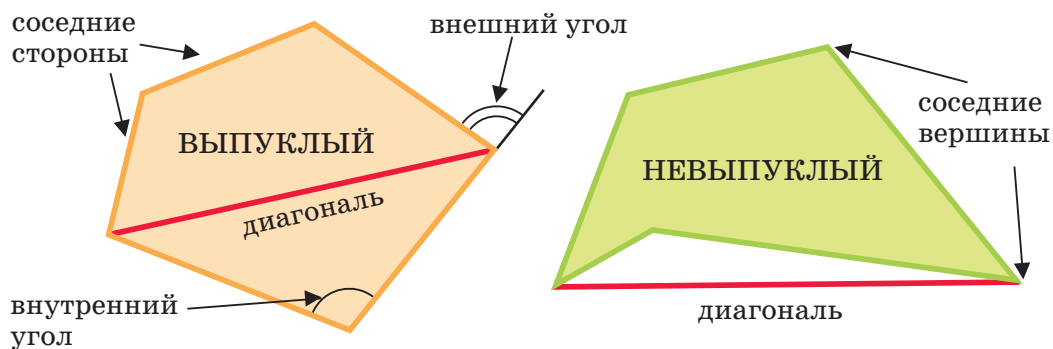
# Четырехугольники

В этой главе вы узнаете:

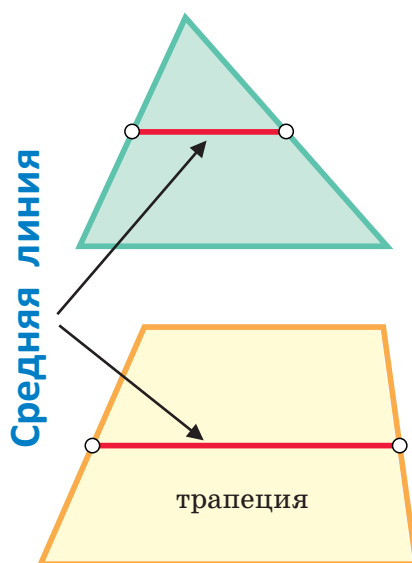
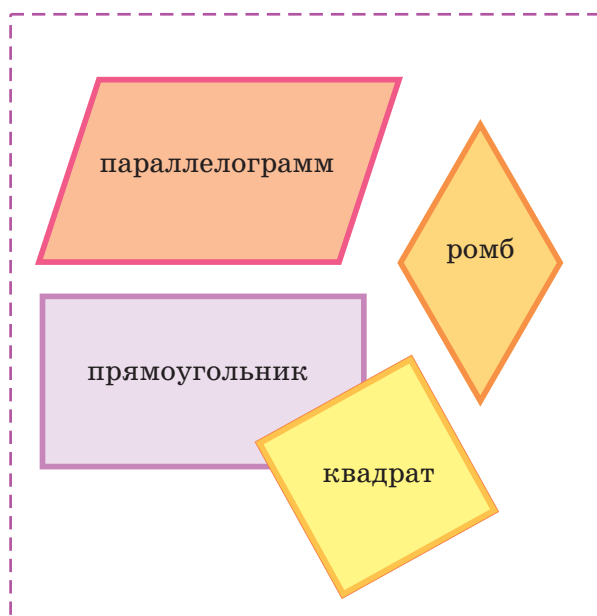
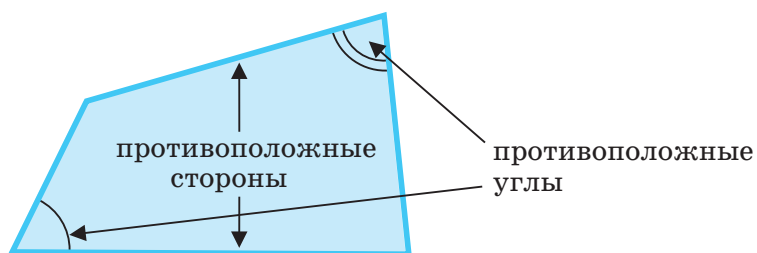
- Виды многоугольников
- Свойства параллелограмма и трапеции
- О чем говорит теорема Фалёса



## Многоугольники



## Четырехугольники



## § 1. Многоугольник

**Определение.** **Многоугольником** называется простая замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

Вершины этой ломаной называются *вершинами многоугольника*, ее звенья — *сторонами многоугольника*. *Периметром многоугольника* называется сумма длин его сторон. По свойству ломаной длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин оставшихся сторон.

**Определение.** Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону. В противном случае он называется **невыпуклым**.

На рисунке 1, а) изображен выпуклый пятиугольник  $ABCDE$ , на рисунке 1, б) — невыпуклый четырехугольник  $ABCD$  (вершины  $A$  и  $B$  лежат в разных полуплоскостях относительно прямой  $CD$ ). Фигура, изображенная на рисунке 1, в), не является многоугольником, так как ломаная  $ABCDE$  непростая.

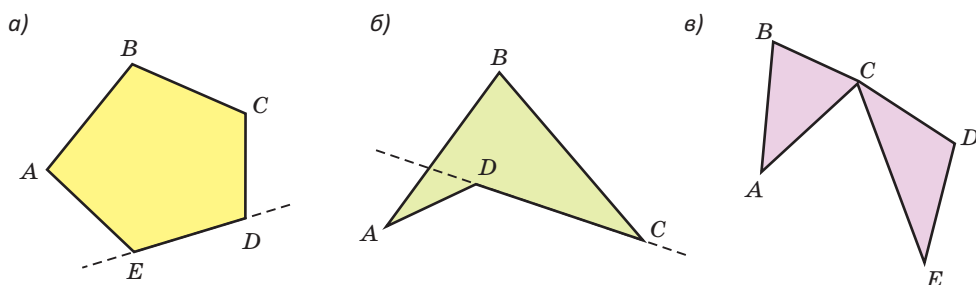


Рис. 1

Стороны многоугольника, имеющие общую вершину, называются *соседними сторонами*; вершины, являющиеся концами одной стороны, — *соседними вершинами*, а углы при этих вершинах — *соседними углами* многоугольника. При этом *углом выпуклого многоугольника* (иногда говорят *внутренним углом*) называется угол между соседними сторонами, содержащий этот многоугольник.

Например, на рисунке 1, а) стороны  $AB$  и  $BC$  — соседние, вершины  $A$  и  $B$  — соседние,  $\angle A$  и  $\angle B$  — соседние углы.

Каждый угол выпуклого многоугольника меньше  $180^\circ$ . Невыпуклый многоугольник имеет, по крайней мере, один угол, больший  $180^\circ$ .

**Определение.** **Диагональю** многоугольника называется отрезок, который соединяет две несоседние вершины многоугольника.

У любого четырехугольника четыре стороны, четыре вершины, четыре внутренних угла, две диагонали. Две несоседние стороны называются *противоположными* (или *противолежащими*) сторонами, две несоседние вершины — *противоположными вершинами*, а углы при этих вершинах — *противоположными углами* четырехугольника.

У четырехугольника  $ABCD$  (рис. 2, а) стороны  $AB$  и  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$  — противоположные, вершины  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$ , а также углы при этих вершинах — противоположные. Отрезки  $AC$  и  $BD$  — диагонали четырехугольника  $ABCD$ . Диагональ  $AC$  разбивает четырехугольник  $ABCD$  на два треугольника  $ABC$  и  $ADC$  (рис. 2, б).

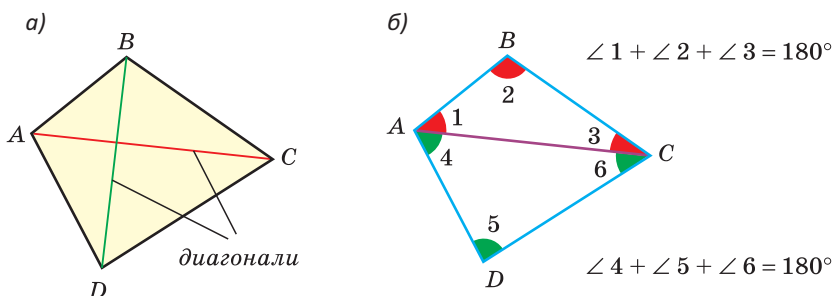


Рис. 2

Сумма углов четырехугольника  $ABCD$  равна сумме углов этих треугольников. Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , то *сумма углов четырехугольника равна  $180^\circ \cdot 2$ , то есть  $360^\circ$ .*

Многоугольник, у которого  $n$  сторон, имеет  $n$  вершин,  $n$  углов и называется  *$n$ -угольником*. Выведем формулу, позволяющую находить сумму углов любого выпуклого  $n$ -угольника.

**Теорема (о сумме углов  $n$ -угольника).**

**Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ .**

Дано:  $A_1A_2...A_n$  — выпуклый  $n$ -угольник.

Доказать:  $\angle A_1 + \angle A_2 + ... + \angle A_n = 180^\circ(n - 2)$ .



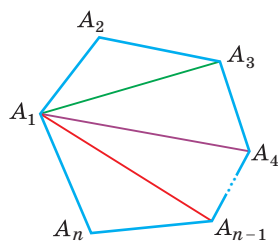


Рис. 3

**Доказательство.** Проведем из вершины  $A_1$  диагонали  $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$  (рис. 3). Наш  $n$ -угольник разобьется на  $n - 2$  треугольника (без учета сторон  $A_1A_2$  и  $A_1A_n$  останется  $n - 2$  стороны, и на каждую придется по одному треугольнику). В каждом треугольнике сумма углов равна  $180^\circ$ . Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов данного  $n$ -угольника, т. е.  $\angle A_1 + \angle A_2 + \dots + \angle A_n = 180^\circ(n - 2)$ .

Теорема доказана.

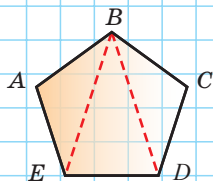
**Замечание.** Теорема справедлива и для невыпуклого многоугольника.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите сумму углов 5-угольника, используя разбиение его на треугольники.

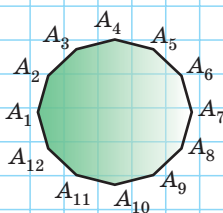
- а)  $360^\circ$ ;      в)  $300^\circ$ ;  
б)  $540^\circ$ ;      г)  $400^\circ$ .



### Тест 2

Найдите сумму углов 12-угольника при помощи формулы суммы углов  $n$ -угольника.

- а)  $1200^\circ$ ;      в)  $1800^\circ$ ;  
б)  $1600^\circ$ ;      г)  $2400^\circ$ .



## Задания к § 1

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

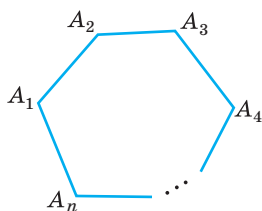


Рис. 4

**Задача 1.** Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $3600^\circ$ . Найти число сторон этого многоугольника (рис. 4).

**Решение.** Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ , где  $n$  — число его сторон. По условию  $180^\circ(n - 2) = 3600^\circ$ , откуда  $n - 2 = \frac{3600}{180}$ ,  $n - 2 = 20$ ,  $n = 22$ .

Ответ: 22.

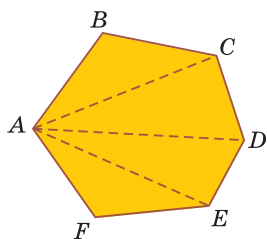


Рис. 5

**Задача 2.** Найти число диагоналей шестиугольника.

**Решение.** Пусть  $ABCDEF$  — некоторый шестиугольник. Из вершины  $A$  можно провести 3 диагонали (рис. 5). Из вершины  $B$  также можно провести 3 диагонали. Так как из каждой из шести вершин можно провести по 3 диагонали, получим  $6 \cdot 3 = 18$  «выходящих» диагоналей. При этом каждая диагональ шестиугольника учитывается дважды: вначале для одной, а затем для другой вершины. Поэтому всего диагоналей в 2 раза меньше, то есть  $18 : 2 = 9$ .

Ответ: 9.

**Замечание.** Рассуждая аналогично, можно вывести формулу числа диагоналей  $n$ -угольника. Из каждой вершины  $n$ -угольника будет выходить  $(n - 3)$  диагонали (из данной вершины в нее саму и в две соседние вершины диагонали провести нельзя). Поскольку всего вершин  $n$ , то число диагоналей  $N_d = \frac{n(n - 3)}{2}$ .

**Задача 3.** Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с его внутренним углом. Доказать свойство: «Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна  $360^\circ$ ».

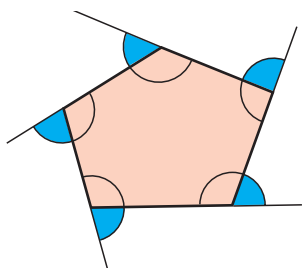


Рис. 6

**Доказательство.** Чтобы найти сумму внешних (закрашенных) углов выпуклого  $n$ -угольника (рис. 6), нужно от суммы развернутых углов, взятых по одному при каждой вершине, отнять сумму его внутренних углов.

Получим:

$$180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n - 2) = 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot n + 360^\circ = 360^\circ.$$



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найдите сумму углов выпуклого:

- шестиугольника;
- десятиугольника;
- семнадцатиугольника.

2. Решите следующие задачи:

- Найдите  $\angle D$  четырехугольника  $ABCD$  (рис. 7, а).
- Найдите  $\angle C$  пятиугольника  $ABCDE$  (рис. 7, б).

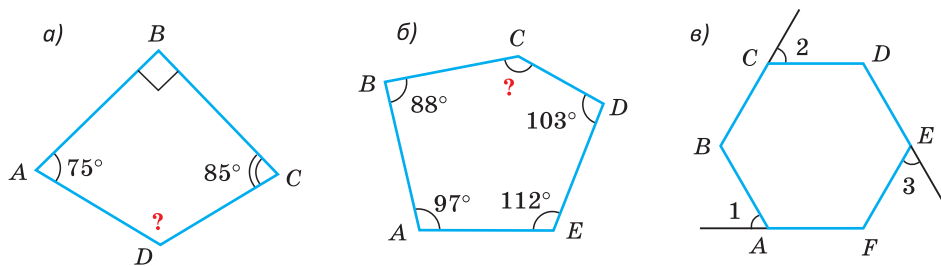


Рис. 7

в) Найдите сумму  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ , если у шестиугольника  $ABCDEF$  все внутренние углы равны между собой (рис. 7, в).

3. Нарисуйте выпуклый пятиугольник  $ABCDE$  и проведите все его диагонали. При помощи формулы  $N_d = \frac{n(n-3)}{2}$  найдите число диагоналей пятиугольника и сравните его с числом диагоналей, проведенных вами.
4. Сумма углов  $n$ -угольника равна  $900^\circ$ . Все его стороны равны по 6 см. Найдите периметр этого  $n$ -угольника.
5. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, если у него все углы равны и каждый угол содержит:
  - а)  $60^\circ$ ;                      б)  $108^\circ$ ;                      в)  $120^\circ$ .
6. Найдите углы четырехугольника  $MNPК$ , если известно, что  $\angle M : \angle N : \angle P : \angle K = 2 : 7 : 3 : 8$ . Используя транспортир, изобразите такой четырехугольник.
7. а) У четырехугольника два противоположных угла прямые, третий угол на  $20^\circ$  меньше четвертого угла. Найдите наибольший угол четырехугольника.  
 б) У четырехугольника три угла равны, а четвертый в 2 раза больше каждого из этих углов. Найдите углы четырехугольника.
8. а) Периметр четырехугольника равен 6 м. Одна из сторон равна 120 см, а три оставшиеся стороны равны между собой. Найдите длину неизвестных сторон четырехугольника и выразите ее в сантиметрах.  
 б) Периметр четырехугольника равен 78 см, две соседние его стороны относятся как 1 : 3, третья сторона равна 24 см, а четвертая составляет 75 % третьей стороны. Найдите наименьшую сторону четырехугольника.
9. Вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  некоторого четырехугольника находятся в узлах тетрадной сетки (рис. 8). Найдите двумя способами величину угла при четвертой вершине четырехугольника, которая недоступна.

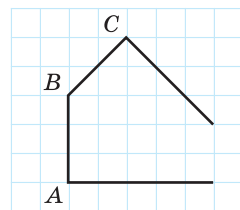


Рис. 8

10. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше:

- а) суммы длин двух его противоположных сторон;
- б) его полупериметра.

11. Дан невыпуклый четырехугольник (рис. 9). Докажите, что  $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ .

12. У некоторого выпуклого многоугольника число диагоналей равно числу его сторон. Найдите сумму углов этого многоугольника.

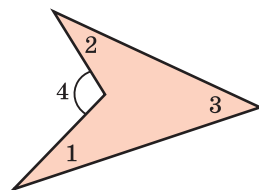


Рис. 9

13.  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $\angle A = 80^\circ$ ,  $\angle D = 70^\circ$ . Найдите угол между биссектрисами углов  $B$  и  $C$ , обращенный к стороне  $BC$ .

14. В точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены магазины (рис. 10). Найдите положение точки  $M$ , в которой следует разместить склад, чтобы сумма расстояний от склада до магазинов была наименьшей.

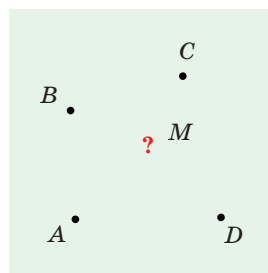


Рис. 10

15. Длины сторон пятиугольника  $ABCDE$  выражены целыми числами. Известно, что  $AB = 1$  см,  $BC = 3$  см,  $CD = 5$  см,  $DE = 10$  см. Какую наибольшую и какую наименьшую длину может иметь сторона  $AE$ ?

16. Определите, какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник.

### Реальная геометрия



Рис. 11

На рисунке 11 изображен фрагмент карты города. Улицы Тенистая и Виноградная пересекаются под прямым углом, улица Абрикосовая пересекается с улицей Виноградной под углом  $74^\circ$ , а с улицей Вишневой — под углом  $80^\circ$ . Определите, какой угол составляют улицы:

- а) Вишневая и Тенистая;
- б) Тенистая и Абрикосовая;
- в) Виноградная и Вишневая.

Выясните, существуют ли в вашем населенном пункте улицы, названные в честь героев Великой Отечественной войны.



**Три совета:****Как научиться решать задачи по геометрии**

**Совет 1.** Приступая к решению задачи, желательно прочесть ее условие несколько раз, чтобы ясно понимать, что в задаче дано, а что требуется найти (доказать). Далее следует сделать чертеж (если он не прилагается), наиболее близко отражающий условие задачи. При этом, если сказано, что дан четырехугольник, не стоит чертить прямоугольник, а если дан произвольный треугольник, то построенные вами равнобедренный или равносторонний треугольники могут привести к неправильным рассуждениям. Следует быть готовым к тому, что придется построить несколько чертежей, чтобы выбрать наиболее подходящий.

**Совет 2.** Если сразу не удастся составить план решения задачи, нужно получить все дополнительные данные, вытекающие из условия. Первым делом необходимо найти величины всех углов и всех отрезков, которые только можно. Затем следует еще раз прочитать, что требуется найти или доказать.

**Совет 3.** Древние греки говорили: «Чтобы научиться плавать, нужно лезть в воду». Аналогично можно сказать: «Чтобы научиться решать задачи по геометрии, нужно их решать». Решение большого количества простых и средних по сложности задач — лучший способ научиться решать более сложные задачи.

## § 2. Параллелограмм и его свойства

**Определение.** Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

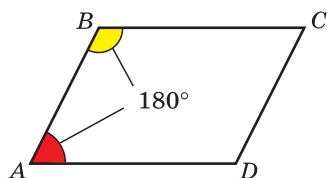


Рис. 12

На рисунке 12 изображен параллелограмм  $ABCD$ , у него  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ .

По свойству односторонних углов при параллельных прямых и секущей  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ . Справедливо свойство: «Сумма соседних углов параллелограмма равна  $180^\circ$ ».

**Определение.** Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из точки прямой, содержащей одну из сторон параллелограмма, к прямой, содержащей противоположную сторону (основание параллелограмма).

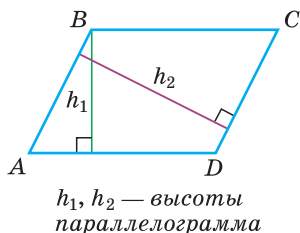


Рис. 13

Высотой параллелограмма также называется *длина* указанного перпендикуляра. Все высоты параллелограмма, проведенные к данному основанию, равны между собой как расстояния между параллельными прямыми.

Высота  $h_1$  параллелограмма  $ABCD$  (рис. 13) проведена к основанию  $AD$ , высота  $h_2$  — к основанию  $DC$ . Из свойств параллельных прямых следует, что  $h_1 \perp BC$ ,  $h_2 \perp AB$ .

**Теорема (о свойстве сторон и углов параллелограмма).**

**У параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.**

Дано:  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 14).

Доказать:  $AB = CD$ ,  $BC = AD$ ;  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ .

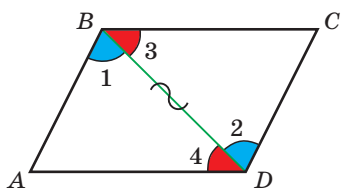


Рис. 14

**Доказательство.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ . Проведем диагональ  $BD$ . Получим два треугольника  $ABD$  и  $CDB$ , которые равны по 2-му признаку равенства треугольников (сторона  $BD$  — общая,  $\angle 1 = \angle 2$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BD$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $BD$ ). Из равенства этих треугольников следует, что  $AD = BC$ ,  $AB = CD$ ,  $\angle A = \angle C$ . Углы  $B$  и  $D$  параллелограмма равны как суммы равных углов:  $\angle B = \angle 1 + \angle 3$ ,  $\angle D = \angle 2 + \angle 4$ . Теорема доказана.

### Следствие.

Периметр параллелограмма со сторонами  $a$  и  $b$  находится по формуле  $P = 2(a + b)$ .

При доказательстве теоремы получено еще одно свойство параллелограмма: «**Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника**».

**Теорема (о свойстве диагоналей параллелограмма).**

**Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

Дано:  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 15).

Доказать:  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ .

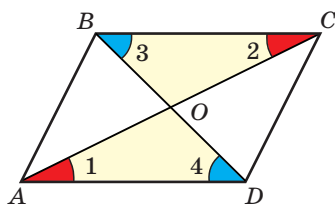


Рис. 15

Доказательство. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ . Треугольники  $AOD$  и  $COB$  равны по 2-му признаку равенства треугольников ( $\angle 1 = \angle 2$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AC$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $BD$ ,  $AD = BC$  как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства этих треугольников следует, что  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ . Теорема доказана.

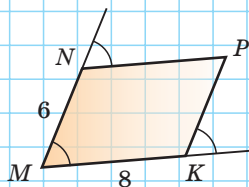
*Замечание.* Точка пересечения диагоналей параллелограмма называется *центром параллелограмма*.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите периметр четырехугольника  $MNPК$ .

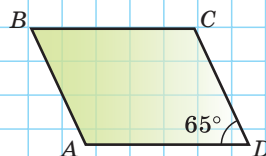
а) 14; б) 48; в) 28; г) 32.



### Тест 2

Найдите сумму углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$ .

а)  $115^\circ$ ; б)  $235^\circ$ ; в)  $180^\circ$ ; г)  $295^\circ$ .



### Внимание!

Если на рисунке к задаче и в ее условии не указана размерность (например, как в **Тесте 1**), то подразумевается, что длины отрезков выражены в одних и тех же единицах. Ответ для такой задачи приводится без размерности.



### Задания к § 2

**РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**  
ключевые задачи

**Задача 1.**  $ABCD$  — параллелограмм,  $BK$  и  $BM$  — его высоты,  $\angle KBM = 60^\circ$ ,  $AK = 3$  см,  $KD = 7$  см. Найти:  $\angle ABK$ ,  $\angle A$ , сторону  $AB$ , периметр параллелограмма  $ABCD$ .

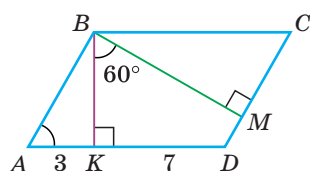


Рис. 16

Решение. Так как  $BM \perp AB$  (рис. 16), то  $\angle ABM = 90^\circ$ ,  $\angle ABK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . В прямоугольном треугольнике  $ABK$   $\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Поскольку в треугольнике  $ABK$  катет  $AK$  лежит против угла в  $30^\circ$ , то он равен половине гипотенузы. Отсюда гипотенуза  $AB = 2AK = 6$  см. Так как  $AD = AK + KD = 10$  см, то  $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(6 + 10) = 32$  (см).

Ответ:  $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ; 6 см; 32 см.

*Замечание.* Так как  $\angle A$  и  $\angle KBM$  дополняют  $\angle ABK$  до  $90^\circ$ , то  $\angle A = \angle KBM$ . Полезно запомнить свойство: «Угол между высотами параллелограмма, проведенными из его вершины, равен углу при соседней вершине».

**Задача 2.** Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ ,  $AD = 12$  см,  $AB = 10$  см. Найти длину отрезка  $KC$  (рис. 17).

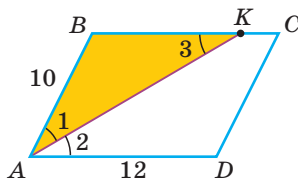


Рис. 17

Решение.

- 1)  $\angle 1 = \angle 2$  ( $AK$  — биссектриса);
- 2)  $\angle 2 = \angle 3$  (как накрест лежащие углы при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AK$ );
- 3)  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\triangle ABK$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника);
- 4)  $AB = BK = 10$  см (как боковые стороны равнобедренного треугольника);
- 5)  $BC = AD = 12$  см (как противоположные стороны параллелограмма);
- 6)  $KC = BC - BK = 12 - 10 = 2$  (см).

Ответ: 2 см.

*Замечание.* В ходе решения задачи доказано свойство: «Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник».

**Задача 3.** Доказать, что любой отрезок с концами на сторонах параллелограмма, проходящий через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.

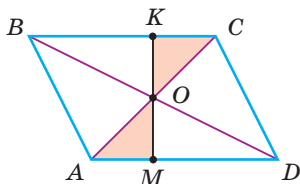


Рис. 18

Доказательство. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм,  $KM$  — указанный отрезок (рис. 18). Докажем, что  $OK = OM$ . Рассмотрим  $\triangle AOM$  и  $\triangle COK$ . У них  $AO = OC$  (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам),  $\angle OAM = \angle OCK$  (как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AC$ ),  $\angle AOM = \angle COK$  (как вертикальные). Значит,  $\triangle AOM = \triangle COK$  (по 2-му при-



знаку равенства треугольников). Из равенства треугольников следует, что  $OM = OK$ . Утверждение доказано.

### Следствие.

Так как точки  $K$  и  $M$  симметричны относительно точки пересечения диагоналей, то можно сделать вывод, что параллелограмм — центрально-симметричная фигура и центр параллелограмма является его центром симметрии (подробнее симметрия будет рассмотрена в § 12).

### Гимнастика ума

Параллелограмм  $ABCD$  разрезали по ломаной линии, соединяющей вершины  $B$  и  $D$  (рис. 19). Определите, периметр какой части параллелограмма больше: желтой или красной.

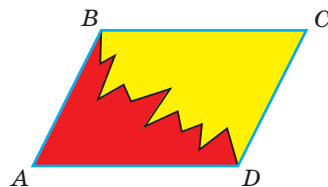


Рис. 19



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

17. Перенесите рисунок 20 в тетрадь. Постройте параллелограмм  $ABCD$ . Чему равна длина стороны  $BC$ ? Чем является отрезок  $BH$  для параллелограмма  $ABCD$ ? Проведите высоту  $CM$  к стороне  $AD$ . Почему из равенства треугольников  $ABH$  и  $DCM$  следует, что  $AB \parallel CD$ ?

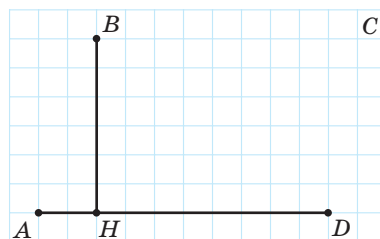


Рис. 20

18. По данным на рисунках 21, а)–г) докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

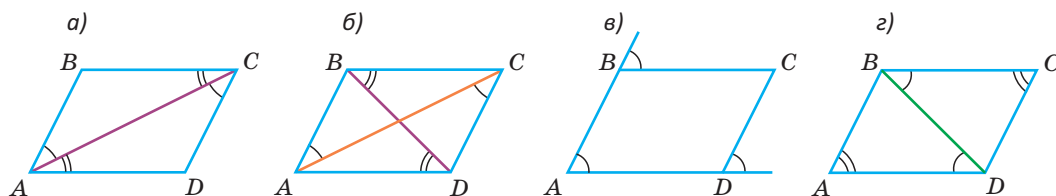


Рис. 21

19. Найдите неизвестные углы параллелограмма  $ABCD$ , если:
- а)  $\angle B = 130^\circ$ ;
  - б)  $\angle A + \angle C = 140^\circ$ ;
  - в) угол  $A$  на  $20^\circ$  меньше угла  $B$ ;
  - г)  $\angle C : \angle B = 2 : 7$ ;
  - д)  $\angle BAC = 35^\circ$ ,  $\angle DAC = 25^\circ$ ;
  - е)  $\angle D - 2\angle C = 12^\circ$ .
20. Периметр параллелограмма  $ABCD$  равен 48 см. Найдите его стороны, если:
- а)  $CD = 10$  см;
  - б) сторона  $AD$  на 2 см больше стороны  $AB$ ;

- в)  $AB : AD = 3 : 5$ ;  
 г)  $AB + BC + CD = 32$  см;  
 д)  $\angle BAC = \angle DAC$ .

21. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 22). Найдите:  
 а) периметр треугольника  $AOB$ , если  $AC = 20$  см,  $BD = 16$  см,  $CD = 10$  см;  
 б) периметр параллелограмма  $ABCD$ , если  $AC = 14$  см,  $BD = 12$  см,  $P_{AOB} = 21$  см,  $P_{ABD} = 33$  см.
22. В параллелограмме  $ABCD$   $AN = 16$  см,  $BP = 7$  см,  $KD = 6$  см,  $AM = 18$  см (рис. 23). Найдите периметр параллелограмма.
23. В параллелограмме  $ABCD$  проведена высота  $CK$ ,  $\angle A = 120^\circ$ ,  $BC = 11$  см,  $AK = 7$  см (рис. 24). Найдите периметр параллелограмма.

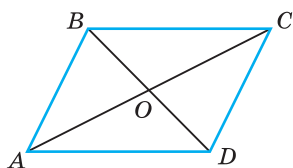


Рис. 22

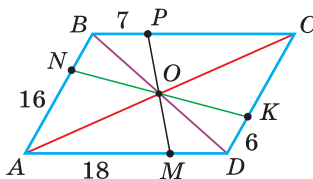


Рис. 23

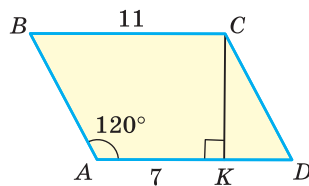


Рис. 24

24. а) Периметр параллелограмма  $ABCD$  равен 36 см, периметр треугольника  $ABC$  равен 28 см,  $\angle ACB = 30^\circ$ . Найдите:  
 1) отрезок  $AC$ ;  
 2) высоту  $CK$ , опущенную на сторону  $AD$ .  
 б) Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  перпендикулярна стороне  $AB$ ,  $P_{ABCD} = 30$  см,  $\angle ADC = 120^\circ$ . Найдите стороны параллелограмма.
25. а) Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма  $ABCD$  ( $AD \neq AB$ ) параллельны между собой.  
 б) Докажите, что биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны.
26. Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  делит сторону  $BC$  на отрезки  $BK = 6$  см,  $KC = 4$  см. Найдите периметр параллелограмма.
27. Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ , которая принадлежит стороне  $AD$ . Найдите периметр параллелограмма, если  $KD = 8$  см.
28. Треугольник  $ABC$  — равнобедренный,  $AB = BC = 12$  см (рис. 25). Найдите периметр параллелограмма  $MBNK$ .

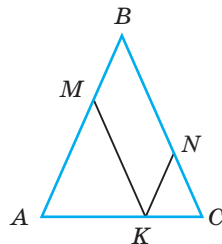


Рис. 25

29. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ ,  $\angle ABC = 104^\circ$ ,  $\angle BAM = 38^\circ$ . Найдите величину угла  $CDM$ .
30.  $ABCD$  — параллелограмм,  $\angle A$  — острый,  $AH$  и  $AK$  — высоты, проведенные к сторонам  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $\angle HAK = \angle B$ . Найдите  $\angle B$ , если  $\angle HAK : \angle C = 3 : 2$ .
31. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$ ,  $KE \parallel AC$ ,  $EH \parallel BC$  (рис. 26). Докажите, что  $EK = AE$ . По данным на рисунке найдите длины отрезков  $HC$  и  $AH$ .
32. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки параллелограмма:  
а) по двум соседним сторонам и углу между ними;  
б) по двум соседним сторонам и высоте, проведенной к одной из сторон.
33. Сформулируйте какой-либо признак равенства параллелограммов и докажите его. (Фигуры равны, если их можно совместить наложением.)
34. Дан угол  $A$  и точка  $M$  внутри него. Постройте при помощи циркуля и линейки отрезок с концами на сторонах угла  $A$ , проходящий через точку  $M$ , который делится точкой  $M$  пополам.

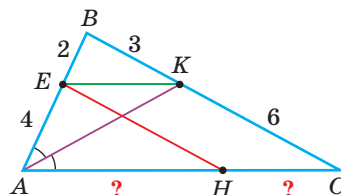


Рис. 26

### § 3. Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

**Теорема (признак параллелограмма).**

Если у четырехугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

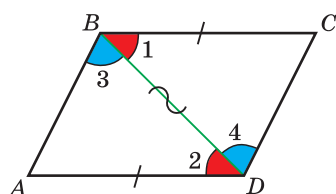


Рис. 27

Дано: четырехугольник  $ABCD$ ,  $BC = AD$ ,  $BC \parallel AD$  (рис. 27).

Доказать:  $ABCD$  — параллелограмм.

Доказательство. Проведем в четырехугольнике  $ABCD$  диагональ  $BD$ . Треугольники  $ABD$  и  $CDB$  равны по 1-му признаку равенства треугольников ( $AD = BC$  по условию,  $\angle 1 = \angle 2$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BD$ , сторона  $BD$  — общая). Из равенства треугольников следует, что  $\angle 3 = \angle 4$ . А так как  $\angle 3$  и  $\angle 4$  по своему расположению — накрест лежащие углы при прямых  $AB$

и  $CD$  и секущей  $BD$ , то  $AB \parallel CD$  (по признаку параллельности прямых). Таким образом, у четырехугольника  $ABCD$  противоположные стороны параллельны. Поэтому  $ABCD$  — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

**Теорема (признак параллелограмма).**

**Если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

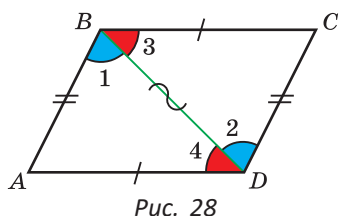


Рис. 28

Дано: четырехугольник  $ABCD$ ,  $BC = AD$ ,  $AB = CD$  (рис. 28).

Доказать:  $ABCD$  — параллелограмм.

Доказательство. Проведем диагональ  $BD$ . Треугольники  $ABD$  и  $CDB$  равны по трем сторонам ( $AD = BC$ ,  $AB = CD$  по условию, сторона  $BD$  — общая). Из равенства треугольников следует, что  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 3 = \angle 4$ . А так как  $\angle 3$  и  $\angle 4$  — накрест лежащие углы при прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BD$ , то  $BC \parallel AD$  (по признаку параллельности прямых).

Аналогично, так как  $\angle 1$  и  $\angle 2$  — накрест лежащие углы при прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BD$ , то  $AB \parallel CD$ . Поскольку у четырехугольника  $ABCD$  противоположные стороны параллельны, то  $ABCD$  — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

**Теорема (признак параллелограмма).**

**Если у четырехугольника диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.**

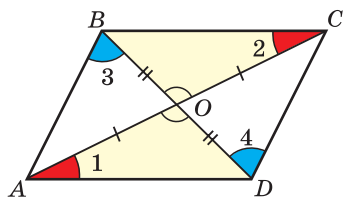


Рис. 29

Дано: четырехугольник  $ABCD$ ,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$  (рис. 29).

Доказать:  $ABCD$  — параллелограмм.

Доказательство. Треугольники  $AOD$  и  $COB$  равны по 1-му признаку равенства треугольников ( $\angle AOD = \angle COB$  как вертикальные,  $AO = OC$ ,  $BO = OD$  по условию). Из равенства треугольников следует, что  $\angle 1 = \angle 2$ . Но углы 1 и 2 — накрест лежащие при прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AC$ . По признаку параллельности прямых  $AD \parallel BC$ . Аналогично, треугольники  $AOB$

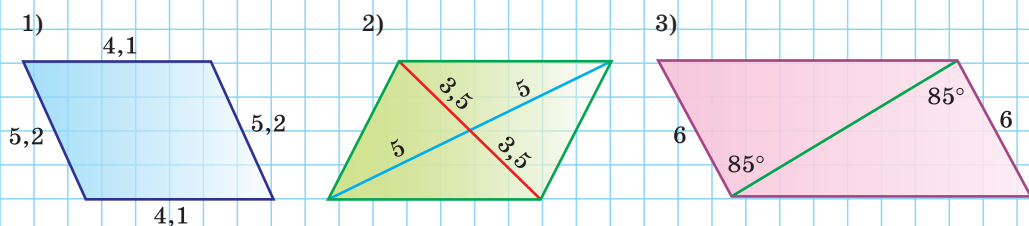
и  $COD$  равны по 1-му признаку равенства треугольников, откуда  $\angle 3 = \angle 4$ ,  $AB \parallel CD$ . Так как у четырехугольника  $ABCD$  противоположные стороны параллельны, то он — параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Какой из изображенных на рисунках четырехугольников не является параллелограммом?

а) 1); б) 2); в) 3); г) все являются.



### Тест 2

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника две противоположные стороны равны, а две другие параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм»? Если ваш ответ «нет», то приведите *контрпример* (пример, опровергающий это утверждение).



При помощи **Интернета** выясните, как в математике называется точка пересечения высот треугольника.



### Задания к § 3

#### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . На его сторонах  $BC$  и  $AD$  отложены равные отрезки  $BK$  и  $DM$ . Доказать, что  $AKCM$  — параллелограмм.

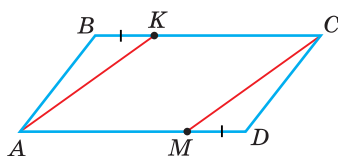


Рис. 30

**Доказательство.** У любого параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Поэтому  $AD = BC$  и  $AD \parallel BC$  (рис. 30). Так как  $KC = BC - BK$ ,  $AM = AD - DM$  и по условию  $BK = DM$ , то  $KC = AM$ . Поскольку у четырехугольника  $AKCM$  стороны  $KC$  и  $AM$  равны и параллельны, то он является параллелограммом по признаку параллелограмма.



**Задача 2.** Построить при помощи циркуля и линейки параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

Решение. Пусть  $d_1$  и  $d_2$  — данные диагонали,  $\beta$  — угол между ними (рис. 31, а).

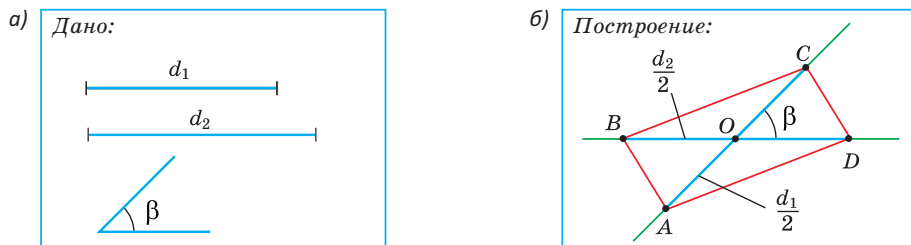


Рис. 31

Построение (алгоритм). Делим каждую из диагоналей  $d_1$  и  $d_2$  пополам (вспомните, как это делается при помощи циркуля и линейки). Строим угол  $O$ , равный углу  $\beta$  (вспомните алгоритм построения). На сторонах угла  $O$  и на их продолжениях откладываем отрезки  $OC = OA = \frac{d_1}{2}$  и  $OD = OB = \frac{d_2}{2}$  (рис. 31, б). Проводим отрезки  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . Четырехугольник  $ABCD$  — искомый параллелограмм.

Доказательство. У четырехугольника  $ABCD$  диагонали точкой пересечения делятся пополам (по построению), поэтому он является параллелограммом (по признаку параллелограмма). Диагонали  $AC$  и  $BD$  равны  $d_1$  и  $d_2$ , и угол  $AOB$  между диагоналями равен  $\beta$  (по построению).

**Задача 3.** Доказать, что высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

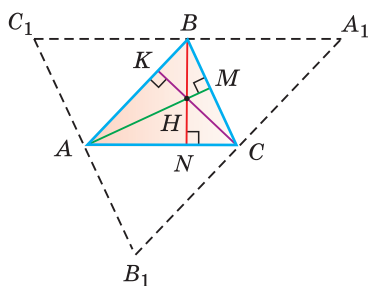


Рис. 32

Доказательство. Пусть  $AM$ ,  $BN$  и  $CK$  — высоты треугольника  $ABC$  (рис. 32). Через вершины треугольника  $ABC$  проведем прямые, параллельные противоположным сторонам. В их пересечении получим треугольник  $A_1B_1C_1$ . Так как  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $A_1C_1 \parallel AC$ , то  $ABA_1C$  — параллелограмм, откуда  $BA_1 = AC$ . Аналогично  $AC_1BC$  — параллелограмм и  $C_1B = AC$ . Тогда  $C_1B = BA_1$ . Значит, точка  $B$  — середина отрезка  $A_1C_1$ . Так как  $AC \parallel A_1C_1$  и  $BN \perp AC$ , то  $BN \perp A_1C_1$  (прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой). Прямая  $BN$  — серединный перпендикуляр к стороне  $A_1C_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ . Аналогично

доказывается, что прямые  $AM$  и  $CK$  — серединные перпендикуляры к сторонам  $B_1C_1$  и  $A_1B_1$  соответственно. А мы знаем, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (Геометрия, 7 класс, с. 85, ключевая задача 2). Следовательно, высоты  $AM$ ,  $BN$  и  $CK$  (или их продолжения в случае тупоугольного треугольника) пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 35.** Перенесите рисунок 33 в тетрадь. Проведите (вправо) отрезок  $BC$ , равный и параллельный отрезку  $AD$ . Объясните, почему четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите приближенно периметр параллелограмма  $ABCD$ . Выразите его в сантиметрах.

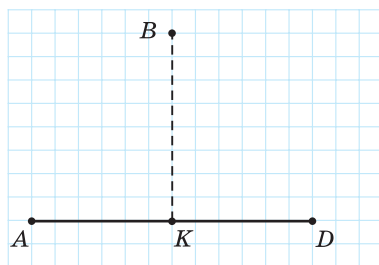


Рис. 33

- 36.** Используя данные на рисунках 34, а)–г), докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

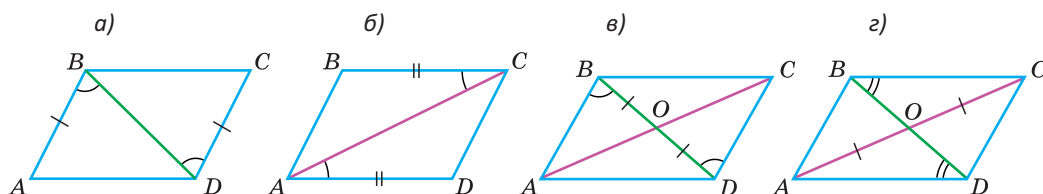


Рис. 34

- 37.** Используя данные на рисунках 35, а)–в), ответьте на следующие вопросы:

- Почему на рисунке 35, а)  $AD \parallel BC$ ?
- Почему на рисунке 35, б)  $\angle A = \angle C$ ?
- Почему на рисунке 35, в)  $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$ ?

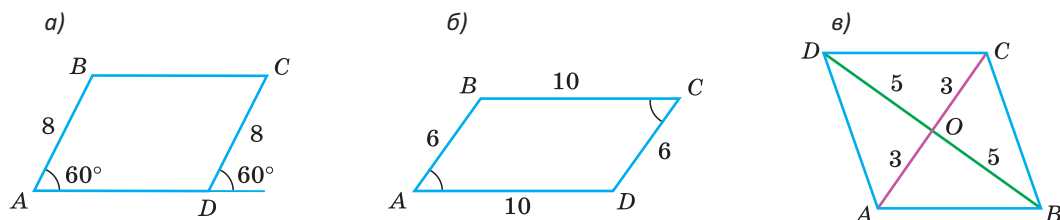


Рис. 35

38. По данным на рисунке 36 найдите периметр четырехугольника  $ABCD$ .
39. Отрезки  $AC$  и  $BD$  (рис. 37) пересекаются в их серединах. Известно, что  $\angle DAB = 126^\circ$ . Найдите  $\angle ADC$ .
40. Дан параллелограмм  $ABCD$  (рис. 38). На его диагонали  $BD$  отложены равные отрезки  $BG$  и  $DF$ . Докажите, что четырехугольник  $AGCF$  — параллелограмм.

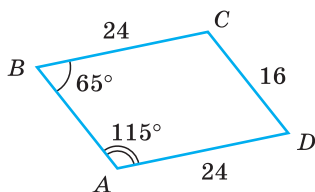


Рис. 36

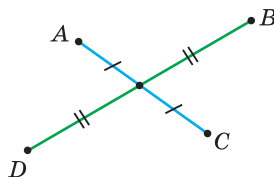


Рис. 37

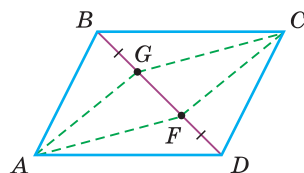


Рис. 38

41.  $ABCD$  — параллелограмм,  $K$  — середина стороны  $AB$ ,  $M$  — середина стороны  $DC$ . Докажите, что:
- а)  $AKMD$  — параллелограмм;      б)  $KBMD$  — параллелограмм.
42.  $MNPK$  — четырехугольник,  $MN = PK$ ,  $NP = MK$ ,  $\angle M = 72^\circ$ . Найдите:
- а) градусные меры углов  $MKP$  и  $NPK$ ;
- б) угол между биссектрисой угла  $K$  и прямой  $NP$ .
43. У выпуклого четырехугольника  $ABCD$   $AB = CD = 8$  см,  $\angle ABD = \angle CDB$ , диагонали пересекаются в точке  $O$ ,  $P_{ABO} = 20$  см,  $P_{BOC} = 22$  см. Найдите периметр этого четырехугольника.

44. Докажите, что если у четырехугольника противоположные углы равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

45. Медиану  $BM$  треугольника  $ABC$  продолжили за точку  $M$  на отрезок  $MD$ , равный отрезку  $BM$ . Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

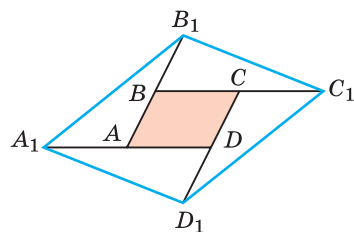


Рис. 39

46. Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 39),  $BB_1 = AB$ ,  $CC_1 = BC$ ,  $DD_1 = CD$ ,  $AA_1 = DA$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  — параллелограмм.

47. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $K$  — середины сторон параллелограмма  $ABCD$  (рис. 40). Докажите, что закрашенный четырехугольник — параллелограмм.

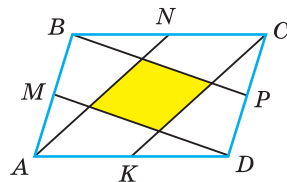


Рис. 40

48. Точки  $P(-1; 1)$ ,  $E(-3; 5)$ ,  $K(4; 5)$  — вершины параллелограмма. Найдите координаты четвертой вершины  $G$ . Рассмотрите все варианты.
49. Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $AB = 10$  см,  $AD = 16$  см. Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $K$ , а биссектрисы углов  $C$  и  $D$  — в точке  $M$ . Точки  $K$  и  $M$  лежат внутри параллелограмма. Найдите длину отрезка  $MK$ .
50. Составьте алгоритм построения циркулем и линейкой параллелограмма  $ABCD$ :
- по двум диагоналям и стороне;
  - по двум диагоналям и высоте параллелограмма.
51. В треугольнике  $ABC$  высоты  $BH$  и  $AF$  пересекаются в точке  $O$ . Из точки  $C$  к прямой  $AC$  в одну полуплоскость с точкой  $B$  восстановлен перпендикуляр  $CK$ , равный отрезку  $BO$ . Докажите, что  $BK \perp AB$ .

### Моделирование

Известно, что если выпуклый четырехугольник разрезать по средним линиям (отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон четырехугольника), то из полученных частей всегда можно сложить параллелограмм.

### Задания

- Вырежьте из листа бумаги произвольный выпуклый четырехугольник. Отметьте при помощи линейки середины его сторон. Соедините середины противоположных сторон отрезками (рис. 41, А).
- Разрежьте четырехугольник при помощи ножниц по полученным средним линиям (рис. 41, В).
- Из полученных четырех частей четырехугольника сложите параллелограмм (рис. 41, В).
- Докажите, что из указанных частей любого выпуклого четырехугольника всегда можно сложить параллелограмм.

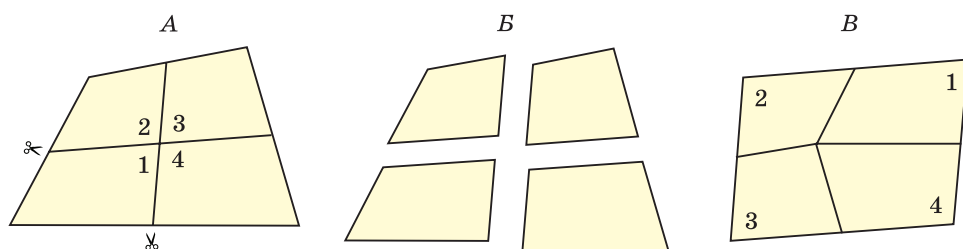


Рис. 41



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определение многоугольника, выпуклого многоугольника, диагонали многоугольника.
2. Определение параллелограмма, высоты параллелограмма.
3. Свойства параллелограмма.
4. Признаки параллелограмма.

### Умеем

1. Доказывать теорему о сумме углов  $n$ -угольника.
2. Доказывать теоремы о свойствах и признаках параллелограмма.

## § 4. Прямоугольник

**Определение.** Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Заметим, что если у некоторого параллелограмма один угол прямой, то и остальные три угла будут прямыми, поскольку сумма соседних углов параллелограмма равна  $180^\circ$ . Таким образом, *параллелограмм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником.*

Так как прямоугольник — частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Однако у прямоугольника есть и отличительное для него свойство. Сформулируем это свойство в виде теоремы.

**Теорема (свойство диагоналей прямоугольника).**  
**Диагонали прямоугольника равны.**

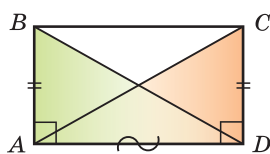


Рис. 42

Дано:  $ABCD$  — прямоугольник (рис. 42).

Доказать:  $AC = BD$ .

Доказательство. Прямоугольные треугольники  $ABD$  и  $DCA$  равны по двум катетам: катеты  $AB$  и  $CD$  равны как противоположные стороны параллелограмма, катет  $AD$  — общий. Отсюда  $AC = BD$ . Теорема доказана.

**Теорема (признак прямоугольника).**  
**Если у параллелограмма диагонали равны, то это прямоугольник.**

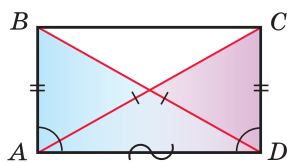


Рис. 43

Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $AC = BD$  (рис. 43).

Доказать:  $ABCD$  — прямоугольник.

Доказательство. Треугольники  $ABD$  и  $DCA$  равны по трем сторонам:  $AB = CD$  по свойству параллелограмма,  $AC = BD$  по условию, сторона  $AD$  — общая. Отсюда  $\angle BAD = \angle CDA$ . Так как сумма соседних углов параллелограмма равна  $180^\circ$ , то  $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ . У параллелограмма  $ABCD$  все углы прямые, поэтому он — прямоугольник. Теорема доказана.

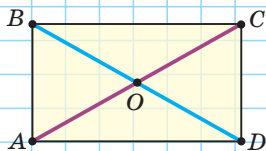
*Замечание.* Прямоугольники, в частности, равны, если равны их соответствующие стороны, так как в этом случае прямоугольники можно совместить наложением.

А теперь выполните **Тест 1**, **Тест 2** и **Тест 3**.

### Тест 1

Если  $ABCD$  — прямоугольник и  $AO + BO + CO = 24$  см, то  $BD = \dots$

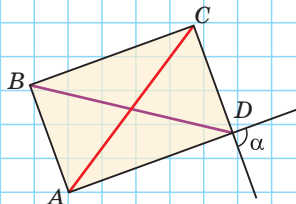
- а) 12 см;      в) 32 см;  
б) 16 см;      г) 8 см.



### Тест 2

Если  $ABCD$  — параллелограмм и  $AC = BD$ , то  $\alpha = \dots$

- а)  $90^\circ$ ;      в)  $60^\circ$ ;  
б)  $100^\circ$ ;    г)  $180^\circ$ .



### Тест 3

Верно ли утверждение: «Если у четырехугольника диагонали равны, то это прямоугольник»? Если ваш ответ «нет», то приведите контрпример.



## Гимнастика ума

1. В прямоугольнике провели два отрезка, перпендикулярные его сторонам (рис. 44). Какое максимальное число прямоугольников можно насчитать на рисунке?

2. В прямоугольнике  $ABCD$  провели два отрезка, параллельные его сторонам (рис. 45). По данным на рисунке найдите периметр прямоугольника  $ABCD$ .

3. Из четырех равных прямоугольников с периметром 24 см каждый сложили квадрат  $ABCD$  (рис. 46). Найдите периметр квадрата  $ABCD$ .

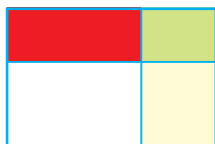


Рис. 44

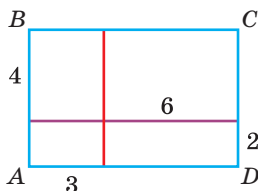


Рис. 45

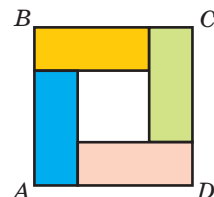


Рис. 46



## Задания к § 4

РЕШАЕМ ВМЕСТЕ  
ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что если у четырехугольника все углы прямые, то он является прямоугольником.

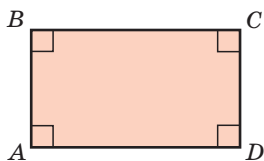


Рис. 47

**Доказательство.** Пусть у четырехугольника  $ABCD$   $\angle A = \angle B = \angle D = \angle C = 90^\circ$  (рис. 47). Так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и  $\angle A + \angle D = 180^\circ$ , то  $BC \parallel AD$  и  $AB \parallel CD$  по признаку параллельности прямых. Тогда  $ABCD$  — параллелограмм по определению. А параллелограмм, у которого все углы прямые, — это прямоугольник.

**Замечание.** Итак, многоугольник является прямоугольником, если это:

- 1) параллелограмм, у которого все углы прямые;
- 2) параллелограмм, у которого есть прямой угол;
- 3) четырехугольник, у которого все углы прямые;
- 4) параллелограмм, у которого диагонали равны.

**Задача 2.** Доказать теорему: «Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы».

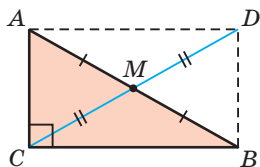


Рис. 48

**Доказательство.** Пусть  $CM$  — медиана треугольника  $ACB$ , где  $\angle C = 90^\circ$  (рис. 48). Продлим медиану  $CM$  за точку  $M$  на ее длину. Получим  $CM = \frac{1}{2}CD$ . Так как у четырехугольника  $CADB$  диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это параллелограмм по признаку параллелограмма. Параллело-

грамм, у которого есть прямой угол, является прямоугольником. Поэтому  $CADB$  — прямоугольник. Так как диагонали прямоугольника равны, то  $CD = AB$  и  $CM = \frac{1}{2}AB$ . Что и требовалось доказать.

Докажите аналогичным способом обратную теорему: «Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный».

**Задача 3.** Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон прямоугольника, разбивает этот прямоугольник на два равных прямоугольника.

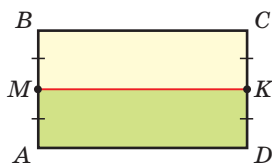


Рис. 49

Доказательство. Пусть  $ABCD$  — прямоугольник, точки  $M$  и  $K$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  (рис. 49). Отрезки  $MB$  и  $CK$  равны как половины равных сторон  $AB$  и  $CD$  и параллельны, так как  $AB \parallel CD$ . Поэтому четырехугольник  $MBCK$  является параллелограммом по признаку параллелограмма. А так как  $\angle B = 90^\circ$ , то  $MBCK$  — прямоугольник. Аналогично доказываем, что  $AMKD$  — прямоугольник. Поскольку у этих прямоугольников стороны равны, то они равны между собой.

### Следствие.

Если прямоугольник  $ABCD$  мысленно перегнуть по прямой  $MK$ , то в силу того, что  $AB \perp MK$ ,  $CD \perp MK$ ,  $MB = MA$ ,  $KC = KD$ , точка  $B$  совпадет с точкой  $A$ , точка  $C$  — с точкой  $D$ , прямоугольник  $MBCK$  совпадет с прямоугольником  $AMKD$ . Прямая  $MK$  будет являться осью симметрии прямоугольника  $ABCD$  (подробнее симметрия будет рассмотрена в § 12).

Таким образом, у прямоугольника есть центр симметрии, как у любого параллелограмма (он находится в точке пересечения диагоналей), и имеются две оси симметрии, которые проходят через середины его противоположных сторон (рис. 50).

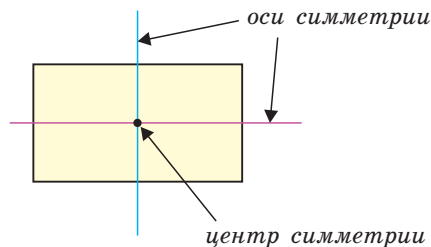


Рис. 50



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

52. Дан прямоугольник  $ABCD$ ,  $O$  — точка пересечения его диагоналей. Найдите длину отрезка  $BO$ , если  $AC = 8$  см.
53.  $ABCD$  — прямоугольник, его диагонали пересекаются в точке  $O$ . Найдите периметр треугольника  $AOD$ , если  $BC = 10$  см,  $BD = 24$  см.

54. Найдите периметр прямоугольника  $ABCD$ , если периметр треугольника  $ABD$  равен 30 см и  $AC = 12$  см.
55. На рисунке 51 изображен параллелограмм  $ABCD$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $OD = 6$  см. Найдите длину диагонали  $AC$ .
56. По данным на рисунке 52 найдите периметр прямоугольника  $ABCD$ .

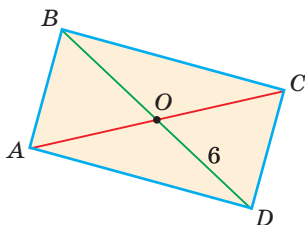


Рис. 51

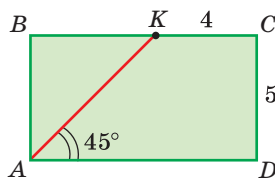


Рис. 52

57. Докажите следующие признаки прямоугольника:
- Если у четырехугольника три угла прямые, то это прямоугольник.
  - Если у четырехугольника все углы равны, то это прямоугольник.
58. Дан прямоугольник  $ABCD$  (рис. 53),  $BH \perp AC$ ,  $\angle 1 = 28^\circ$ . Найдите  $\angle 2$ .
59. У параллелограмма  $ABCD$   $AC = BD$ ,  $\angle ACB = 32^\circ$  (рис. 54). Найдите углы 1, 2 и 3 и в ответе запишите их сумму.
60. Дан прямоугольник  $ABCD$  (рис. 55),  $AB = 8$  см, разность периметра треугольника  $BOC$  и периметра треугольника  $COD$  равна 4 см. Найдите периметр прямоугольника  $ABCD$ .

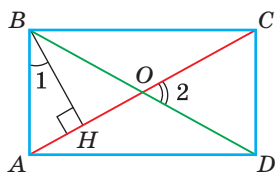


Рис. 53

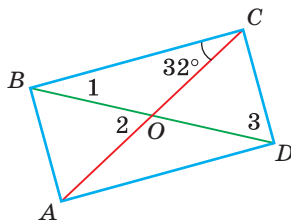


Рис. 54

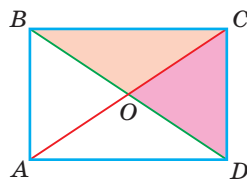


Рис. 55

61. В прямоугольнике  $ABCD$   $AC = 12$  см,  $\angle ADB = 15^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до прямой  $BD$ .
62. Докажите, что концы двух диаметров окружности являются вершинами прямоугольника.
63. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит сторону прямоугольника в отношении 2 : 1. Найдите углы, которые диагональ прямоугольника образует с его сторонами.

64. На рисунке 56  $ME = EP$ ,  $NE = EK$ ,  $\angle NPM = \angle MKN$ . Найдите  $\angle MNP$ .

65. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника (рис. 57).

а) Зная периметры трех прямоугольников:  $P_1 = 8$  см,  $P_2 = 14$  см,  $P_3 = 24$  см, найдите периметр  $P_4$  четвертого прямоугольника.

б) Докажите, что при любых значениях  $P_1, P_2, P_3, P_4$  верно равенство  $P_{ABCD} = P_1 + P_3 = P_2 + P_4$ .

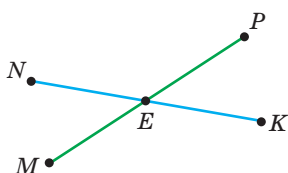


Рис. 56

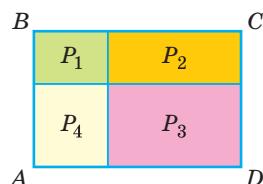


Рис. 57

66. В параллелограмме  $ABCD$  ( $AD \neq AB$ ) провели биссектрисы его углов. Какую фигуру ограничивают четыре построенные биссектрисы? Докажите вашу гипотезу.

67. Составьте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки прямоугольника по следующим элементам:

- по двум соседним сторонам  $a$  и  $b$ ;
- по стороне  $a$  и диагонали  $d$ ;
- по диагонали  $d$  и углу между диагоналями.

68. На координатной плоскости изобразите четырехугольник  $MNPK$ , где  $M(-1; -2)$ ,  $N(-3; 4)$ ,  $P(6; 7)$ ,  $K(8; 1)$ . Докажите, что  $MNPK$ :

- параллелограмм;
- прямоугольник.

69. Невозмутимая кошка сидит на середине лестницы (рис. 58). Лестница начинает падать, скользя концами по полу и стене. По какой траектории будет двигаться кошка:

- а), б), в) или г)?

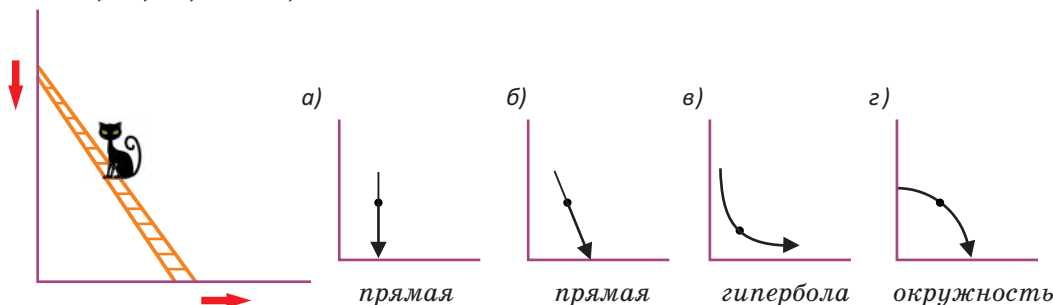


Рис. 58

**Моделирование**

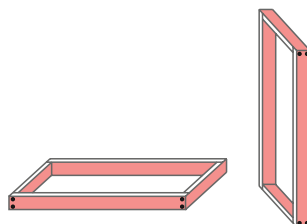
Отец и сын хотят заменить оконную раму, имеющую размеры  $1 \times 1,2$  м, в доме ветерана войны. У них имеются доски длиной 2 м 20 см, шириной 12 см и толщиной 2 см каждая.

1. Составьте план изготовления такой рамы.
2. Как проверить, имеет ли сделанная по вашему плану рама форму прямоугольника, при помощи:

- а) угольника;
- б) рулетки?

3. Подсчитайте, сколько погонных метров доски пойдет на изготовление двух таких рам.

Выясните, на каком предприятии в Беларуси производят рулетки.

**§ 5. Ромб**

**Определение.** Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

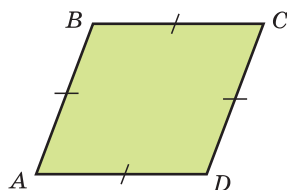


Рис. 59

На рисунке 59 изображен ромб  $ABCD$ . У него  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$  и  $AB = BC = CD = AD$ . Как частный случай параллелограмма ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме этого, у него есть свойства, присущие именно ромбу. Сформулируем их в виде теоремы.

**Теорема (свойство диагоналей ромба).**

**Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.**

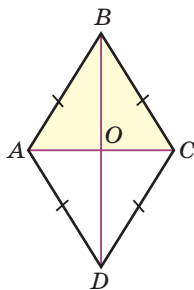


Рис. 60

Дано:  $ABCD$  — ромб (рис. 60).

Доказать:  $BD \perp AC$ ;  $BD$  — биссектриса угла  $ABC$ .

Доказательство. Так как у ромба все стороны равны, то  $AB = BC$  и треугольник  $ABC$  — равнобедренный. Диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому  $AO = OC$  и  $BO$  — медиана треугольника  $ABC$ . А медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию,

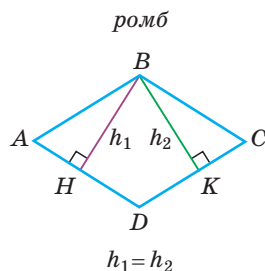


Рис. 61

является высотой и биссектрисой. Отсюда  $BD \perp AC$  и  $BD$  — биссектриса угла  $ABC$ .

Теорема доказана.

Для ромба также справедливо свойство: «**Высоты ромба, проведенные к соседним сторонам, равны между собой**». Доказательство следует из равенства прямоугольных треугольников  $ABH$  и  $CBK$  (рис. 61) по гипотенузе ( $AB = BC$ ) и острому углу ( $\angle A = \angle C$ ).

Сформулируйте и докажите утверждение, обратное данному.

**Теорема (признаки ромба).**

**Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это ромб.**

**Если одна из диагоналей параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то это ромб.**

Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $AC \perp BD$  (рис. 62, а) или луч  $AC$  — биссектриса угла  $BAD$  (рис. 62, б).

Доказать:  $ABCD$  — ромб.

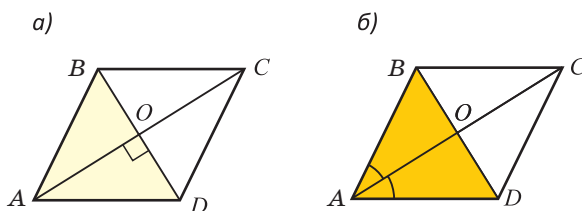


Рис. 62

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник  $ABD$ . Так как диагонали любого параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то  $BO = OD$ . Отсюда следует, что отрезок  $AO$  — медиана треугольника  $ABD$ . Если  $AC \perp BD$ , то в треугольнике  $ABD$  медиана  $AO$  является высотой. Если  $AC$  — биссектриса угла  $BAD$ , то в треугольнике  $ABD$  медиана  $AO$  является биссектрисой. В обоих случаях следует, что треугольник  $ABD$  — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит,  $AB = AD$ . Тогда у параллелограмма  $ABCD$  все стороны равны. Следовательно, он — ромб. Теорема доказана.

*Замечание.* Если перегнуть ромб по диагонали  $AC$ , то вершина  $B$  совместится с вершиной  $D$  ( $BO \perp AC$ ,  $BO = OD$ ), а значит, треугольник  $ABC$  совместится с треугольником  $ADC$ . Ромб имеет две оси симметрии, которые содержат его диагонали.

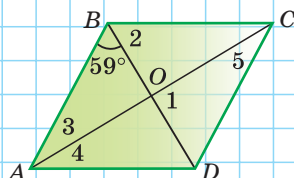


А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

$ABCD$  — ромб. Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

а)  $180^\circ$ ; б)  $242^\circ$ ; в)  $360^\circ$ ; г)  $140^\circ$ .



### Тест 2

1. Является ли любой ромб параллелограммом?
2. Является ли любой параллелограмм ромбом?
3. Каким условиям должен отвечать параллелограмм, чтобы быть ромбом? Перечислите все известные вам наборы условий.



При помощи **Интернета**:

- а) выясните историю происхождения слова «ромб»;
- б) найдите, где в технике используются параллелограммы.



## Задания к § 5

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Найти периметр четырехугольника  $ABCD$  (рис. 63), у которого  $AO = OC$ ,  $BO = OD$ ,  $\angle 1 = 35^\circ$ ,  $\angle 2 = 55^\circ$ ,  $CD = 6$  см.

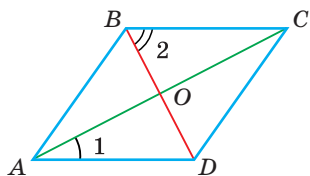


Рис. 63

**Решение.** Так как диагонали четырехугольника  $ABCD$  точкой  $O$  делятся пополам, то это — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Тогда  $AD \parallel BC$  и  $\angle ADB = \angle 2 = 55^\circ$  (как накрест лежащие углы при  $AD \parallel BC$  и секущей  $BD$ ). В треугольнике  $AOD$   $\angle AOD = 180^\circ - (\angle 1 + \angle ADO) = 180^\circ - (35^\circ + 55^\circ) = 90^\circ$ . Значит,  $AC \perp BD$ . Так как диагонали параллелограмма  $ABCD$  перпендикулярны, то это ромб (по признаку ромба). Поскольку у ромба все стороны равны, то искомый периметр  $P_{ABCD} = 4 \cdot CD = 4 \cdot 6 = 24$  (см).  
**Ответ:** 24 см.

**Задача 2.** Дан параллелограмм  $ABCD$  с периметром 128 см,  $\angle D = 150^\circ$ ,  $\angle ACD = \angle ACB$ . Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$ .

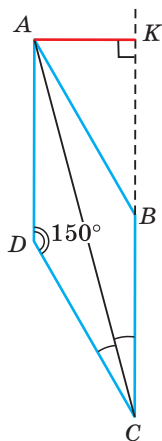


Рис. 64

Решение.

1) Проведем  $AK \perp BC$ . Длина перпендикуляра  $AK$  — искомое расстояние (рис. 64).

2) Так как  $\angle ACD = \angle ACB$ , то  $CA$  — биссектриса угла  $BCD$  и поэтому параллелограмм  $ABCD$  — ромб (по признаку ромба).

3)  $\angle ABC = \angle D = 150^\circ$  (у параллелограмма противоположные углы равны).

4) В прямоугольном треугольнике  $AKB$

$\angle ABK = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$  (по свойству смежных углов).

5)  $AB = 128 : 4 = 32$  (см) (у ромба все стороны равны).

6)  $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{32}{2} = 16$  (см) (катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы).

Ответ: 16 см.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**70.** Используя транспортир, постройте равносторонний треугольник. Достройте его до ромба. Проведите другую диагональ этого ромба. Убедитесь, что диагонали ромба перпендикулярны. Найдите величину угла, образованного большей диагональю ромба и его стороной.

**71.** По данным на рисунках 65, а)–в) решите следующие задачи:

а) Найдите периметр ромба  $ABCD$  (рис. 65, а), если  $AB + BC + AD = 36$  см.

б)  $ABCD$  — ромб,  $\angle ACB = 55^\circ$  (рис. 65, б). Найдите  $\angle ACD$  и  $\angle ABC$ .

в) Найдите диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$  (рис. 65, в) с периметром 64 см, если  $\angle A = 60^\circ$ .

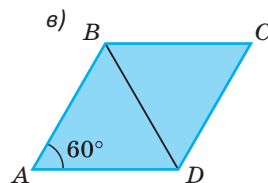
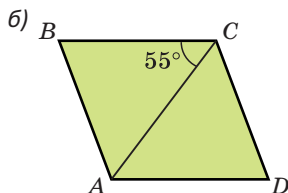
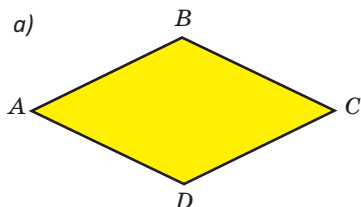


Рис. 65

**72.** Дан ромб  $ABCD$ ,  $\angle DBC = 64^\circ$ . Найдите:

а)  $\angle ABC$ ;

б)  $\angle CDB$ ;

в)  $\angle BAD$ ;

г)  $\angle ACD$ .

73. На рисунке 66  $ABCD$  — ромб с периметром 80 см,  $AC = 24$  см,  $BD = 32$  см. Найдите:

- периметр треугольника  $AOB$ ;
- периметр треугольника  $BCD$ ;
- периметр треугольника  $ABC$ .

74.  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 67),  $AB = BC$ ,  $OM \perp DC$ ,  $\angle COM = 58^\circ$ . Найдите  $\angle ABD$ .

75.  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 68),  $\angle BAC = \angle DAC = 15^\circ$ . Расстояние от точки  $C$  до прямой  $AD$  равно 12 см. Найдите периметр параллелограмма  $ABCD$ .

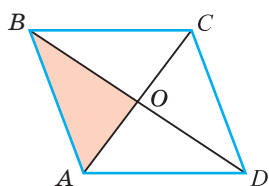


Рис. 66

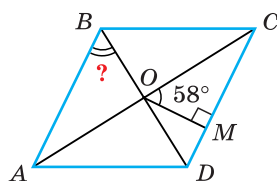


Рис. 67

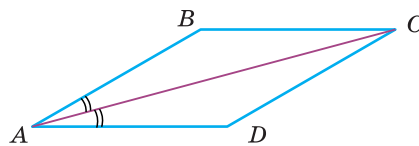


Рис. 68

76. Один из углов ромба равен  $120^\circ$ , меньшая диагональ равна 8 см. Найдите периметр ромба.

77.  $BK$  и  $BM$  — высоты ромба. Найдите углы треугольника  $KBM$ , если:

- высота  $BK$  в 2 раза меньше стороны  $AB$ ;
- высота  $BM$  делит сторону  $CD$  пополам.

78. Докажите, что если у четырехугольника все стороны равны, то это — ромб.

79. Составьте алгоритм построения ромба с помощью циркуля и линейки:

- по двум диагоналям  $d_1$  и  $d_2$ ;
- по отрезку  $m$ , равному периметру ромба, и острому углу  $\alpha$  ромба.

80. При помощи двусторонней линейки (обычной линейки с параллельными краями) разделите данный угол  $\alpha$  пополам. Обоснуйте построение.

81. На координатной плоскости изобразите четырехугольник  $ABCD$ , у которого  $A(-2; 2)$ ,  $B(4; 4)$ ,  $C(2; -2)$ ,  $D(-4; -4)$ . Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

### Гимнастика ума

Из шести равных ромбов (рис. 69, а) сложили многоугольник (рис. 69, б).

1. Сколько всего ромбов можно насчитать на рисунке 69, б)?
2. Если периметр одного маленького ромба равен 48 см, то чему равен периметр сложенного многоугольника?
3. Выясните, что означает ромб в орнаменте белорусского флага.

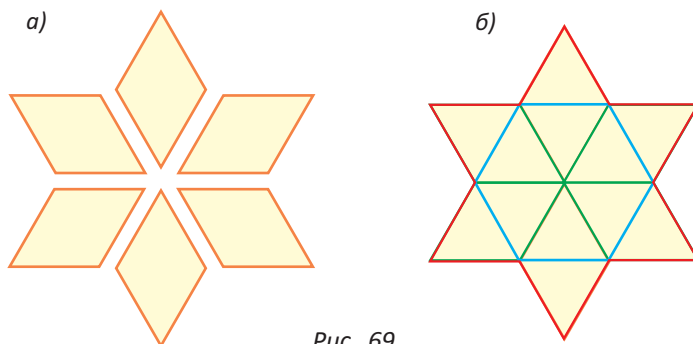


Рис. 69

## § 6. Квадрат

**Определение.** **Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 70, а) изображен квадрат  $ABCD$ . Так как любой прямоугольник — это параллелограмм, то квадрат является параллелограммом с равными сторонами, у которого все углы прямые. Поэтому *квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба*. В частности, диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов. Точка пересечения диагоналей — *центр квадрата*.

Диагональ квадрата делит его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, б). А две диагонали делят квадрат на 4 равных равнобедренных прямоугольных треугольника (рис. 70, в).

У квадрата, как у любого параллелограмма, имеется один центр симметрии (в точке пересечения диагоналей) и четыре оси симметрии (две из

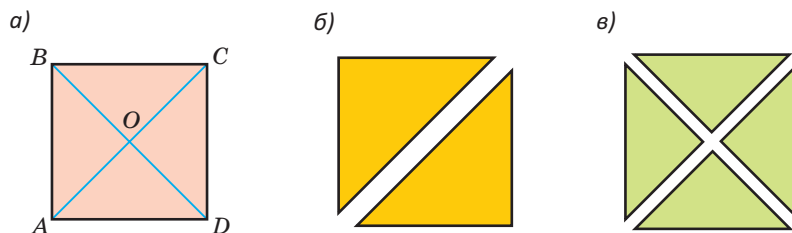


Рис. 70

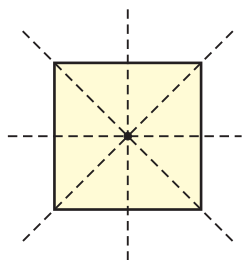


Рис. 71

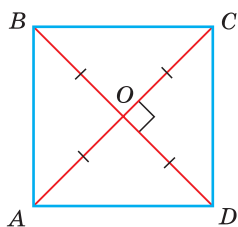


Рис. 72

них содержат диагонали, две проходят через середины противоположных сторон) (рис. 71).

Для квадрата можно сформулировать признаки квадрата. Например, «Если у ромба есть прямой угол, то это квадрат», «Если у параллелограмма диагонали равны и перпендикулярны, то это квадрат». Докажем следующий признак квадрата: **«Если у четырехугольника диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то это квадрат».**

**Доказательство.** Из того, что диагонали данного четырехугольника точкой пересечения делятся пополам (рис. 72), следует, что он — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Из того, что у этого параллелограмма диагонали равны, следует, что это прямоугольник (по признаку прямоугольника). А из того, что диагонали параллелограмма перпендикулярны, следует, что это ромб (по признаку ромба). А так как у ромба стороны равны, то данный четырехугольник является прямоугольником с равными сторонами, то есть квадратом (по определению квадрата).

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

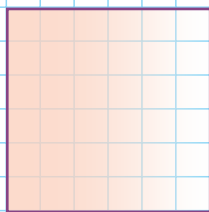
### Тест 1

Какая из изображенных на рисунке фигур не является квадратом?

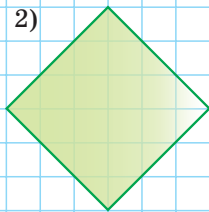
а) 1); б) 2); в) 3); г) все являются.

Докажите ваше утверждение.

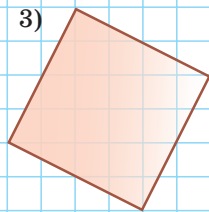
1)



2)



3)



### Тест 2

1. Является ли квадрат ромбом? Аргументируйте ваш ответ.

2. Может ли ромб быть прямоугольником? Если да, то при каком условии?



## Задания к § 6

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** На рисунке 73  $ABCD$  — квадрат,  $AKD$  — равносторонний треугольник. Найти  $\angle BMC$ .

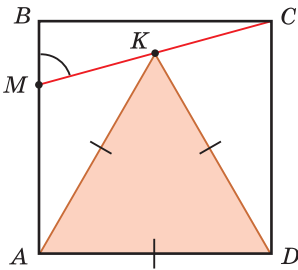


Рис. 73

**Решение.** У равностороннего треугольника все углы равны по  $60^\circ$ , поэтому  $\angle ADK = 60^\circ$ . Так как  $\angle ADC = 90^\circ$ , то  $\angle KDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ . Поскольку  $KD = AD$  и  $AD = CD$ , то  $KD = CD$ . Следовательно, треугольник  $KDC$  — равнобедренный с основанием  $KC$ . Углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому  $\angle KCD = \angle CKD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ .

Тогда  $\angle BMC = \angle DCM$  как накрест лежащие углы при  $AB \parallel CD$  и секущей  $MC$ ,  $\angle BMC = 75^\circ$ .

Ответ:  $75^\circ$ .

**Задача 2.** На сторонах квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $N, P, K, M$  так, что  $AN = BP = CK = DM$  (рис. 74). Доказать, что  $NK \perp PM$  и  $NK = PM$ .

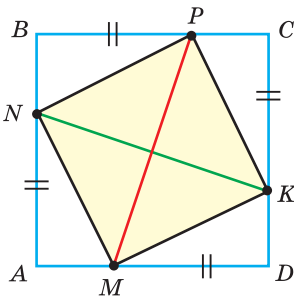


Рис. 74

**Доказательство.** Так как стороны квадрата равны и по условию  $AN = BP = CK = DM$ , то  $NB = PC = KD = AM$ . Тогда прямоугольные треугольники  $MAN$ ,  $NBP$ ,  $PCK$  и  $KDM$  равны по двум катетам. Следовательно,  $MN = NP = PK = KM$ . Так как у четырехугольника  $MNPK$  стороны равны, то это ромб (задача 78). У прямоугольного треугольника сумма острых углов равна  $90^\circ$ . Поэтому  $\angle ANM + \angle AMN = 90^\circ$ . Но  $\angle KMD = \angle ANM$ , откуда  $\angle KMD + \angle AMN = 90^\circ$  и  $\angle NMK = 90^\circ$ . Поскольку ромб с прямым углом является квадратом, то  $MNPK$  — квадрат. Мы знаем, что у квадрата диагонали равны и взаимно перпендикулярны. Значит,  $NK \perp PM$  и  $NK = PM$ .

Что и требовалось доказать.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**82.** На рисунке 75  $ABCD$  — квадрат. Найдите сумму углов 1, 2 и 3.

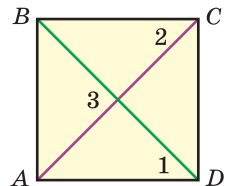


Рис. 75



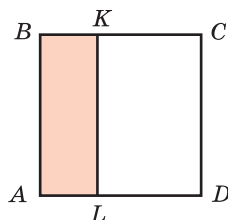


Рис. 76

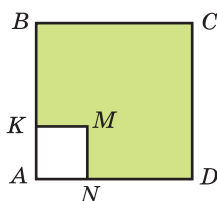


Рис. 77

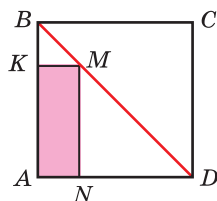


Рис. 78

83. На рисунке 76  $ABCD$  — квадрат, его периметр равен 36 см. Найдите сумму периметров прямоугольников  $ABKL$  и  $LKCD$ , если  $BK = 3,5$  см.
84. На рисунке 77 изображены квадраты  $ABCD$  и  $AKMN$ . Периметр квадрата  $ABCD$  равен 72 см,  $AK = \frac{1}{2}KB$ . Найдите периметр многоугольника  $KBCDNM$ .
85. На рисунке 78  $ABCD$  — квадрат, его сторона равна 12 см. Найдите периметр прямоугольника  $AKMN$ .
86. Докажите, что если в окружности провести два взаимно перпендикулярных диаметра, то концы этих диаметров будут вершинами квадрата.
87. Периметр квадрата равен 48 см. Найдите расстояние от центра квадрата до его сторон.
88. Докажите, что если бумажный квадрат  $ABCD$  сложить по диагонали  $AC$ , то вершины  $B$  и  $D$  совпадут.
89. В равнобедренный прямоугольный треугольник помещен квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие на катетах (рис. 79). Найдите гипотенузу треугольника, если периметр квадрата равен 112 см.
90. Два отрезка  $MK$  и  $PE$  с концами на противоположных сторонах квадрата  $ABCD$  взаимно перпендикулярны (рис. 80). Докажите, что  $MK = PE$ .
91. Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то это квадрат.

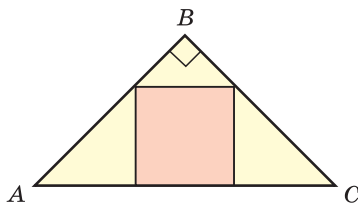


Рис. 79

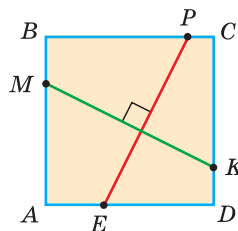


Рис. 80

92. Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки квадрата по его диагонали  $d$ .
93. На сторонах параллелограмма построены квадраты (сторона каждого квадрата равна соответствующей стороне параллелограмма). Докажите, что центры построенных квадратов являются вершинами квадрата.
94. На стороне  $AD$  квадрата  $ABCD$  взята точка  $K$ , а на стороне  $CD$  взята точка  $M$  так, что  $\angle AKB = \angle DKM = 60^\circ$ . Докажите, что  $\angle MBK = 45^\circ$ .

### Моделирование

Иногда множества каких-то элементов (чисел, фигур, ...) изображают в виде овалов (кругов Эйлера). На рисунке 81 изображены соотношения между множествами параллелограммов, прямоугольников, ромбов. Множество каких фигур находится в области, обозначенной знаком вопроса? Аргументируйте ваш ответ.

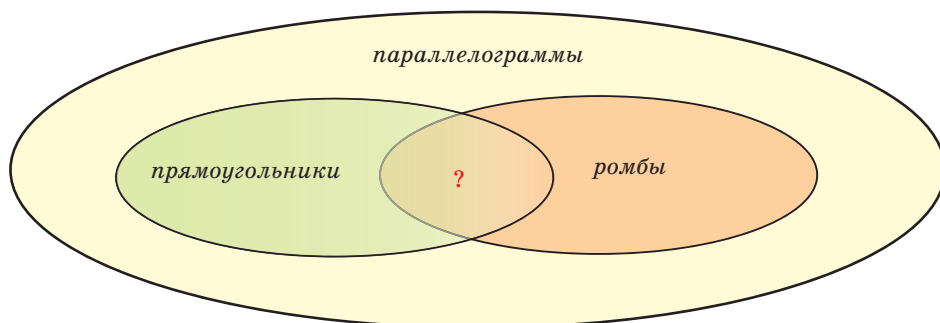


Рис. 81



### ПОДВОДИМ ИТОГИ

#### Знаем

1. Определение прямоугольника, ромба, квадрата.
2. Свойство диагоналей прямоугольника.
3. Признак прямоугольника.
4. Свойство диагоналей ромба.
5. Признаки ромба.
6. Свойства и признаки квадрата.

#### Умеем

1. Доказывать теорему о свойстве диагоналей прямоугольника и признак прямоугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве диагоналей ромба и признак ромба.

### Реальная геометрия



Для участия в республиканском конкурсе «Украсим Беларусь цветами» Маша, Алеся и Настя решили устроить квадратную клумбу в школьном дворе. Маша предлагает натянуть на четырех колышках по периметру клумбы четыре куска веревки одинаковой длины (рис. 82, а). Алеся предлагает натянуть на четырех колышках параллельно два куска веревки одинаковой длины, расстояние

между которыми будет равно длине натянутых кусков (рис. 82, б). Настя предлагает взять два куска веревки одинаковой длины, отметить узелком их середины и натянуть веревки так, чтобы они пересекались в серединах и были перпендикулярны (рис. 82, в). У какой из девочек обязательно получится квадрат с вершинами в местах расположения колышков? Объясните ваш ответ.

Клумбы какой формы есть во дворе вашей школы?

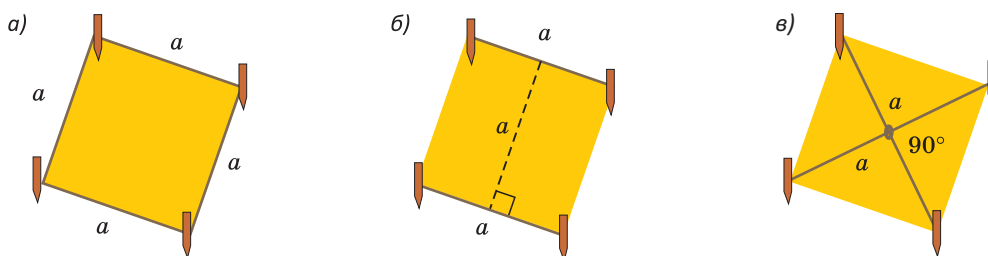


Рис. 82

### Геометрия 3D

С понятием *призмы* мы познакомились в 7-м классе. У призмы две грани (*основания*) — это равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани (*боковые*) — параллелограммы. Если призма прямая, то боковые грани — прямоугольники. На рисунках 83, а)—в) изображены треугольная, четырехугольная, шестиугольная призмы.

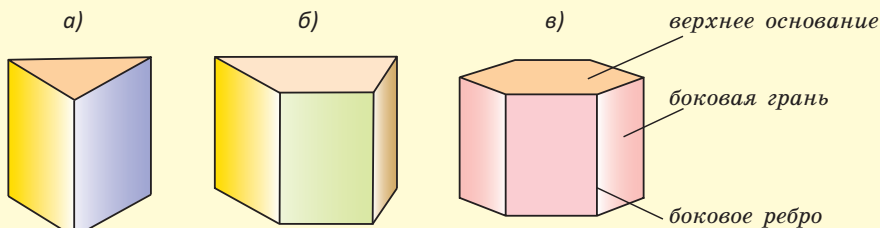


Рис. 83

Отрезок, который соединяет соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, называется *боковым ребром*. Так как боковые грани призмы — параллелограммы, а у параллелограмма противоположные стороны равны, то все боковые ребра призмы равны между собой.

### Задания

1. Сколько у шестиугольной призмы: а) граней; б) ребер (включая боковые ребра и стороны оснований)?

Поверхность любой призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности, которая состоит из боковых граней. На чертеже невидимые ребра изображаются штриховыми линиями. У треугольной и четырехугольной изображенных на рисунках 83, а), б) призм одна сторона основания невидима и невидима одна («задняя») грань.

2. На рисунке 84 изображена прямая треугольная призма и ее развертка. С каким ребром совпадет ребро  $ED$ , если развертку сложить в призму?

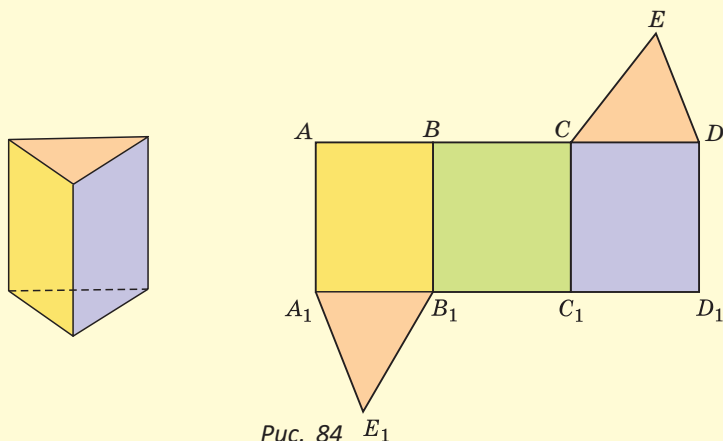


Рис. 84

Призма, у которой основания являются параллелограммами, называется *параллелепипедом* (рис. 85, а), его боковые грани — параллелограммы. Противоположные грани любого параллелепипеда равны между собой.

Если боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, это *прямой параллелепипед*. Его боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 85, б).

Если в основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, то это *прямоугольный параллелепипед*. Все его грани — прямоугольники (рис. 85, в).

Если у прямоугольного параллелепипеда все ребра равны, то это *куб*. Все его грани — равные квадраты (рис. 85, г).

### ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

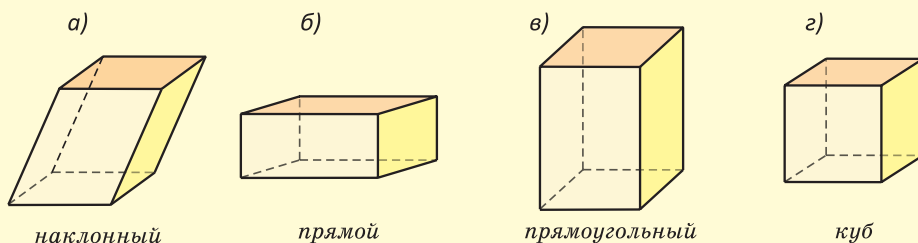


Рис. 85

Любой параллелограмм (включая прямоугольник и квадрат), расположенный в пространстве, на чертеже изображается параллелограммом. Изобразите прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , используя схему на рисунке 86.

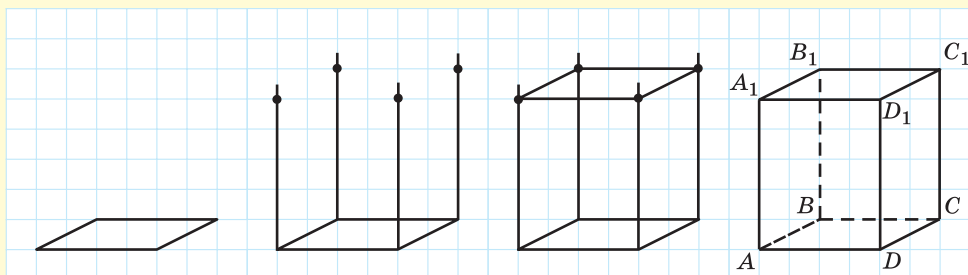


Рис. 86

3. Три каких-то ребра параллелепипеда равны 3 см, 5 см, 8 см. Найдите сумму длин всех ребер данного параллелепипеда.

## § 7. Теорема Фалеса

**Теорема (теорема Фалеса).**

Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные отрезки.

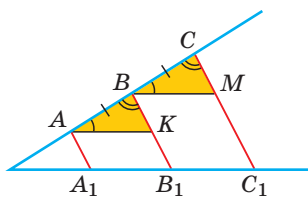


Рис. 87

Дано:  $AB = BC$ ,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  (рис. 87).

Доказать:  $A_1 B_1 = B_1 C_1$ .

Доказательство. Проведем  $AK \parallel A_1 C_1$ ,  $BM \parallel A_1 C_1$ . Так как две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой, то  $AK \parallel BM$ . Треугольники  $ABK$  и  $BCM$  равны по 2-му признаку равенства треугольников ( $AB = BC$  по условию,  $\angle BAK = \angle CBM$  как соответственные углы при параллельных прямых  $AK$  и  $BM$  и секущей  $AC$ ,  $\angle ABK = \angle BCM$  как соответственные углы при параллельных прямых  $BB_1$  и  $CC_1$  и секущей  $AC$ ). Из равенства треугольников следует, что  $AK = BM$ . Так как четырехугольники  $AA_1 B_1 K$  и  $BB_1 C_1 M$  — параллелограммы (их противоположные стороны параллельны), то  $A_1 B_1 = AK$ ,  $B_1 C_1 = BM$  (как противоположные стороны параллелограмма). Значит,  $A_1 B_1 = B_1 C_1$ . Теорема доказана.

*Замечания.*

1. Отложенных равных отрезков может быть два, три и более.
2. Теорема Фалеса справедлива не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.

Теорема, обратная теореме Фалеса, справедлива только для отрезков, отложенных от вершины угла, и звучит так: «Если на сторонах угла от его вершины отложить равные отрезки ( $AB = BC$ ,  $AB_1 = B_1C_1$ ), то прямые, проходящие через их концы, будут параллельны ( $BB_1 \parallel CC_1$ )».

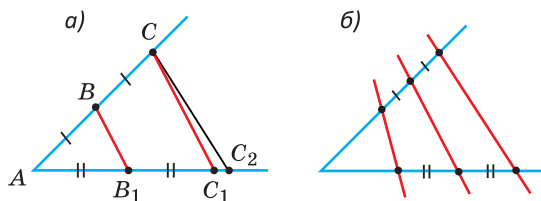


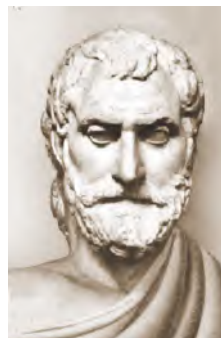
Рис. 88

Докажите эту теорему самостоятельно, используя рисунок 88, а) и метод от противного.

Требование обратной теоремы Фалеса о том, чтобы равные отрезки были отложены от вершины угла, обязательно. Иначе утверждение о параллельности прямых будет неверным (рис. 88, б).

Фалес — философ и математик, который жил в Древней Греции в г. Милете. Он сформулировал и доказал многие из теорем, которые в наше время изучают в школе. Фалес Милетский (VI век до н. э.) возглавлял список семи мудрецов того времени.

Именно Фалес выдвинул требование доказывать теоремы.



При помощи **Интернета** выясните, чем еще знаменит Фалес. Установите при помощи Википедии, кто был старше — Евклид или Фалес.



## Задания к § 7

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Точка  $K$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $MBNK$  — параллелограмм. Найти периметр треугольника  $ABC$ , если периметр параллелограмма равен 34 см, сторона  $AC = 16$  см (рис. 89).

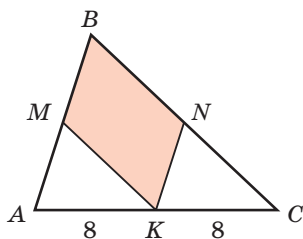


Рис. 89

Решение. У параллелограмма противоположные стороны параллельны. Поэтому  $KN \parallel AB$  и  $KM \parallel BC$ . Так как  $KN \parallel AB$  и  $AK = KC$ , то по теореме Фалеса  $BN = NC$ . Отсюда  $BC = 2BN$ . Аналогично, так как  $KM \parallel CB$  и  $AK = KC$ , то  $AM = MB$ ,  $AB = 2MB$ .  $P_{MBNK} = 2MB + 2BN = 34$  см, откуда  $AB + BC = 34$  см.  $P_{ABC} = AB + BC + AC = 34 + 16 = 50$  (см).  
Ответ: 50 см.

**Задача 2.** При помощи циркуля и линейки разделить данный отрезок на 3 равные части.

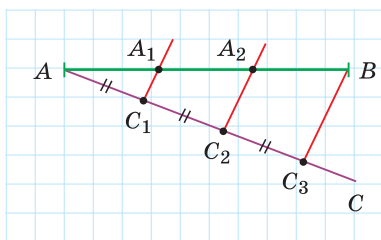


Рис. 90

**Решение.** Пусть дан отрезок  $AB$  (рис. 90). Проведем произвольный луч  $AC$ , при помощи циркуля отложим на нем три произвольных, но равных отрезка:  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$ . Проведем отрезок  $C_3B$ . Через точки  $C_2$  и  $C_1$  проведем прямые, параллельные прямой  $C_3B$  (вспомните, как вы это делали в 7-м классе). По теореме Фалеса  $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$ .

**Замечание.** Указанный способ является алгоритмом деления отрезка на  $n$  равных частей.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

95. На рисунке 91  $BC = 9$  см. Найдите длину отрезка  $AC$ .
96. На рисунке 92  $a \parallel b \parallel c$ . По данным длинам отрезков найдите величину  $x + y$ .
97. На рисунке 93  $ME = 32$  см,  $PE = 16$  см,  $NK = 19,5$  см. Используя значения углов на рисунке, найдите длину отрезка  $NG$ .

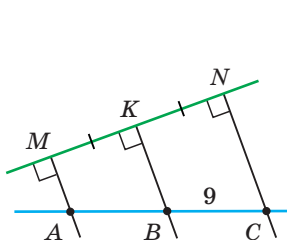


Рис. 91

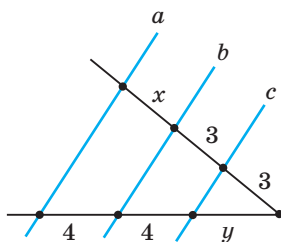


Рис. 92

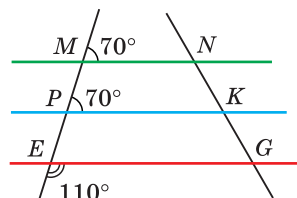


Рис. 93

98. Дан треугольник  $ABC$  (рис. 94),  $AM = MB = 6$  см,  $\angle MEB = \angle AKM = \angle C$ ,  $MK = 7$  см,  $KC = 5$  см. Найдите периметр треугольника  $ABC$ .
99. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ ,  $MK \parallel BC$  и  $KN \parallel AC$  (рис. 95). Найдите периметр четырехугольника  $AKNC$ , если  $KB = 7$  см,  $BN = 6$  см,  $MC = 8$  см.
100. На рисунке 96 точка  $K$  — середина отрезка  $CD$ ,  $AC \parallel KM \parallel DB$ ,  $AO = 21$  см, отрезок  $OM$  в 3 раза меньше отрезка  $MB$ . Найдите длину отрезка  $AB$ .



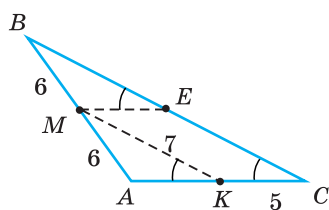


Рис. 94

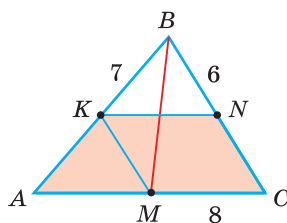


Рис. 95

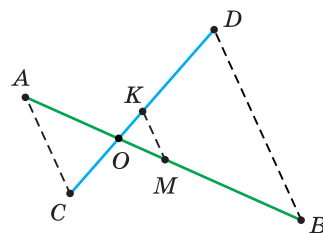


Рис. 96

101. При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок:  
 а) на 5 равных частей;                      б) в отношении 2 : 1.

## § 8. Средняя линия треугольника

**Определение.** Средней линией треугольника называется отрезок, который соединяет середины двух сторон треугольника.

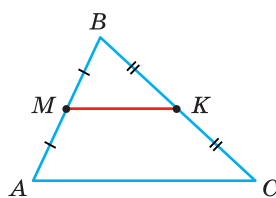


Рис. 97

На рисунке 97 точки  $M$  и  $K$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно треугольника  $ABC$ . Отрезок  $MK$  — средняя линия треугольника. Третью сторону  $AC$  будем называть основанием относительно средней линии  $MK$ . Так как у треугольника три стороны, то у него три средних линии.

**Теорема (свойство средней линии треугольника).**

**Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.**

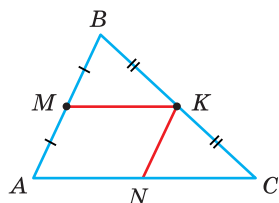


Рис. 98

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $MK$  — средняя линия (рис. 98).

Доказать:  $MK \parallel AC$ ;  $MK = \frac{1}{2}AC$ .

Доказательство. 1) Проведем через точку  $M$  прямую, параллельную  $AC$ . По теореме Фалеса она пройдет через середину отрезка  $BC$  — точку  $K$  и будет содержать среднюю линию  $MK$ . Тогда  $MK \parallel AC$ .

2) Через точку  $K$  проведем прямую  $KN$  (см. рис. 98), параллельную стороне  $AB$  ( $N \in AC$ ). По теореме Фалеса  $AN = NC$ . Четырехугольник  $AMKN$  — параллелограмм, так как у него противоположные стороны параллельны. Но у параллелограмма противоположные стороны равны. Поэтому  $MK = AN = \frac{1}{2}AC$ . Теорема доказана.

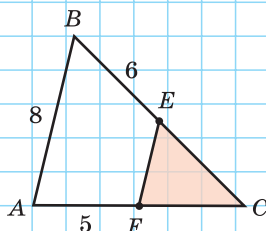
А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

$EF$  — средняя линия  $\triangle ABC$ .

Найдите  $P_{EFC}$ .

а) 12; б) 15; в) 19; г) 20.

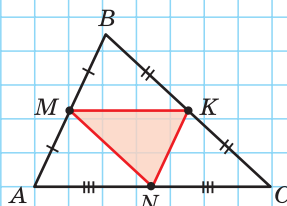


### Тест 2

$AB = 8$  см,  $BC = 10$  см,  $AC = 12$  см.

Найдите  $P_{MKN}$ .

а) 30 см; б) 24 см; в) 18 см; г) 15 см.



## Задания к § 8

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

#### ключевые задачи

**Задача.** Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

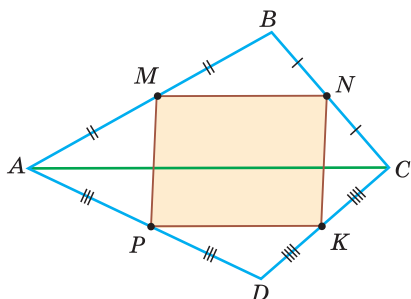


Рис. 99

Доказательство. Пусть точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $P$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$  (рис. 99). Отрезок  $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . По свойству средней линии  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2}AC$ . Отрезок  $PK$  — средняя линия треугольника  $ADC$ . Поэтому  $PK \parallel AC$  и  $PK = \frac{1}{2}AC$ . Так как у четырехугольника  $MNKP$  стороны  $MN$  и  $PK$  равны и параллельны, то он параллелограмм (по признаку параллелограмма). Что и требовалось доказать. Докажите указанные следствия самостоятельно.

### Следствия

Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  и отрезки  $MK$  и  $PN$  (средние линии четырехугольника) связаны определенными соотношениями. Сформулируем их в виде следствий из доказанного в исходной задаче утверждения (рис. 100).

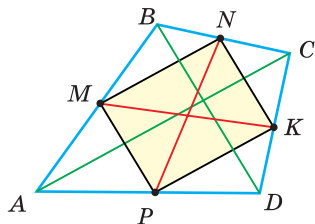


Рис. 100

1. Если диагонали  $AC$  и  $BD$  равны, то  $MNKP$  — ромб и отрезки  $MK$  и  $PN$  взаимно перпендикулярны.
2. Если отрезки  $MK$  и  $PN$  взаимно перпендикулярны, то  $MNKP$  — ромб и диагонали  $AC$  и  $BD$  равны.
3. Если диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны, то  $MNKP$  — прямоугольник, и отрезки  $MK$  и  $PN$  равны.
4. Если отрезки  $MK$  и  $PN$  равны, то  $MNKP$  — прямоугольник и диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

102. На рисунке 101  $NM$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . По размерам, указанным на рисунке в сантиметрах, найдите периметр треугольника  $ABC$ .
103. На рисунке 102 точки  $M$  и  $K$  — середины сторон  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ . По данным на рисунке найдите величину угла  $C$ .
104. На рисунке 103 точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  — середины сторон треугольника  $ABC$ . Периметр треугольника  $ABC$  равен 44 см,  $BK = 6$  см,  $AM = 7$  см. Найдите длину отрезка  $MK$  и периметр четырехугольника  $AMKN$ .

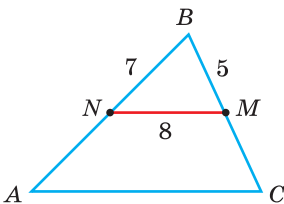


Рис. 101

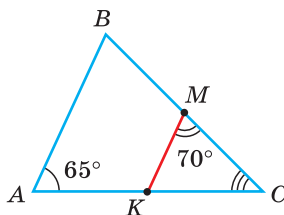


Рис. 102

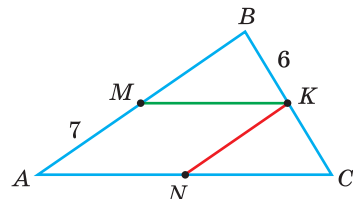


Рис. 103

105. а) Средние линии треугольника равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите периметр треугольника.  
б) Периметр треугольника равен 210 м, его средние линии относятся как 3 : 5 : 7. Найдите наибольшую сторону данного треугольника.
106. Вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  являются серединами сторон треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $P_{ABC} = 2P_{A_1B_1C_1}$ .
107. Докажите, что три средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.
108. а) Докажите, что в треугольнике  $ABC$  средняя линия  $KM$  и медиана  $BN$  точкой пересечения  $O$  делятся пополам (рис. 104).

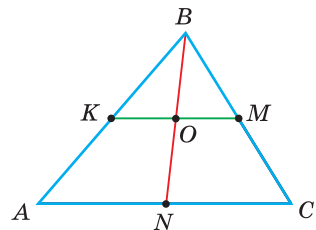


Рис. 104

б) Докажите, что средняя линия  $KM$  ( $K \in AB$ ,  $M \in BC$ ) треугольника  $ABC$  делит пополам любой отрезок  $BF$ , где точка  $F \in AC$ .

**109.** В треугольнике  $ABC$  средняя линия  $KM$  ( $K \in AB$ ,  $M \in BC$ ) и медиана  $BN$  пересекаются в точке  $O$ ,  $P_{AKON} = 80$  см,  $P_{KBO} = 48$  см. Найдите длину стороны  $AC$ .

**110.** На рисунке 105 точки  $P$ ,  $M$ ,  $N$  и  $K$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$ . Найдите:

а) периметр четырехугольника  $PMNK$ , если  $AC = 12$  см,  $BD = 10$  см;

б) угол между прямыми  $AC$  и  $BD$ , если  $AC = BD$  и  $\angle KPN = 32^\circ$ .

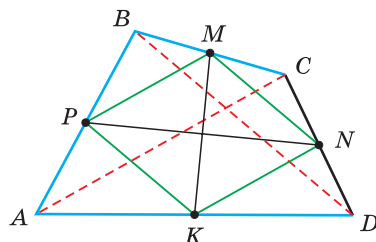


Рис. 105

**111.** Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

**112.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  и  $P$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  соответственно. Периметр треугольника  $MNP$  равен периметру треугольника  $MKP$ . Докажите, что  $AC \perp BD$ .

**113.** Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$  равна 24 см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан  $AK$  и  $CM$ .

**114.** В треугольнике  $ABC$  проведен отрезок  $BD$  так, что точка  $D$  лежит на стороне  $AC$  и  $CD = AB$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $AD$ , точка  $N$  — середина отрезка  $BC$ . Найдите величину угла  $NMC$ , если  $\angle BAC = 72^\circ$ .

## § 9. Свойство медиан треугольника

Вы уже знаете, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является одной из замечательных точек треугольника.

**Теорема (свойство медиан треугольника).**

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины.

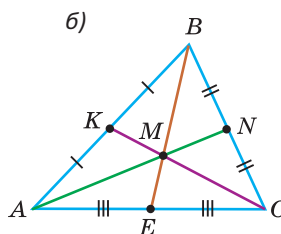
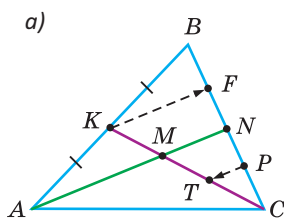


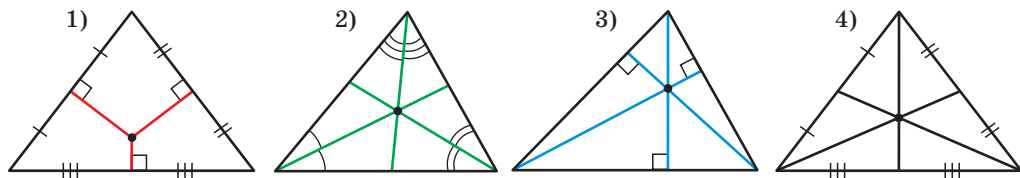
Рис. 106

**Доказательство.** 1) Вначале докажем, что любая медиана треугольника делится другой медианой в отношении  $2 : 1$ . Пусть  $AN$  и  $CK$  — медианы треугольника  $ABC$ , которые пересекаются в точке  $M$  (рис. 106, а). Проведем  $KF \parallel AN$ . Так как  $AK = KB$ , то по теореме Фалеса  $BF = FN$ . Из середины  $P$  отрезка  $NC$  проведем  $PT \parallel AN$ . Так как  $CP = PN = NF$ , то по теореме Фалеса  $CT = TM = MK$ . Отсюда  $CM : MK = 2 : 1$ . Аналогично,  $AM : MN = 2 : 1$ .

2) Теперь докажем, что все три медианы пересекаются в одной точке. Из п. 1 следует, что любая медиана делит другую медиану в отношении  $2 : 1$ . Тогда третья медиана  $BE$  (рис. 106, б) должна разделить медиану  $CK$  в отношении  $2 : 1$ , то есть пройти через точку  $M$ . Следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

Теперь нами доказаны все утверждения о *четырёх замечательных точках треугольника*. В одной точке пересекаются:

- |                               |                          |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1) серединные перпендикуляры; | 2) биссектрисы;          |
| 3) высоты;                    | 4) медианы треугольника. |



При помощи **Интернета** выясните, почему точку пересечения медиан треугольника называют его *центром тяжести*.



## Задания к § 9

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача.** Точки  $M$  и  $K$  — середины сторон  $AD$  и  $CD$  соответственно параллелограмма  $ABCD$ . Доказать, что отрезки  $BM$  и  $BK$  делят диагональ  $AC$  на три равные части.

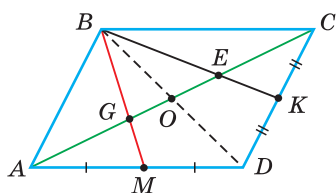


Рис. 107

**Решение.** Проведем в параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $BD$  (рис. 107). Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то  $BO = OD$  и тогда  $AO$  и  $BM$  — медианы треугольника  $ABD$ . Поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении  $2 : 1$ , то  $AG : GO = 2 : 1$ . Аналогично в треугольнике  $BCD$   $CO$  и  $BK$  — медианы, откуда  $CE : EO = 2 : 1$ . Поскольку  $AO = OC$ , то  $AG = GE = EC$ . Что и требовалось доказать.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 115.** На рисунке 108  $AK$  и  $CP$  — медианы треугольника  $ABC$ ,  $AK = 12$  см,  $PM = 3,5$  см. Найдите длины отрезков  $MK$ ,  $AM$ ,  $CM$  и  $CP$ .
- 116.** На рисунке 109  $BK$  и  $AN$  — медианы треугольника  $ABC$ ,  $AB = 30$  см,  $BK = 15$  см,  $AN = 36$  см. Найдите периметр треугольника  $KMN$ .
- 117.** Точки  $N$  и  $K$  — середины отрезков  $AC$  и  $AB$  (рис. 110),  $BN = 18$  см,  $CK = 21$  см,  $AC = 24$  см. Найдите периметр треугольника  $NMC$ .

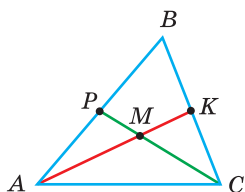


Рис. 108

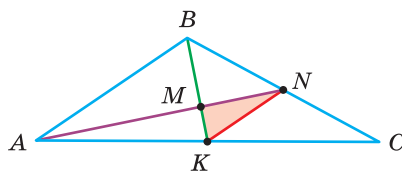


Рис. 109

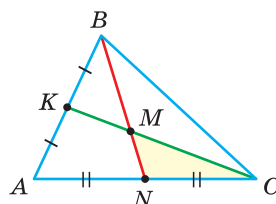


Рис. 110

- 118.** Медианы  $AK$  и  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что периметры треугольников  $KML$  и  $AMC$  относятся как  $1 : 2$ .
- 119.** В треугольнике  $ABC$  (рис. 111) проведены медианы  $AK$ ,  $BN$  и  $CL$ ,  $M$  — точка их пересечения и  $NF \parallel AK$ . Найдите периметр треугольника  $NMF$ , если  $AK = 102$  см,  $CL = 81$  см,  $BN = 96$  см.
- 120.** Докажите, что если у треугольника две медианы равны, то он равнобедренный.
- 121.** В параллелограмме  $ABCD$  (рис. 112) точка  $M$  — середина стороны  $CD$ . Отрезок  $AM$  пересекает диагональ  $BD$  в точке  $K$ ,  $AK = 32$  см. Найдите длину отрезка  $KM$ .

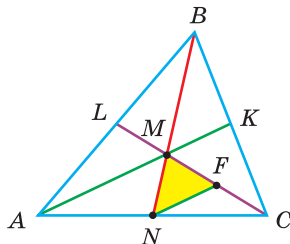


Рис. 111

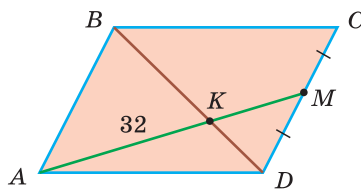


Рис. 112

- 122.** Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Медиану  $BN$  продлили за точку  $N$  на треть ее длины. Получили отрезок  $ND$ , где  $ND = \frac{1}{3}BN$ . Периметр треугольника  $DMC$  равен 42 см. Найдите периметр треугольника, составленного из медиан треугольника  $ABC$ .
- 123.** Медианы  $AK$  и  $CM$  треугольника  $ABC$  взаимно перпендикулярны,  $AC = 10$  см. Найдите длину третьей медианы  $BN$ .

### Моделирование

Возьмите треугольник, сделанный из фанеры или толстого картона. Пусть девочки, используя метровую линейку, проведут в треугольнике две медианы. Затем пусть мальчики закрепят веревку в точке пересечения медиан (для картона можно использовать скотч).



Поднимите треугольник, лежащий на столе, за веревку. Если все сделано правильно, то треугольник останется в равновесии и его плоскость будет параллельна плоскости стола. Объясните при помощи знаний из курса физики данный эффект.

Центр тяжести тела — это точка приложения силы тяжести тела. Например, центр тяжести тонкого однородного стержня находится в его середине, центр тяжести тонкого однородного квадратного листа — в точке пересечения его диагоналей, центр тяжести тонкой однородной треугольной пластины — в точке пересечения медиан треугольника. При расчетах треугольник можно заменить грузом, который находится в точке пересечения медиан, масса которого равна массе треугольника. Поэтому точка пересечения медиан называется «центром тяжести треугольника».



### ПОДВОДИМ ИТОГИ

#### Знаем

1. Теорему Фалеса.
2. Определение средней линии треугольника.
3. Свойство средней линии треугольника.
4. Свойство медиан треугольника.

#### Умеем

1. Доказывать теорему Фалеса.
2. Делить отрезок на  $n$  равных частей при помощи циркуля и линейки.
3. Доказывать теорему о свойстве средней линии треугольника.
4. Доказывать теорему о свойстве медиан треугольника.

## § 10. Трапеция. Средняя линия трапеции

**Определение.** Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны (*основания трапеции*), а две другие — не параллельны (*боковые стороны трапеции*).

**Определение.** Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из точки, взятой на прямой, содержащей одно основание трапеции, к прямой, содержащей другое основание.



**Определение. Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

На рисунке 113 изображена трапеция  $ABCD$ , где  $AD$  и  $BC$  — основания трапеции,  $AB$  и  $CD$  — ее боковые стороны,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \nparallel CD$ .

Перпендикуляр  $FH$  (или его длина) — это высота трапеции. Все высоты трапеции равны как расстояния между параллельными прямыми.

Углы трапеции, прилежащие к боковой стороне, в сумме равны  $180^\circ$  как внутренние односторонние углы при параллельных прямых:  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ,  $\angle C + \angle D = 180^\circ$ .

Точки  $M$  и  $K$  — середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно, отрезок  $MK$  — средняя линия трапеции. Обычно основания трапеции обозначают буквами  $a$  и  $b$ , боковые стороны —  $c$  и  $d$ , среднюю линию — буквой  $m$ .

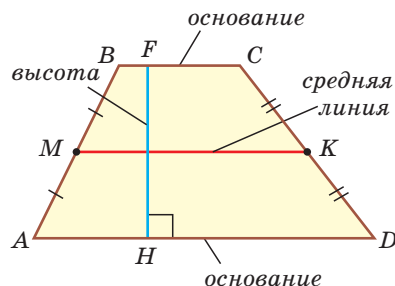


Рис. 113

**Теорема (о средней линии трапеции).**

**Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, т. е.  $m = \frac{a+b}{2}$ .**

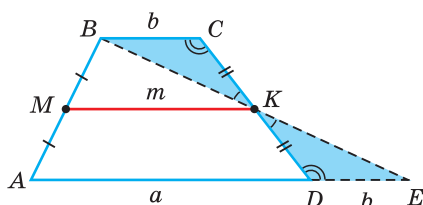


Рис. 114

Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $AD = a$ ,  $BC = b$  — ее основания,  $MK = m$  — средняя линия (рис. 114).

Доказать:  $m \parallel a$ ,  $m \parallel b$ ,  $m = \frac{a+b}{2}$ .

Доказательство. Проведем прямую  $BK$  до пересечения с прямой  $AD$  в точке  $E$ . Треугольники  $BKC$  и  $EKD$  равны по 2-му признаку равенства треугольников ( $CK = KD$  по определению средней линии трапеции,  $\angle C = \angle D$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $CD$ ),  $\angle BKC = \angle EKD$  как вертикальные).

Из равенства треугольников следует, что  $BK = KE$ ,  $DE = BC = b$ . Значит, средняя линия  $MK$  трапеции  $ABCD$  является средней линией треугольника  $ABE$ . По свойству средней линии треугольника  $MK = \frac{1}{2}AE$  и  $MK \parallel AE$ . Так как  $AE = a + b$ , то  $m = \frac{a+b}{2}$  и  $m \parallel a$ . Так как  $a \parallel b$  и  $a \parallel m$ , то  $m \parallel b$  (две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой). Теорема доказана.



## Задания к § 10

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Большее основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  равно 18 см, средняя линия  $MN$  — 12 см. Найти меньшее основание  $BC$  трапеции.

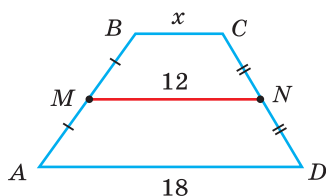


Рис. 115

Решение. Если  $MN$  — средняя линия трапеции, то  $MN = \frac{AD + BC}{2}$  (рис. 115). Тогда  $2MN = AD + BC$ ,

$$BC = 2MN - AD = 2 \cdot 12 - 18 = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.

*Замечание.* Возможны и другие способы записи решения задачи.

Например:

Пусть  $AD = 18$  см,  $MN = 12$  см,  $BC = x$  см.

$$\text{Тогда } MN = \frac{AD + BC}{2}, \quad 12 = \frac{18 + x}{2}, \quad x + 18 = 24, \quad x = 6, \\ BC = 6 \text{ см}.$$

**Задача 2.** Точки  $A$  и  $B$  находятся по одну сторону от прямой  $a$ . Расстояние от точки  $A$  до прямой  $a$  равно 7 см, а от точки  $B$  — 11 см. Найти расстояние от середины отрезка  $AB$  до прямой  $a$ .

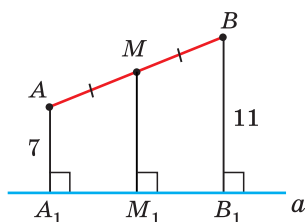


Рис. 116

Решение. Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$  (рис. 116). Так как расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, то перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  равны соответственно 7 см и 11 см. Нужно найти длину перпендикуляра  $MM_1$  к прямой  $a$ . Поскольку два перпендикуляра к одной прямой параллельны, то  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $MM_1 \parallel AA_1$ . По теореме Фалеса  $A_1M_1 = M_1B_1$ . Тогда  $A_1ABB_1$  — трапеция,  $MM_1$  — ее средняя линия. По теореме о средней линии трапеции  $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$  (см).

Ответ: 9 см.

**Задача 3.** Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.

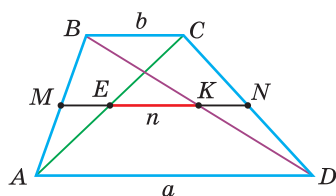


Рис. 117

Решение. Пусть  $AD = a$ ,  $BC = b$  — основания трапеции  $ABCD$ , точки  $E$  и  $K$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  (рис. 117). Обозначим  $EK = n$ .

Нужно доказать, что  $n \parallel a$ ,  $n \parallel b$  и  $n = \frac{a - b}{2}$ . Так как средняя линия  $MN$  трапеции параллельна основаниям  $a$  и  $b$ ,  $AM = MB$ , то по теореме Фалеса

$MN$  пройдет через середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ , то есть через точки  $E$  и  $K$ . Поэтому отрезок  $EK$  принадлежит средней линии  $MN$ . Значит,  $n \parallel a$  и  $n \parallel b$ . Так как  $EN$  — средняя линия треугольника  $ACD$ , а  $KN$  — средняя линия треугольника  $BDC$ , то по свойству средней линии треугольника  $EN = \frac{1}{2}AD$ ,  $KN = \frac{1}{2}BC$ . Тогда  $EK = EN - KN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$ . Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Полезно запомнить: «Средняя линия трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  ( $b < a$ ) проходит через середины диагоналей и делится ими на отрезки:  $ME = KN = \frac{b}{2}$ ,  $EN = MK = \frac{a}{2}$ ,  $EK = \frac{a-b}{2}$ » (см. рис. 117).



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 124.** Изобразите трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD = 9$  см и  $BC = 3$  см, у которой  $\angle A = 45^\circ$ , высота равна 4 см. Найдите величину угла  $B$  трапеции. Проведите среднюю линию трапеции и измерьте ее длину. Найдите длину средней линии по формуле  $m = \frac{a+b}{2}$ . Сравните результаты.
- 125.** В трапеции  $ABCD$  основания  $AD = 24$  см,  $BC = 14$  см,  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle C = 130^\circ$ . Найдите  $\angle B$ ,  $\angle D$  и среднюю линию  $MN$  трапеции.
- 126.** На рисунке 118  $ABCD$  — трапеция,  $\angle A + \angle B + \angle C = 300^\circ$ . Найдите  $\angle C$ .
- 127.** На рисунке 119  $AD \parallel BC$ ,  $M$  и  $K$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Найдите:
- $\angle MED$ , если  $\angle C = 125^\circ$ ,  $\angle BDC = 15^\circ$ ;
  - $ME : EK$ , если  $AD = 24$  см,  $BC = 18$  см.

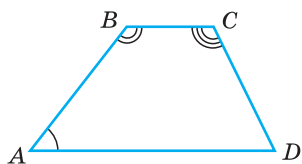


Рис. 118

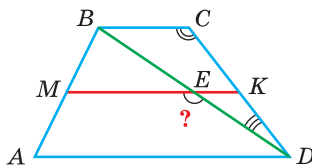


Рис. 119

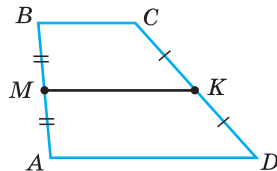


Рис. 120

- 128.** На рисунке 120 отрезок  $MK$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ . Найдите:
- основание  $AD$ , если  $BC = 24$  см,  $MK = 30$  см;
  - сумму периметров четырехугольников  $MBCK$  и  $AMKD$ , если  $AD = 20$  см,  $AB = 16$  см,  $BC = 14$  см,  $CD = 18$  см.

129. а) Основания трапеции относятся как  $3 : 2$ , средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите основания трапеции.  
 б) Одно из оснований трапеции на 4 см больше другого, средняя линия трапеции равна 5 см. Найдите основания трапеции.
130.  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  ( $M \in AB$ ),  $MB = 9$  см,  $ND = 8$  см,  $MN = 20$  см. Найдите периметр трапеции  $ABCD$ .
131. В трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) диагональ  $AC$  пересекает среднюю линию  $MN$  в точке  $K$  ( $M \in AB$ ), а диагональ  $BD$  — в точке  $E$ ,  $AD = 38$  см,  $BC = 30$  см. Найдите:  
 а)  $ME$ ; б)  $MK$ ; в)  $KE$ .
132. а)  $ABCD$  — трапеция (рис. 121, а),  $CK \parallel AB$ ,  $AB = 10$  см,  $BC = 6$  см,  $CD = 12$  см,  $AD = 20$  см. Найдите  $P_{KCD}$ .  
 б)  $ABCD$  — трапеция (рис. 121, б),  $CK \parallel BD$ ,  $AD = 17$  см,  $BC = 7$  см,  $AC = 16$  см,  $BD = 12$  см. Найдите  $P_{ACK}$ .

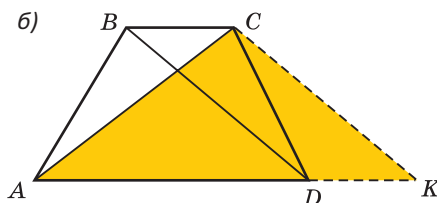
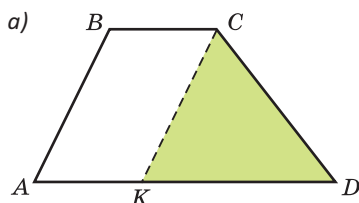


Рис. 121

133.  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$  ( $M \in AB$ ), периметр четырехугольника  $MBCN$  равен 30 см, периметр четырехугольника  $AMND$  равен 40 см, периметр трапеции  $ABCD$  равен 50 см. Найдите  $MN$ .
134. Диагональ  $BD$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , где  $BC < AD$ , пересекает ее среднюю линию  $MK$  в точке  $N$ ,  $MN : NK = 3 : 1$ ,  $AD = 24$  см. Найдите  $BC$ .

135. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, взаимно перпендикулярны.

136. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $l$  и удалены от нее на расстояния 5 см и 9 см соответственно (рис. 122). Найдите расстояние от середины  $M$  отрезка  $AB$  до прямой  $l$ .

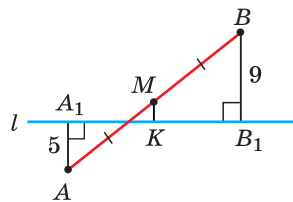


Рис. 122

137.  $ABCD$  — трапеция,  $BC \parallel AD$ ,  $CK$  и  $DK$  — биссектрисы ее углов  $C$  и  $D$ . Расстояние от точки  $K$  до прямой  $CD$  равно 4 см. Найдите высоту трапеции.

- 138.** Основания трапеции равны 16 см и 10 см. Углы при большем основании равны  $40^\circ$  и  $50^\circ$ . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.
- 139.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ ,  $AB = BC = CD$ ,  $\angle ACD = 90^\circ$ . Найдите углы трапеции.
- 140.** Докажите, что:
- разность оснований трапеции меньше суммы ее боковых сторон;
  - сумма оснований трапеции меньше суммы ее диагоналей.
- 141.** В трапеции  $ABCD$  основание  $BC$  равно боковой стороне  $AB$  и в 2 раза меньше основания  $AD$ . Найдите градусную меру угла  $ACD$ .
- 142.** Составьте алгоритм построения с помощью циркуля и линейки трапеции:
- по основаниям и боковым сторонам;
  - по основаниям и диагоналям.
- При каких соотношениях заданных элементов решение существует?

## § 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции

**Определение.** Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной**.

**Теорема (свойства равнобедренной трапеции).**

- У равнобедренной трапеции углы при основании равны.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.

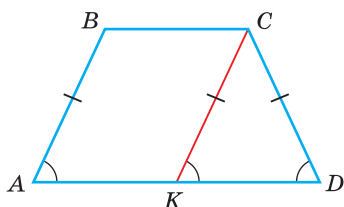


Рис. 123

Дано:  $ABCD$  — трапеция,  $AB = CD$ .

Доказать: 1)  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$ ; 2)  $AC = BD$ .

Доказательство. 1) Проведем  $CK \parallel AB$ ,  $K \in AD$  (рис. 123). Четырехугольник  $ABCK$  — параллелограмм (у него противоположные стороны параллельны). Так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то  $CK = AB$ . Отсюда следует, что треугольник  $KCD$  — равнобедренный. Тогда  $\angle K = \angle D$  как углы при осно-

вании равнобедренного треугольника. Но  $\angle A = \angle K$  как соответственные углы при  $AB \parallel CK$  и секущей  $AD$ . Поэтому  $\angle A = \angle D$ . Поскольку сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна  $180^\circ$ , то и  $\angle B = \angle C$ .

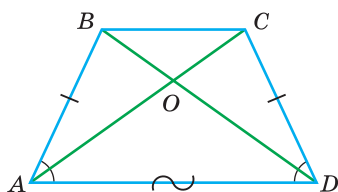


Рис. 124

2) Рассмотрим треугольники  $ACD$  и  $DBA$  (рис. 124). У них сторона  $AD$  — общая,  $AB = CD$  по условию,  $\angle CDA = \angle BAD$  как углы при основании равнобедренной трапеции.  $\triangle ACD = \triangle DBA$  по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда  $AC = BD$ , то есть диагонали равнобедренной трапеции равны. Теорема доказана.

### Следствие.

В равнобедренной трапеции  $\angle ADB = \angle DAC$ ,  $AO = DO$  и  $BO = CO$  (см. рис. 124).

Используя рисунок 123, докажите признак равнобедренной трапеции: «Если углы при основании трапеции равны, то она — равнобедренная».

**Определение.** Трапеция, у которой есть прямой угол, называется **прямоугольной трапецией**.

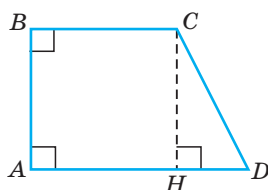


Рис. 125

На рисунке 125 изображена прямоугольная трапеция  $ABCD$ , у которой  $\angle A = 90^\circ$ . Так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ , то  $\angle B = 90^\circ$ . Высота  $CH$  трапеции равна меньшей боковой стороне  $AB$ . В прямоугольном треугольнике  $CHD$  катет  $CH$  меньше гипотенузы  $CD$ . Поэтому боковая сторона  $AB$  — меньшая, а  $CD$  — большая. Следовательно, высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне.



## Задания к § 11

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать признак равнобедренной трапеции: «Если у трапеции диагонали равны, то она — равнобедренная».

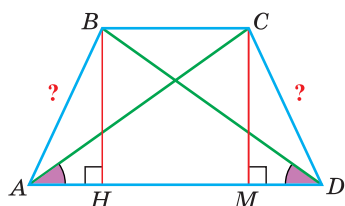


Рис. 126

**Доказательство.** Рассмотрим трапецию  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  (рис. 126). Пусть у нее  $AC = BD$ . Опустим в трапеции высоты  $BH$  и  $CM$ .  $BH = CM$  как расстояния между параллельными прямыми. Прямоугольные треугольники  $AMC$  и  $DHB$  равны по катету и гипотенузе. Из равенства треугольников следует равенство углов  $CAD$  и  $BDA$ . Тогда треугольники  $ACD$  и  $DBA$  равны по двум

сторонам ( $AC = DB$ , сторона  $AD$  — общая) и углу между ними.  $AB = DC$  как соответствующие стороны в равных треугольниках. Трапеция  $ABCD$  равнобедренная. Что и требовалось доказать.

**Задача 2.** Доказать, что высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины, принадлежащей меньшему основанию, делит большее основание на отрезки, равные полусумме и полуразности оснований.

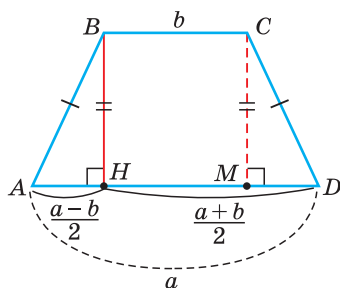


Рис. 127

Доказательство. Рассмотрим равнобедренную трапецию  $ABCD$ , у которой  $AD = a$ ,  $BC = b$  — основания,  $BH$  — высота (рис. 127). Докажем, что  $HD = \frac{a+b}{2}$ ,  $AH = \frac{a-b}{2}$ . Проведем вторую высоту  $CM$  трапеции. Прямоугольные треугольники  $AHB$  и  $DMC$  равны по катету и гипотенузе. Поэтому  $AH = MD$ .

Четырехугольник  $HBCM$  — прямоугольник, так как у него все углы прямые. Тогда

да  $HM = BC = b$ . Отсюда  $AH = MD = \frac{AD - HM}{2} = \frac{a-b}{2}$ ,  $HD = AD - AH = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$ . Что и требовалось доказать.

**Задача 3.**  $ABCD$  — прямоугольная трапеция с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Меньшая боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию, большая боковая сторона равна 42 см и составляет с одной из диагоналей угол, равный  $105^\circ$ . Найти высоту трапеции.

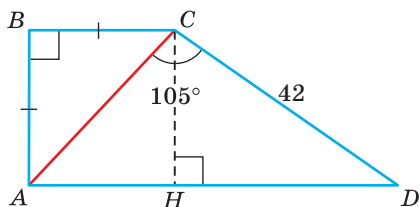


Рис. 128

Решение. Пусть  $AB$  — меньшая боковая сторона. Тогда  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $CD = 42$  см,  $\angle ACD = 105^\circ$  (рис. 128). Треугольник  $ABC$  — прямоугольный равнобедренный. Поэтому  $\angle ACB = 45^\circ$ . Тогда  $\angle BCD = 45^\circ + 105^\circ = 150^\circ$ ,  $\angle D = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ . Проведем высоту  $CH$  трапеции. В прямоугольном треугольнике  $CHD$  катет  $CH$ , лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы  $CD$ , то есть  $CH = 21$  см.

Ответ: 21 см.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**143.** На рисунках 129, а)–в) дана равнобедренная трапеция  $MNKP$ . По данным на рисунках найдите углы, отмеченные знаками вопроса.



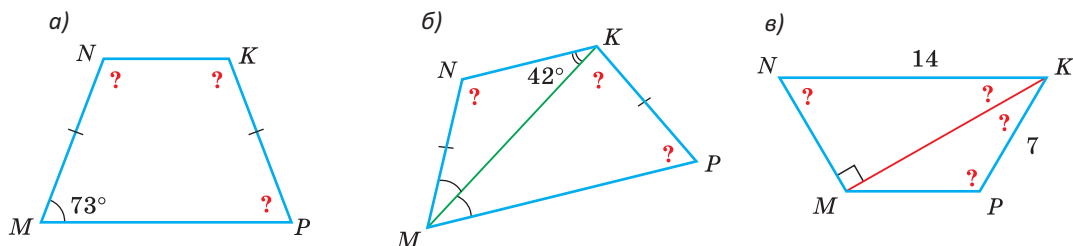


Рис. 129

**144.** а)  $BH$  и  $CM$  — высоты равнобедренной трапеции  $ABCD$ , меньшее основание  $BC$  равно 13 м,  $MD = 5$  м. Найдите длину средней линии трапеции.

б)  $BH$  — высота равнобедренной трапеции  $ABCD$ , меньшее основание  $BC$  равно 8 см,  $HD = 12$  см. Найдите большее основание трапеции.

**145.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  углы  $A$  и  $D$  равны,  $AB = 12,4$  см, средняя линия равна 15 см. Найдите периметр трапеции.

**146.** Докажите, что сумма противоположных углов равнобедренной трапеции равна  $180^\circ$ .

**147.** Диагонали трапеции  $ABCD$  ( $AD$  и  $BC$  — основания трапеции) пересекаются в точке  $O$ ,  $AO = DO$ . Докажите, что трапеция равнобедренная.

**148.**  $ABCD$  — равнобедренная трапеция (рис. 130). По данным на рисунке найдите угол  $CDB$ .

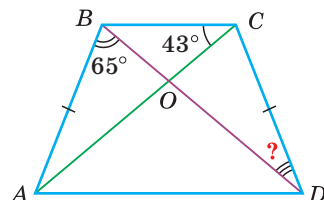


Рис. 130

**149.** Отрезок  $BH$  — высота равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ),  $DB$  — биссектриса ее угла  $D$ ,  $AD + BC = 48$ ,  $AH = 8$ . Найдите  $CD$ .

**150.**  $ABCD$  — прямоугольная трапеция с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Найдите среднюю линию трапеции, если:

а)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $BC = 7$  см,  $CD = 8$  см,  $\angle C = 120^\circ$ ;

б)  $\angle D = 90^\circ$ ,  $\angle BAD = 45^\circ$ ,  $AD = 12$  см,  $CD = 5$  см;

в)  $AB = 6$  см — меньшая боковая сторона,  $BC : AD = 2 : 3$ ,  $\angle BCD = 135^\circ$ .

**151.** Диагональ равнобедренной трапеции равна 6 см и образует с основанием угол  $60^\circ$ . Найдите среднюю линию трапеции.

**152.** В трапеции  $ABCD$   $\angle ADB = \angle DAC$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD + BC = 16$  см. Найдите высоту  $BH$ .

**153.** Составьте алгоритм построения равнобедренной трапеции:

а) по двум основаниям и боковой стороне;

б) по диагонали и двум основаниям.



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определения: трапеции, высоты трапеции, средней линии трапеции.
2. Свойство средней линии трапеции.
3. Определение прямоугольной и равнобедренной трапеций.
4. Свойства равнобедренной трапеции.
5. Признаки равнобедренной трапеции.

### Умеем

1. Доказывать теорему о средней линии трапеции.
2. Доказывать свойства равнобедренной трапеции.

## § 12. Центральная и осевая симметрия

### 1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Точки  $A$  и  $A_1$  называются *симметричными* относительно точки  $O$  (*центра симметрии*), если точка  $O$  является серединой отрезка  $AA_1$  (рис. 131, а).

Центр симметрии считается симметричным сам себе.

Две фигуры  $F$  и  $F_1$  называются симметричными относительно некоторой точки  $O$ , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно точки  $O$  (рис. 131, б).

Фигура имеет центр симметрии (является *центрально-симметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой точки — центра симметрии (рис. 131, в).

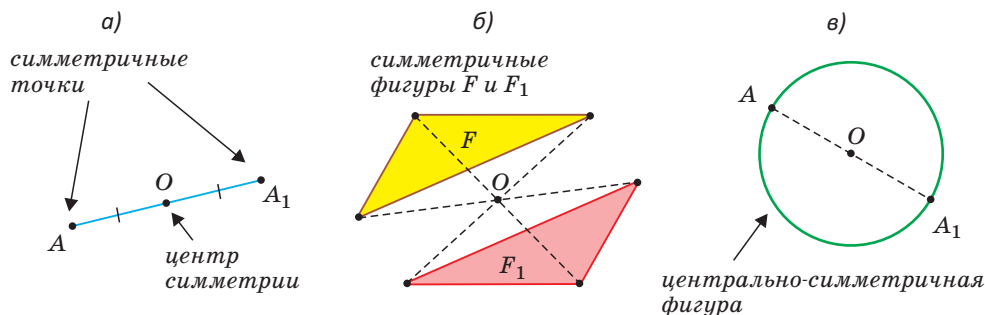


Рис. 131

Примерами центрально-симметричных фигур являются: *отрезок* (центр симметрии лежит в середине отрезка); *окружность* (центр симметрии лежит в центре окружности: концы любого диаметра симметричны относительно центра окружности).

Всякую фигуру  $F$  можно совместить с симметричной ей относительно некоторого центра  $O$  фигурой  $F_1$  путем поворота ее на  $180^\circ$  вокруг точки  $O$ . И обратно, если фигуру  $F$  можно совместить с другой фигурой  $F_1$  путем поворота на  $180^\circ$  вокруг некоторого центра  $O$ , то эти фигуры симметричны относительно центра. Следовательно, фигуры, симметричные относительно точки, равны между собой.

Объекты на рисунке 132 имеют центр симметрии.



Рис. 132

**Задача 1.** Построить фигуру, симметричную прямой  $BC$  относительно точки  $O$ .

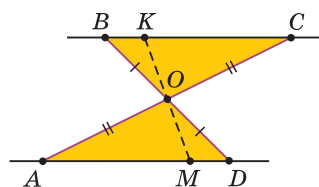


Рис. 133

Решение. Построив точки  $D$  и  $A$ , симметричные точкам  $B$  и  $C$  относительно некоторой точки  $O$ , получим прямую  $AD$  (рис. 133). Из равенства треугольников  $BOC$  и  $DOA$  следует, что  $\angle OCB = \angle OAD$ , откуда  $BC \parallel AD$ . Любая точка  $K$  прямой  $BC$  имеет симметричную ей относительно точки  $O$  точку  $M$  на прямой  $AD$  и наоборот, что следует из равенства треугольников  $COK$  и  $AOM$ .

Следовательно, фигура, симметричная данной прямой относительно не лежащей на ней точки, — это, во-первых, прямая, а во-вторых, это прямая, параллельная данной.

Из решенной задачи вытекают следующие свойства центральной симметрии:

- 1) прямые, симметричные относительно точки, параллельны между собой;
- 2) отрезки, симметричные относительно точки, равны и параллельны;
- 3) треугольники, симметричные относительно точки, равны между собой.

Для построения прямой, симметричной данной относительно данного центра симметрии, достаточно взять две точки на данной прямой, построить две симметричные им точки относительно центра симметрии и провести прямую через построенные точки.

Для построения отрезка, симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные концам

данного отрезка относительно данного центра симметрии, и соединить отрезком построенные точки.

Для построения треугольника (многоугольника), симметричного данному относительно данного центра симметрии, достаточно построить точки, симметричные его вершинам относительно этого центра симметрии, и соединить их соответствующими отрезками.

### Упражнения

1. Какие из следующих фигур являются центрально-симметричными фигурами и где находится их центр симметрии: а) квадрат; б) параллелограмм; в) угол; г) прямая; д) равносторонний треугольник?

2. Изобразите отрезок  $AB$  и точку  $M$  вне прямой  $AB$ . Постройте отрезок  $A_1B_1$ , симметричный отрезку  $AB$  относительно точки  $M$ .

3. Изобразите треугольник  $ABC$ . Постройте треугольник, симметричный треугольнику  $ABC$ : а) относительно вершины  $C$ ; б) относительно точки пересечения медиан.

4. На координатной плоскости изобразите график функции  $y = 2x + 4$ . Постройте прямую, симметричную этому графику относительно начала координат. Найдите функцию вида  $y = kx + b$ , которая соответствует построенной прямой.

5. На координатной плоскости изобразите параллелограмм  $ABCD$ , где  $A(3; 2)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(6; 7)$ ,  $D(7; 2)$ . Постройте параллелограмм  $A_1B_1C_1D_1$ , симметричный параллелограмму  $ABCD$  относительно начала координат  $O(0; 0)$ .

6. На доске изображена часть треугольника  $ABC$  (рис. 134), где вершина  $C$  недоступна. На стороне  $AB$  отмечена середина  $M$ . При помощи циркуля и линейки нужно построить часть медианы  $CM$ , которая помещается на доске.

Выполните это задание, используя свойство центральной симметрии параллелограмма.



Рис. 134

### 2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Точки  $A$  и  $A_1$  называются *симметричными* относительно некоторой прямой  $l$  (*оси симметрии*), если прямая  $l$  является серединным перпендикуляром к отрезку  $AA_1$  (рис. 135, а). Точки, принадлежащие оси симметрии, считаются симметричными сами себе.

Две фигуры  $F$  и  $F_1$  называются симметричными относительно некоторой прямой  $l$ , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры относительно прямой  $l$  (рис. 135, б).

Фигура имеет ось симметрии (является *осесимметричной* фигурой), если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры относительно некоторой прямой — оси симметрии (рис. 135, в).

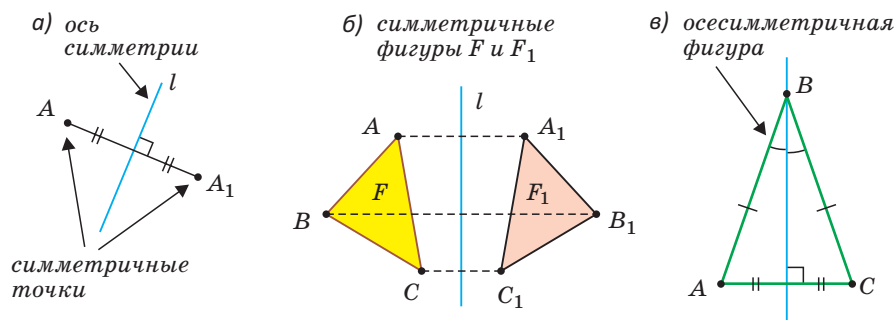


Рис. 135

Примерами фигур, имеющих ось симметрии, являются: *отрезок* (осью симметрии является серединный перпендикуляр к нему), *окружность* (осью симметрии является любая прямая, проходящая через центр окружности), *прямоугольник* (оси симметрии проходят через середины противоположных сторон).

Слово «ось» в словосочетании «ось симметрии» употребляется потому, что если часть плоскости с фигурой  $F$  повернуть в пространстве вокруг прямой  $l$  на  $180^\circ$  как вокруг оси, то фигура  $F$  совпадет с симметричной ей относительно прямой  $l$  фигурой  $F_1$ . Обратно, если какую-то фигуру  $F$  путем вращения вокруг некоторой прямой на  $180^\circ$  можно совместить с фигурой  $F_1$ , то фигуры  $F$  и  $F_1$  симметричны относительно оси вращения (рис. 136).

Следовательно, на плоскости фигуры, симметричные относительно некоторой оси, равны между собой. То же касается симметричных частей фигуры, которая имеет ось симметрии. Например, если тетрадный лист сложить пополам, а затем развернуть, то получатся две симметричные части листа относительно оси — линии сгиба.

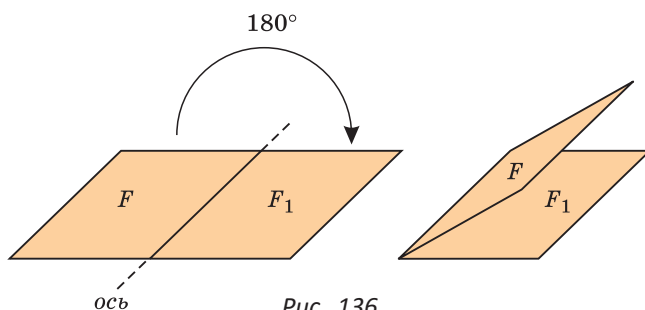


Рис. 136



Рис. 137

Изображения на рисунке 137 имеют ось симметрии.

**Задача 2.** Доказать, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, которая содержит его биссектрису, проведенную к основанию.

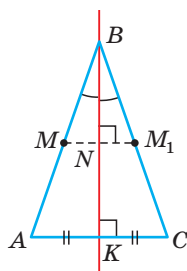


Рис. 138

Доказательство. Пусть  $BK$  — биссектриса треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  (рис. 138). Так как биссектриса  $BK$  будет высотой и медианой, то  $AC \perp BK$  и  $AK = KC$ . Точки  $A$  и  $C$  симметричны относительно прямой  $BK$ , точка  $B$  симметрична самой себе. Возьмем точку  $M$  на стороне  $AB$  и проведем прямую  $MM_1$ , перпендикулярную прямой  $BK$ , где точка  $M_1$  лежит на стороне  $BC$ . Так как в треугольнике  $MBM_1$  биссектриса  $BN$  будет и высотой, то он — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника, и его биссектриса  $BN$  будет и медианой.

Отсюда  $MN = NM_1$  и, значит, точки  $M$  и  $M_1$  симметричны относительно прямой  $BK$ . Следовательно, прямая  $BK$  — ось симметрии равнобедренного треугольника  $ABC$ .

**Задача 3.** Доказать, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

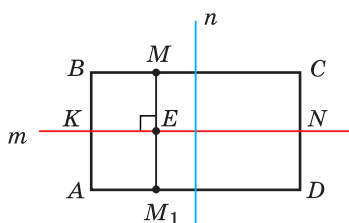


Рис. 139

Доказательство. Пусть  $ABCD$  — прямоугольник (рис. 139),  $m$  и  $n$  — прямые, проходящие через середины его противоположных сторон. Докажем, что для любой точки  $M$ , взятой на стороне прямоугольника, найдется точка  $M_1$ , симметричная относительно прямой  $m$  и принадлежащая стороне прямоугольника. Проведем  $MM_1 \perp m$ . Докажем, что  $ME = EM_1$ . В § 4 (ключевая задача 3) мы доказали, что  $KBCN$  и  $AKND$  — равные прямоугольники. Отсюда следует, что расстояние между параллельными

прямыми  $BC$  и  $KN$  равно расстоянию между параллельными прямыми  $AD$  и  $KN$ . Значит,  $ME = EM_1$ , и  $m$  — ось симметрии для отрезков  $AB$  и  $CD$ . Следовательно, прямая  $m$  — ось симметрии прямоугольника  $ABCD$ .

В силу доказанного прямая  $n$ , проходящая через середины сторон  $AD$  и  $BC$  прямоугольника, является второй его осью симметрии.

Выделим некоторые свойства осевой симметрии:

- 1) *прямые, симметричные относительно оси, пересекаются в точке, лежащей на оси симметрии, либо параллельны между собой;*
- 2) *отрезки, симметричные относительно оси, равны;*
- 3) *треугольники, симметричные относительно оси, равны.*

### Упражнения

1. Какие из фигур, изображенных на рисунках 140, а)–г), имеют ось симметрии? Перерисуйте эти фигуры в тетрадь и проведите их оси симметрии.

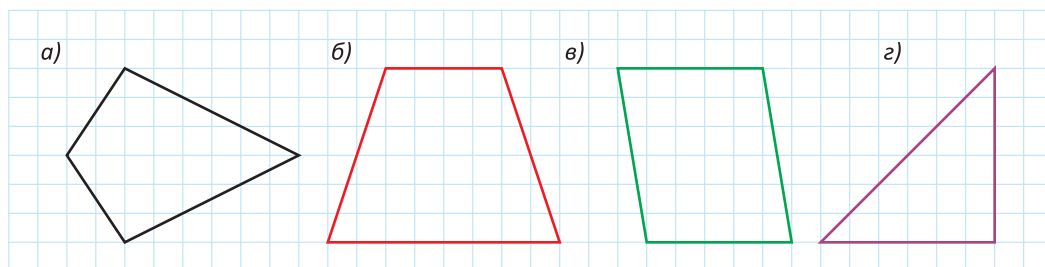


Рис. 140

2. Сколько осей симметрии у прямоугольника, квадрата, ромба, равнобедренной трапеции, равностороннего треугольника?

3. Изобразите отрезок  $AB$  и ось  $l$ , не пересекающую отрезок  $AB$ . Постройте отрезок  $A_1B_1$ , симметричный отрезку  $AB$  относительно прямой  $l$ .

4. Изобразите треугольник  $ABC$ . Постройте треугольник, симметричный треугольнику  $ABC$  относительно оси, проходящей через вершину  $C$ .

5. На координатной плоскости изобразите параллелограмм  $ABCD$ , где  $A(3; 2)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(6; 7)$ ,  $D(7; 2)$ . Постройте параллелограмм  $A_1B_1C_1D_1$ , симметричный параллелограмму  $ABCD$  относительно оси  $Oy$ .

6. На координатной плоскости изобразите график функции  $y = x + 3$ . Постройте прямую, симметричную этому графику относительно оси  $Ox$ . Найдите формулу, задающую функцию, которая соответствует построенной прямой.

7. Какие из следующих слов-палиндромов имеют ось симметрии?

**КАЗАК МАДАМ КОК ШАЛАШ ТОПОТ РАДАР**

### 3. Зеркальная симметрия

Помимо центральной и осевой симметрии существует еще симметрия относительно плоскости. Она называется *зеркальной симметрией*. Точки  $A$  и  $A_1$  симметричны относительно плоскости, если плоскость проходит



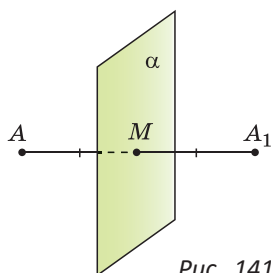


Рис. 141

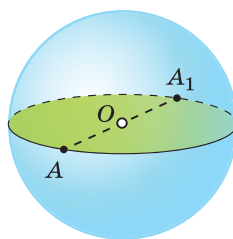


Рис. 142

через середину отрезка  $AA_1$  и перпендикулярна этому отрезку (рис. 141). То есть  $AA_1 \perp \alpha$  и  $AM = MA_1$ .

В пространстве плоскостью симметрии обладает шар: любая плоскость, проходящая через его центр, делит шар на две части, симметричные относительно этой плоскости (рис. 142).

У прямоугольного параллелепипеда три плоскости симметрии (рис. 143).

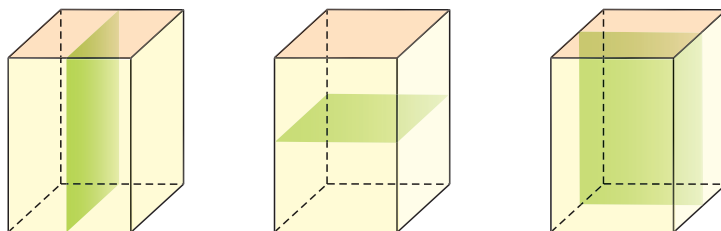


Рис. 143

Многие здания и сооружения обладают плоскостью симметрии (рис. 144). Можно указать плоскость, относительно которой симметрично тело человека или животного.

Название «зеркальная» симметрия объясняется тем, что предмет и его изображение в зеркале симметричны относительно плоскости зеркала. Отражения в воде деревьев, зданий являются примерами зеркальной симметрии.

**Интересно знать.** Игры стран СНГ — международные спортивные соревнования, которые проводятся с 2021 г. Талисманом II Игр стран СНГ, проходивших с 4 по 14 августа 2023 г. в Минске, стала рысь по имени Рыся.



Рис. 144

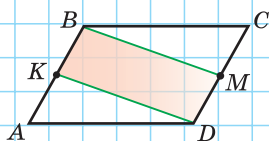
## ЗАПОМИНАЕМ

1. Сумма углов  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ .
2. Пять свойств параллелограмма: «У параллелограмма:
  - 1) сумма соседних углов равна  $180^\circ$ ;
  - 2) диагональ делит его на два равных треугольника;
  - 3) противоположные стороны равны;
  - 4) противоположные углы равны;
  - 5) диагонали точкой пересечения делятся пополам».
3. Три признака параллелограмма: «Если у четырехугольника:
  - 1) две стороны равны и параллельны, или
  - 2) противоположные стороны равны, или
  - 3) диагонали точкой пересечения делятся пополам,
 то данный четырехугольник — параллелограмм».
4. Свойство диагоналей прямоугольника: «Диагонали прямоугольника равны».
5. Свойство диагоналей ромба: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов».
6. Свойство средней линии треугольника: «Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине».
7. Свойство средней линии трапеции: «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».
8. Теорема Фалеса: «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

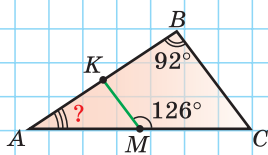
### Тест 1

$ABCD$  — параллелограмм,  $M$  и  $K$  — середины его сторон. Докажите, что  $DKBM$  — параллелограмм.



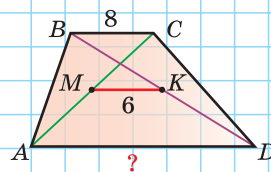
### Тест 2

$M$  и  $K$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$ . Найдите  $\angle A$ .



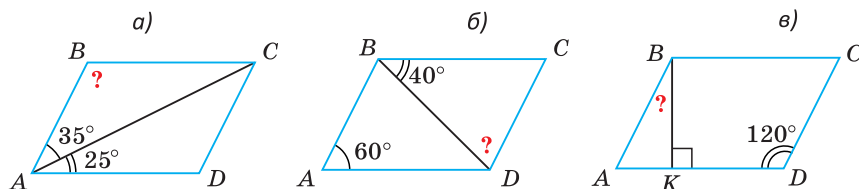
### Тест 3

Найдите основание  $AD$  трапеции  $ABCD$ , если  $M$  и  $K$  — середины ее диагоналей.



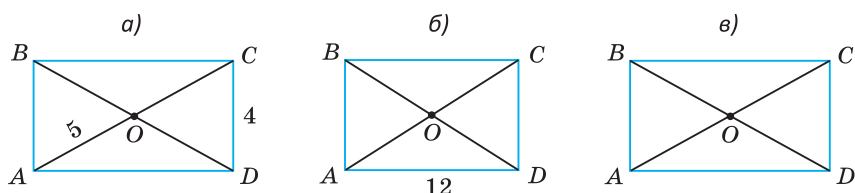
# ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

1.  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите угол, обозначенный знаком вопроса.

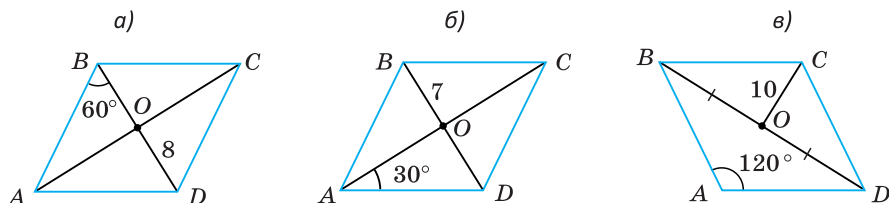


2.  $ABCD$  — прямоугольник. Найдите:

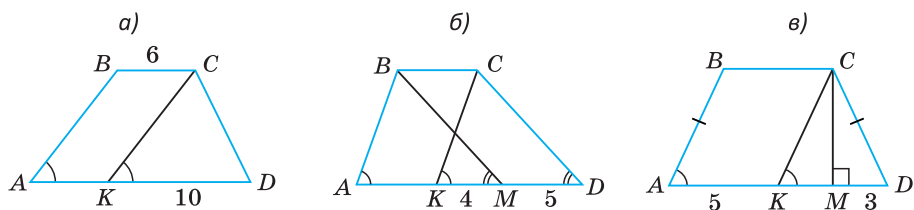
а)  $P_{COD}$ ; б)  $P_{AOD}$ , если  $BD = 15$ ; в)  $AD$ , если  $P_{AOB} = 25$ ,  $P_{ACD} = 40$ .



3.  $ABCD$  — ромб. Найдите его периметр.

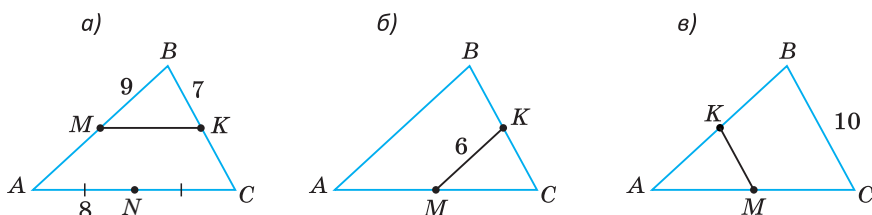


4. Найдите среднюю линию трапеции  $ABCD$ .



5.  $MK$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . Найдите:

а)  $P_{ABC}$ ; б)  $P_{ABC}$ , если  $P_{ABKM} = 28$ ; в)  $P_{KBСM}$ , если  $P_{AKM} = 18$ .

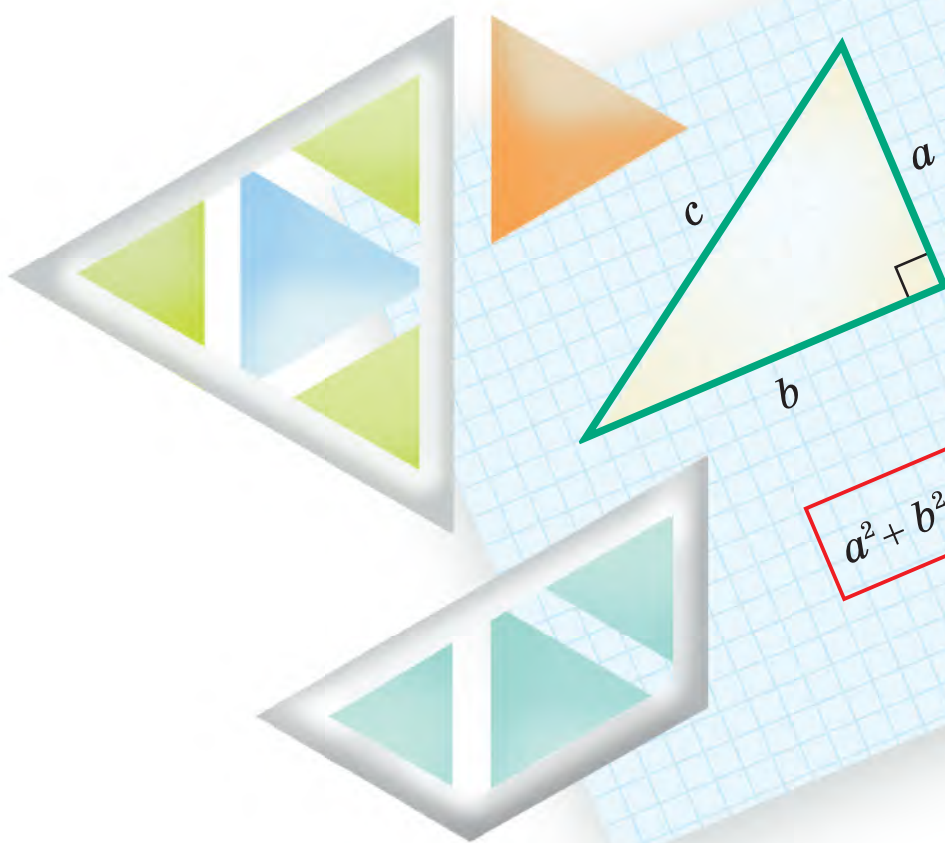


## Глава II

# Площади многоугольников

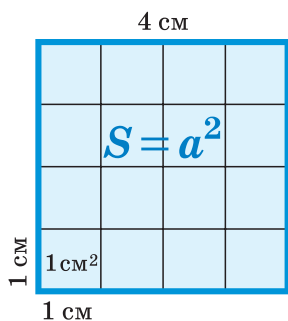
В этой главе вы узнаете:

- Какие фигуры называют равновеликими
- Как найти площадь треугольника
- Что утверждает теорема Пифагора



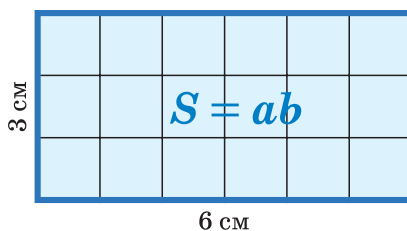
## Площади

### Квадрат



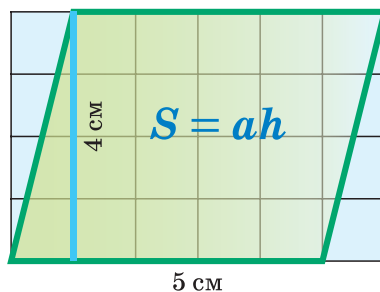
$$S = 4^2 = 16 (\text{см}^2)$$

### Прямоугольник



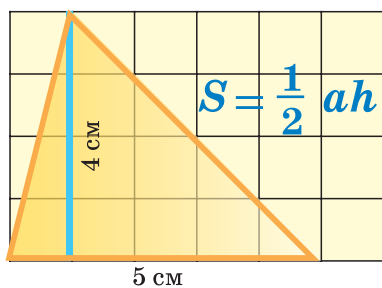
$$S = 6 \times 3 = 18 (\text{см}^2)$$

### Параллелограмм



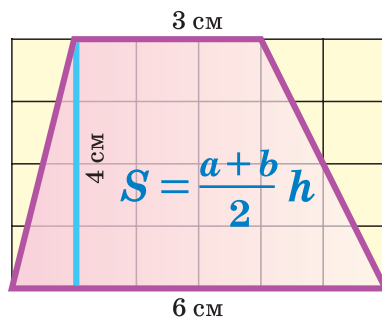
$$S = 5 \times 4 = 20 (\text{см}^2)$$

### Треугольник



$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 (\text{см}^2)$$

### Трапеция



$$S = \frac{6+3}{2} \times 4 = 18 (\text{см}^2)$$

### § 13. Площадь квадрата, прямоугольника

Под площадью многоугольника или другой ограниченной плоской фигуры понимают величину части плоскости, которую она занимает. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины. Единица измерения площади называется квадратной единицей:  $1 \text{ см}^2$  (квадратный сантиметр),  $1 \text{ дм}^2$  (квадратный дециметр),  $1 \text{ м}^2$  (квадратный метр) и т. д.

Для нахождения площади квадрата со стороной 5 см его можно разбить на квадраты со стороной 1 см (рис. 145). В одном горизонтальном ряду будет 5 таких квадратов, а рядов будет тоже 5. Получим  $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$  малых квадратов. Тогда площадь большого квадрата равна  $25 \text{ см}^2$ . Можно доказать, что если сторона квадрата равна дробному или иррациональному числу  $a$ , то площадь квадрата также равна  $a^2$ . То есть  $S_{\text{кв.}} = a^2$ .

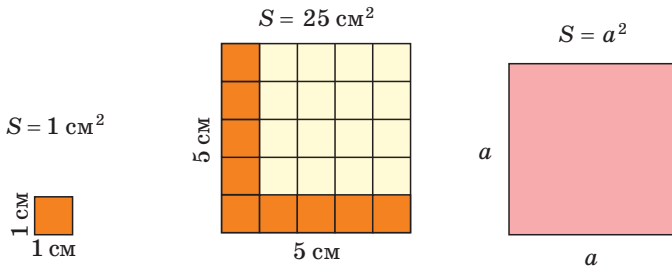


Рис. 145

Свойства (аксиомы) площади:

1. *Каждый многоугольник имеет площадь, которая выражается положительным числом.*

Это число показывает, сколько раз единица измерения площади, то есть единичный квадрат и его части, укладывается в данном многоугольнике.

2. *Равные многоугольники имеют равные площади.*

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. То есть если два многоугольника имеют равные площади, то они не обязательно равны между собой как фигуры.

3. *Если многоугольник разбить на несколько многоугольников, то сумма площадей полученных многоугольников будет равна площади данного.*

Так, если прямоугольник с площадью  $S$  разбить на два прямоугольника с площадями  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 146), то  $S = S_1 + S_2$ .

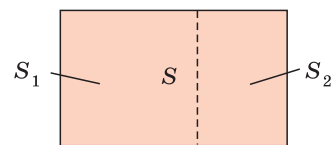


Рис. 146

Заметим, что для периметров указанных прямоугольников аналогичное свойство неверно:  $P \neq P_1 + P_2$ .

**Определение.** Фигуры, площади которых равны, называются **равновеликими**.

Вы уже знаете, что площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины, т. е. произведению его измерений. Прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см равновелик квадрату со стороной 6 см (рис. 147).

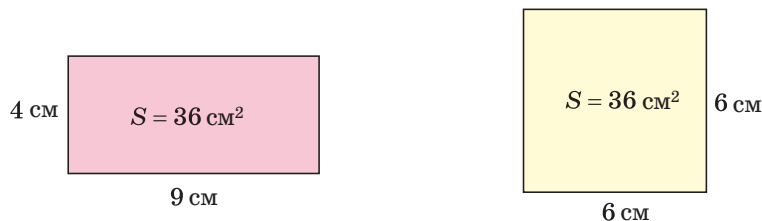


Рис. 147

Докажем справедливость формулы площади прямоугольника.

**Теорема.** Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, то есть  $S_{\text{пр.}} = ab$ .

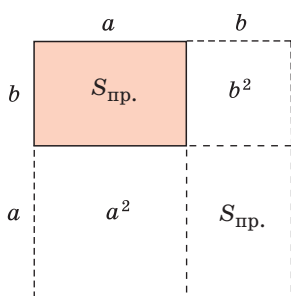


Рис. 148

**Доказательство.** Построим прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$  до квадрата со стороной, равной  $a + b$ , как показано на рисунке 148. Площадь этого квадрата равна  $(a + b)^2$ . Построенный квадрат состоит из двух равных прямоугольников с площадью  $S_{\text{пр.}}$  и двух квадратов: одного со стороной  $a$  и площадью  $a^2$ , другого со стороной  $b$  и площадью  $b^2$ .

Так как площадь многоугольника равна сумме площадей его частей, то

$$2S_{\text{пр.}} + a^2 + b^2 = (a + b)^2,$$

$$2S_{\text{пр.}} + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$S_{\text{пр.}} = ab.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Так как каждая сторона прямоугольника является его высотой относительно соседней стороны как основания, то можно говорить, что площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

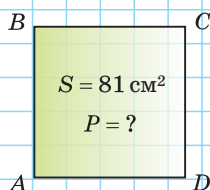


А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Площадь квадрата равна  $81 \text{ см}^2$ .  
Найдите периметр квадрата.

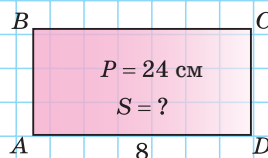
- а) 9 см;            в) 24 см;  
б) 18 см;        г) 36 см.



### Тест 2

Периметр прямоугольника равен 24 см, одна из его сторон — 8 см. Найдите площадь прямоугольника.

- а)  $128 \text{ см}^2$ ;        в)  $36 \text{ см}^2$ ;  
б)  $28 \text{ см}^2$ ;        г)  $32 \text{ см}^2$ .



## Задания к § 13

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Найти периметр квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 9 см и 16 см (рис. 149).

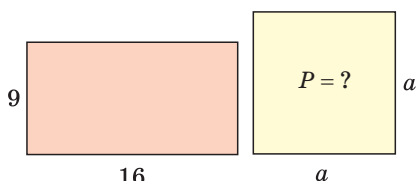


Рис. 149

Решение. Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, т. е.  $S_{\text{пр.}} = 9 \cdot 16 = 144 \text{ (см}^2\text{)}$ . Так как квадрат равновелик данному прямоугольнику, то  $S_{\text{кв.}} = 144 \text{ см}^2$ . Но площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, т. е.  $S_{\text{кв.}} = a^2$ . Отсюда  $a^2 = 144$ ,  $a = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$  — сторона квадрата.

Периметр квадрата  $P_{\text{кв.}} = 4a = 4 \cdot 12 = 48 \text{ (см)}$ .

Ответ: 48 см.

*Замечание.* Уравнение  $a^2 = 144$ , вообще говоря, имеет два корня:  $-12$  и  $12$ . Считая, что длина стороны квадрата — величина положительная, мы сразу записали  $a = \sqrt{144}$ , а корень  $a = -\sqrt{144}$  отбросили как посторонний.

**Задача 2.** Из квадрата ABCD вырезали треугольник BOC, где O — точка пересечения диагоналей. Площадь многоугольника ABOCD равна  $54 \text{ см}^2$ . Найти длину стороны квадрата.

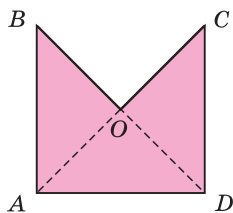


Рис. 150

Решение. Диагонали  $AC$  и  $BD$  делят квадрат  $ABCD$  на 4 равных треугольника. Многоугольник  $ABOCD$  состоит из трех равных треугольников:  $AOD$ ,  $AOB$  и  $COD$  (рис. 150). Площадь каждого треугольника равна  $54 : 3 = 18$  (см<sup>2</sup>), а площадь квадрата  $ABCD$  равна  $18 \cdot 4 = 72$  (см<sup>2</sup>). Так как площадь квадрата находится по формуле  $S = a^2$ , где  $a$  — сторона квадрата, то  $a^2 = 72$ ,  $a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  (см).

Ответ:  $6\sqrt{2}$  см.

**Задача 3.** Периметр прямоугольника равен 16 см, а его площадь равна 15 см<sup>2</sup>. Найти стороны прямоугольника.

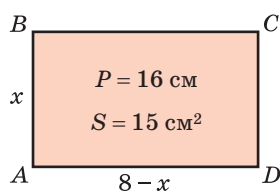


Рис. 151

Решение. Способ 1. Полупериметр прямоугольника (сумма длин двух соседних сторон) равен 8 см. Если одна его сторона равна  $x$  см, то другая сторона равна  $(8 - x)$  см (рис. 151). Площадь прямоугольника находится по формуле  $S = ab$ , где  $a$  и  $b$  — соседние стороны. По условию  $x \cdot (8 - x) = 15$ . Решим полученное уравнение:

$$-x^2 + 8x = 15, \quad x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = 4 \pm 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 5.$$

Если  $x = 3$ , то  $8 - x = 5$ ; если  $x = 5$ , то  $8 - x = 3$ . Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.

Способ 2. Пусть  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольника. Так как площадь прямоугольника  $S = ab$ , то  $b = \frac{S}{a}$ . По условию  $S = 15$  см<sup>2</sup>. Поэтому  $b = \frac{15}{a}$ . Периметр прямоугольника  $P = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{15}{a}\right)$ . Из условия  $2\left(a + \frac{15}{a}\right) = 16$ . Отсюда  $a^2 - 8a + 15 = 0$  (где  $a \neq 0$ ). По теореме, обратной теореме Виета,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$ . Тогда  $b_1 = \frac{15}{3} = 5$ ,  $b_2 = \frac{15}{5} = 3$ . Получили  $a = 3$  (см),  $b = 5$  (см) или  $a = 5$  (см),  $b = 3$  (см). Стороны прямоугольника равны 3 см и 5 см.  
 Ответ: 3 см и 5 см.

*Замечание.* Часто при решении геометрических задач с помощью уравнений при обозначении длин неизвестных отрезков размерность не ставится: вместо  $x$  дм,  $a$  см,  $R$  м пишут  $x$ ,  $a$ ,  $R$ . В этом случае размерность указывают в скобках после нахождения корня уравнения:  $x = 4$  (дм),  $a = 5$  (см),  $R = 6$  (м).



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 154.** Измерьте большой линейкой размеры классной доски. Найдите ее площадь в квадратных метрах, округлив ответ до десятых.
- 155.** Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:
- а) 25 мм;      б) 1,2 дм;      в)  $3\sqrt{2}$  м.
- 156.** На рисунках 152, а)—в) изображены фигуры, которые получены из квадратов, у которых вырезали какую-то часть. По указанным размерам найдите площадь оставшейся части каждого квадрата (все размеры даны в сантиметрах).

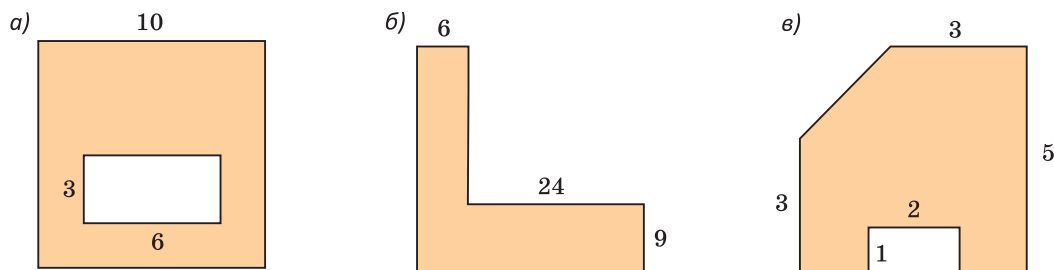


Рис. 152

- 157.** Площадь прямоугольника равна  $24 \text{ см}^2$ . Стороны прямоугольника относятся как 2 : 3. Найдите стороны прямоугольника.
- 158.** Дан прямоугольник  $ABCD$ . Сторону  $AD$  продлили за точку  $D$  на отрезок  $DK$ , равный стороне  $AD$ . Объясните, почему:
- а) треугольник  $ACK$  равновелик прямоугольнику  $ABCD$ ;  
б) треугольник  $ABK$  равновелик прямоугольнику  $ABCD$ .
- 159.** а) Одна из сторон прямоугольника равна 18 дм, а его площадь равна  $90 \text{ дм}^2$ . Найдите периметр прямоугольника.  
б) Периметр прямоугольника равен 36 м, а одна из его сторон равна 12 м. Найдите площадь прямоугольника.
- 160.** В прямоугольнике  $ABCD$  на стороне  $AD$  взята точка  $K$  (рис. 153),  $\angle BKD = 135^\circ$ ,  $KD = 4 \text{ см}$ ,  $CD = 5 \text{ см}$ . Найдите площадь прямоугольника.
- 161.** В прямоугольнике  $ABCD$  проведены отрезки  $MK \parallel AD$ ,  $NP \parallel AB$  (рис. 154). Докажите, что площадь четырехугольника  $MNKP$  равна  $\frac{1}{2}$  площади прямоугольника  $ABCD$ .

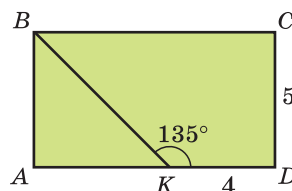


Рис. 153

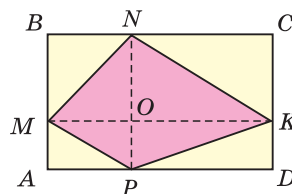





Рис. 154

162. а) Периметр прямоугольника равен 22 см. Одна из сторон на 3 см больше другой. Найдите площадь прямоугольника.  
б) Площадь прямоугольника равна  $80 \text{ см}^2$ . Одна из сторон на 11 см меньше другой. Найдите периметр прямоугольника.
163. Площадь прямоугольника равна  $48 \text{ см}^2$ . Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон этого прямоугольника.
164. На координатной плоскости дан прямоугольник  $ABCD$ , где  $A(-3; -2)$ ,  $C(4; 3)$ ,  $D(4; -2)$ . Найдите площадь этого прямоугольника, если единичный отрезок равен 1 см.
165. а) Каждую сторону квадрата увеличили в 3 раза. Определите, во сколько раз увеличилась площадь квадрата.  
б) Определите, во сколько раз нужно уменьшить каждую сторону квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 16 раз.
166. Каждую сторону квадрата увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?
-  167. Прямоугольник разбит прямыми, перпендикулярными его сторонам, на четыре части (рис. 155). Площади трех частей равны 8, 10 и 12. Найдите площадь четвертой (незакрашенной) части прямоугольника.
-  168. Два равновеликих четырехугольника  $ABCD$  и  $MNPК$  совместили, как показано на рисунке 156. Докажите, что сумма площадей зеленых треугольников равна сумме площадей красных треугольников.
-  169. Точки  $M, N, P, K$  — середины сторон квадрата  $ABCD$  (рис. 157).  
а) Какую форму имеет желтый четырехугольник? Обоснуйте ваш ответ.  
б) Какую часть составляет его площадь от площади квадрата  $ABCD$ :  
1)  $\frac{1}{2}$ ; 2)  $\frac{1}{3}$ ; 3)  $\frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{1}{5}$ ; 5)  $\frac{1}{8}$ ?

Докажите, что ваше утверждение верно.

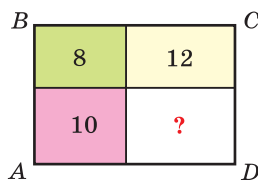


Рис. 155

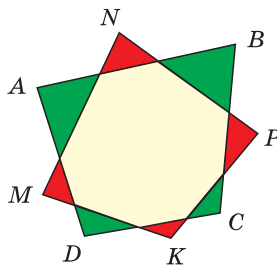


Рис. 156

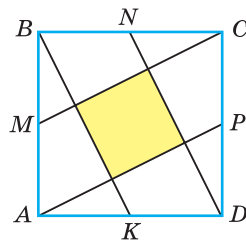


Рис. 157

### Гимнастика ума

На рисунке 158 изображены квадраты со сторонами 10 см, 9 см, 7 см и 4 см. Известно, что сумма площадей двух красных частей равна  $112 \text{ см}^2$ . Найдите сумму площадей двух зеленых частей.

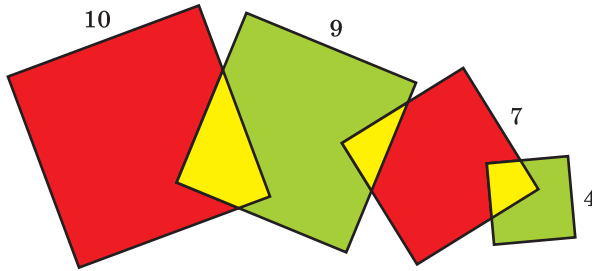


Рис. 158

## § 14. Площадь параллелограмма

Напомним, что сторону параллелограмма, к которой проведена высота, мы называем его основанием.

**Теорема.** Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, то есть  $S_{\text{пар.}} = ah$ .

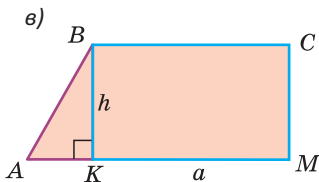
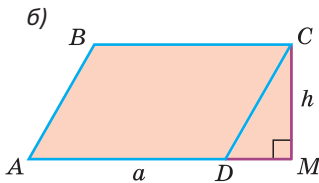
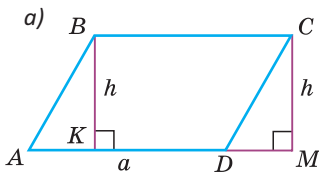


Рис. 159

**Доказательство.** Пусть  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 159, а),  $AD = a$  — основание,  $BK = h$  — высота. Проведем в параллелограмме высоту  $CM = h$ . Четырехугольник  $KBMC$  является прямоугольником, так как у него все углы прямые. Прямоугольные треугольники  $ABK$  и  $DCM$  равны по катету и гипотенузе ( $BK = CM$  как высоты, проведенные к одному основанию,  $AB = CD$  как противоположные стороны параллелограмма). Значит, равны и их площади.

Рассмотрим трапецию  $ABCM$ . Площадь трапеции  $ABCM$ , с одной стороны, равна сумме площадей параллелограмма  $ABCD$  и прямоугольного треугольника  $DCM$  (рис. 159, б). С другой стороны, она равна сумме площадей прямоугольника  $KBMC$  и прямоугольного треугольника  $ABK$  (рис. 159, в).

В силу равенства площадей треугольников  $ABK$  и  $DCM$  площадь параллелограмма  $ABCD$  равна площади прямоугольника  $KBCM$ . Площадь прямоугольника  $S_{KBCM} = BC \cdot BK$ , площадь параллелограмма  $S_{ABCD} = BC \cdot BK = AD \cdot BK$ . То есть  $S_{\text{пар.}} = ah$ . Теорема доказана.

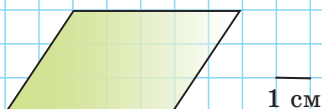
*Замечание.* Иногда высоту параллелограмма, проведенную к стороне  $a$ , обозначают  $h_a$ , а высоту, проведенную к стороне  $b$ , обозначают  $h_b$ . Тогда справедливо равенство  $S_{\text{пар.}} = ah_a = bh_b$ , откуда  $a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$ .

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ .

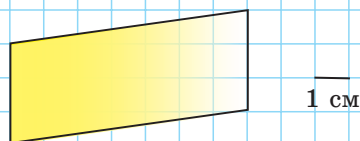
- а)  $15 \text{ см}^2$ ;      в)  $16 \text{ см}^2$ ;  
б)  $7,5 \text{ см}^2$ ;    г)  $8 \text{ см}^2$ .



### Тест 2

Найдите площадь параллелограмма, если размеры одной клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ .

- а)  $42 \text{ см}^2$ ;      в)  $21 \text{ см}^2$ ;  
б)  $28 \text{ см}^2$ ;    г)  $14 \text{ см}^2$ .



### Задания к § 14 РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Стороны параллелограмма равны  $12 \text{ см}$  и  $8 \text{ см}$ . Высота, проведенная к большей стороне, равна  $10 \text{ см}$ . Найти высоту, проведенную к меньшей стороне параллелограмма.

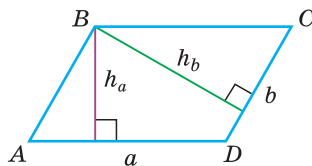


Рис. 160

**Решение.** Пусть  $a = 12 \text{ см}$  и  $b = 8 \text{ см}$  — стороны параллелограмма  $ABCD$ ,  $h_a$  и  $h_b$  — его высоты и  $h_a = 10 \text{ см}$  (рис. 160). Так как  $S = ah_a$  и  $S = bh_b$  — это площадь одного и того же параллелограмма, то  $ah_a = bh_b$ , то есть  $12 \cdot 10 = 8 \cdot h_b$ . Отсюда  $h_b = \frac{12 \cdot 10}{8} = 15 \text{ (см)}$ .

Ответ:  $15 \text{ см}$ .

*Замечание.* Из равенства  $ah_a = bh_b$  следует, что  $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ . То есть стороны параллелограмма обратно пропорциональны его высотам. К большей стороне параллелограмма проведена меньшая высота, а к меньшей стороне — большая.

**Задача 2.** Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна  $24 \text{ см}^2$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ . Найдите длину диагонали  $AC$ .

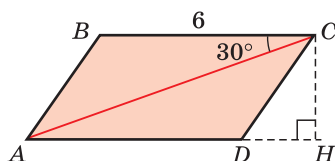


Рис. 161

**Решение.** Опустим высоту  $CH$  на продолжение основания  $AD$  (рис. 161). Так как  $S_{ABCD} = AD \cdot CH$  и  $AD = BC = 6 \text{ см}$ , то  $24 = 6 \cdot CH$ ,  $CH = \frac{24}{6} = 4 \text{ (см)}$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ACH$ . Заметим, что  $\angle CAH = \angle ACB = 30^\circ$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AC$ . Так как катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы, то  $AC = 2CH = 8 \text{ см}$ .

Ответ: 8 см.

**Задача 3.** На рисунке 162  $AD \parallel BM$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AK \parallel DM$ . Доказать, что площадь красного четырехугольника равна площади синего.

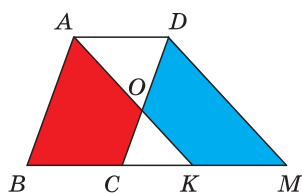


Рис. 162

**Доказательство.** Параллелограммы  $ABCD$  и  $AKMD$  равновелики, так как у них сторона  $AD$  — общая, а высоты, проведенные к этой стороне, равны как расстояния между параллельными прямыми  $BM$  и  $AD$ . Параллелограмм  $ABCD$  состоит из красного четырехугольника  $BAOC$  и треугольника  $AOD$ . Параллелограмм  $AKMD$  состоит из синего четырехугольника  $OKMD$  и треугольника  $AOD$ . Следовательно, площади синего и красного четырехугольников равны. Что и требовалось доказать.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**170.** По данным на рисунках 163, а)—в) найдите площадь параллелограмма  $ABCD$  (длины отрезков даны в сантиметрах).

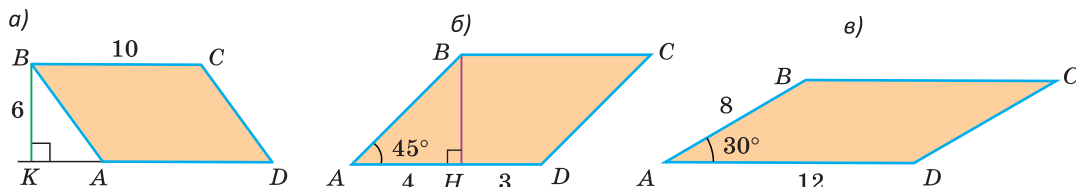


Рис. 163

**171.** а) Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна  $100 \text{ м}^2$ . Сторона  $AD$  равна  $20 \text{ м}$ . Найдите высоту параллелограмма, проведенную к стороне  $AD$ .



- б) Высота  $BH$  параллелограмма  $ABCD$  проведена к стороне  $AD$  и равна 8 см,  $AH = 3$  см,  $HD = 2AH$ . Найдите площадь параллелограмма.
- 172.** а) Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна  $60 \text{ см}^2$ . Высота  $BK$ , проведенная к стороне  $CD$ , равна 10 см,  $AD = 12$  см. Найдите периметр параллелограмма.
- б) Из вершины  $B$  параллелограмма  $ABCD$  к стороне  $CD$  проведена высота  $BK$ , к стороне  $AD$  — высота  $BH$ . Найдите периметр параллелограмма, если  $BH = 5$  см,  $BK = 7$  см,  $AD = 14$  см.
- 173.**  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 164),  $BC = 10$  см,  $CK \perp AD$ ,  $CK = 7$  см. Найдите площадь треугольника  $ABD$ .
- 174.** На рисунке 165  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $AB$ , если  $S_{ABCD} = 54 \text{ см}^2$ ,  $AB = 6$  см.
- 175.** На рисунке 166  $a \parallel b$ ,  $c \parallel d$ ,  $MK = 16$ ,  $NK = 24$ . Расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно 18. Найдите расстояние между прямыми  $c$  и  $d$ .

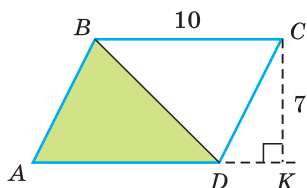


Рис. 164

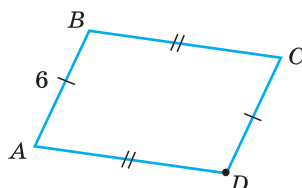


Рис. 165

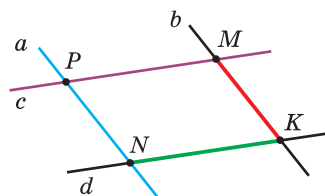


Рис. 166

- 176.** а) Большая сторона параллелограмма равна 18 см, высоты относятся как  $1 : 2$ . Найдите периметр параллелограмма.
- б) Периметр параллелограмма равен 48 см, одна из его сторон в 2 раза больше другой. Высота, опущенная на большую сторону, равна 4,5 см. Найдите площадь параллелограмма.
- 177.** Определите, сколько квадратных единиц составляет площадь параллелограмма, изображенного на координатной плоскости (рис. 167).
- 178.** Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $BK$  — биссектриса угла  $B$  (точка  $K$  лежит на стороне  $AD$ ),  $CD = 12$  см,  $KD = 5$  см, расстояние от точки  $K$  до прямой  $BC$  равно 9 см. Найдите площадь параллелограмма.

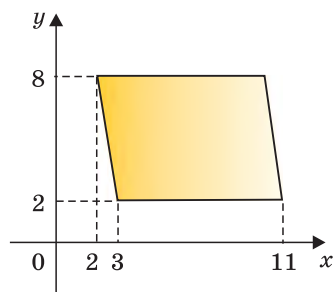


Рис. 167

- 179.** Расстояние от вершины  $B$  параллелограмма  $ABCD$  до прямой  $AD$  равно 6 см, а до прямой  $AC$  — 4 см,  $\angle CAD = 30^\circ$ . Найдите площадь параллелограмма.
- 180.** Площадь параллелограмма равна  $112 \text{ см}^2$ . Найдите площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного параллелограмма.
- 181.** Дан параллелограмм  $ABCD$ ,  $DK$  — биссектриса угла  $D$  (точка  $K$  лежит на стороне  $BC$ ),  $\angle BKD = 105^\circ$ ,  $BK = 4 \text{ см}$ ,  $KC = 12 \text{ см}$ . Найдите площадь параллелограмма.
- 182.** Периметр параллелограмма  $ABCD$  равен 48 см, его высоты равны 10 см и 6 см. Найдите площадь параллелограмма.
- 183.** Угол между высотами  $BK$  и  $BM$  параллелограмма  $ABCD$  равен  $45^\circ$ . Высота  $BK$  делит сторону  $AD$  в отношении  $1 : 2$ , считая от точки  $A$ . Средняя линия трапеции  $KBCD$  равна 7,5 см. Найдите площадь параллелограмма.
- 184.** Точки  $M, N, P, K$  — середины сторон четырехугольника  $ABCD$  (рис. 168). Площадь четырехугольника  $MNPК$  равна  $144 \text{ см}^2$ . Известно, что  $BD = 24 \text{ см}$ ,  $NH \perp MK$ . Докажите, что  $\angle NHP = \angle NPH$ .

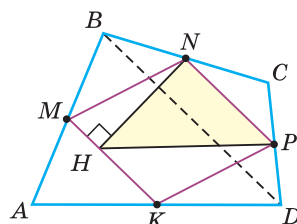


Рис. 168

## § 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба

**Теорема.** Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то есть  $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah_a$ .

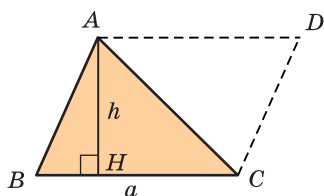


Рис. 169

**Доказательство.** Пусть в треугольнике  $ABC$  сторона  $BC = a$ , высота  $AH = h$ . Проведем  $AD \parallel BC$ ,  $CD \parallel AB$  и построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $BADC$  (рис. 169). Основание  $a$  и высота  $h$  у параллелограмма те же, что у треугольника  $ABC$ .  $\triangle ABC = \triangle CDA$ , значит,  $S_{ABC} = S_{CDA}$ . Тогда площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади параллелограмма  $BADC$ , т. е.  $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{BADC} = \frac{1}{2}ah$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Принято высоты треугольника, проведенные к сторонам  $a$ ,  $b$  и  $c$ , обозначать соответственно  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$ . Тогда  $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ , откуда  $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$ .

### Следствие.

Треугольники, имеющие равные основания и равные высоты, проведенные к этим основаниям, равновелики.

На рисунке 170 все треугольники, имеющие с треугольником  $ABC$  общее основание  $BC$ , вершины которых лежат на прямой, проходящей через вершину  $A$  параллельно прямой  $BC$ , будут равновелики.

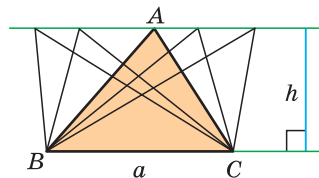


Рис. 170

**Теорема.** Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то есть  $S = \frac{ab}{2}$ .

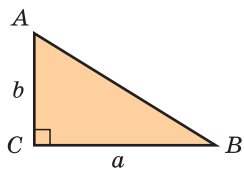


Рис. 171

**Доказательство.** Катет  $b$  прямоугольного треугольника  $ABC$  является высотой, а катет  $a$  — соответствующим этой высоте основанием (рис. 171). Поэтому площадь прямоугольного треугольника  $S = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{ab}{2}$ . Теорема доказана.

Площадь ромба можно найти как площадь параллелограмма, то есть как произведение основания на высоту. Однако, учитывая, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны, можно вывести отдельную формулу площади ромба.

**Теорема.** Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то есть  $S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$ .

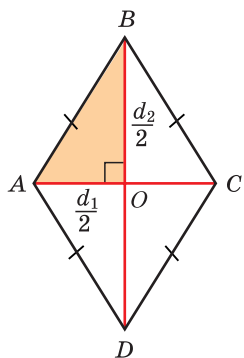


Рис. 172

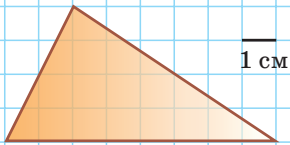
**Доказательство.** Пусть у ромба  $ABCD$  диагонали  $AC = d_1$ ,  $BD = d_2$  (рис. 172). Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то прямоугольные треугольники  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $AOD$  равны по двум катетам. А значит, равны их площади. Поскольку площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то  $S_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$ . Следовательно,  $S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$ , т. е.  $S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2}$ . Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ .

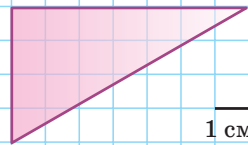
- а)  $16 \text{ см}^2$ ;      в)  $12 \text{ см}^2$ ;  
б)  $32 \text{ см}^2$ ;      г)  $24 \text{ см}^2$ .



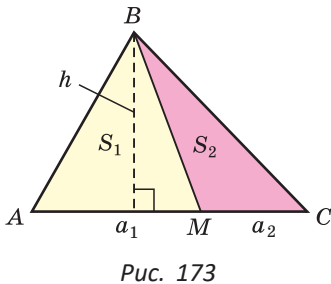
### Тест 2

Найдите площадь треугольника, если размеры одной клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ .

- а)  $28 \text{ см}^2$ ;      в)  $20 \text{ см}^2$ ;  
б)  $16 \text{ см}^2$ ;      г)  $14 \text{ см}^2$ .



**Задача.** Доказать свойство: «Площади треугольников с общей высотой (или равными высотами) относятся как соответствующие этой высоте основания».



Доказательство. У треугольников  $ABM$  и  $CBM$  на рисунке 173 общая высота  $h$ , которая проведена из вершины  $B$ . Обозначим соответствующие основания  $AM = a_1$  и  $MC = a_2$ . Найдем отношение площадей этих треугольников:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1h}{\frac{1}{2}a_2h} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Согласно доказанному свойству  $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$ .

### Следствия.

1. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
2. Диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

Докажите эти следствия самостоятельно.



## Задания к § 15

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

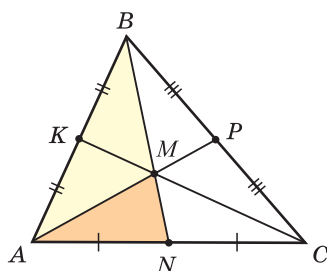


Рис. 174

Решение. Пусть  $AP$ ,  $BN$  и  $CK$  — медианы треугольника  $ABC$ , площадь которого равна  $S$  (рис. 174). Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то  $S_{ABN} = \frac{1}{2}S$ . По свойству медиан  $BM : MN = 2 : 1$ . Поскольку треугольники  $ABM$  и  $AMN$  имеют общую высоту, опущенную из вершины  $A$ , их площади относятся как  $BM : MN$ , т. е.  $2 : 1$ .

$$\text{Тогда } S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{ABN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S.$$

Аналогично,

$$S_{NMC} = S_{MPC} = S_{BMP} = S_{KMB} = S_{AMK} = \frac{1}{6}S.$$

### Следствие.

Площадь треугольника, ограниченного двумя медианами и стороной, составляет  $\frac{1}{3}$  площади  $S$  данного треугольника, то есть

$$S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{1}{3}S.$$

**Задача 2.** Найти высоту  $h_c$  прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  и гипотенузой  $c$ .

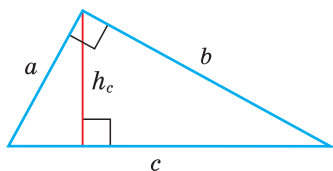


Рис. 175

Решение. С одной стороны, площадь прямоугольного треугольника  $S = \frac{1}{2}ch_c$  (рис. 175). С другой стороны,  $S = \frac{1}{2}ab$ . Отсюда  $ch_c = ab$ ,  $h_c = \frac{ab}{c}$ .

**Пример.** Если катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см, а гипотенуза — 10 см, то высота, проведенная к гипотенузе,  $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$  (см).

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

— формула высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

**Задача 3.** Площадь треугольника  $ABC$  равна  $120 \text{ см}^2$ ,  $BM$  — медиана треугольника, точка  $O$  — середина медианы. Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ . Найти площадь четырехугольника  $МОКС$  (рис. 176).

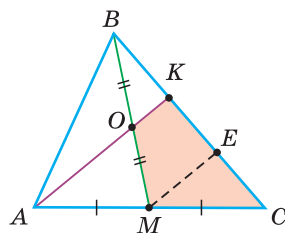


Рис. 176

Решение. Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то  $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ ,  $S_{AOM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ . Проведем  $ME \parallel AK$ . По теореме Фалеса, так как  $BO = OM$ , то  $BK = KE$ , так как  $AM = MC$ , то  $KE = EC$ . Отсюда  $BK = KE = EC$ ,  $BK : KC = 1 : 2$ . У треугольников  $AKB$  и  $AKC$  общая высота, проведенная из вершины  $A$ .

$$\text{Поэтому } \frac{S_{AKB}}{S_{AKC}} = \frac{BK}{KC} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{AKC} &= \frac{2}{3}S_{ABC}, \quad S_{MOKC} = S_{AKC} - S_{AOM} = \\ &= \frac{2}{3}S_{ABC} - \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{5}{12} \cdot 120 = 50 \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $50 \text{ см}^2$ .



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 185.** Найдите площади треугольников, изображенных на рисунках 177, а)–в).

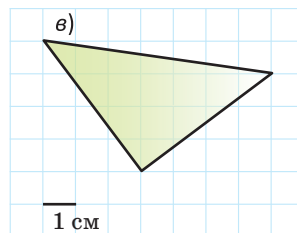
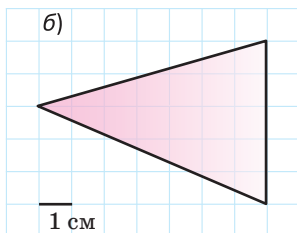
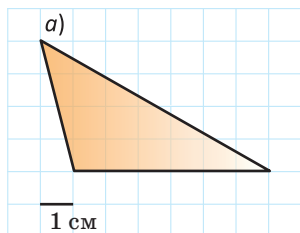


Рис. 177

- 186.** Площадь треугольника  $MNK$  равна  $80 \text{ см}^2$ . Высота  $MH$  равна  $10 \text{ см}$ . Найдите длину стороны  $NK$ .
- 187.** Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если:
- его высота  $BH$  делит основание  $AC$  на отрезки  $AH = 3,4 \text{ см}$ ,  $HC = 6,6 \text{ см}$ ,  $\angle A = 45^\circ$ ;
  - $AB = 4 \text{ см}$ ,  $AC = 6 \text{ см}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .
- 188.** а) В треугольнике  $ABC$  высота  $AK$  равна  $9 \text{ см}$ , высота  $CH$  равна  $6 \text{ см}$ ,  $BC = 8 \text{ см}$ . Найдите длину стороны  $AB$ .
- б) Две стороны треугольника равны  $4,5 \text{ м}$  и  $6 \text{ м}$ . Высота, проведенная к меньшей из них, равна  $4 \text{ м}$ . Найдите высоту, проведенную к большей из этих сторон.

189. Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого равна  $\frac{1}{4}$  площади данного.

190. Дан треугольник  $ABC$  (рис. 178),  $MK$  — средняя линия треугольника. Площадь четырехугольника  $AMKC$  равна  $48 \text{ см}^2$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

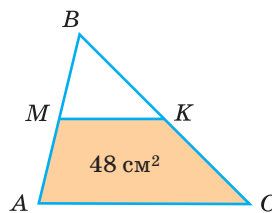


Рис. 178

191. а) Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными 8 см и 15 см.  
б) В треугольнике  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC$  на 7 см меньше  $BC$ ,  $S_{ABC} = 30 \text{ см}^2$ . Найдите  $BC$ .
192. В параллелограмме  $ABCD$   $O$  — точка пересечения диагоналей,  $K$  — середина стороны  $AD$ . Найдите отношение площади четырехугольника  $KOCD$  к площади параллелограмма.
193. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 24 см. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите периметр треугольника.
194. Медианы  $BN$  и  $CK$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ ,  $S_{ABC} = 60 \text{ см}^2$ . Найдите: а)  $S_{AKC}$ ; б)  $S_{KBM}$ ; в)  $S_{BMC}$ ; г)  $S_{AKMN}$ . Докажите, что при любом значении  $S_{ABC}$  верно, что  $S_{BMC} = S_{AKMN}$ .
195. Найдите площадь треугольника (в квадратных единицах), вершины которого имеют координаты (2; 3), (4; 7), (10; 4).
196. а) Площадь ромба равна  $450 \text{ см}^2$ . Одна из диагоналей ромба равна 60 см. Найдите другую диагональ.  
б) Диагонали ромба с площадью  $360 \text{ см}^2$  относятся как 4 : 5. Найдите меньшую диагональ ромба.
197. Докажите, что площадь квадрата можно найти по формуле  $S = \frac{d^2}{2}$ , где  $d$  — диагональ квадрата.
198. В окружности, радиус которой равен 8 см, проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого совпадают с концами диаметров.
199. Докажите, что если диагонали  $d_1$  и  $d_2$  выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то его площадь  $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ .
200. Периметр ромба равен 32 см, произведение длин диагоналей ромба равно  $96 \text{ см}^2$ . Найдите высоту ромба.
201. Высоты треугольника относятся как  $h_a : h_b : h_c = 2 : 3 : 4$ , периметр равен 260 см. Найдите стороны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  треугольника.



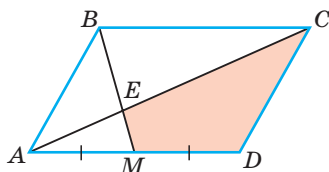


Рис. 179

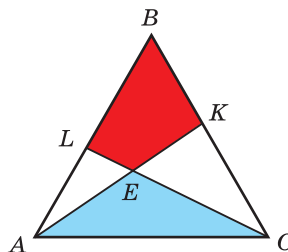


Рис. 180

- 202.** Точка  $M$  — середина стороны  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  (рис. 179). Площадь параллелограмма равна  $120 \text{ см}^2$ . Найдите площадь четырехугольника  $MECD$ .
- 203.** На рисунке 180 треугольник  $ABC$  равносторонний, площади красного четырехугольника и синего треугольника равны. Докажите, что  $BL = CK$ . Найдите величину угла  $KEC$ .
- 204.** Найдите геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание  $a$  и равные площади  $S$ , если эти вершины противоположны данному основанию.

### Гимнастика ума

Как в треугольнике  $ABC$  следует провести ломаную  $BKMPN$ , чтобы он разбился на пять равных по площади треугольников (рис. 181)?



### ПОДВОДИМ ИТОГИ

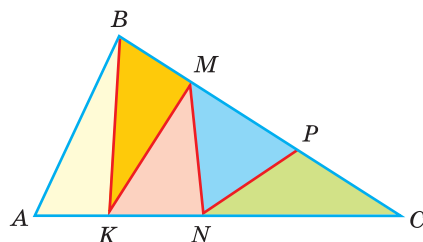


Рис. 181

### Знаем

1. Определение равновеликих фигур.
2. Формулы площади: квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, ромба.
3. Формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
4. Свойство площадей треугольников с общей высотой.
5. Свойство медианы относительно площади треугольника.

### Умеем

1. Выводить формулы площади: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба.
2. Выводить формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
3. Доказывать, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

### Реальная геометрия

Необходимо покрасить дом, изображенный на рисунке. Фундамент дома представляет собой квадрат со стороной 6 м. В доме имеется: 5 малых окон размером 1 м 50 см  $\times$  80 см, два больших окна размером 2 м 50 см  $\times$  80 см и дверь размером 2 м  $\times$  0,8 м.

По размерам, указанным на чертеже (рис. 182), определите:

- общую площадь той части стен дома, которую нужно покрасить;
- сколько килограммов краски потребуется, чтобы покрасить стены дома в 2 слоя, если на покраску 1 м<sup>2</sup> в один слой уходит 250 г краски;
- какое оптимальное число ведер краски необходимо купить, если в строительном магазине имеется нужная краска для фасадов в ведрах массой 5 кг и 11 кг.

Белорусские лакокрасочные материалы экспортируются в страны СНГ, Европы и Азии. Выясните, какие крупнейшие лакокрасочные заводы есть в Беларуси.

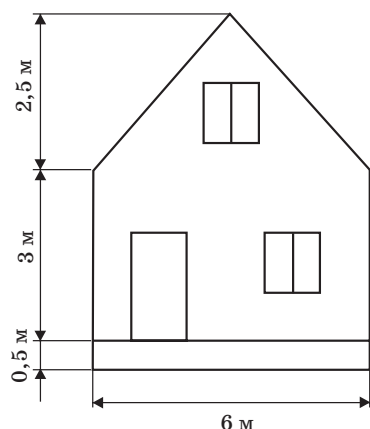


Рис. 182



## § 16. Теорема Пифагора

Теорема Пифагора говорит о связи длин катетов с длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Так, если треугольник  $ABC$  прямоугольный и  $\angle C = 90^\circ$  (рис. 183), то  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ . Эта теорема позволяет, зная катеты, найти гипотенузу или, зная один из катетов и гипотенузу, найти другой катет. Например, если  $AC = 3$  см,  $BC = 4$  см, то  $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$  (см<sup>2</sup>), откуда  $AB = 5$  см.

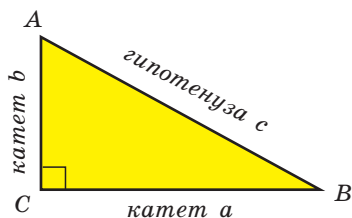


Рис. 183

Катеты, лежащие против углов  $A$  и  $B$ , будем соответственно обозначать  $a$  и  $b$ , гипотенузу —  $c$ .

**Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть  $a^2 + b^2 = c^2$ .

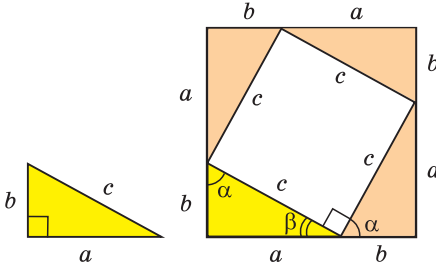


Рис. 184

**Доказательство.** Достроим прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$  до квадрата со стороной  $a + b$  (рис. 184). Разобьем этот квадрат, как показано на рисунке, на четыре прямоугольных треугольника и четырехугольник. Прямоугольные треугольники равны по двум катетам. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ , то  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Тогда у

внутреннего четырехугольника все стороны равны  $c$  и все углы прямые. Поэтому это квадрат, и его площадь равна  $c^2$ .

Площадь большого квадрата, с одной стороны, равна квадрату его стороны, т. е.  $S = (a + b)^2$ . С другой стороны, она равна сумме площадей четырех равных прямоугольных треугольников и площади внутреннего квадрата:  $S = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$ . Тогда  $(a + b)^2 = 2ab + c^2$ ,  $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$ . Теорема доказана.

### Следствие.

Из равенства  $a^2 + b^2 = c^2$  следует  $a^2 = c^2 - b^2$ . С учетом  $a > 0$  получаем  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ . Аналогично,  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . Говорят, что катет равен квадратному корню из разности квадрата гипотенузы и квадрата другого катета.

**Пример.** Если  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза и  $a = 8$  см,  $c = 10$  см, то  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$  (см).

Если дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом  $a$  и гипотенузой  $c$ , то по теореме Пифагора  $c^2 = a^2 + a^2$ ,  $c^2 = 2a^2$ , откуда  $c = a\sqrt{2}$  или  $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ .

### Полезно запомнить!

Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом  $a$  равна  $a\sqrt{2}$ . Катет равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой  $c$  равен  $\frac{c}{\sqrt{2}}$  (рис. 185). Диагональ  $d$  квадрата со стороной  $a$  равна  $a\sqrt{2}$ , сторона квадрата с диагональю  $d$  равна  $\frac{d}{\sqrt{2}}$  (рис. 186).

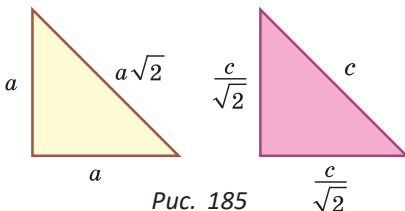


Рис. 185

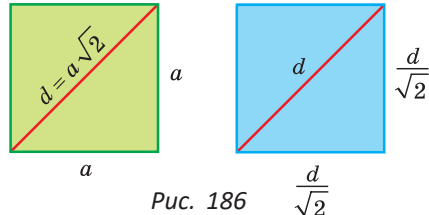


Рис. 186

**Задача.** Найти высоту и площадь равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной  $a$  (рис. 187).

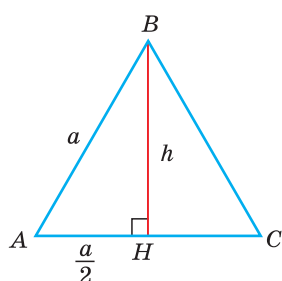


Рис. 187

Решение. Пусть  $BH = h$  — высота треугольника. Так как в равностороннем треугольнике высота, проведенная к основанию, является и медианой, то из прямоугольного треугольника  $ABH$  по теореме Пифагора находим:

$$h = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда площадь равностороннего треугольника

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, для равностороннего треугольника со стороной  $a$  и высотой  $h$  справедливы следующие формулы:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{— формула высоты равностороннего треугольника;}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{— формула площади равностороннего треугольника.}$$

Для теоремы Пифагора существует и обратная теорема, которая позволяет по трем данным сторонам треугольника определить, является ли он прямоугольным.

### Теорема, обратная теореме Пифагора.

Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный, т. е. если для сторон треугольника  $ABC$  справедливо равенство  $a^2 + b^2 = c^2$ , то  $\angle C = 90^\circ$ .

Доказательство. Пусть дан треугольник  $ABC$  (рис. 188, а) со сторонами  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  и  $a^2 + b^2 = c^2$ . Нужно доказать, что  $\angle C = 90^\circ$ . Рассмотрим заведомо прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  с катетами  $B_1C_1 = a$  и  $A_1C_1 = b$  (рис. 188, б). По теореме Пифагора  $A_1B_1^2 = a^2 + b^2$ .

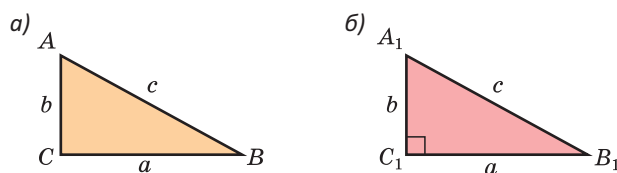
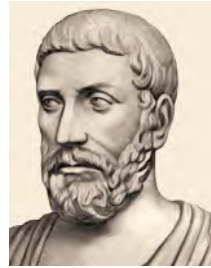


Рис. 188

Но по условию  $a^2 + b^2 = c^2$ . Откуда  $A_1B_1 = c$ . Тогда  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  по трем сторонам и, следовательно,  $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ .

Теорема доказана.

Пифагор Самосский (IV—V в. до н. э.) — известный древнегреческий философ и математик. Он создал пифагорейскую научную школу, куда входили многие математики того времени.



## Задания к § 16

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3 : 4, гипотенуза равна 30 см. Найти площадь треугольника.

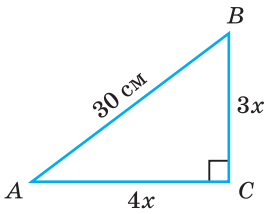


Рис. 189

Решение. Пусть в треугольнике  $ABC$  (рис. 189) гипотенуза  $AB = 30$  см,  $BC : AC = 3 : 4$ .

Обозначим  $BC = 3x$  см,  $AC = 4x$  см. По теореме Пифагора  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , откуда  $(4x)^2 + (3x)^2 = 30^2$ ,  $16x^2 + 9x^2 = 900$ ,  $25x^2 = 900$ ,  $x^2 = 36$ ,  $x = 6$ .

Тогда  $BC = 3 \cdot 6 = 18$  (см),  $AC = 4 \cdot 6 = 24$  (см),

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{18 \cdot 24}{2} = 216 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $216 \text{ см}^2$ .

**Задача 2.** Стороны треугольника равны 7 см, 24 см и 25 см. Найти:

- медиану треугольника, проведенную к наибольшей стороне;
- высоту треугольника, проведенную из вершины наибольшего угла треугольника.

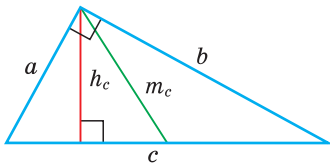


Рис. 190

Решение. Так как  $7^2 + 24^2 = 25^2$  ( $49 + 576 = 625$ ), то по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник прямоугольный с катетами  $a = 7$  см,  $b = 24$  см и гипотенузой  $c = 25$  см (рис. 190).

а) Гипотенуза — наибольшая сторона треугольника. А медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е.  $m_c = \frac{c}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$  (см).

б) Высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, найдем по известной формуле:  $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6,72$  (см).

Ответ: а) 12,5 см; б) 6,72 см.

**Замечание.** Прямоугольный треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5 единиц, был известен еще древним египтянам. Он называется **египетским треугольником**. Сделанный из веревки треугольник со сторонами, равными 3, 4 и 5, натягивали закрепленными в вершинах кольцами. Так египтяне строили на местности прямой угол.

Тройки целых чисел, которые являются сторонами прямоугольного треугольника, называются *Пифагоровыми тройками*. Полезно запомнить следующие тройки:

- а) 3, 4, 5;                      в) 7, 24, 25;                      д) 20, 21, 29.  
б) 5, 12, 13;                      г) 8, 15, 17;

Умножая каждое из чисел Пифагоровой тройки на натуральное число, можно получить бесконечно много Пифагоровых троек. Например, для первой тройки можно получить следующие: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) и т. д.

**Задача 3.** Найти площадь равнобедренного треугольника со сторонами 10 см, 10 см, 12 см.

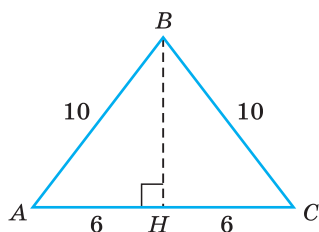


Рис. 191

**Решение.** Пусть в треугольнике  $ABC$   $AB = BC = 10$  см,  $AC = 12$  см (рис. 191). Проведем высоту  $BH$ . Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой, то  $AH = HC = 6$  см.

По теореме Пифагора для  $\triangle ABH$ :

$$AH^2 + BH^2 = AB^2, \quad 6^2 + BH^2 = 10^2,$$

$$BH = \sqrt{64} = 8 \text{ (см)}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 48 см<sup>2</sup>.

**Задача 4.** Найти высоту треугольника со сторонами, равными 7 см, 15 см, 20 см, которая проведена к наибольшей стороне.

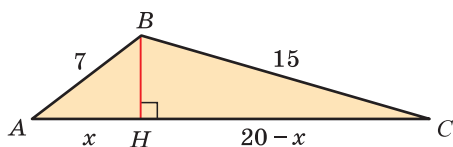


Рис. 192

**Решение.** В  $\triangle ABC$   $AB = 7$  см,  $BC = 15$  см,  $AC = 20$  см (рис. 192). Опустим высоту  $BH$ . Обозначим  $AH = x$  см,  $HC = (20 - x)$  см.

По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников  $ABH$  и  $CBH$  получим:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 7^2 - x^2,$$

$$BH^2 = BC^2 - HC^2 = 15^2 - (20 - x)^2.$$

$$\text{Отсюда } 7^2 - x^2 = 15^2 - (20 - x)^2,$$

$$(20 - x)^2 - x^2 = 15^2 - 7^2.$$

Решив уравнение, найдем  $x = 5,6$ . Итак,  $AH = 5,6$  см,  $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 5,6^2} = 4,2$  (см).

Ответ: 4,2 см.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**205.** Зная катеты  $a$  и  $b$  прямоугольного треугольника, найдите гипотенузу  $c$ :

- а)  $a = 9$  см,  $b = 12$  см;      в)  $a = \sqrt{12}$  дм,  $b = \sqrt{13}$  дм;  
б)  $a = 1$  см,  $b = 2$  см;      г)  $a = (\sqrt{7} - 1)$  м,  $b = (\sqrt{7} + 1)$  м.

**206.** Зная катет  $a$  и гипотенузу  $c$  прямоугольного треугольника, найдите катет  $b$ :

- а)  $a = 6$  см,  $c = 10$  см;  
б)  $a = 24$  м,  $c = 25$  м;  
в)  $a = 3$  см,  $c = 6$  см;  
г)  $a = 3\sqrt{2}$  дм,  $c = 2\sqrt{7}$  дм.

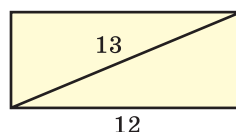


Рис. 193

**207.** Сторона прямоугольника равна 12 см, а диагональ — 13 см (рис. 193). Найдите площадь прямоугольника.

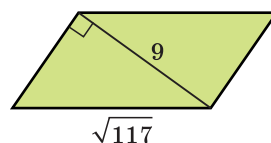


Рис. 194

**208.** Диагональ параллелограмма равна 9 см и перпендикулярна его стороне. Другая сторона параллелограмма равна  $\sqrt{117}$  см (рис. 194). Найдите площадь параллелограмма.

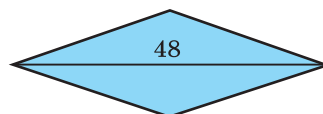


Рис. 195

**209.** Найдите площадь ромба, если:

- а) его периметр равен 100 см, а одна из диагоналей — 48 см (рис. 195);  
б) его сторона равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см.

**210.** На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты (рис. 196). Площадь квадрата, построенного на одном катете, равна  $64 \text{ см}^2$ , площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна  $289 \text{ см}^2$ . Найдите площадь квадрата, построенного на другом катете.

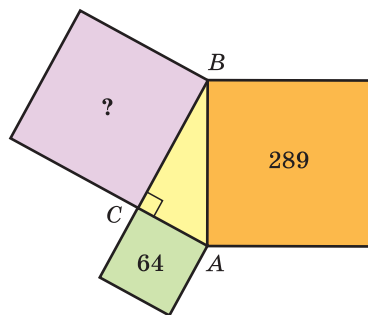


Рис. 196



- 211.** Определите, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны:
- а) 20 мм, 21 мм, 29 мм;
  - б) 5 м, 6 м, 7 м;
  - в)  $\sqrt{2}$  см,  $\sqrt{3}$  см,  $\sqrt{5}$  см.
- 212.** Найдите площадь треугольника со сторонами:
- а) 6 см, 8 см, 10 см;
  - б) 1,6 дм, 3 дм, 3,4 дм;
  - в)  $\sqrt{2}$  м,  $\sqrt{8}$  м,  $\sqrt{10}$  м.
- 213.** Дан равносторонний треугольник. Найдите:
- а) высоту и площадь треугольника, если его сторона равна 4 см;
  - б) периметр и высоту треугольника, если его площадь равна  $16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.
- 214.** Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого:
- а) основание равно 100 м, а боковая сторона — 130 м;
  - б) основание равно 14 дм, а боковая сторона — 25 дм;
  - в) основание равно  $a$ , а боковая сторона —  $b$ .
- 215.** а) Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 21 м, а гипотенуза — 15 м. Найдите катеты.
- б) Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см больше другого катета и на 2 см меньше гипотенузы. Найдите площадь треугольника.
- 216.**  $ABCD$  — трапеция (рис. 197). Найдите:
- а) высоту трапеции;
  - б) диагональ  $AC$ .
- 217.**  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 198),  $KD = 12$ . Найдите:
- а) площадь параллелограмма;
  - б) высоту, проведенную к стороне  $CD$ .
- 218.** При помощи теоремы Пифагора, используя рисунок 199, докажите, что если из одной точки к прямой проведены две наклонные  $CA$  и  $CB$ , то равным наклонным соответствуют равные проекции, большей наклонной соответствует большая проекция.

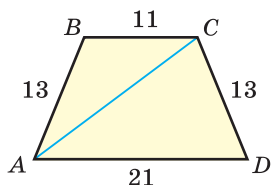


Рис. 197

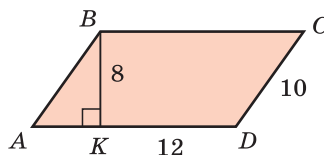


Рис. 198

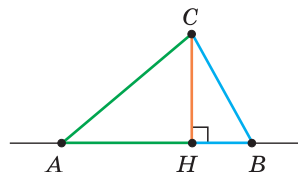







Рис. 199

- 219.** а) Найдите площадь квадрата с диагональю, равной 4 см.  
б) Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна  $50 \text{ см}^2$ .
- 220.** Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Найдите наименьшую высоту этого треугольника.
- 221.** Медианы треугольника  $ABC$ , проведенные к сторонам  $AB$  и  $BC$ , взаимно перпендикулярны и равны 9 см и 12 см. Найдите длину третьей медианы.
- 222.** Дан отрезок  $a$ . Используя циркуль и линейку, постройте отрезок  $x$ , равный  $a\sqrt{2}$ .
-  **223.** Найдите площадь треугольника  $ABC$ , у которого  $AB = 6 \text{ см}$ ,  $BC = 8 \text{ см}$ , медиана  $BM = 5 \text{ см}$ .
-  **224.** Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3 см, 4 см и 5 см.
-  **225.** По гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами 12 см, 16 см, 20 см перемещается точка. Найдите, при каком положении точки сумма квадратов расстояний от этой точки до катетов будет наименьшей. Определите расстояние от этого положения точки до вершины прямого угла.
-  **226.** Найдите длину отрезка  $AB$ , изображенного на координатной плоскости (рис. 200), где  $A(2; 4)$ ,  $B(6; 7)$ .
-  **227.** Даны отрезки  $m$  и  $n$ , где  $m > n$ . При помощи циркуля и линейки постройте отрезок  $x$ , если:
- а)  $x = \sqrt{m^2 + n^2}$ ;      б)  $x = \sqrt{m^2 - n^2}$ .

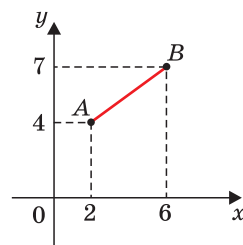


Рис. 200

### Реальная геометрия

Определите примерную длину лестницы, которая идет к окну второго этажа дома, изображенного на рисунке, если расстояние от этого окна до земли равно 6 м, а расстояние от фундамента дома до основания лестницы — 3 м.

Подсчитайте, сколько примерно погонных метров бруска пойдет на изготовление такой лестницы, если у нее 18 ступенек и ширина лестницы равна 50 см.

**Интересно знать.** В Беларуси широко развита деревообрабатывающая промышленность. Около 40 крупнейших организаций, производящих товары из древесины и бумаги, входят в государственный концерн «Беллесбумпром». Около 80 % произведенной этими предприятиями продукции реализуется на внешних рынках. География экспортных поставок предприятий концерна охватывает 65 стран.



### Геометрия 3D

На рисунке 201 изображена прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными по 4 см, и развертка этой призмы. Большая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Изготовьте из плотной бумаги указанную развертку и сложите из нее данную призму. Скрепите соединяемые края полосками бумаги.

Найдите площадь боковой поверхности призмы (она равна сумме площадей боковых граней). Найдите площадь основания призмы. Чему равна площадь всей поверхности призмы (*полная поверхность призмы*)?

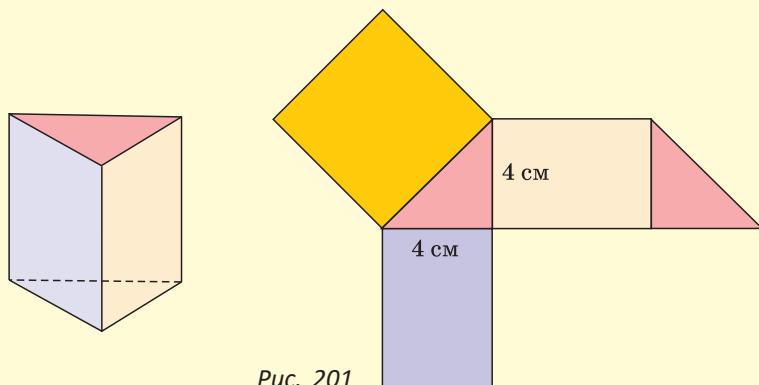


Рис. 201

### Моделирование

**Интересно знать.** Большой теннис является популярным видом спорта в Беларуси. Наши спортсмены Виктория Азаренко и Максим Мирный являются теннисистами мирового уровня, олимпийскими чемпионами. Каких еще известных белорусских теннисистов вы знаете?



**Задача.** Во время подачи теннисный мяч может достигать скорости 180 км/ч. По размерам, указанным на рисунке 202, определите в секундах время, за которое мяч из точки А попадет в точку Б, двигаясь по прямой с указанной скоростью. При расчетах используйте калькулятор.

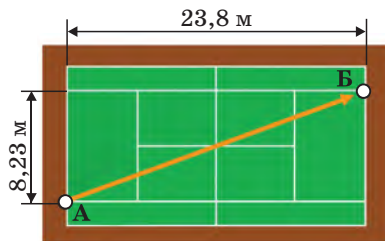


Рис. 202



При помощи **Интернета** выясните:

- 1) на каком острове жил Пифагор;
- 2) какое отношение Пифагор имел к музыке;
- 3) сколько доказательств теоремы Пифагора известно на сегодняшний день.

Приведем еще одно доказательство теоремы Пифагора.

На рисунке 203, а) незанятая закрашенными прямоугольными треугольниками часть большого квадрата по площади равна  $c^2$ . Совместив треугольники 3 и 1, 4 и 2 гипотенузами (рис. 203, б), получим, что теперь незанятая ими площадь равна  $a^2 + b^2$ . Отсюда следует, что  $c^2 = a^2 + b^2$ .

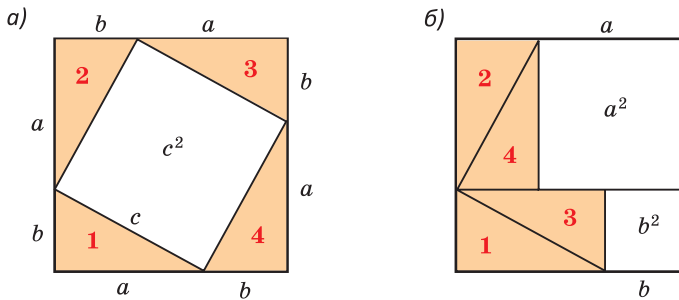


Рис. 203

## § 17. Площадь трапеции

**Теорема.** Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то есть  $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .

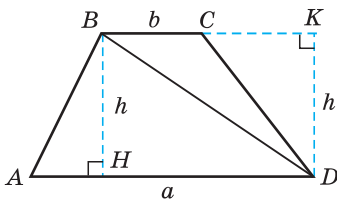


Рис. 204

**Доказательство.** Диагональ  $BD$  разбивает трапецию  $ABCD$  на два треугольника:  $ABD$  и  $BCD$  (рис. 204). Высоты  $BH$  и  $DK$  этих треугольников равны высоте  $h$  трапеции.

Тогда

$$S_{\text{тр.}} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема доказана.

### Следствие.

Так как средняя линия трапеции  $m = \frac{a+b}{2}$ , то площадь трапеции может быть найдена по формуле  $S_{\text{тр.}} = mh$ .

**Задача.** Доказать, что площади треугольников, ограниченных двумя диагоналями и боковой стороной трапеции, равны.

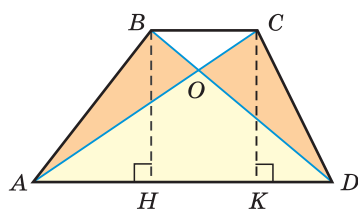


Рис. 205

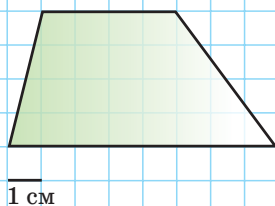
Доказательство. Нужно доказать, что треугольники  $AOB$  и  $COD$  равновелики (рис. 205). Заметим, что треугольники  $ABD$  и  $ACD$  равновелики, так как у них основание  $AD$  — общее, а высоты  $BH$  и  $CK$  равны как расстояния между параллельными прямыми  $AD$  и  $BC$ . Отняв от площади каждого из этих треугольников площадь треугольника  $AOD$ , получим, что  $S_{AOB} = S_{COD}$ . Что и требовалось доказать.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

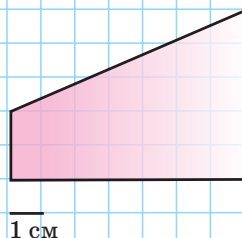
- а)  $24 \text{ см}^2$ ;      в)  $36 \text{ см}^2$ ;  
б)  $48 \text{ см}^2$ ;      г)  $32 \text{ см}^2$ .



### Тест 2

Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.

- а)  $49 \text{ см}^2$ ;      в)  $36 \text{ см}^2$ ;  
б)  $24,5 \text{ см}^2$ ;      г)  $\frac{49}{2} \text{ см}^2$ .



## Задания к § 17

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Дана равнобедренная трапеция  $ABCD$  (рис. 206),  $BH = 7 \text{ см}$  — высота трапеции,  $HD = 10 \text{ см}$ . Найти площадь трапеции.

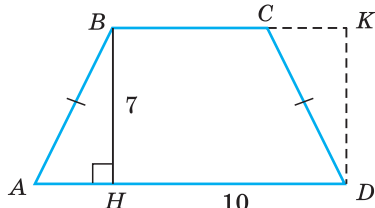


Рис. 206

Решение. *Способ 1.* Перенесем прямоугольный треугольник  $ABH$  на место треугольника  $CKD$  (см. рис. 206). У четырехугольника  $HBKD$  все углы прямые, поэтому это прямоугольник. Площадь прямоугольника  $HBKD$  равна площади трапеции  $ABCD$ , так как прямоугольник и трапеция состоят из равных фигур. Тогда  $S_{ABCD} = S_{HBKD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70 \text{ (см}^2\text{)}$ .

*Замечание.* Подумайте, откуда следует, что  $\angle KCD + \angle DCB = 180^\circ$ .

*Способ 2.* Согласно ключевой задаче 2 § 11 для равнобедренной трапеции  $HD = \frac{AD + BC}{2}$ . То есть отрезок  $HD$  равен средней линии трапеции. Тогда

$$S_{ABCD} = HD \cdot BH = 10 \cdot 7 = 70 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $70 \text{ см}^2$ .

**Задача 2.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$   $AD = 18 \text{ см}$ ,  $BC = 8 \text{ см}$ ,  $AB = 13 \text{ см}$ . Найти площадь трапеции.

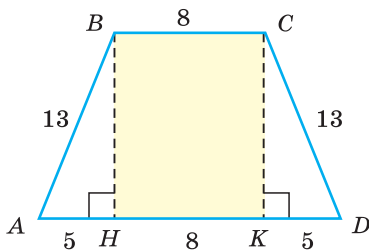


Рис. 207

*Решение. Способ 1.* Проведем высоты  $BH$  и  $CK$  (рис. 207). Треугольники  $ABH$  и  $DCK$  равны по катету ( $BH = CK$ ) и гипотенузе ( $AB = CD$ ). Откуда  $AH = KD$ . У четырехугольника  $HBCK$  все углы прямые, поэтому это — прямоугольник.

Тогда  $HK = BC = 8 \text{ см}$ ,

$$AH = \frac{1}{2}(AD - HK) = \frac{1}{2}(18 - 8) = 5 \text{ (см)}.$$

Из треугольника  $ABH$  по теореме Пифагора  $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$ .  
Площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

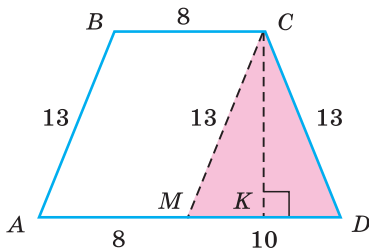


Рис. 208

*Способ 2.* Проведем  $CM \parallel AB$  (рис. 208). Так как  $BC \parallel AM$ , то  $ABCM$  — параллелограмм. У параллелограмма противоположные стороны равны, откуда  $AM = BC = 8 \text{ см}$ ,  $CM = AB = 13 \text{ см}$ . Тогда  $MD = AD - AM = 10 \text{ см}$ . Треугольник  $MCD$  — равнобедренный. Его высота  $CK$  будет и высотой трапеции. Так как высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой, то  $KD = MK = 5 \text{ см}$ . Из прямоугольного треугольника  $CKD$  по теореме Пифагора

$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Получаем

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{18 + 8}{2} \cdot 12 = 156 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $156 \text{ см}^2$ .

**Задача 3.** Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  (рис. 209, а) перпендикулярны и равны 8 см и 10 см соответственно. Найти площадь трапеции.

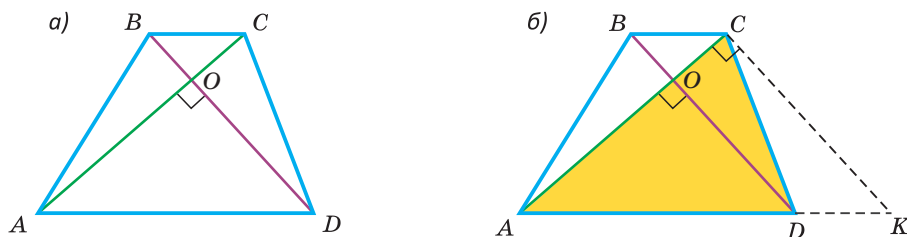


Рис. 209

**Решение. Способ 1.** Проведем  $CK \parallel BD$  (рис. 209, б). Так как  $BC \parallel DK$ , то  $DBCK$  — параллелограмм. Поэтому  $DK = BC$ ,  $CK = BD = 8$  см. Кроме того,  $\angle ACK = \angle AOD = 90^\circ$  как соответственные углы при  $BD \parallel CK$  и секущей  $AC$ . Заметим, что площадь трапеции  $ABCD$  равна площади треугольника  $ACK$ . Действительно, треугольник  $ACD$  для этих фигур является общим, а треугольники  $ABC$  и  $CDK$  равновелики, так как у них равны основания  $BC$  и  $DK$  и высоты, проведенные к ним.

$$S_{ABCD} = S_{ACK} = \frac{AC \cdot CK}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Способ 2.**  $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \frac{1}{2}AC \cdot OD = \frac{1}{2}AC(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40 \text{ (см}^2\text{)}$ . То есть площадь выпуклого четырехугольника, у которого диагонали перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей.

Ответ: 40 см<sup>2</sup>.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 228.** а) Найдите площадь трапеции с основаниями 14 см и 9 см и высотой 6 см.  
 б) Найдите высоту трапеции с площадью 96 см<sup>2</sup> и основаниями, равными 5 см и 11 см.  
 в) Меньшее основание трапеции равно 6 см, высота — 8 см, площадь — 80 см<sup>2</sup>. Найдите большее основание трапеции.
- 229.** Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой:
- а) основания равны 32 см и 18 см, меньшая боковая сторона — 14 см;  
 б) основания равны 2 см и 6 см, бо́льшая боковая сторона — 5 см.



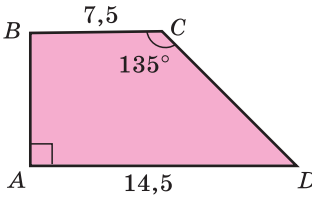


Рис. 210

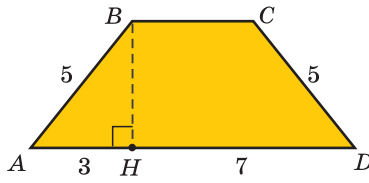


Рис. 211

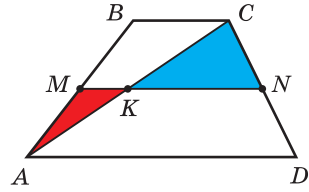


Рис. 212

- 230.** Найдите площадь равнобедренной трапеции  $ABCD$  с боковой стороной, равной 17 см, и основаниями 10 см и 26 см.
- 231.** Высота трапеции —  $h$ , средняя линия —  $m$ , площадь —  $S$ .  
 а)  $h = 12$  см,  $S = 72$  см<sup>2</sup>. Найдите  $m$ .  
 б)  $m = 9$  см,  $S = 36$  см<sup>2</sup>. Найдите  $h$ .
- 232.** У трапеции  $ABCD$  (рис. 210)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AD = 14,5$  см,  $BC = 7,5$  см и  $\angle C = 135^\circ$ . Найдите площадь трапеции.
- 233.** Боковая сторона равнобедренной трапеции  $ABCD$  равна 5 см, ее высота  $BH$  делит основание  $AD$  на отрезки  $AH = 3$  см,  $HD = 7$  см (рис. 211). Найдите площадь трапеции.
- 234.** Дана трапеция  $ABCD$ ,  $MN$  — ее средняя линия (рис. 212). Сумма площадей треугольников  $AMK$  и  $CKN$  равна 32 см<sup>2</sup>. Найдите площадь трапеции  $ABCD$ .
- 235.** Найдите площадь прямоугольной трапеции с углом  $60^\circ$ , если:  
 а) основания трапеции равны 4 см и 10 см;  
 б) большее основание равно 8 см, высота трапеции равна  $4\sqrt{3}$  см.
- 236.** Основания трапеции —  $a$  и  $b$ , боковые стороны —  $c$  и  $d$ . Найдите площадь трапеции, если:  
 а)  $a = 6$  см,  $b = 3$  см,  $c = 4$  см,  $d = 5$  см;  
 б)  $a = 8$  см,  $b = 3$  см,  $c = 3$  см,  $d = 4$  см.
- 237.** Найдите площадь трапеции с основаниями  $a$  и  $b$  и диагоналями  $d_1$  и  $d_2$ , если:  
 а)  $d_1 = d_2 = 15$  см,  $a = 8$  см,  $b = 12$  см;  
 б)  $d_1 = 12$  см,  $d_2 = 5$  см,  $a = 9$  см,  $b = 4$  см.

- 238.** Вершины равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  лежат на окружности,  $AD$  — диаметр (рис. 213). Найдите высоту и площадь трапеции, если  $BC = 12$  см и  $AD = 20$  см.

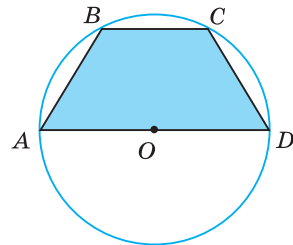


Рис. 213

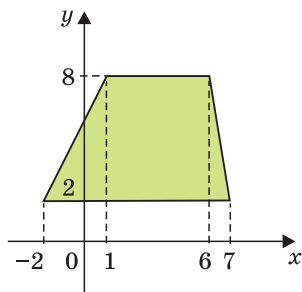


Рис. 214

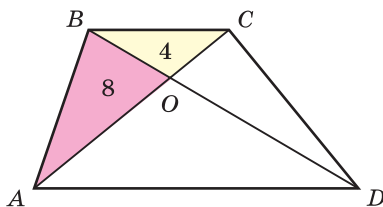


Рис. 215

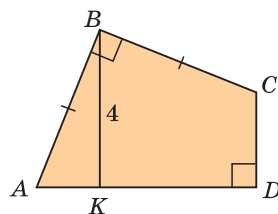


Рис. 216

- 239.** а) Найдите площадь трапеции, изображенной на координатной плоскости (рис. 214).  
 б) Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ , где  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 6)$ ,  $C(5; 8)$ ,  $D(10; 5)$ .
- 240.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $S_{BOC} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{AOB} = 8 \text{ см}^2$  (рис. 215). Найдите площадь трапеции.
- 241.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 4 см, угол при основании равен  $60^\circ$ , диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите отношение площадей треугольников, на которые диагональ делит трапецию (в ответе укажите отношение меньшей площади к большей).
- 242.** В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB = 8$  см, расстояние от середины боковой стороны  $CD$  до прямой  $AB$  равно 10 см. Найдите площадь трапеции.
- 243.** В четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ , углы  $B$  и  $D$  — прямые (рис. 216). Перпендикуляр  $BK$  к прямой  $AD$  равен 4 см. Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Теорему Пифагора.
2. Теорему, обратную теореме Пифагора.
3. Как найти диагональ квадрата по его стороне. Как найти сторону квадрата по его диагонали.
4. Формулу площади трапеции.

### Умеем

1. Доказывать теорему Пифагора.
2. Выводить формулу площади трапеции.

## § 18. Решение задач по теме «Площади многоугольников»

**Задача 1.** Найти площадь параллелограмма  $ABCD$ , если площадь треугольника  $AMD$ , где  $M \in BC$ , равна  $16 \text{ см}^2$ .

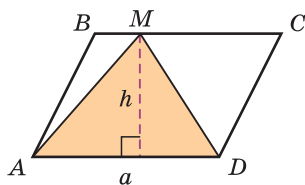


Рис. 217

**Решение.** Рассмотрим три принципиально различных способа решения этой задачи.

**Способ 1.** (Алгебраический — работа с формулами и уравнениями.)

В треугольнике  $AMD$  из вершины  $M$  к основанию  $AD = a$  проведем высоту  $h$ , которая будет и высотой параллелограмма  $ABCD$  (рис. 217).

Тогда

$$S_{AMD} = \frac{1}{2}ah, \quad S_{ABCD} = ah = 2S_{AMD} = 2 \cdot 16 = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

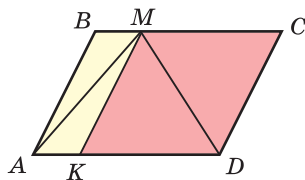


Рис. 218

**Способ 2.** (Геометрический — разбиение фигуры.)

Проведем  $MK \parallel AB$  (рис. 218). Получим два параллелограмма:  $ABMK$  и  $KMCD$ . Диагонали  $AM$  и  $MD$  делят эти параллелограммы на два соответственно равных треугольника: желтые треугольники равны и розовые треугольники равны. Параллелограмм состоит из двух желтых и двух розовых треугольников, а треугольник  $AMD$  — из одного желтого и одного розового треугольников. Следовательно, площадь треугольника  $AMD$  равна половине площади параллелограмма.

Отсюда  $S_{ABCD} = 2S_{AMD} = 32 \text{ см}^2$ .

**Способ 3.** (Геометрический — движение точки.)

При движении точки  $M$  по прямой  $BC$  (рис. 219) будем получать равновеликие треугольники:  $S_{AMD} = S_{AM_1D} = S_{AM_2D} = \dots = S_{ACD}$ . У всех этих треугольников будет общее основание  $a$  и высоты, равные  $h$  (как расстояния между параллельными прямыми  $AD$  и  $BC$ ). Тогда  $S_{ACD} = S_{AMD} = 16 \text{ см}^2$ . Так как диагональ  $AC$  делит параллелограмм на два равных треугольника, то  $S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ , поэтому  $S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 32 \text{ см}^2$ .

Ответ:  $32 \text{ см}^2$ .

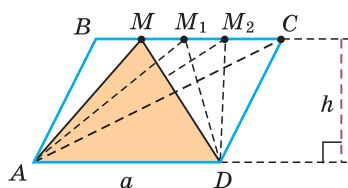


Рис. 219



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**244.** Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$  (рис. 220), если сумма площадей треугольников  $AOB$  и  $COD$  равна  $24 \text{ см}^2$ .

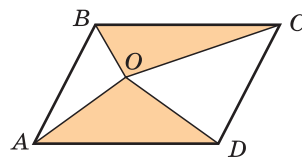


Рис. 220

**245.** Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $M$  и  $K$  — середины сторон  $AD$  и  $CD$  соответственно. Диагональ  $AC$  пересекает отрезки  $BM$  и  $BK$  в точках  $G$  и  $F$  соответственно. Найдите, какую часть площади квадрата составляет площадь треугольника  $GBF$ .

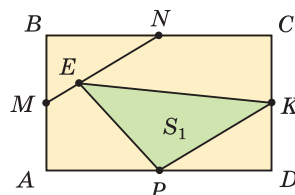


Рис. 221

**246.** На рисунке 221 точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  и  $P$  — середины сторон прямоугольника  $ABCD$ . Найдите, сколько процентов составляет площадь  $S_1$  треугольника  $PEK$  от площади  $S$  прямоугольника  $ABCD$ .

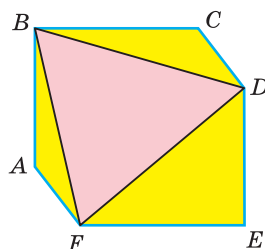


Рис. 222

**247.** У шестиугольника  $ABCDEF$  противоположные стороны равны и параллельны (рис. 222):  $AB = DE$ ,  $AB \parallel DE$ ,  $BC = FE$ ,  $BC \parallel FE$ ,  $AF = CD$ ,  $AF \parallel CD$ . Площадь шестиугольника равна  $60 \text{ см}^2$ . Найдите площадь треугольника  $BDF$ .

**248.** Докажите, что если  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 223), то сумма площадей красных частей равна сумме площадей синих частей.

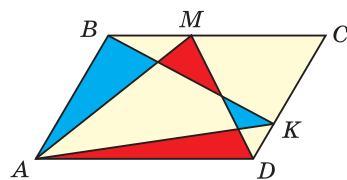


Рис. 223

**249.** Докажите, что площадь четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного выпуклого четырехугольника, равна половине площади данного.

**Задача 2.** Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  разделен диагоналями на четыре треугольника (рис. 224). Доказать, что произведения площадей противоположных треугольников равны, т. е.  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ .

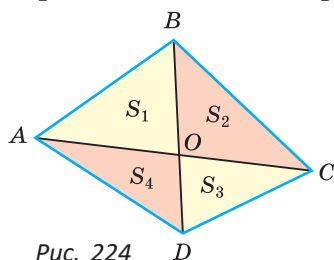


Рис. 224

**Доказательство.** Треугольники  $ABO$  и  $CBO$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $B$ . Поэтому их площади относятся как основания, т. е.  $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$ . Аналогично  $\frac{S_{ADO}}{S_{CDO}} = \frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$ . Отсюда  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ ,  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ . Что и требовалось доказать.

**Пример.** Если  $S_1 = 15 \text{ см}^2$ ,  $S_2 = 12 \text{ см}^2$ ,  $S_3 = 8 \text{ см}^2$  (рис. 225), то, используя формулу  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ , получим  $S_4 \cdot 12 = 15 \cdot 8$ , откуда  $S_4 = \frac{15 \cdot 8}{12} = 10 \text{ (см}^2\text{)}$ .

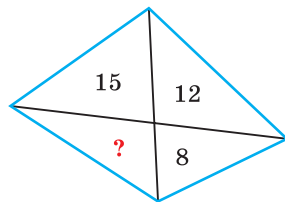


Рис. 225

**Задача 3.** Выпуклый четырехугольник разделен средними линиями (отрезками, соединяющими середины его противоположных сторон) на четыре четырехугольника (рис. 226, а). Доказать, что суммы площадей противоположных четырехугольников равны, т. е.  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ .

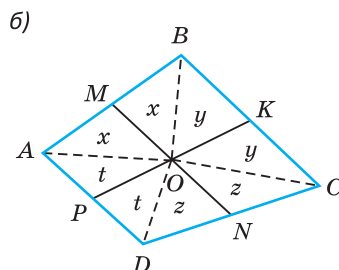
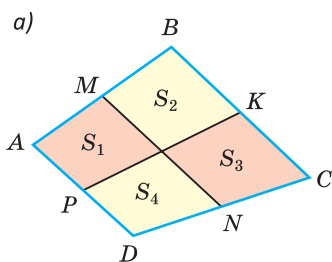


Рис. 226

**Доказательство.** Соединим точку  $O$  пересечения средних линий  $MN$  и  $PK$  с вершинами  $A, B, C, D$  (рис. 226, б). В треугольнике  $AOB$  отрезок  $OM$  — медиана. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Поэтому  $S_{AOM} = S_{BOM} = x$ . Аналогично,  $S_{BOK} = S_{COK} = y$ ,  $S_{CON} = S_{DON} = z$ ,  $S_{POA} = S_{POD} = t$ . Так как  $S_1 + S_3 = x + t + y + z$ ,  $S_2 + S_4 = x + y + z + t$ , то  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ . Что и требовалось доказать.

**Пример.** Если  $S_1 = 11 \text{ см}^2$ ,  $S_2 = 16 \text{ см}^2$ ,  $S_3 = 19 \text{ см}^2$  (рис. 227), то, используя формулу  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ , получим  $11 + 19 = 16 + S_4$ , откуда  $S_4 = 11 + 19 - 16 = 14 \text{ (см}^2\text{)}$ .

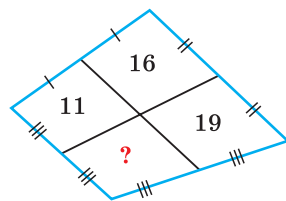


Рис. 227



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**250.** Дана трапеция  $ABCD$ , у которой  $BC \parallel AD$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $S_{AOD} = 27 \text{ см}^2$ ,  $S_{BOC} = 3 \text{ см}^2$ . Найдите  $S_{ABCD}$ .

**251.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $S_{BOC} = S_1$ ,  $S_{AOD} = S_2$ . Выразите площадь трапеции через  $S_1$  и  $S_2$ .

**252.** Дан параллелограмм  $ABCD$  (рис. 228),  $S_{KMC} = 9 \text{ см}^2$ ,  $S_{KCD} = 15 \text{ см}^2$ . Найдите площадь параллелограмма.

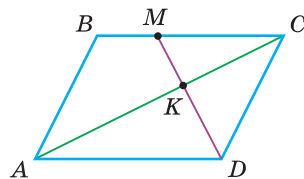


Рис. 228

- 253.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  проведены средние линии  $MN$  и  $PK$  (рис. 229). Докажите, что сумма площадей розовых треугольников равна сумме площадей желтых треугольников.

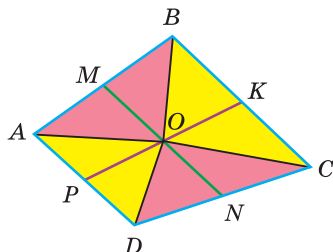


Рис. 229

**Задача 4.** В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  — середина боковой стороны  $CD$ . Доказать, что площадь треугольника  $ABM$  равна половине площади трапеции  $ABCD$ .

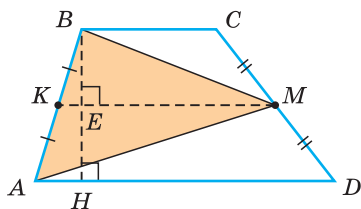


Рис. 230

**Доказательство. Способ 1.** Проведем в трапеции среднюю линию  $KM$  и высоту  $BH$  (рис. 230). Средняя линия трапеции параллельна основаниям, значит,  $KM \parallel AD$ . По свойству параллельных прямых  $BE \perp KM$ , откуда  $BE$  — высота треугольника  $KBM$ . По теореме Фалеса  $BE = EH = \frac{1}{2}BH$ . Отсюда  $S_{KBM} = \frac{1}{2}KM \cdot BE$ . Но  $KM$  — медиана треугольника  $ABM$ . А медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Поэтому  $S_{ABM} = 2S_{KBM} = 2 \cdot \frac{1}{2}KM \cdot BE = KM \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ .

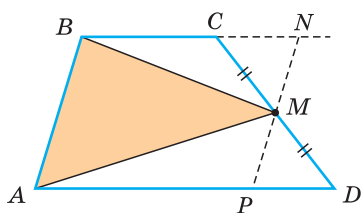


Рис. 231

**Способ 2.** Проведем через точку  $M$  прямую  $PN$ , параллельную  $AB$  (рис. 231). В силу равенства треугольников  $CMN$  и  $DMP$  (по 2-му признаку равенства треугольников) площадь трапеции  $ABCD$  равна площади параллелограмма  $ABNP$ , а площадь треугольника  $ABM$  равна половине площади параллелограмма  $ABNP$  (см. задачу 1 данного параграфа).



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 254.**  $ABCD$  — трапеция ( $AD \parallel BC$ ),  $M$  — середина стороны  $AB$ ,  $N$  — середина стороны  $CD$ ,  $S_{MBC} = S_1$ ,  $S_{AND} = S_2$ ,  $S_{AMCN} = S_3$ . Докажите, что  $S_3 = S_1 + S_2$ .
- 255.** В трапеции  $ABCD$  точка  $K$  принадлежит основанию  $AD$ , точка  $M$  — основанию  $BC$ ,  $S_{AMD} + S_{BKC} = 36 \text{ см}^2$ . Найдите площадь трапеции.
- 256.** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  относятся как  $2 : 5$ ,  $S_{ABC} = 18 \text{ см}^2$ . Найдите площадь трапеции.

- 257.** В трапеции  $ABCD$  точки  $K$  и  $M$  — середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно (рис. 232). Докажите, что площадь синего четырехугольника равна сумме площадей красных треугольников.

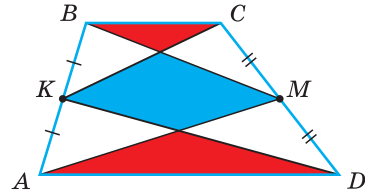


Рис. 232

### Метод площадей

При решении некоторых геометрических задач, условие которых не связано с площадью непосредственно, используют свойства площадей. Такой метод решения называется *методом площадей*.

**Задача 5.** Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон есть величина постоянная, т. е.  $x + y + z = \text{const}^*$ .

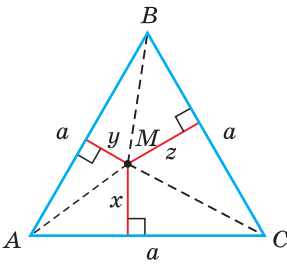


Рис. 233

**Доказательство.** Пусть  $AB = BC = AC = a$ ;  $x, y, z$  — перпендикуляры, опущенные из точки  $M$  на стороны треугольника (рис. 233). Соединим точку  $M$  с вершинами треугольника отрезками. Треугольник разобьется на три треугольника:  $AMC$ ,  $AMB$ ,  $BMC$ , сумма площадей которых равна площади треугольника  $ABC$ . Площадь треугольника  $ABC$ , с одной стороны, равна  $\frac{1}{2}ah$  (где  $h$  — высота). С другой стороны, она равна  $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az$ . Тогда  $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah$ . Разделив обе части уравнения на  $\frac{1}{2}a$ , получим  $x + y + z = h$ . То есть сумма указанных расстояний равна длине высоты равностороннего треугольника, которая для данного треугольника есть величина постоянная. Что и требовалось доказать.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 258.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ . На его основании  $AC$  взята точка  $M$ . Докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на боковые стороны треугольника, есть величина постоянная для данного треугольника.

\* Постоянная величина (константа) в общем виде обозначается буквой «с» или латинским словом «const». В частности, имя Константин с древнегреческого означает «постоянный».



- 259.** Докажите методом площадей свойство биссектрисы треугольника: «Биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам».

- 260.** Треугольник  $ABC$  — равносторонний (рис. 234). Из точки  $F$ , взятой внутри треугольника  $ABC$ , на его стороны опущены перпендикуляры  $FM$ ,  $FK$ ,  $FN$ . Докажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей желтых треугольников.

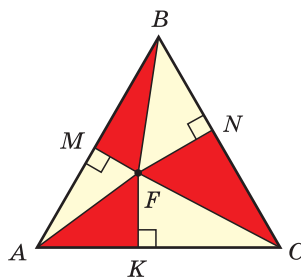
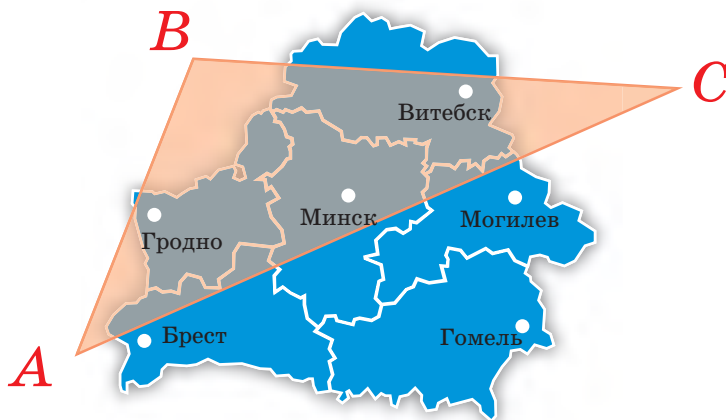


Рис. 234

### Гимнастика ума

Существует ли треугольник, все три высоты которого меньше 1 см, а площадь больше площади Беларуси, которая составляет  $207\,595\text{ км}^2$ ?



### Моделирование

Вращающаяся стеклянная дверь супермаркета представляет собой конструкцию, в основании которой находится круг. В центре этого круга расположен равносторонний треугольник со стороной 1,2 м. Из вершин треугольника выходят перемычки длиной 1,5 м вдоль радиусов, как показано на рисунке 235.

**Задача.** Найдите диаметр основания этой двери с точностью до 0,01 м.

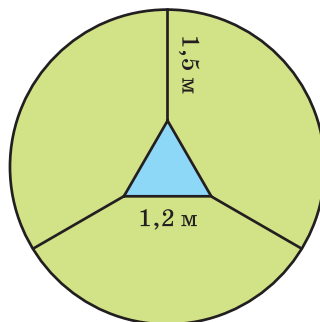


Рис. 235

### Реальная геометрия

Трактору «Беларус» необходимо вспахать поле, имеющее форму четырехугольника с размерами, указанными на рисунке 236. Две стороны поля параллельны между собой и перпендикулярны третьей стороне.

Известно, что за 1 ч трактор может вспахать 1,2 га. При этом ему понадобится около 18 л дизельного топлива.

Определите:

- 1) площадь данного поля в гектарах;
- 2) сколько времени потратит трактор на вспашку поля;
- 3) сколько топлива потребуется для работы.

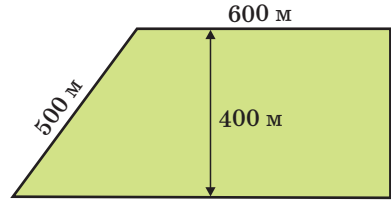


Рис. 236

**Интересно знать.** Минский тракторный завод (МТЗ) был основан 29 мая 1946 г. Сегодня это один из крупнейших производителей сельскохозяйственной техники в мире. На протяжении многих лет завод сохраняет за собой долю в 10 % мирового рынка колесных тракторов, входя в восьмерку крупнейших мировых производителей такой техники. На заводе работает около 17 000 человек. В настоящее время ОАО «Минский тракторный завод» ведет активную деятельность на рынках более чем 60 государств мира и имеет сборочные производства в различных уголках планеты.

Выясните, какие страны мира являются крупнейшими импортерами тракторов «Беларус».



### Геометрия 3D

Площадь поверхности любого многогранника (иногда говорят *площадь полной поверхности*) равна сумме площадей всех его граней.

**Задача.** На рисунке 237 изображена прямая четырехугольная призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями, равными 12 см и 6 см, и острым углом при основании, равным  $60^\circ$ . Наибольшая по площади боковая грань призмы является квадратом. Найдите площадь поверхности этой призмы.

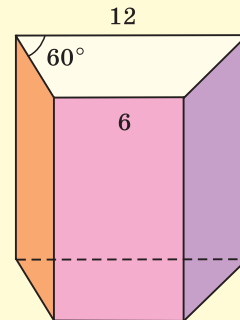


Рис. 237

## ЗАПОМИНАЕМ

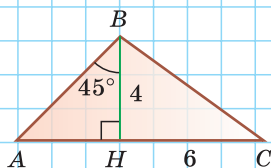
1. Площадь квадрата  $S = a^2$ , площадь прямоугольника  $S = ab$ , площадь параллелограмма  $S = ah$ , площадь треугольника  $S = \frac{1}{2}ah$ , площадь трапеции  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .
2. Площадь прямоугольного треугольника  $S = \frac{ab}{2}$ , площадь ромба  $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ .
3. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе:  $h = \frac{ab}{c}$ .
4. Теорема Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$ .
5. Площадь равностороннего треугольника  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , высота —  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .
6. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
7. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие этой высоте основания.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

## Тест 1

По данным на рисунке найдите площадь треугольника  $ABC$ .

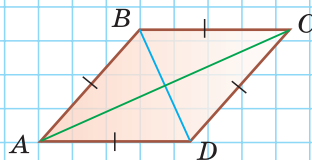
- а) 20;  
б) 24;  
в) 40;  
г) 36.



## Тест 2

Площадь ромба  $ABCD$  равна  $120 \text{ см}^2$ , диагональ  $BD = 10 \text{ см}$ . Найдите периметр ромба.

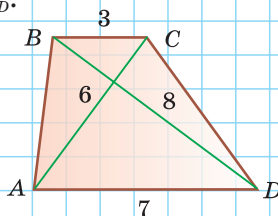
- а) 42 см;  
б) 13 см;  
в) 52 см;  
г) 24 см.



## Тест 3

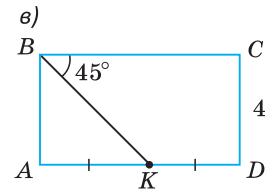
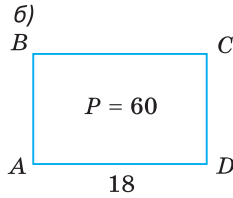
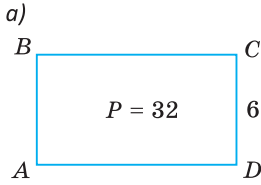
Диагонали трапеции равны 6 см и 8 см, основания — 3 см и 7 см. Найдите  $S_{ABCD}$ .

- а)  $32 \text{ см}^2$ ;  
б)  $48 \text{ см}^2$ ;  
в)  $96 \text{ см}^2$ ;  
г)  $24 \text{ см}^2$ .

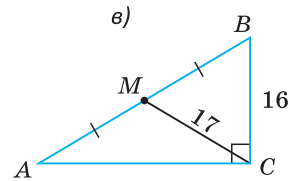
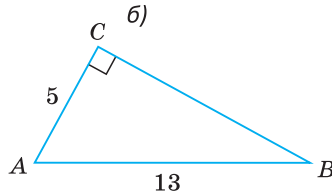
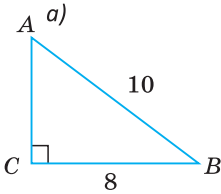


## ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

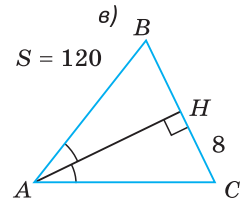
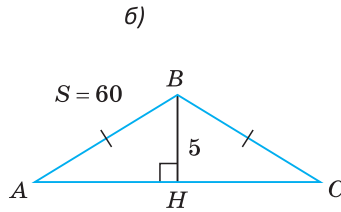
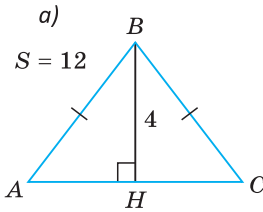
1. Найдите площадь прямоугольника  $ABCD$ .



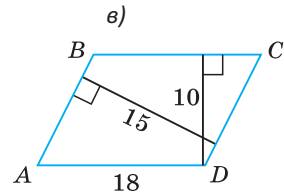
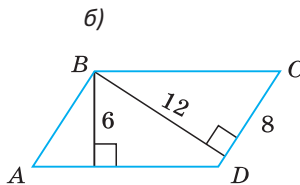
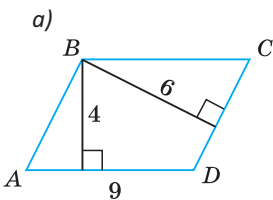
2. Найдите второй катет и площадь треугольника  $ABC$ .



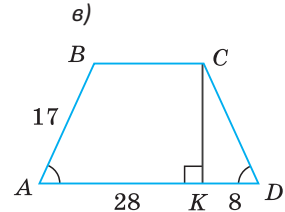
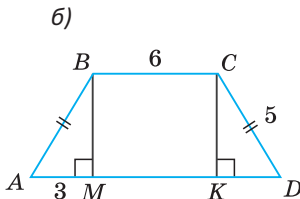
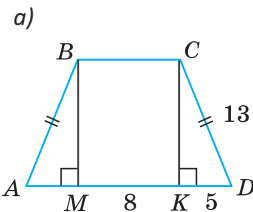
3. Найдите периметр треугольника  $ABC$ .



4. Найдите периметр параллелограмма  $ABCD$ .



5. Найдите площадь трапеции  $ABCD$ .

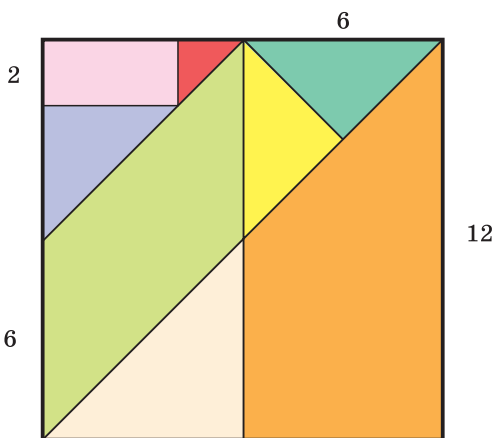


### Повторение главы I и главы II

1. Назовите два различных типа многоугольников. В чем их различие?
2. Перечислите три вида (частных случая) параллелограмма:
  - 1) ...
  - 2) ...
  - 3) ...
 Дайте определение каждому виду параллелограмма.
3. Назовите пять свойств параллелограмма, свойства прямоугольника, ромба и квадрата.
4. Как звучит теорема Фалеса, и каким свойством обладает средняя линия треугольника?
5. Сколько видов трапеций вы знаете? Дайте определение каждому виду трапеции. Укажите свойство средней линии трапеции.
6. Запишите 8 формул площадей плоских фигур и теорему Пифагора.

### Задание

На рисунке квадрат со стороной 12 разбит на отдельные фигуры отрезками, составляющими со сторонами квадрата  $90^\circ$  или  $45^\circ$ .



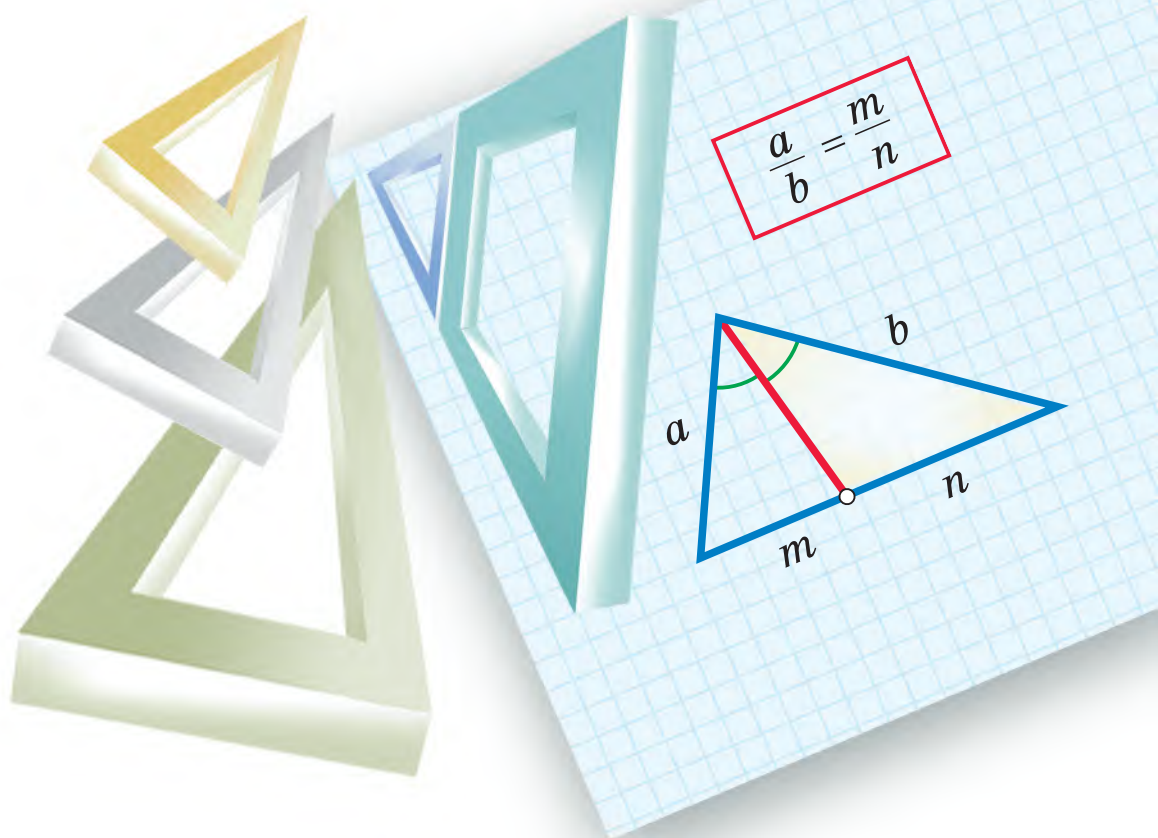
Найдите площадь каждой фигуры, используя размеры на рисунке. Проверьте, будет ли сумма найденных вами площадей равна площади всего квадрата.

## Глава III

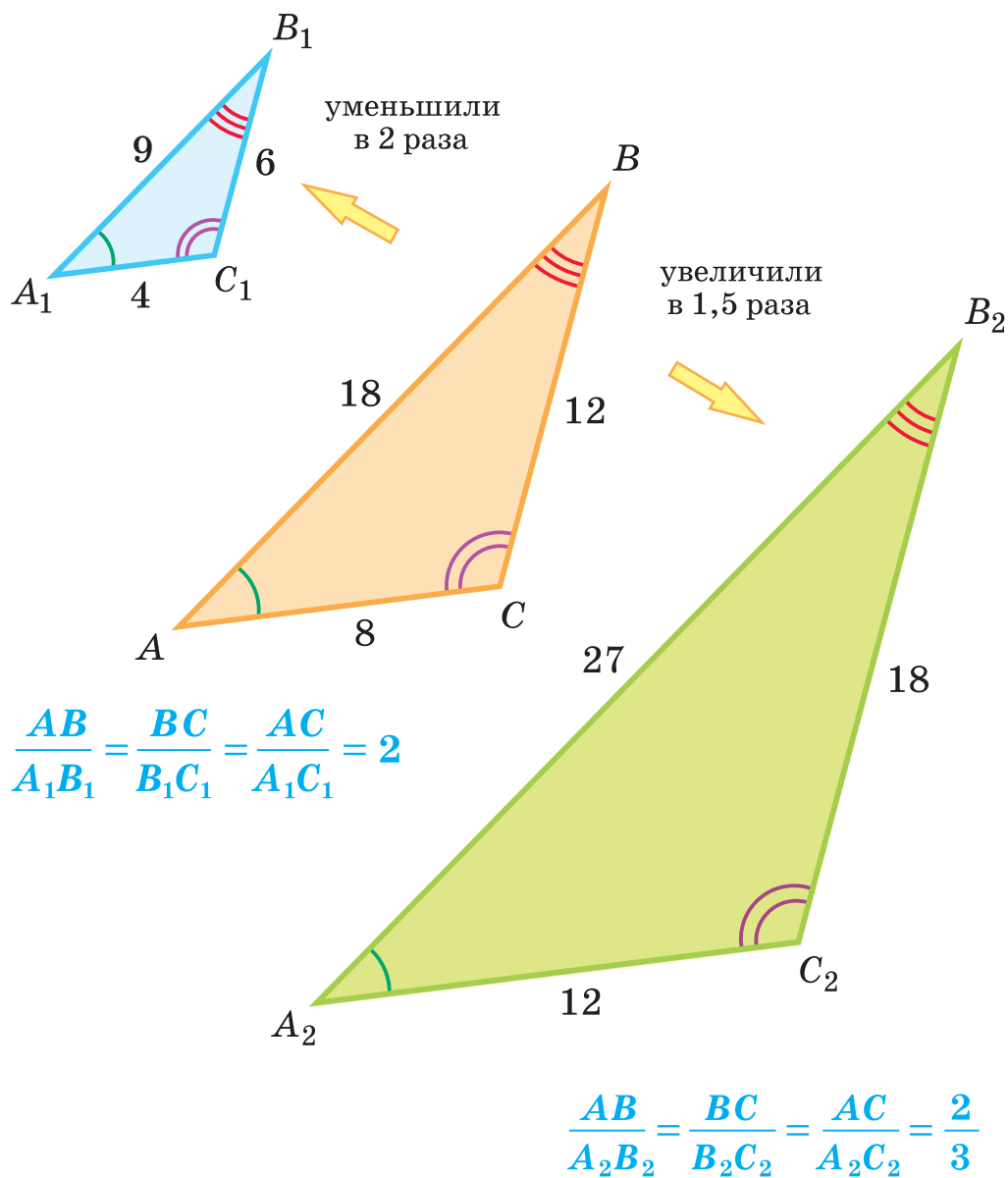
# Подобие треугольников

В этой главе вы узнаете:

- Какие треугольники называются подобными
- Признаки подобия треугольников
- Свойство биссектрисы треугольника



## Подобие



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \quad k = 2$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2, \quad k = \frac{2}{3}$$



## § 19. Обобщенная теорема Фалеса

Под *отношением* отрезков  $a$  и  $b$  понимают отношение их длин, то есть число  $\frac{a}{b}$ . Пусть имеются две пары отрезков:  $a$  и  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Говорят, что отрезки  $a$  и  $b$  *пропорциональны* отрезкам  $c$  и  $d$ , если их отношения равны, то есть  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

Например, отрезки  $AB = 5$  см и  $CD = 10$  см пропорциональны отрезкам  $A_1B_1 = 4$  см и  $C_1D_1 = 8$  см, так как  $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ .

Если для отрезков  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  справедливо равенство  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то по свойству пропорции:  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ;  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  (рис. 238).

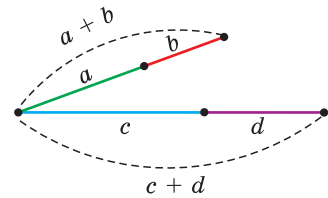


Рис. 238

Прибавив единицу к обеим частям последней пропорции, получим:  $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$ ,  $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ .

Понятие пропорциональности рассматривается и для большего числа отрезков. Так, отрезки  $a$ ,  $b$  и  $c$  пропорциональны отрезкам  $m$ ,  $n$  и  $k$ , если  $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$ , или по-другому —  $a : b : c = m : n : k$ .

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

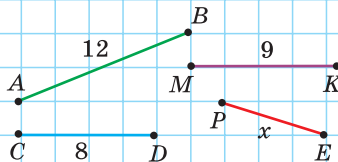
Если  $AC : CB = 5 : 3$ , то чему равно отношение:

- $BC : AC$ ;
- $AC : AB$ ?



### Тест 2

Если  $\frac{AB}{CD} = \frac{MK}{PE}$ , то чему равна длина отрезка  $PE$ ?



В главе I нами доказана теорема Фалеса «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки». Эту теорему можно обобщить на случай произвольных отрезков.

**Теорема Фалеса обобщенная** (теорема о пропорциональных отрезках).

Если на одной стороне угла отложить несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то на другой стороне угла отложатся отрезки, пропорциональные данным.

Можно использовать сокращенную формулировку теоремы: «Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки».

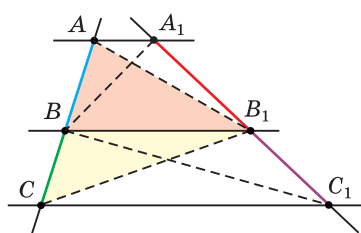


Рис. 239

Дано:  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  (рис. 239).

Доказать:  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ .

Доказательство. Проведем отрезки  $AB_1$ ,  $CB_1$ ,  $A_1B$  и  $C_1B$ . Так как треугольники  $AB_1B$  и  $CB_1B$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $B_1$ , то их площади относятся как основания:  $\frac{S_{AB_1B}}{S_{CB_1B}} = \frac{AB}{BC}$ . Так как треугольни-

ки  $A_1BB_1$  и  $C_1BB_1$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $B$ , то  $\frac{S_{A_1BB_1}}{S_{C_1BB_1}} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ .

Но треугольники  $AB_1B$  и  $A_1BB_1$  равновелики: у них общее основание  $BB_1$  и равные высоты, проведенные из вершин  $A$  и  $A_1$  (в силу  $AA_1 \parallel BB_1$ ). Также равновелики треугольники  $CB_1B$  и  $C_1BB_1$ : у них общее основание  $BB_1$  и равные высоты, проведенные из вершин  $C$  и  $C_1$  (в силу  $CC_1 \parallel BB_1$ ). Поэтому  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Обобщенная теорема Фалеса также справедлива для трех и более отложенных отрезков и не только для сторон угла, но и для произвольных прямых.

**Теорема, обратная обобщенной теореме Фалеса.**

Если на сторонах угла от его вершины последовательно отложить пропорциональные отрезки, то прямые, проходящие через их соответствующие концы, будут параллельны, т. е. если  $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ , то  $BB_1 \parallel CC_1$  (рис. 240).

Докажите данную теорему самостоятельно, используя метод от противного и доказанную выше прямую теорему Фалеса.

Следует иметь в виду, что обратная теорема Фалеса справедлива только для отрезков, отложенных от вершины угла.

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

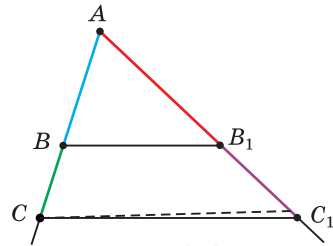
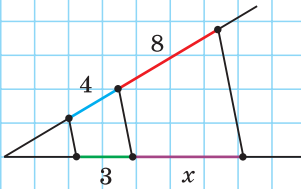


Рис. 240

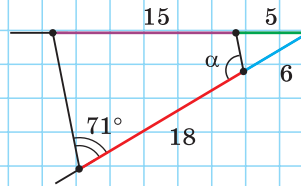
### Тест 3

Стороны угла пересечены параллельными прямыми. Найдите длину отрезка  $x$ .



### Тест 4

По размерам, данным на рисунке, найдите величину угла  $\alpha$ .



## Задания к § 19

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** В трапеции проведены отрезки  $p$  и  $k$ , параллельные основаниям  $a$  и  $b$  трапеции (рис. 241). Найти  $x$  и  $y$  по размерам, указанным на рисунке. В ответе указать значение  $xy$ .

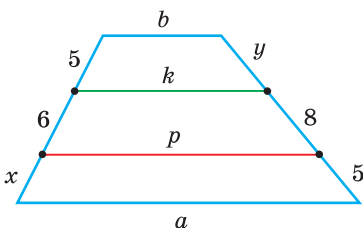


Рис. 241

Решение. По обобщенной теореме Фалеса

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{8} \text{ и } \frac{y}{8} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Тогда } x = \frac{6 \cdot 5}{8} = 3\frac{3}{4}, \quad y = \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3},$$

$$xy = \frac{6 \cdot 5}{8} \cdot \frac{8 \cdot 5}{6} = 25.$$

Ответ: 25.

**Задача 2.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведена высота  $BH$ . Точка  $K$  делит высоту  $BH$  в отношении  $1 : 3$ , считая от основания  $AC$ . Прямая  $AK$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ . Найти отношение  $\frac{BM}{MC}$ .

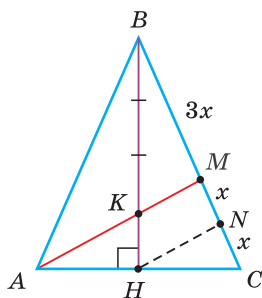


Рис. 242

Решение. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  высота  $BH$  будет и медианой, поэтому  $AH = HC$ . Проведем  $HN \parallel AM$  (рис. 242). По теореме Фалеса (для угла  $C$ )  $\frac{MN}{NC} = \frac{AH}{HC}$ , откуда  $MN = NC = x$ . Так как  $\frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$  (по условию) и  $HN \parallel KM$ , то по обобщенной теореме Фалеса (для угла  $HBC$ )  $\frac{MN}{BM} = \frac{KH}{BK} = \frac{1}{3}$ . Тогда  $BM = 3MN = 3x$ ,  $\frac{BM}{MC} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$ .

Ответ:  $3 : 2$ .

**Задача 3.** При помощи циркуля и линейки: а) разделить данный отрезок  $a$  в отношении  $m : n$ ; б) по данным отрезкам  $a$ ,  $b$  и  $c$  построить отрезок  $x$ , который является четвертым членом пропорции  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  (построение четвертого пропорционального отрезка).

Решение. а) Пусть дан отрезок  $AB = a$  и отрезки  $m$  и  $n$  (рис. 243). Из точки  $A$  проводим произвольный луч  $AK$  и откладываем на нем отрезки  $AC = m$  и  $CD = n$ . Проводим отрезок  $BD$ . Строим  $CM \parallel BD$ . По обобщенной теореме Фалеса  $AM : MB = AC : CD = m : n$ .

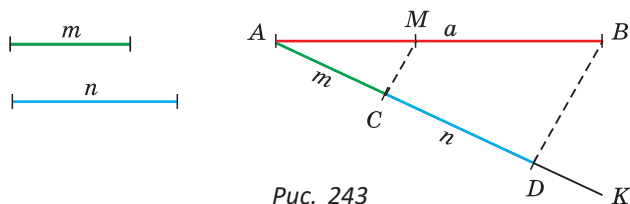


Рис. 243

*Замечание.* Если отношение отрезков дано в виде отношения натуральных чисел  $m$  и  $n$ , на луче  $AK$  откладывают последовательно  $m$  произвольных равных отрезков, а затем  $n$  таких же отрезков. Дальнейшее построение совпадает.

б) Строим произвольный угол  $A$  (рис. 244). На одной его стороне откладываем отрезки  $AB = a$ ,  $BC = b$ . На другой стороне — отрезок  $AD = c$ . Прово-

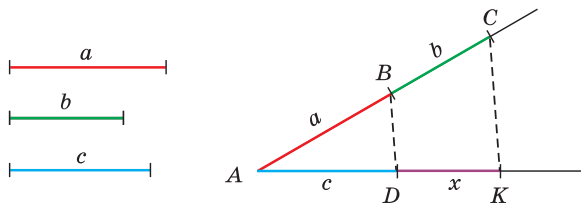


Рис. 244

дим отрезок  $BD$ . Строим  $CK \parallel BD$ ,  $K \in AD$ . Отрезок  $DK = x$  — искомый, так как из обобщенной теоремы Фалеса следует  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ .

**Задача 4.** Площадь треугольника  $ABC$  равна  $36 \text{ см}^2$ ,  $BM = \frac{1}{3}AB$ ,  $MK \parallel AC$ . Найдите площади  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  треугольников  $MBK$ ,  $AMK$  и  $AKC$  (рис. 245).

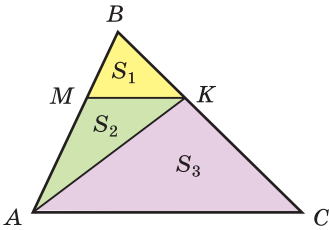


Рис. 245

**Решение.** Из условия следует  $BM : AB = 1 : 3$ . Так как  $BM$  содержит 1 часть,  $AB$  — 3 части, то  $MA$  содержит 2 части. Отсюда  $BM : MA = 1 : 2$ . По теореме о пропорциональных отрезках  $BK : KC = BM : MA = 1 : 2$ . Так как треугольники  $AKC$  и  $ABK$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $A$ , то их площади относятся как основания  $BK$  и  $KC$ , то есть  $1 : 2$ .

$$\text{Тогда } S_3 = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Так как треугольники  $MBK$  и  $AMK$  имеют общую высоту, опущенную из вершины  $K$ , то их площади относятся как основания  $BM$  и  $MA$ , то есть  $1 : 2$ . Тогда  $S_1 = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ (см}^2\text{)},$

$$S_2 = \frac{2}{3}S_{ABK} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $4 \text{ см}^2$ ,  $8 \text{ см}^2$ ,  $24 \text{ см}^2$ .

**Замечание.** Решение можно сократить:

$$1) S_{ABK} = \frac{1}{3}S_{ABC}, S_{MBK} = \frac{1}{3}S_{ABK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{1}{9} \cdot 36 = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) S_{AMK} = 2S_{MBK} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (см}^2\text{)}. S_{AKC} = 36 - 4 - 8 = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**261.** Даны два отрезка:  $a = 3 \text{ см}$ ,  $b = 4 \text{ см}$ . Какие из следующих пар отрезков пропорциональны отрезкам  $a$  и  $b$ :

- а)  $m = 6 \text{ мм}$ ,  $n = 8 \text{ мм}$ ;
- б)  $c = 1\frac{1}{2} \text{ км}$ ,  $p = 2 \text{ км}$ ;
- в)  $k = 9 \text{ см}$ ,  $p = 16 \text{ см}$ ;
- г)  $l = 3,6 \text{ м}$ ,  $g = 180 \text{ см}$ ?

- 262.** На рисунках 246, а)–в)  $m \parallel n \parallel k$ . Найдите длину отрезка  $x$  (все размеры даны в сантиметрах).

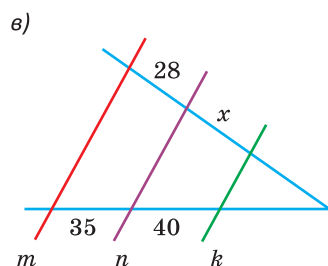
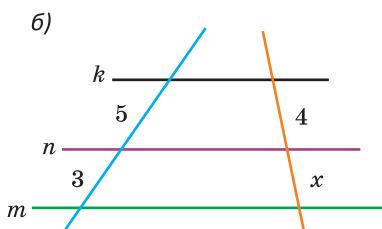
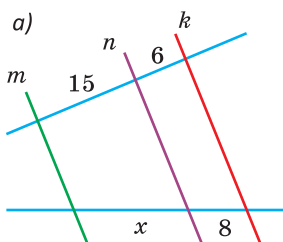


Рис. 246

- 263.** На рисунке 247 отрезки  $MN$  и  $PK$  параллельны отрезку  $BC$ . Найдите:

- а) отрезки  $AN$  и  $KC$ ;  
б) периметр треугольника  $ABC$  (все размеры даны в сантиметрах).

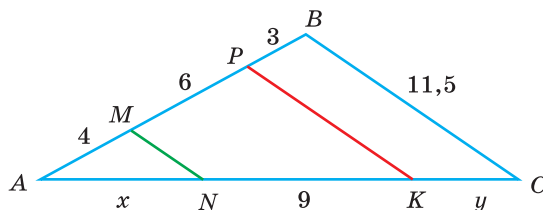


Рис. 247

- 264.** На рисунке 248  $AGFE$  — параллелограмм,  $GB = 4$  см,  $BF = 5$  см,  $FC = 10$  см. Периметр треугольника  $ABC$  равен 45 см. Найдите:  
а) отрезки  $AG$ ,  $AC$ ,  $AE$ ;  
б) периметр параллелограмма  $AGFE$ .

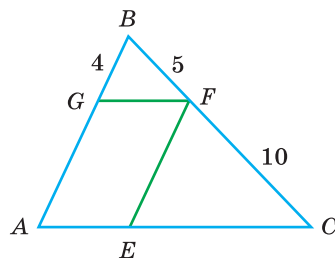


Рис. 248

- 265.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$  и отрезок  $KM$ , параллельный стороне  $AC$  ( $M \in AB$ );  $MB = 6$  см,  $BK : KC = 2 : 3$ . Найдите:

- а) отрезок  $AM$ ;  
б) отрезок  $MK$ .

- 266.** На рисунке 249  $MK \parallel AC$ . Найдите:

- а)  $MB$ , если  $AB = 32$  см,  $BK : KC = 5 : 3$ ;  
б)  $AB$ , если  $AM = 18$  см,  $BC : BK = 3 : 2$ ;  
в)  $BK$ , если  $BM = 12$  см,  $AM : KC = 4 : 5$ ;  
г)  $BC$ , если  $AM : AB = 2 : 7$ ,  
 $BK - KC = 6$  см.

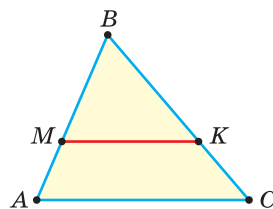


Рис. 249

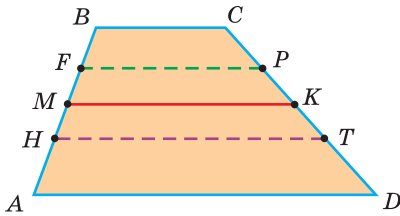


Рис. 250

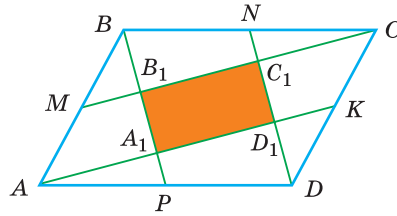


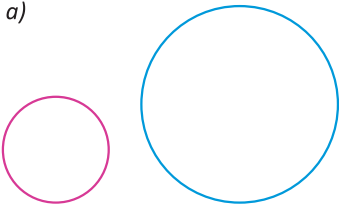
Рис. 251

- 267.** При помощи циркуля и линейки разделите данный отрезок в отношении: а)  $2 : 3$ ; б)  $3 : 5$  (для проведения параллельных прямых можно использовать чертежный треугольник).
- 268.** В трапеции  $ABCD$  (рис. 250) проведены отрезки  $FP$  и  $HT$ , параллельные основаниям,  $MK$  — средняя линия трапеции,  $CD = 60$  см. Если  $MF : FB = 2 : 3$ ,  $MH : HA = 1 : 2$ , то чему равна длина отрезка  $PT$ ?
- 269.** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ , точка  $F$  — ее середина. Прямая  $CF$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ . Площадь четырехугольника  $AKFM$  равна  $50 \text{ см}^2$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- 270.** Точки  $M, N, K$  и  $P$  — середины сторон параллелограмма  $ABCD$  (рис. 251). Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна  $120 \text{ см}^2$ . Найдите площадь четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ .
- 271.** Даны отрезки  $a$  и  $b$ . Составьте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки отрезка  $x$ , если  $x = \frac{a^2}{b}$ .

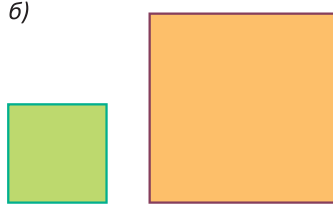
## § 20. Подобие треугольников

Подобными являются фигуры одинаковой формы, но разных размеров. Например, подобны две окружности (252, а) разного радиуса, два квадрата с разной длиной стороны (рис. 252, б) и вообще две фигуры  $F_1$  и  $F_2$ , каждая из которых представляет собой уменьшенную или увеличенную копию другой, например как на рисунке 252, в).

а)



б)



в)



Рис. 252



Для указания подобия фигур  $F_1$  и  $F_2$  используется знак « $\sim$ ». Пишут  $F_1 \sim F_2$ .

**Определение.** Два треугольника называются **подобными**, если у них углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

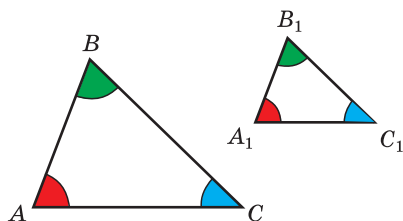


Рис. 253

Соответствующими (сходственными) сторонами подобных треугольников называются стороны, лежащие против соответственно равных углов этих треугольников.

Другими словами, если для треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  (рис. 253) выполняются два условия:

- 1)  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ;
- 2)  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ,

то треугольники подобны.

Для удобства подобные треугольники обычно записывают и называют в порядке следования соответствующих вершин. Так, если  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ , то вершины  $A$  и  $M$ ,  $B$  и  $N$ ,  $C$  и  $K$  — соответствующие.

Отношение соответствующих сторон подобных треугольников называется *коэффициентом подобия треугольников*. Если  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\frac{AB}{A_1B_1} = k$  — коэффициент подобия.

Для определения коэффициента подобия находят отношение стороны первого из записанных или названных подобных треугольников к соответствующей стороне второго треугольника. Например, если  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  и  $\frac{AB}{A_1B_1} = 2$ , то  $k = 2$ . При этом  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$ .

Можно выделить следующие свойства подобных треугольников:

1. Если  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , а  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ .
2. Если  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$  и  $k = 1$ , то  $\triangle ABC = \triangle MNK$ .

**Теорема (о параллельной прямой).**

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

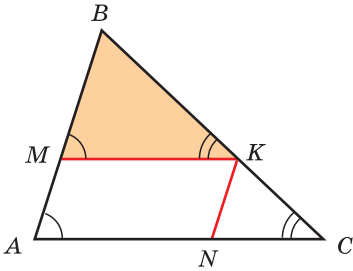


Рис. 254

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $MK \parallel AC$ .

Доказать:  $\triangle MBK \sim \triangle ABC$ .

Доказательство. У треугольников  $MBK$  и  $ABC$  углы равны:  $\angle BMK = \angle BAC$ ,  $\angle BKM = \angle BCA$  как соответственные при параллельных прямых  $MK$  и  $AC$ ,  $\angle B$  — общий (рис. 254).

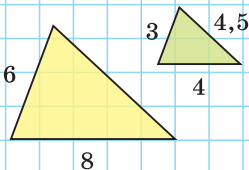
Докажем, что у треугольников  $MBK$  и  $ABC$  соответствующие стороны пропорциональны. По обобщенной теореме Фалеса  $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$ , откуда  $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC}$ . Проведем  $KN \parallel AB$ . По обобщенной теореме Фалеса  $\frac{AN}{NC} = \frac{BK}{KC}$ , откуда  $\frac{AN}{AC} = \frac{BK}{BC}$ . Но  $AMKN$  — параллелограмм ( $MK \parallel AC$ ,  $KN \parallel AB$ ). Поэтому  $MK = AN$  и  $\frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC}$ . Тогда  $\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{MK}{AC}$ . Так как у треугольников  $MBK$  и  $ABC$  углы равны, а стороны пропорциональны, то треугольники подобны. Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Если желтый и зеленый треугольники подобны, то периметр желтого треугольника равен ...

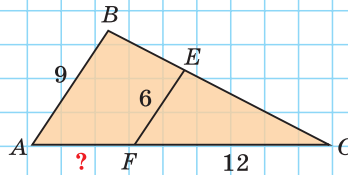
- а) 20;      в) 24;  
б) 18;      г) 23.



### Тест 2

Если  $EF \parallel AB$ , то  $AF = \dots$

- а) 6;      в) 8;  
б) 7;      г) 6,5.





## Задания к § 20

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие стороны.

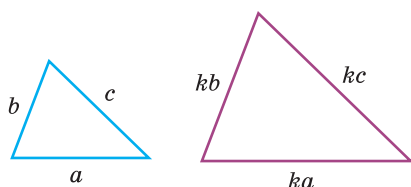


Рис. 255

Доказательство. Пусть стороны одного из подобных треугольников равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда стороны подобного ему треугольника —  $ka$ ,  $kb$  и  $kc$ , где  $k$  — коэффициент подобия (рис. 255). Отношение периметров

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = \frac{k(a + b + c)}{a + b + c} = k.$$

Получили, что отношение периметров равно коэффициенту подобия. А коэффициент подобия равен отношению соответствующих сторон подобных треугольников.

*Замечание.* У подобных треугольников отношение любых соответствующих линейных элементов (высот, биссектрис, медиан и т. д.) равно коэффициенту подобия.

**Задача 2.** Треугольники на рисунке 256 подобны. Причем  $\angle A = \angle G$ ,  $\angle B = \angle F$ ,  $AB = 18$  см,  $AC = 21$  см,  $EF = 10$  см,  $EG = 14$  см. Найдите длины сторон  $BC$  и  $FG$ .

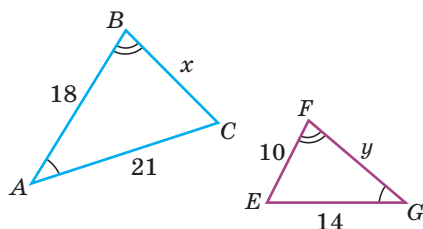


Рис. 256

Решение. Так как  $\angle A = \angle G$ ,  $\angle B = \angle F$ , то  $\angle C = \angle E$ . Стороны  $AC$  и  $EG$ ,  $AB$  и  $FG$ ,  $BC$  и  $FE$  — соответствующие, так как лежат против равных углов. Пусть  $BC = x$  см,  $FG = y$  см. Поскольку у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны, то  $\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{EG}$ , или  $\frac{x}{10} = \frac{21}{14}$ , откуда

$$x = \frac{10 \cdot 21}{14} = 15, \quad BC = 15 \text{ см.}$$

$$\frac{FG}{BA} = \frac{GE}{AC}, \quad \frac{y}{18} = \frac{14}{21}, \quad y = \frac{18 \cdot 14}{21} = 12,$$

$FG = 12$  см.

Ответ:  $BC = 15$  см,  $FG = 12$  см.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**272.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  на рисунках 257, а), б) подобны. По указанным размерам найдите неизвестные стороны треугольников, обозначенные знаком вопроса (все размеры даны в сантиметрах).

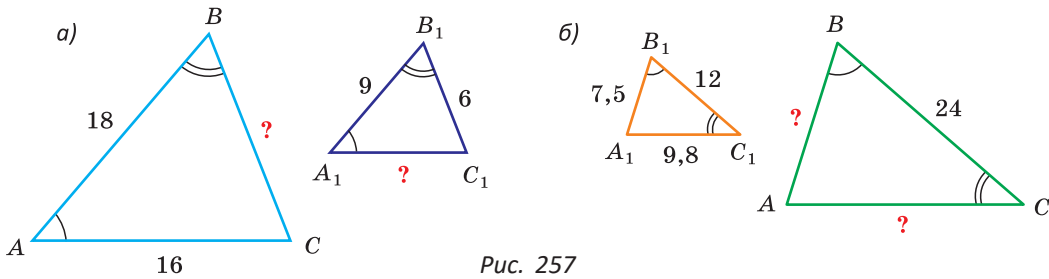


Рис. 257

**273.** Треугольники  $ABC$  и  $MNK$  на рисунках 258, а), б) подобны,  $\angle A = \angle M$ ,  $\angle C = \angle K$ . Найдите:

- а) сумму  $AC + MN$ ;  
 б) периметр треугольника  $MNK$  (размеры даны в сантиметрах).

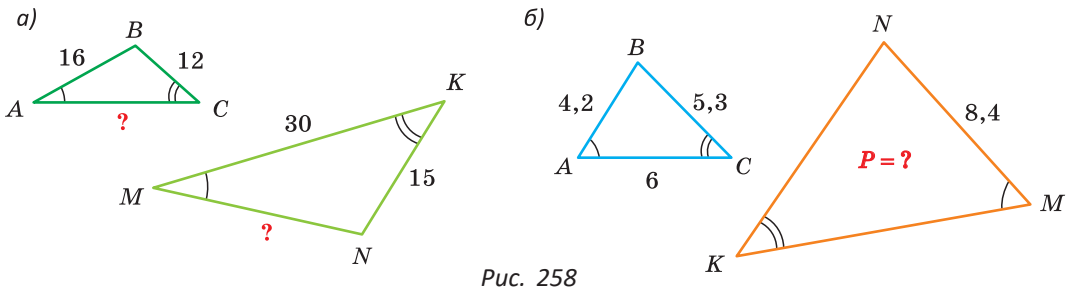


Рис. 258

**274.** Известно, что  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ . Найдите:

- а) величину угла  $B$ , если  $\angle M = 80^\circ$ ,  $\angle K = 40^\circ$ ;  
 б) величину угла  $K$ , если  $\angle N = 75^\circ$ ,  $\angle A = \angle B$ ;  
 в) длину стороны  $AB$ , если  $BC = 15$  см,  $MN = 21$  см,  $NK = 45$  см;  
 г) площадь треугольника  $MNK$ , если  $\angle A = 90^\circ$ ,  $BC = 15$  см,  $AB = 12$  см,  $NK = 5$  см.

**275.** На рисунке 259  $MK \parallel AC$ ,  $MK = 6$  м,  $MB = 4$  м,  $AM = 2$  м. Найдите длину  $AC$ .

**276.** На рисунке 260  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $HK \perp AC$ ,  $AK = 4$  см,  $KC = 12$  см,  $AB = 8$  см. Найдите длину  $HK$ .

**277.** На рисунке 261  $AK = 4$  см,  $KB = 8$  см,  $EC = 12$  см. Найдите периметр параллелограмма  $KBEF$ .

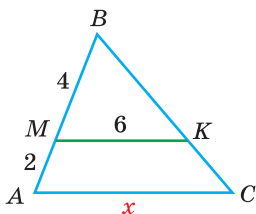


Рис. 259

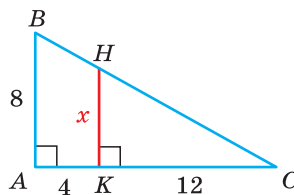


Рис. 260

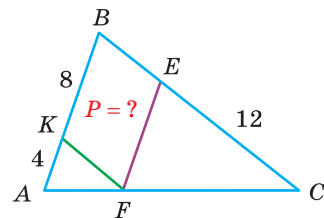


Рис. 261

**278.** Равнобедренные треугольники на рисунке 262 подобны,  $\angle C = 71^\circ$ . Найдите величину угла  $N$ .

**279.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны. Периметр треугольника  $ABC$  равен 24 см, периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  равен 36 см. Сторона  $AB$  равна 8 см. Найдите соответствующую ей сторону  $A_1B_1$ .

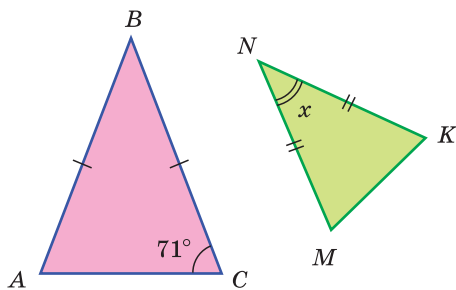


Рис. 262

**280.** Известно, что  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$  с коэффициентом подобия  $k = 3$  ( $\frac{AB}{MN} = k$ ). Найдите периметр треугольника  $MNK$ , если  $AB = 4$  см,  $BC = 5\frac{1}{3}$  см,  $AC = 2\frac{2}{3}$  см.


**281.** Докажите, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

**282.** Изобразите треугольник  $ABC$ . Через его вершины проведите прямые, параллельные противоположным сторонам. Докажите, что образованный ими треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$ .

**283.** Дана трапеция  $ABCD$ ,  $AD = 15$  см,  $BC = 6$  см — основания трапеции,  $AB = 6$  см,  $CD = 12$  см. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке  $K$ . Найдите длины отрезков  $BK$  и  $CK$ .

**284.** Дана трапеция  $ABCD$ . Точка  $K$  принадлежит боковой стороне  $AB$ , точка  $P$  — боковой стороне  $CD$ ,  $KP \parallel AD$ ;  $BC = 4$  см,  $AD = 11$  см,  $KP = 6$  см. Найдите отношение  $CP : PD$ .

**285.** На рисунке 263  $MBCK$  — трапеция со сторонами, равными 10 м, 15 м, 4 м и 6 м. Найдите отношение периметра треугольника  $ABC$  к периметру трапеции.

 **286.** В треугольнике  $ABC$   $AB = 4$  см,  $AC = 12$  см (рис. 264). Найдите периметр ромба  $AMNK$ .

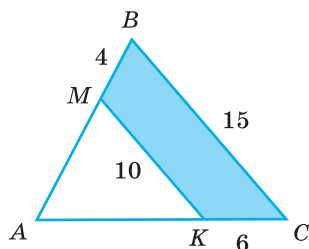


Рис. 263

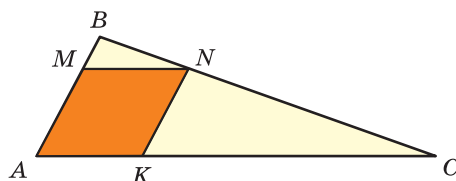


Рис. 264

- 287.**  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , коэффициент подобия  $k = \frac{2}{3}$ . Известно, что  $AB + BC = 24$  см,  $A_1B_1 - B_1C_1 = 6$  см. Найдите  $AB$ .
- 288.** Стороны одного из двух подобных треугольников равны 6 см и 12 см, другого — 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны каждого из треугольников, если коэффициент подобия второго треугольника первому:
- целое число;
  - дробное число.
- 289.** На координатной плоскости дан треугольник  $OAB$ , где  $O(0; 0)$ ,  $A(3; 5)$ ,  $B(3; 0)$ . Постройте какой-либо треугольник  $OA_1B_1$ , подобный данному, стороны которого в 2 раза больше сторон треугольника  $OAB$ . Укажите координаты точек  $A_1$  и  $B_1$ .

## § 21. Признаки подобия треугольников

**Теорема (1-й признак подобия треугольников).**

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство. Отложим на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отрезок  $AC_2$ , равный стороне  $A_1C_1$ , и проведем  $C_2B_2 \parallel CB$  (рис. 265).

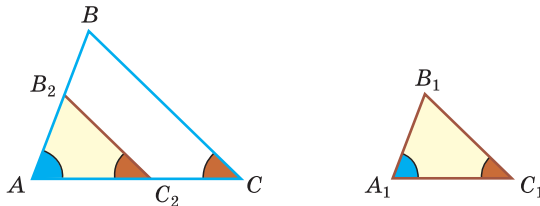


Рис. 265

Получим треугольник  $AB_2C_2$ . Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то  $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ . Поскольку  $\angle C_2 = \angle C$  как соответственные при параллельных прямых  $BC$  и  $B_2C_2$  и секущей  $AC$ , а  $\angle C = \angle C_1$  по условию, то  $\angle C_2 = \angle C_1$  и  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$  по 2-му признаку равенства треугольников. Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Теорема доказана.

**Следствие.**

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны. В данном случае говорят, что прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

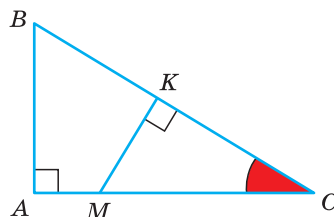


Рис. 266

На рисунке 266 прямоугольные треугольники  $MKC$  и  $BAC$  подобны, так как у них  $\angle C$  — общий. Причем  $\frac{KM}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{MC}{BC}$ .

**Теорема (2-й признак подобия треугольников).**

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ,  $\angle A = \angle A_1$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство. Отложим на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отрезок  $AC_2$ , равный стороне  $A_1C_1$ , и проведем  $B_2C_2 \parallel CB$  (рис. 267).

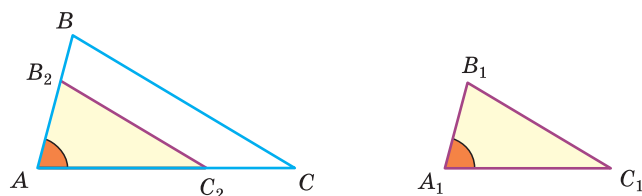


Рис. 267

Получим треугольник  $AB_2C_2$ . Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то  $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ . Тогда  $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$  (1).

По условию  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ .

С учетом  $A_1C_1 = AC_2$  получаем  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$  (2).

Сравнивая пропорции (1) и (2), приходим к выводу, что  $AB_2 = A_1B_1$ . Тогда  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$  по 1-му признаку равенства треугольников. Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ . Теорема доказана.

**Теорема (3-й признак подобия треугольников).**

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ .

Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Доказательство. Отложим на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отрезок  $AC_2$ , равный стороне  $A_1C_1$ , и проведем  $C_2B_2 \parallel CB$  (рис. 268).

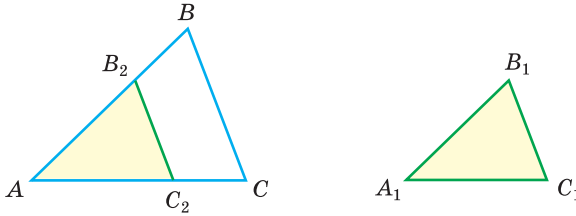


Рис. 268

Получим треугольник  $AB_2C_2$ . Так как прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному, то  $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ . Тогда  $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$  (1).

По условию  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ .

С учетом  $AC_2 = A_1C_1$  получаем  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_1C_1}$  (2).

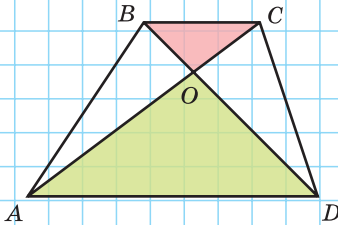
Сравнивая равенства (1) и (2), приходим к выводу, что  $AB_2 = A_1B_1$ ,  $B_2C_2 = B_1C_1$ . Тогда  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$  по 3-му признаку равенства треугольников. Следовательно,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

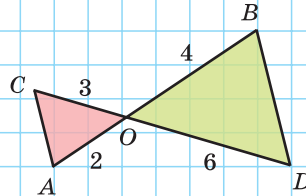
### Тест 1

$ABCD$  — трапеция. По какому признаку  $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ ?



### Тест 2

Подобны ли треугольники  $AOC$  и  $BOD$ ? Если да, то по какому признаку?



**Гимнастика ума**

В треугольнике провели три высоты (рис. 269). Сколько пар подобных треугольников образовалось при этом?

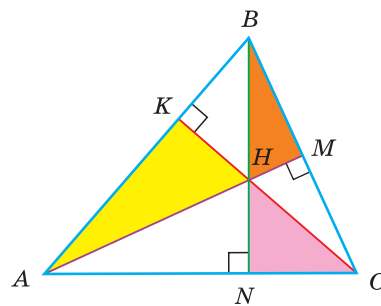
**Задания к § 21****РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**  
**ключевые задачи**

Рис. 269

**Задача 1.** По размерам, указанным на рисунке 270, найти длины отрезков  $AD$  и  $DE$ .

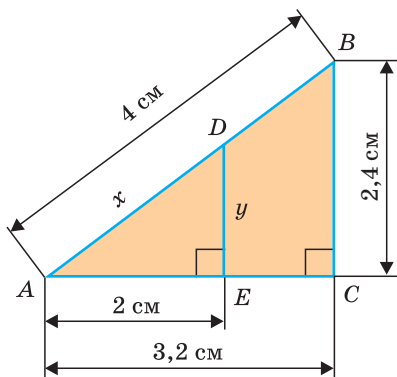


Рис. 270

Решение. Прямоугольные треугольники  $ABC$  и  $ADE$  подобны по острому углу ( $\angle A$  — общий). Поэтому их соответствующие стороны пропорциональны.

Найдем отрезок  $AD$ :  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ , или  $\frac{x}{4} = \frac{2}{3,2}$ ,  
 $x = \frac{4 \cdot 2}{3,2} = 2,5$  (см).

Найдем отрезок  $DE$ :  $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ ,  
 или  $\frac{y}{2,4} = \frac{2}{3,2}$ ,  $y = \frac{2,4 \cdot 2}{3,2} = 1,5$  (см).

Ответ:  $AD = 2,5$  см,  $DE = 1,5$  см.

**Замечание.** Условие задачи содержит избыточное данное. Так, для задания прямоугольного треугольника  $ABC$  достаточно знать длины только двух его сторон, а третью сторону можно найти по теореме Пифагора.

**Задача 2.**  $ABCD$  — трапеция,  $AD = 30$  см и  $BC = 15$  см — ее основания,  $AC = 27$  см,  $BD = 33$  см — диагонали трапеции, которые пересекаются в точке  $O$ . Найти периметр треугольника  $AOD$  (рис. 271).

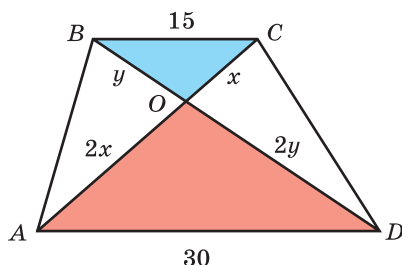


Рис. 271

Решение. Треугольники  $BOC$  и  $DOA$  подобны по 1-му признаку подобия треугольников:  $\angle CBO = \angle ADO$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $BD$ ,  $\angle COB = \angle AOD$  как вертикальные. Из подобия треугольников следует:  $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ .

То есть  $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$ .

Если  $OC = x$  см, то  $OA = 2x$  см. Отсюда  $2x + x = 27$ ,  $x = 9$ ,  $OC = 9$  см,  $OA = 18$  см. Если  $OB = y$  см, то  $OD = 2y$  см. Отсюда  $y + 2y = 33$ ,  $y = 11$ ,  $OB = 11$  см,  $OD = 22$  см.  $P_{AOD} = AO + OD + AD = 18 + 22 + 30 = 70$  (см).  
 Ответ: 70 см.

**Задача 3.** В треугольнике  $ABC$  проведен отрезок  $BK$  так, что  $\angle ABK = \angle ACB$ ,  $AK = 9$  см,  $KC = 7$  см. Найдите сторону  $AB$  (рис. 272).

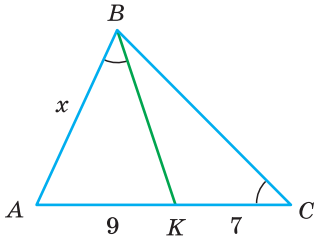


Рис. 272

**Решение.** У треугольников  $ABC$  и  $AKB$  угол  $A$  — общий,  $\angle ABK = \angle ACB$  по условию. Поэтому  $\triangle ABC \sim \triangle AKB$  по двум углам. Из подобия треугольников следует, что  $\angle ABC = \angle AKB$  и  $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB}$ .

Если  $AB = x$  см, то  $\frac{x}{16} = \frac{9}{x}$ ,  $x^2 = 9 \cdot 16$ ,  
 $x = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$ ,  $AB = 12$  см.

Ответ: 12 см.

**Замечание.** Когда речь идет о двух парах соответствующих сторон подобных треугольников, удобно составлять отношение двух сторон одного треугольника и приравнивать его к отношению двух соответствующих сторон другого треугольника.

**Задача 4.** Дана трапеция  $ABCD$ ,  $AD = 18$  и  $BC = 4,5$  — ее основания, диагональ  $AC = 9$ . Если  $\alpha + \beta = 64^\circ$ , то чему равен угол  $\alpha$  (рис. 273)?

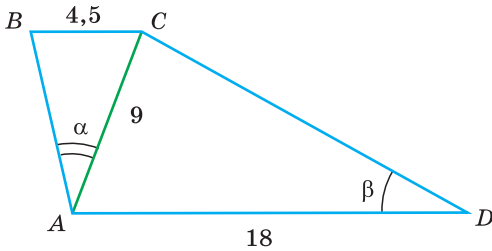


Рис. 273

**Решение.** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DCA$ :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AC}{AD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \quad \angle ACB = \angle CAD$$

(как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AC$ ). Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle DCA$  по двум сторонам и углу между ними (по 2-му признаку подобия треугольников). Тогда  $\angle BAC = \angle ADC$  как соответственные углы в подобных треугольниках, т. е.  $\alpha = \beta$ . Отсюда

$$\alpha = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ.$$

Ответ:  $32^\circ$ .



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**290.** Изобразите произвольный треугольник  $ABC$ . На луче  $AB$  за точку  $B$  отложите отрезок  $BB_1$ , в 2 раза больший отрезка  $AB$ , на луче  $AC$  за точку  $C$  отложите отрезок  $CC_1$ , в 2 раза больший отрезка  $AC$ .

Объясните, почему подобны треугольники  $AB_1C_1$  и  $ABC$ . Чему равен коэффициент подобия?

**291.** Найдите, при какой длине стороны  $A_1C_1$  треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  будут подобны (рис. 274). Укажите признак подобия.

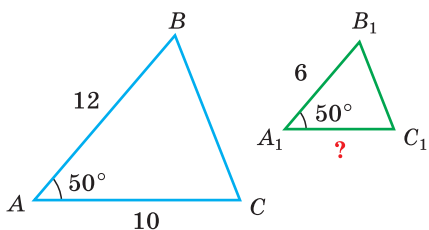


Рис. 274

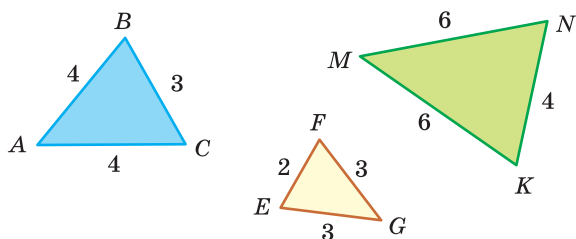


Рис. 275

**293.** По данным на рисунках 276, а), б) докажите подобие треугольников. Найдите длину стороны, обозначенной знаком вопроса (все размеры даны в сантиметрах).

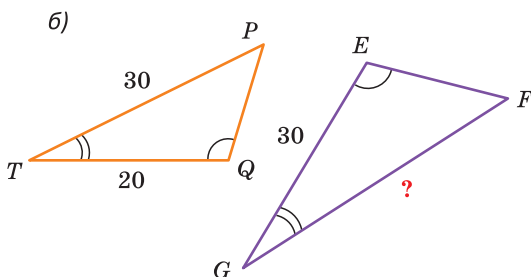
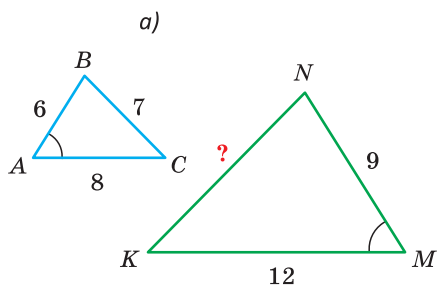


Рис. 276

**294.** Докажите, что если у равнобедренных треугольников равны углы при вершине, то такие треугольники подобны.

**295.** Докажите, что равнобедренные треугольники на рисунке 277 подобны. Найдите отношение периметров этих треугольников:  $P_{ABC} : P_{KNM}$ .

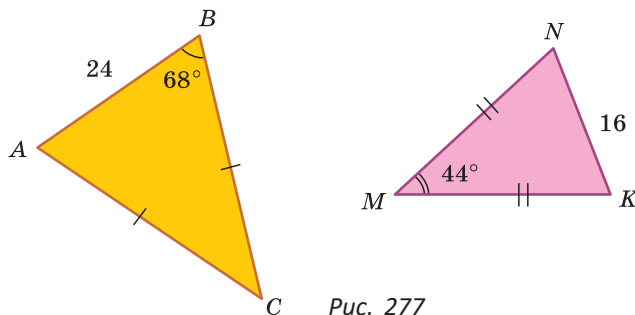


Рис. 277

**296.** Известно, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны.

а) Если  $AB = 21$  см,  $BC = 27$  см,  $B_1C_1 = 9$  см,  $A_1C_1 = 10$  см, то чему равен периметр треугольника  $ABC$ ?

б) Если  $A_1B_1 = 4$  см,  $B_1C_1 = 6$  см,  $A_1C_1 = 8$  см,  $P_{ABC} = 27$  см, то чему равна длина наибольшей стороны треугольника  $ABC$ ?

**297.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  (рис. 278)  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $AC = 8$  см. Из середины гипотенузы  $BC$  восстановлен перпендикуляр  $MK$ . Найдите длину отрезка  $MK$ .

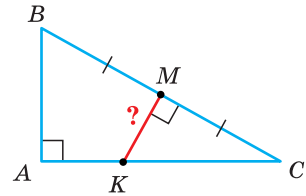


Рис. 278

**298.** В треугольнике  $ABC$  провели средние линии  $MK$ ,  $KN$  и  $MN$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in BC$ ,  $K \in AC$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $NKM$  подобны.

**299.** Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  — соответственно середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $MN : KN : MK = 5 : 3 : 4$ ,  $P_{ABC} = 48$  см. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**300.** а) В трапеции  $ABCD$  (рис. 279, а)  $BC = 9$  см,  $AD = 18$  см,  $OD = 8$  см. Найдите  $BO$ .

б) В прямоугольнике  $ABCD$  (рис. 279, б)  $BC = 18$  см,  $AK = 5$  см,  $KC = 15$  см. Найдите  $MD$ .

в) В параллелограмме  $ABCD$  (рис. 279, в)  $AD = 12$  см,  $MC = 4$  см,  $KM = 6$  см. Найдите  $AK$ .

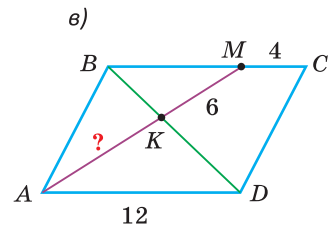
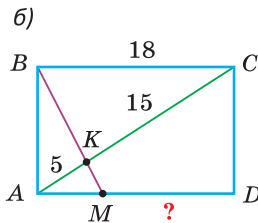
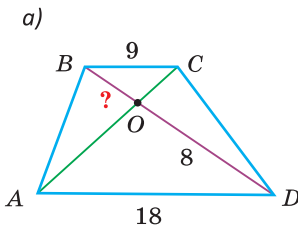


Рис. 279

**301.** Докажите, что если катет  $a$  и гипотенуза  $c$  одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны катету  $a_1$  и гипотенузе  $c_1$  другого прямоугольного треугольника  $\left(\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}\right)$ , то такие треугольники подобны.

**302.** Докажите, что у подобных треугольников:

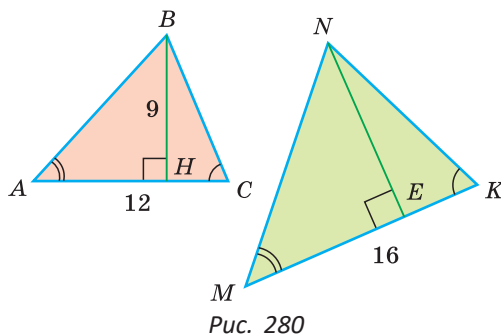
а) соответствующие высоты;

б) соответствующие биссектрисы;

в) соответствующие медианы

относятся как соответствующие стороны этих треугольников.

- 303.** Даны треугольники  $ABC$  и  $MNK$  (рис. 280). По размерам на рисунке найдите площадь треугольника  $MNK$  (все размеры даны в сантиметрах).



- 304.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 21$  см,  $BC = 7$  см. Диагонали трапеции  $AC = 20$  см,  $BD = 16$  см,  $O$  — точка пересечения диагоналей. Найдите периметр треугольника  $AOD$ .

- 305.** На рисунке 281  $\angle KMC = \angle ABC$ ,  $AM = 4$  см,  $MC = 6$  см,  $KC = 5$  см. Найдите длину отрезка  $BK$ .

- 306.** На рисунке 282  $AM$  и  $CK$  — высоты треугольника  $ABC$ ,  $CM = 9$  см,  $BM = 3$  см,  $BK = 4$  см. Найдите длину отрезка  $AK$ .

- 307.**  $ABCD$  — трапеция (рис. 283),  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ ,  $AB = 12$  см,  $BC = 8$  см,  $CK : KD = 1 : 5$ . Найдите длину основания  $AD$ .

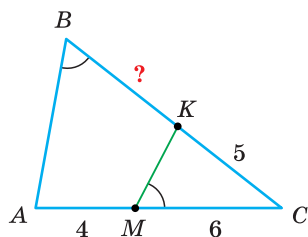


Рис. 281

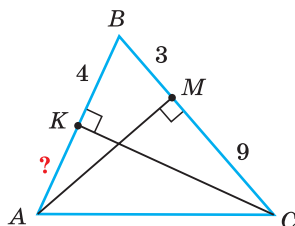


Рис. 282

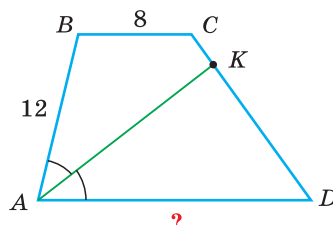


Рис. 283

- 308.** На рисунках 284, а)–в) изображены параллелограмм, трапеция и прямоугольник. По данным на рисунках найдите длину отрезка  $x$ .

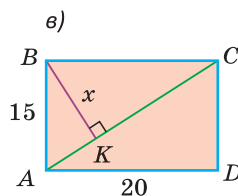
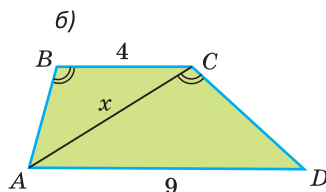
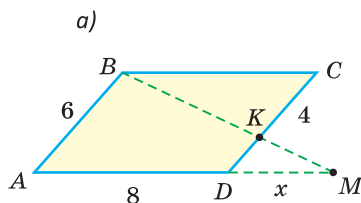


Рис. 284

- 309.** Изобразите прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), проведите высоту  $CH$ . Укажите все пары полученных подобных треугольников и для каждой пары запишите отношение соответствующих сторон.

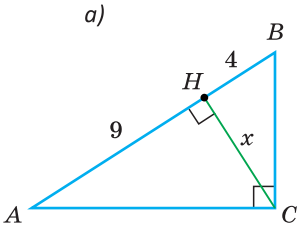


Рис. 285

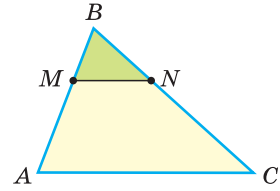
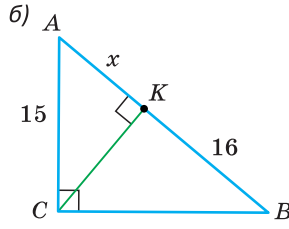


Рис. 286

- 310.** По размерам, данным на рисунках 285, а), б), найдите:  
 а) высоту  $CH$ ;  
 б) отрезок  $AK$  (проекцию катета  $AC$  на гипотенузу  $AB$ ).
- 311.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$ , у которого  $AB = BC$  и  $\angle B = 36^\circ$ , провели биссектрису  $AK$ . Определите, какие из полученных треугольников подобны.
- 312.** Периметр трапеции  $AMNC$  равен 22 см (рис. 286), периметр треугольника  $ABC$  равен 24 см, периметр треугольника  $MBN$  равен 8 см. Найдите:  
 а)  $MN$ ; б)  $AC$ .
- 313.** а) В треугольнике  $ABC$  провели отрезок  $BM$  ( $M$  лежит на стороне  $AC$ ),  $\angle BMC = \angle ABC$ ,  $AM = 7$  м,  $MC = 9$  м. Найдите сторону  $BC$ .  
 б) В треугольнике  $ABC$  провели отрезок  $BM$  ( $M$  лежит на стороне  $AC$ ),  $\angle ABM = \angle ACB$ ,  $AB = 2$  см,  $AC = 4$  см. Найдите отрезки  $AM$  и  $MC$ .  
 в) В треугольнике  $ABC$  провели отрезок  $BM$  ( $M$  лежит на стороне  $AC$ ),  $\angle ABM = \angle ACB$ ,  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $BM = 3$  см. Найдите сторону  $AC$ .
- 314.** а) В параллелограмме  $ABCD$  на стороне  $BC$  взята точка  $M$  так, что  $BM : MC = 5 : 7$ . Луч  $DM$  пересекает луч  $AB$  в точке  $K$ . Найдите длину отрезка  $BK$ , если  $AB = 42$  см.  
 б) В параллелограмме  $ABCD$  на продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  взята точка  $M$ . Прямая  $DM$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $K$  так, что  $AK : KC = 11 : 4$ . Найдите длину отрезка  $BM$ , если  $AB = 640$  м.
- 315.** Квадрат вписан в треугольник, как показано на рисунке 287. Если  $AC = 70$  см,  $BH = 30$  см — высота, то чему равна длина стороны квадрата?
- 316.** Дан прямоугольник  $ABCD$  с площадью  $210 \text{ см}^2$ . На стороне  $AD$  взята точка  $K$ , на стороне  $CD$  — точка  $M$  так, что  $AK : KD = 2 : 1$ ,  $CM : MD = 2 : 3$ . Отрезки  $AM$  и  $BK$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $APK$ .

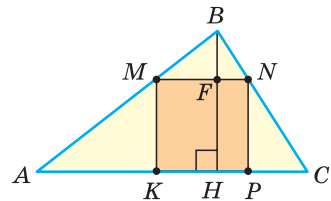



Рис. 287

-  **317.** Основания трапеции  $ABCD$  равны  $AD = a$  см и  $BC = b$  см. Отрезок  $KM$  проходит через точку  $O$  пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, его концы лежат на боковых сторонах трапеции. Докажите, что  $KM = \frac{2ab}{a+b}$ .



При помощи **Интернета** выясните, как Фалес Милетский определил высоту египетской пирамиды, поразив своими знаниями фараона Амасиса.

Объясните решение Фалеса по нахождению высоты пирамиды. Подумайте, как Фалес нашел длину той части тени, которая находится в основании пирамиды и недоступна для непосредственного измерения.



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определение подобных треугольников.
2. Теорему о пропорциональных отрезках (обобщенную теорему Фалеса).
3. Теорему о прямой, параллельной стороне треугольника.
4. Три признака подобия треугольников.
5. Признак подобия прямоугольных треугольников.

### Умеем

1. Определять соответствующие стороны подобных треугольников и записывать отношения их длин в виде пропорций.
2. Определять, по какому признаку подобны треугольники.
3. Доказывать три признака подобия треугольников.

## § 22. Свойство биссектрисы треугольника

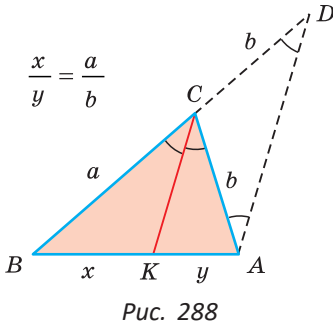
**Теорема.** Биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $CK$  — биссектриса.

Доказать:  $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$ .

Доказательство. Из точки  $A$  проведем луч, параллельный биссектрисе  $CK$  до пересечения его в точке  $D$  с продолжением стороны  $BC$  (рис. 288).  $\angle BCK = \angle BDA$  как соответственные при параллельных прямых  $CK$  и  $DA$  и





секущей  $BD$ ;  $\angle KCA = \angle DAC$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $CK$  и  $DA$  и секущей  $AC$ . В силу того, что  $\angle BCK = \angle KCA$  ( $CK$  — биссектриса), получим, что  $\angle CDA = \angle CAD$ .

Тогда треугольник  $ACD$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника),  $CD = CA$ . По обобщенной теореме Фалеса  $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{CD}$ , откуда  $\frac{BK}{KA} = \frac{BC}{AC}$ .

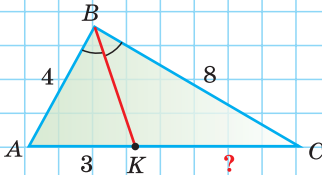
Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Если  $\angle ABK = \angle CBK$ , то  $KC = \dots$

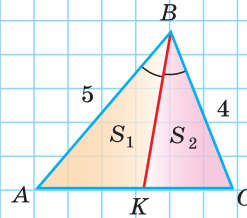
- а) 6;            в) 4;  
б) 5;            г) 7.



### Тест 2

Если  $BK$  — биссектриса угла  $ABC$ , то  $S_1 : S_2 = \dots$

- а)  $\frac{25}{16}$ ;  
б)  $\frac{5}{4}$ ;  
в)  $\frac{4}{5}$ ;  
г)  $\frac{2}{1}$ .



## Задания к § 22

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите отрезки, на которые биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу.

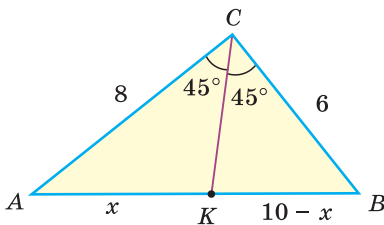


Рис. 289

Решение. Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = 8$ ,  $CK$  — биссектриса (рис. 289). По теореме Пифагора  $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ . Обозначим  $AK = x$ ,  $KB = 10 - x$ . По свойству биссектрисы треугольника  $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC}$ , то есть  $\frac{x}{10-x} = \frac{8}{6}$ , или  $\frac{x}{10-x} = \frac{4}{3}$ . Тогда  $3x = 4(10-x)$ ,  $7x = 40$ ,  $x = \frac{40}{7}$ . Отсюда  $10 - x = 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}$ . Получили:  $AK = 5\frac{5}{7}$ ,  $KB = 4\frac{2}{7}$ .

Ответ:  $5\frac{5}{7}$ ;  $4\frac{2}{7}$ .

**Задача 2.** Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает диагональ  $BD$  в точке  $K$ , а сторону  $BC$  — в точке  $M$ . Известно, что  $MC = 4$ ,  $BK : KD = 1 : 2$ . Найти периметр параллелограмма (рис. 290).

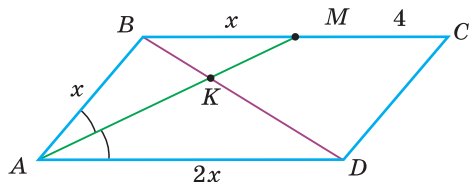


Рис. 290

**Решение.** Рассмотрим треугольник  $ABD$ ,  $AK$  — его биссектриса. А биссектриса делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть  $\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}$ . Пусть  $AB = x$ , тогда  $AD = 2x$ . Так как  $\angle BAM = \angle DAM$  ( $AM$  — биссектриса), а  $\angle DAM = \angle AMB$  как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AM$ , то  $\angle BAM = \angle BMA$ . Тогда треугольник  $AMB$  — равнобедренный,  $AB = BM = x$ ,  $BC = x + 4$ . С другой стороны,  $BC = AD = 2x$ . Тогда  $2x = x + 4$ ,  $x = 4$ ,  $AB = 4$ ,  $AD = 8$ ,  $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(4 + 8) = 24$ .

Ответ: 24.

*Замечание.* Для решения задачи можно было воспользоваться подобием треугольников  $BKM$  и  $DKA$ .



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**318.** На рисунках 291, а)–в) в каждом треугольнике проведена биссектриса. Найдите длину отрезка  $x$  (все размеры даны в сантиметрах).

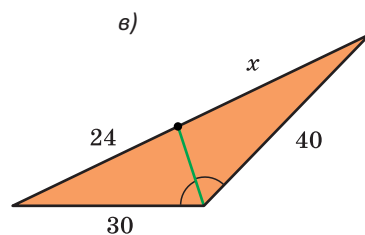
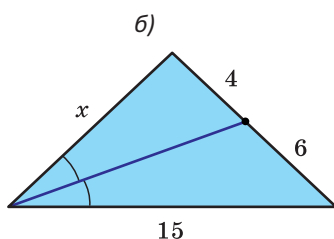
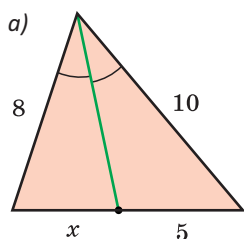


Рис. 291

- 319.** В треугольнике  $ABC$   $AC = 8$  см. На стороне  $BC$  взята точка  $F$  так, что  $\angle BAF = \angle CAF$ ,  $BF = 3$  см,  $FC = 4$  см. Найдите периметр  $\triangle ABC$ .
- 320.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$ , где  $AC = BC = 16$  см, проведена биссектриса  $BK$ ,  $AK : KC = 1 : 4$ . Найдите основание  $AB$ .
- 321.** Стороны треугольника равны 6 см, 7 см и 8 см. Найдите длины отрезков, на которые биссектриса среднего по величине угла треугольника делит противоположающую сторону.
- 322.** Найдите длину биссектрисы  $AK$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , если катет  $AC = 6$  см, гипотенуза  $AB = 10$  см.

- 323.** В треугольнике  $ABC$   $AC = 48$  см,  $BC = 36$  см. На стороне  $AB$  отмечена точка  $D$  такая, что  $AD : DB = 4 : 3$ ,  $\angle BDC + \angle ACD = 104^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ .
- 324.** Дан прямоугольник  $ABCD$ , у которого  $AB = 15$  см,  $AD = 30$  см. Точка  $M$  лежит на диагонали  $BD$  и равноудалена от сторон  $BC$  и  $CD$ . Найдите площадь треугольника  $CMD$ .
- 325.** Биссектриса внешнего угла треугольника  $ABC$  при вершине  $B$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $K$ . Докажите, что  $AK : CK = AB : BC$ .

## § 23. Свойство площадей подобных треугольников

Часто школьникам задают «провокационный» вопрос: «Если стороны квадрата увеличить в 2 раза, то во сколько раз увеличится площадь квадрата?» При этом часто получают ответ: «В 2 раза!», который является неправильным.

Убедимся в этом. На рисунке 292 сторона малого квадрата равна 2 см, а площадь —  $4 \text{ см}^2$ . Увеличив все стороны квадрата в 2 раза, получим большой квадрат со стороной 4 см и площадью  $16 \text{ см}^2$ . Как видим, площадь квадрата увеличилась в 4 раза!

Легко понять, что если стороны квадрата увеличить в 3 раза, то его площадь увеличится в  $3^2$  раз, то есть в 9 раз.

Аналогичное утверждение справедливо и для треугольников. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

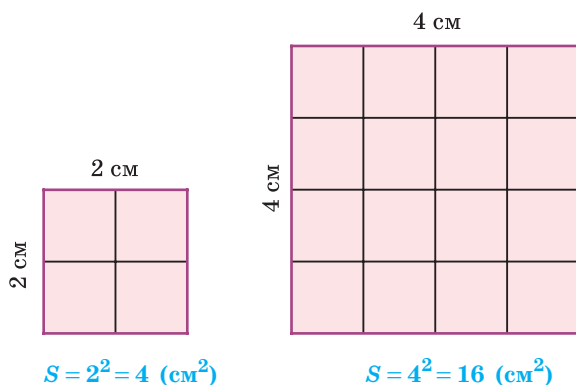


Рис. 292

**Теорема (о площадях подобных треугольников).**

Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

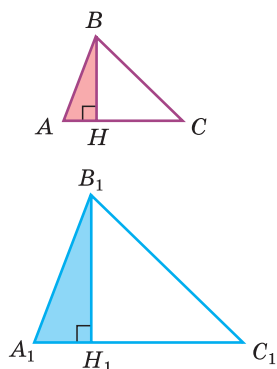


Рис. 293

Дано:  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$  (рис. 293).

Доказать:  $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1C_1^2}{AC^2}$ .

Доказательство. Пусть  $k$  — коэффициент подобия треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$ , где  $\angle A$  — острый. Тогда  $A_1B_1 = k \cdot AB$ ,  $A_1C_1 = k \cdot AC$ . Проведем высоты  $BH$  и  $B_1H_1$  данных треугольников. Так как  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ , то  $\angle A_1 = \angle A$ . Прямоугольные треугольники  $A_1B_1H_1$  и  $ABH$  подобны по острому углу. Отсюда  $\frac{B_1H_1}{BH} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$ ,  $B_1H_1 = k \cdot BH$ .

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1H_1}{\frac{1}{2} AC \cdot BH} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (k \cdot AC) \cdot (k \cdot BH)}{\frac{1}{2} AC \cdot BH} = k^2 = \left(\frac{A_1C_1}{AC}\right)^2 = \frac{A_1C_1^2}{AC^2}.$$

Теорема доказана.

Существует и другая формулировка этой теоремы.

*Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*



## Задания к § 23

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого составляет  $\frac{1}{4}$  площади данного.

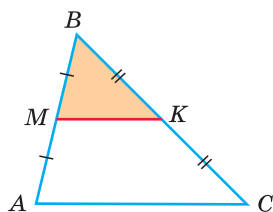


Рис. 294

Доказательство. Пусть  $MK$  — средняя линия треугольника  $ABC$  (рис. 294). Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине, то есть  $MK \parallel AC$  и  $MK = \frac{1}{2} AC$ . Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Тогда  $\triangle MBK \sim \triangle ABC$ . Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, то  $\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{MK^2}{AC^2} = \left(\frac{MK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , то есть  $S_{MBK} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ . Что и требовалось доказать.

**Задача 2.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  (рис. 295). Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ ,  $S_{BOC} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{AOB} = 12 \text{ см}^2$ . Найти площадь трапеции.

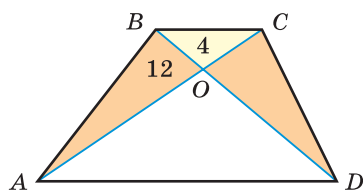


Рис. 295

Решение. *Способ 1.* Диагонали трапеции делят ее на 4 треугольника. Ранее нами доказано, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, а прилежащие к основаниям — подобны. То есть  $S_{AOB} = S_{DOC}$ ,  $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ . Отсюда  $S_{DOC} = 12 \text{ см}^2$ .

Далее заметим, что треугольники  $BOC$  и  $AOB$  имеют общую высоту, опущенную из вершины  $B$ . Поэтому их площади относятся как соответствующие этой высоте основания:  $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = \frac{CO}{AO}$ . То есть  $\frac{CO}{AO} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

Стороны  $CO$  и  $AO$  являются соответствующими сторонами подобных треугольников  $BOC$  и  $DOA$  (они лежат против равных углов  $OBC$  и  $ODA$ ).

По теореме о площадях подобных треугольников  $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \frac{CO^2}{AO^2} = \left(\frac{CO}{AO}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ . Отсюда  $S_{DOA} = 9S_{BOC} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$ . Искомая площадь трапеции:  $S_{ABCD} = 12 + 12 + 4 + 36 = 64 \text{ (см}^2\text{)}$ .

*Способ 2.* Треугольники  $COD$  и  $AOD$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $D$ . Тогда их площади относятся как основания  $CO$  и  $AO$ , то есть  $1 : 3$ . Значит,  $S_{AOD} = 3S_{COD} = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (см}^2\text{)}$ ,  $S_{ABCD} = 64 \text{ см}^2$ .  
Ответ:  $64 \text{ см}^2$ .



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**326.** Как изменится площадь треугольника, если все его стороны:

- а) увеличить в 2 раза;      в) увеличить в 2,5 раза;
- б) увеличить в 3 раза;      г) уменьшить в 10 раз?

**327.** Для  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  выполняется  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1,5$ ,  $S_{ABC} = 90 \text{ см}^2$ . Найдите  $S_{A_1B_1C_1}$ .

- 328.** а) Периметры двух подобных треугольников относятся как  $2 : 3$ . Найдите отношение площадей данных треугольников.  
б) Площади двух подобных треугольников относятся как  $64 : 25$ . Найдите отношение периметров этих треугольников.

**329.** Найдите отношение площади  $\triangle KMN$  к площади  $\triangle EPG$  (рис. 296), если  $\angle K = \angle E$ .

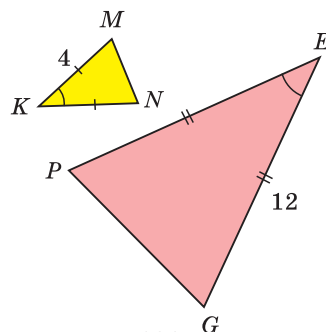


Рис. 296

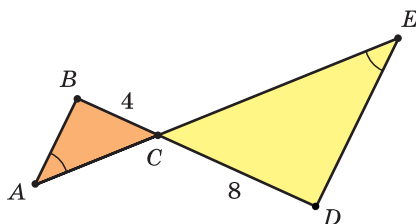


Рис. 297

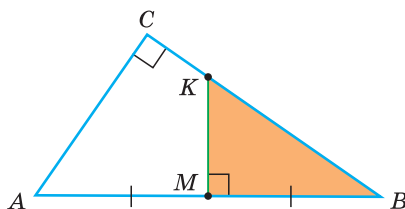


Рис. 298

- 330.** На рисунке 297  $\angle A = \angle E$ ,  $BC = 4$  см,  $CD = 8$  см,  $S_{ABC} = 10$  см<sup>2</sup>. Найдите  $S_{EDC}$ .
- 331.** На рисунке 298  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 6$  м,  $BC = 8$  м,  $AM = MB$ ,  $KM \perp AB$ . Найдите площадь треугольника  $KMB$ .
- 332.** На рисунке 299  $MN \parallel AC$ ,  $NK \parallel AB$ ,  $MB : AM = 1 : 2$ ,  $S_{ABC} = 360$  см<sup>2</sup>. Найдите  $S_{AMNK}$ .
- 333.** Площадь трапеции  $AMKC$  (рис. 300) равна 80 м<sup>2</sup>,  $AM : MB = 4 : 3$ . Найдите площадь треугольника  $MBK$ .
- 334.** На рисунке 301  $AMKE$  — параллелограмм,  $S_{MBK} = S_1 = 16$  см<sup>2</sup>,  $S_{EKC} = S_2 = 9$  см<sup>2</sup>.
- Найдите площадь параллелограмма  $AMKE$ .
  - Выразите площадь параллелограмма  $S_{AMKE}$  через  $S_1$  и  $S_2$ .
  - Выразите площадь треугольника  $ABC$  через  $S_1$  и  $S_2$ .

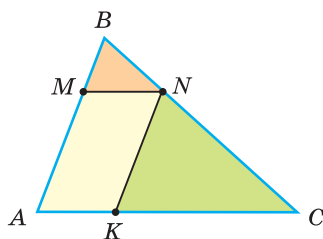


Рис. 299

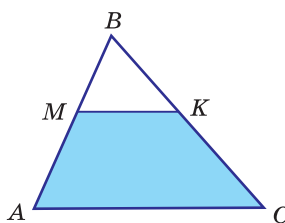


Рис. 300

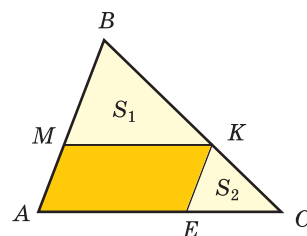



Рис. 301

- 335.** а) В трапеции  $ABCD$  (рис. 302)  $BC = \frac{1}{3}AD$ ,  $S_1 + S_2 = 60$  см<sup>2</sup>. Найдите площадь  $S$  трапеции  $ABCD$ .
-  б) Выведите формулу зависимости площади  $S$  трапеции  $ABCD$  от площадей  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 302).
- 336.** На рисунке 303 треугольник  $ABC$  — равносторонний,  $MB = 2AM$ ,  $NC = 2BN$ ,  $AK = 2KC$ . Если площадь треугольника  $ABC$  равна 72 см<sup>2</sup>, то чему равна площадь треугольника  $MNK$ ?

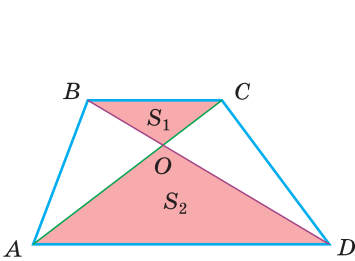


Рис. 302

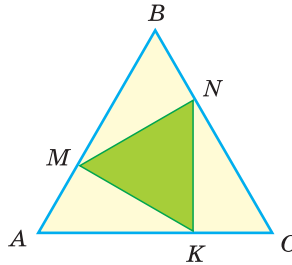


Рис. 303

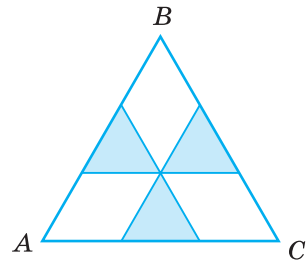


Рис. 304

- 337.** Через центр равностороннего треугольника (точку пересечения медиан) провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 304). Какую часть площади треугольника  $ABC$  занимает часть, занятая голубыми треугольниками?

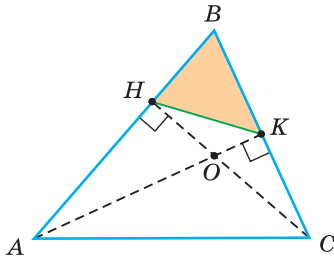


Рис. 305

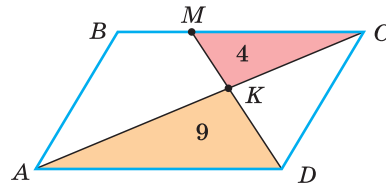


Рис. 306

- 338.**  $AK$  и  $CH$  — высоты треугольника  $ABC$  (рис. 305),  $BK : AB = 2 : 5$ ,  $S_{ABC} = 50 \text{ см}^2$ . Найдите площадь треугольника  $HVK$ .
- 339.** В параллелограмме  $ABCD$  проведен отрезок  $DM$  (рис. 306), который пересекает диагональ  $AC$  в точке  $K$ . Известно, что  $S_{MCK} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{DKA} = 9 \text{ см}^2$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ .
- 340.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  к гипотенузе проведена высота  $BH$ . Известно, что  $S_{ABH} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{CBH} = 16 \text{ см}^2$ . Найдите гипотенузу  $AC$ .
- 341.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC = 4 \text{ см}$  и  $AD = 8 \text{ см}$  и высотой, равной  $3 \text{ см}$ . Боковые стороны трапеции продлили до пересечения в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $BKC$ .
- 342.** Основания трапеции равны  $a$  и  $b$ . Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям, который делит трапецию на две равновеликие части.
- 343.** Разделите при помощи циркуля и линейки данный треугольник на две равновеликие части прямой, параллельной его стороне.



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Свойство биссектрисы треугольника.
2. Теорему об отношении площадей подобных треугольников.
3. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если его стороны увеличить в 2 раза, в 3 раза, в  $k$  раз.

### Умеем

1. Находить площадь одного из двух подобных треугольников, если известна площадь другого и отношение соответствующих сторон.
2. Доказывать теорему о свойстве биссектрисы треугольника.
3. Доказывать теорему об отношении площадей подобных треугольников.

## Геометрия 3D

Как уже говорилось, любые два круга являются подобными (рис. 307, а). Подобными также являются любые два квадрата (рис. 307, б). Коэффициент подобия в первом случае может быть определен как отношение радиусов кругов, а во втором — как отношение сторон квадратов, то есть  $k = \frac{R_1}{R_2}$  или  $k = \frac{a_1}{a_2}$ .

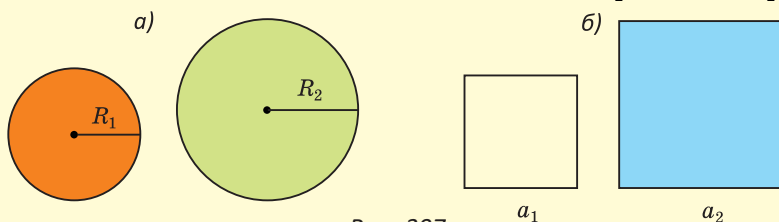


Рис. 307

Два многоугольника называются подобными, если у них углы соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны (рис. 308, а).

Фигуры  $F$  и  $F_1$  называются подобными, если между их точками можно установить такое соответствие, что для любых пар точек  $M$  и  $N$  и соответствующих им точек  $M_1$  и  $N_1$  (рис. 308, б) выполняется условие  $\frac{MN}{M_1N_1} = k$ . Число  $k$  — коэффициент подобия. Можно доказать, что отношение периметров подобных фигур равно  $k$ , а отношение их площадей —  $k^2$ .

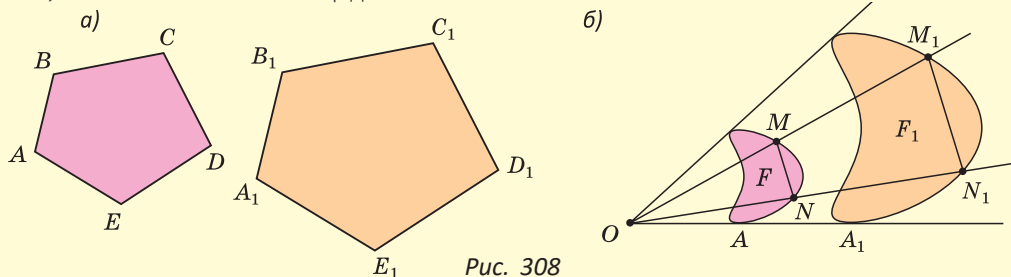


Рис. 308



Подобие также определяется и для пространственных фигур. Так, подобными являются любые два шара или любые два куба (рис. 309).

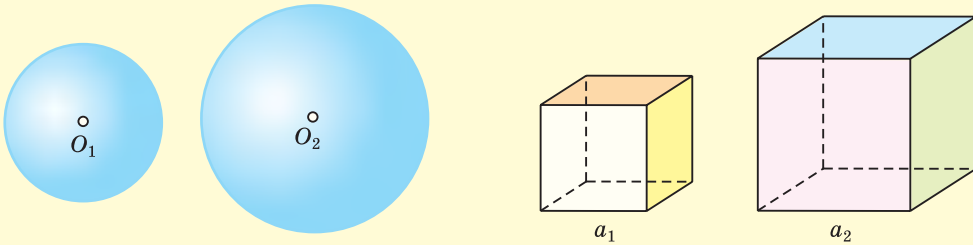


Рис. 309

Увеличив длину всех ребер любого многогранника в одно и то же число раз и сохранив величины всех углов, получим многогранник, подобный данному (рис. 310).

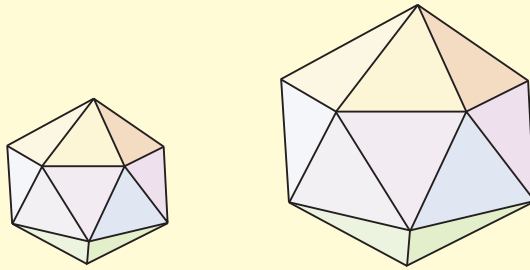


Рис. 310

Мы знаем, что прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. Аналогично в пространстве плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее пирамиду, подобную данной (рис. 311, а, б). То есть отсеченная пирамида будет иметь такую же форму, но отличаться размерами. Если отбросить отсеченную пирамиду, то получится усеченная пирамида (рис. 311, в).

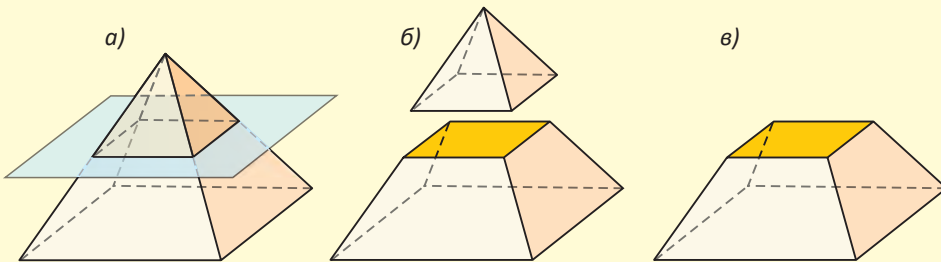


Рис. 311

Усеченная пирамида имеет два основания: верхнее и нижнее, которые являются подобными многоугольниками. Ее боковые грани являются трапециями.

В основании *правильной четырехугольной пирамиды* лежит квадрат, и все ее боковые ребра равны. Если от нее отсечь плоскостью, параллельной основанию, пирамиду, то получится *правильная усеченная пирамида*. Основания ее — квадраты, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции.

**Задача.** Найдите площадь полной поверхности правильной усеченной четырехугольной пирамиды (рис. 312), у которой стороны оснований равны 20 см и 10 см, а боковое ребро равно 13 см.

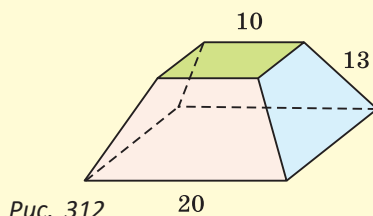


Рис. 312

### Моделирование

На рисунке 313 изображен план участка под Несвижским замком в масштабе 1 : 1500. При помощи линейки определите размеры внутреннего двора (отмечен коричневым цветом) и найдите его площадь, используя формулы площади прямоугольника и трапеции. Найдите периметр и площадь реального участка при помощи свойств подобных многоугольников.

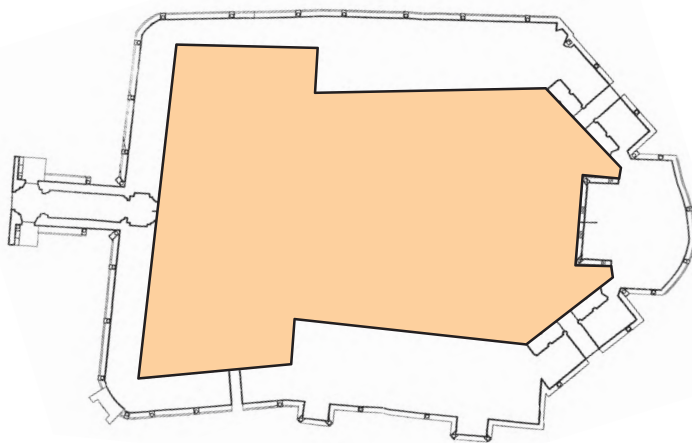


Рис. 313

**Интересно знать.** Несвижский замок — дворцово-парковый комплекс, находящийся в северо-восточной части г. Несвижа (Минская область). В XVI—XIX вв. — центр резиденции ее владельцев из рода Радзивиллов.

Архитектурный ансамбль Несвижского замка в настоящее время представляет собой историко-культурный музей-заповедник.

15 июля 2005 г. на сессии Межправительственного комитета по охране всемирного культурного и природного наследия «Несвижский дворцово-парковый комплекс» был включен в список объектов всемирного наследия ЮНЕСКО. Несвижский замок изображен на 100-рублевой купюре.

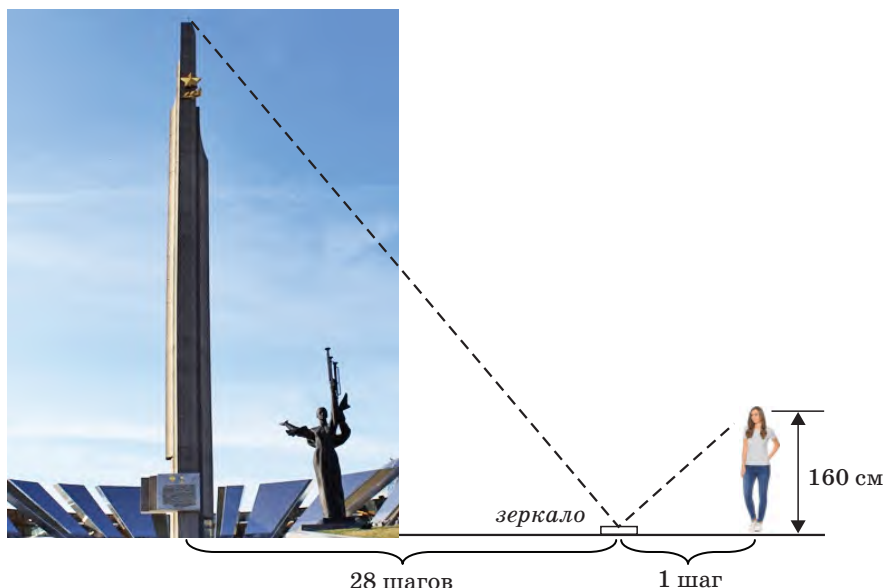


### Реальная геометрия

**Задача для девочек.** Глядя на рисунок, составьте план, как при помощи зеркала, зная собственный рост, можно определить примерную высоту стелы «Минск — город-герой» — главного символа столицы Беларуси.

Найдите высоту стелы, используя данные на рисунке. При решении задачи учтите закон отражения света: «Угол отражения равен углу падения».

Выясните, в честь какой даты установлена стела «Минск — город-герой».



**Задача для мальчиков.** В туристических походах учат определять расстояние до объекта при помощи вытянутой руки и линейки. Определите расстояние от туриста до автобуса, если длина части линейки, перекрывающей автобус, равна 5 см, длина руки от плеча до линейки — 50 см и известно, что длина данного автобуса равна 9,17 м.



## § 24. Решение задач по теме «Подобие треугольников»

**Задача 1.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$  и  $CN$ , которые пересекаются в точке  $H$  (рис. 314). Доказать, что:

- а)  $AH \cdot KH = CH \cdot NH$ ; б)  $\triangle KBN \sim \triangle ABC$ ; в)  $\angle NKB = \angle CAB$ .

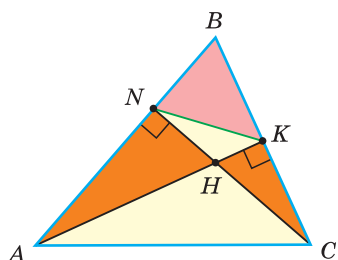


Рис. 314

Доказательство. а)  $\triangle ANH \sim \triangle CHK$  по острому углу ( $\angle AHN = \angle CHK$  как вертикальные). Отсюда  $\frac{NH}{AH} = \frac{KH}{CH}$ ,  $AH \cdot KH = CH \cdot NH$ .

б)  $\triangle ABK \sim \triangle CBN$  по острому углу ( $\angle B$  — общий). Поэтому  $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC}$ . Тогда  $\triangle KBN \sim \triangle ABC$  по двум сторонам и углу между ними.

в) Так как  $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{KN}{AC}$ , то  $\angle NKB = \angle CAB$ .

### Следствие.

Треугольник  $NKM$  (рис. 315) с вершинами в основаниях высот данного остроугольного треугольника  $ABC$  имеет углы, равные  $180^\circ - 2\angle A$ ,  $180^\circ - 2\angle B$ ,  $180^\circ - 2\angle C$ . Его биссектрисы лежат на высотах треугольника  $ABC$ .

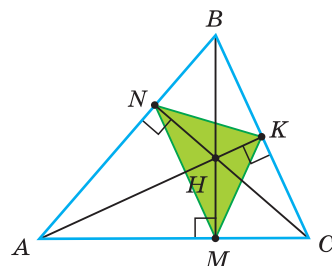


Рис. 315



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**344.** На рисунке 316  $KH = 2$ ,  $HC = 10$ ,  $AH = 5$ . Найдите  $HM$ .

**345.** На рисунке 317  $CH = 12$ ,  $BH \cdot HK = 108$ . Найдите  $CN$ .

**346.** На рисунке 318  $BP = 4$ ,  $BC = 10$ ,  $PF = 6$ . Найдите  $AC$ .

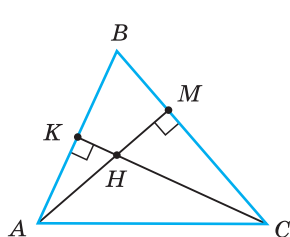


Рис. 316

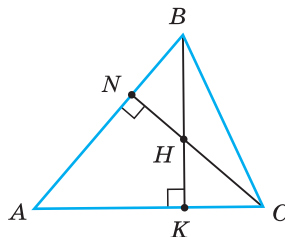


Рис. 317

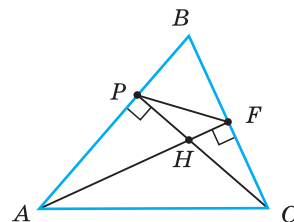


Рис. 318

**Задача 2.** а) Доказать, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.

б) Доказать, что точка пересечения диагоналей трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.

**Доказательство.**

а) Пусть  $K$  — середина основания  $AD$  трапеции  $ABCD$ ,  $P$  — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и прямая  $PK$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $M$ . Докажем, что  $M$  — середина  $BC$  (рис. 319, а).

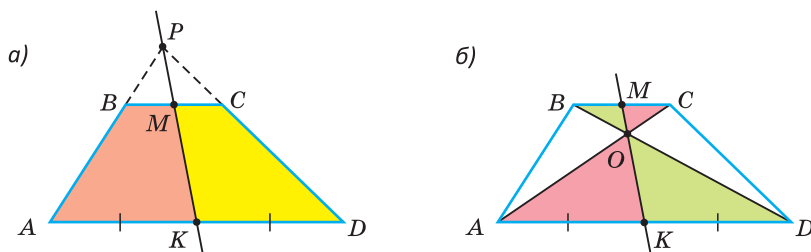


Рис. 319

Так как  $\triangle BPM \sim \triangle APK$  ( $BC \parallel AD$ ), то  $\frac{BM}{AK} = \frac{PM}{PK}$ . Аналогично, так как  $\triangle CPM \sim \triangle DPK$ , то  $\frac{CM}{DK} = \frac{PM}{PK}$ . Отсюда  $\frac{BM}{AK} = \frac{CM}{DK}$  или  $\frac{BM}{CM} = \frac{AK}{DK}$ . Но  $\frac{AK}{DK} = 1$ , откуда  $\frac{BM}{CM} = 1$ ,  $BM = MC$ , точка  $M$  — середина  $BC$ .

б) Пусть  $K$  — середина основания  $AD$  трапеции  $ABCD$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей, и прямая  $KO$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $M$ . Докажем, что  $M$  — середина  $BC$  (рис. 319, б).

Так как  $\triangle BOM \sim \triangle DOK$  (по двум углам), то  $\frac{BM}{DK} = \frac{MO}{KO}$ . Аналогично, так как  $\triangle COM \sim \triangle AOK$ , то  $\frac{CM}{AK} = \frac{MO}{KO}$ . Отсюда  $\frac{BM}{DK} = \frac{CM}{AK}$  или  $\frac{BM}{CM} = \frac{DK}{AK}$ . Но  $\frac{DK}{AK} = 1$ , откуда  $\frac{BM}{CM} = 1$ ,  $BM = MC$ , точка  $M$  — середина  $BC$ .

### Следствия.

1. Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

2. В треугольнике медиана делит пополам любой отрезок с концами на сторонах треугольника, параллельный стороне, к которой проведена медиана.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**347.** В трапеции  $ABCD$  основания  $AD = 20$ ,  $BC = 12$ ,  $\angle A = 65^\circ$ ,  $\angle D = 25^\circ$ . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

**348.** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

### Метод подобия

Если при решении геометрической задачи, которая может быть решена разными способами, используют подобие треугольников, то говорят, что задача решена *методом подобия*.

**Задача 3.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ), высоты  $BK$  и  $AM$  пересекаются в точке  $H$  (рис. 320). Найти высоту  $BK$ , если  $AH = 5$ ,  $HM = 3$ .

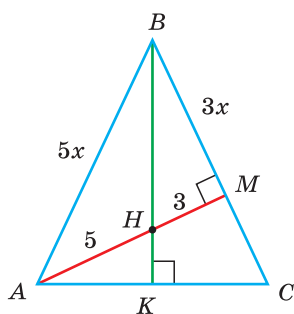


Рис. 320

Решение. Так как высота  $BK$  будет и биссектрисой, то  $BH$  — биссектриса треугольника  $ABM$ . По свойству биссектрисы треугольника получим:  $\frac{AB}{BM} = \frac{AH}{HM} = \frac{5}{3}$ . Пусть  $AB = 5x$ ,  $BM = 3x$ .

По теореме Пифагора для треугольника  $AMB$ :  $AB^2 = AM^2 + BM^2$ ,  $(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$ ,  $x^2 = 4$ ,  $x = 2$ . Тогда  $AB = 5 \cdot 2 = 10$ ,  $BM = 3 \cdot 2 = 6$ ,  $BC = 10$ .

По теореме Пифагора для треугольника  $HMB$ :

$$BH = \sqrt{BM^2 + HM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Треугольники  $BKC$  и  $BMH$  подобны по острому углу ( $\angle KBC$  — общий). Из подобия следует, что  $\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BH}$ ,

$$\text{то есть } \frac{BK}{10} = \frac{6}{3\sqrt{5}}. \text{ Отсюда } BK = \frac{10 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ:  $4\sqrt{5}$ .

*Замечание.* Найти  $BK$  можно и не используя подобие. *Способ 2:*  $MC = 4$ ,  $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 4\sqrt{5}$ ,  $KC = 2\sqrt{5}$ ,  $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = 4\sqrt{5}$ . *Способ 3 (метод площадей):*  $MC = 4$ ,  $AC = 4\sqrt{5}$ ,  $2S_{ABC} = AC \cdot BK = BC \cdot AM$ ,  $4\sqrt{5} \cdot BK = 10 \cdot 8$ ,  $BK = 4\sqrt{5}$ .



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

- 349.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = BC = 20$ . Площадь треугольника равна 160. Высоты  $BK$  и  $AM$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите площадь треугольника  $ABH$ .
- 350.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) высоты  $BE$  и  $AK$  пересекаются в точке  $M$ ,  $BM = 4$ ,  $ME = 2$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

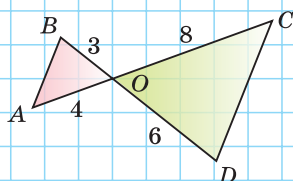
## ЗАПОМИНАЕМ

1. У подобных треугольников соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны.
2. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.
3. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.
4. Признаки подобия треугольников:
  - 1) по двум углам;
  - 2) по двум сторонам и углу между ними;
  - 3) по трем сторонам.
5. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.
6. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
7. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

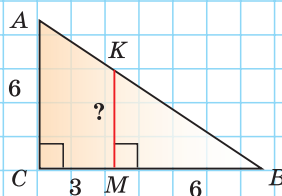
## Тест 1

По данным на рисунке докажите, что  $AB \parallel CD$ .



## Тест 2

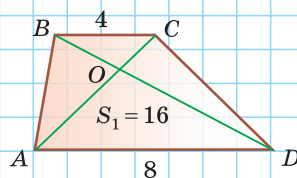
По данным на рисунке найдите длину отрезка  $KM$ .



## Тест 3

$S_{AOD} = 16 \text{ см}^2$ . Найдите площадь трапеции  $ABCD$ .

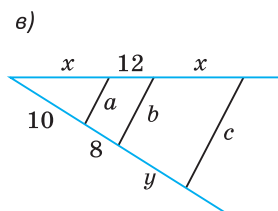
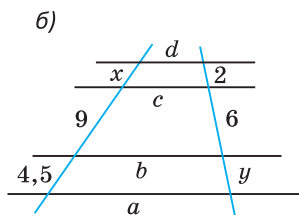
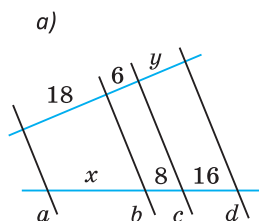
- а)  $24 \text{ см}^2$ ;      в)  $32 \text{ см}^2$ ;  
б)  $28 \text{ см}^2$ ;      г)  $36 \text{ см}^2$ .





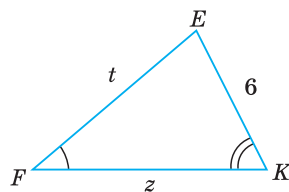
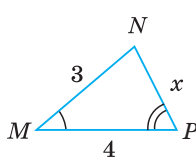
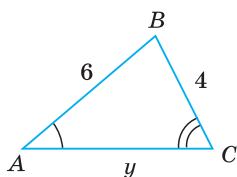
# ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

1. Найдите значение  $x + y$ , если  $a \parallel b \parallel c \parallel d$ .

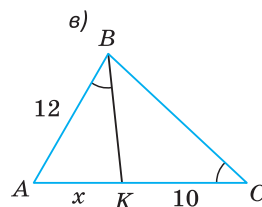
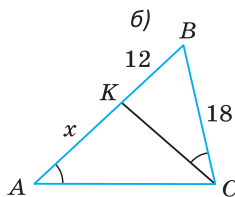
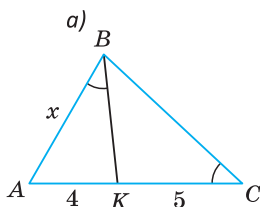


2.  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ ,  $\triangle MNP \sim \triangle FEK$ . Найдите:

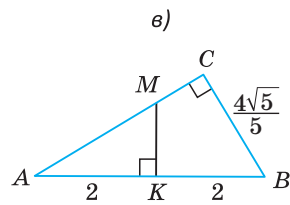
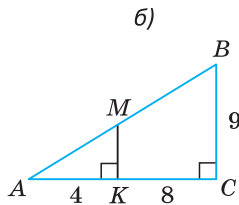
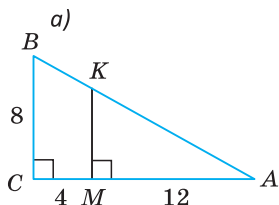
- а)  $x$  и  $y$ ; б)  $t$  и  $z$ ; в)  $P_{ABC} : P_{FEK}$ .



3. Найдите длину отрезка  $x$ .

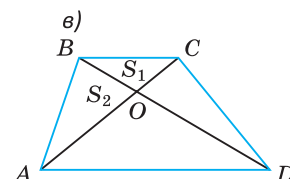
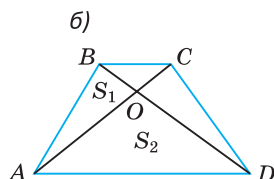
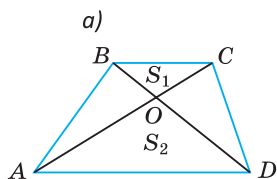


4. Найдите  $S_{AMK}$ .



5. Найдите отношение  $BC : AD$ , если:

- а)  $S_1 = 4$ ,  $S_2 = 25$ ; б)  $S_1 = 6$ ,  $S_2 = 18$ ; в)  $S_1 = 8$ ,  $S_2 = 16$ .



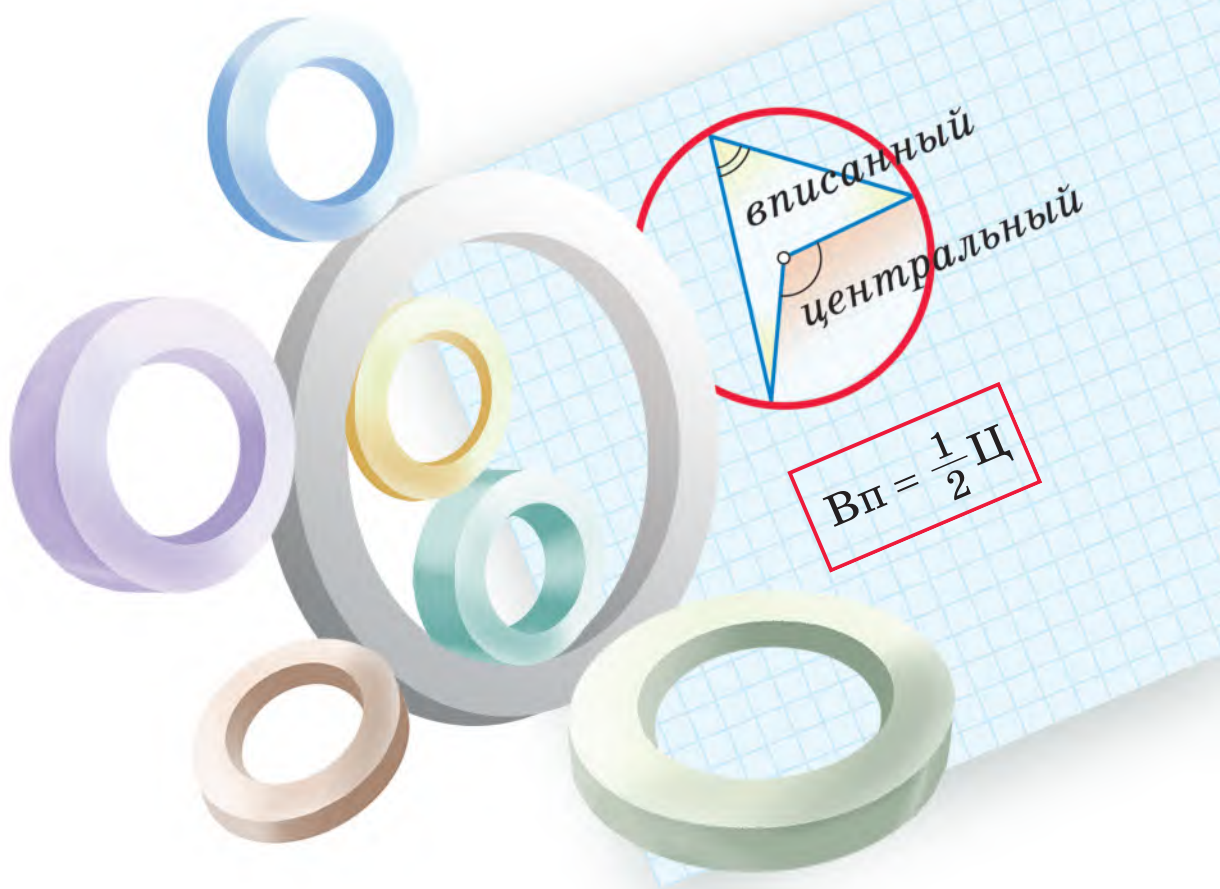


## Глава IV

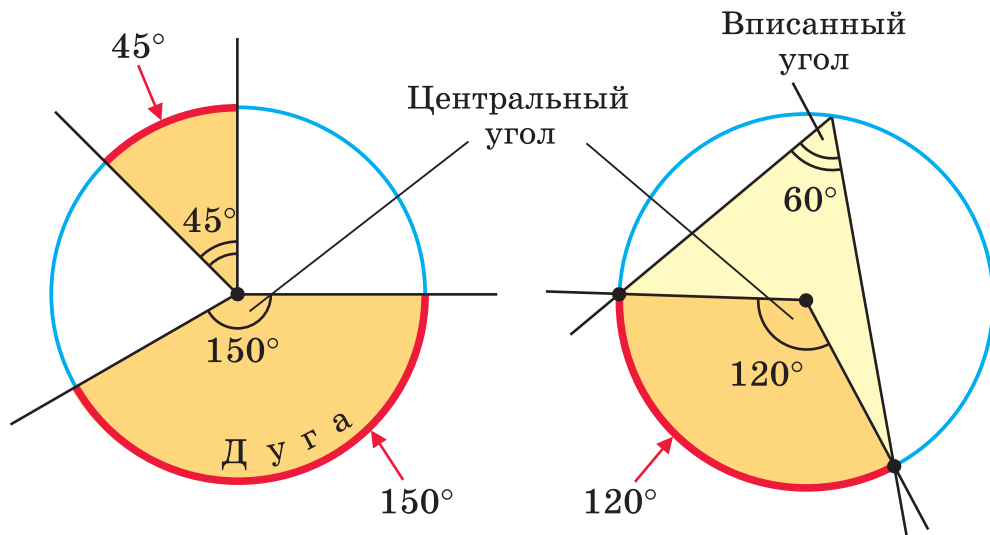
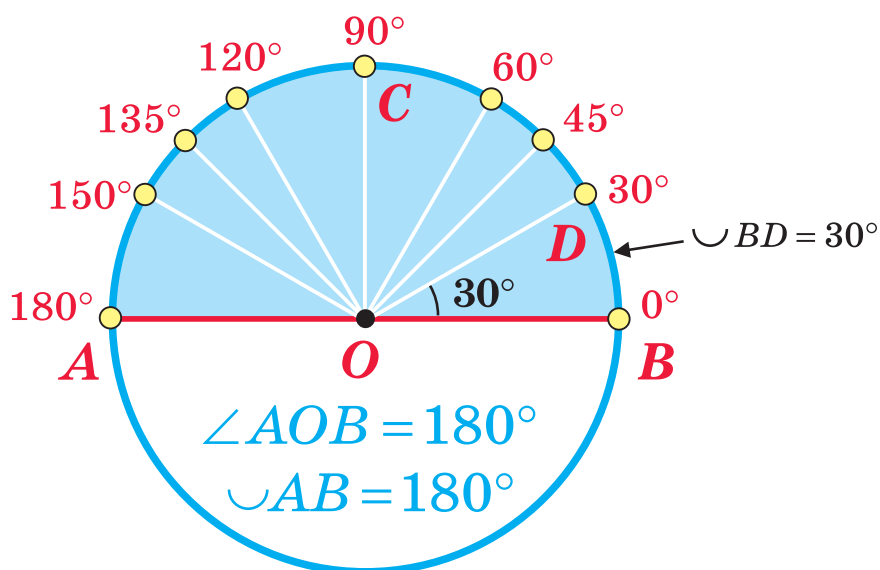
# Окружность

**В этой главе вы узнаете:**

- Какая прямая называется касательной к окружности
- Какой угол называют вписанным в окружность
- Свойство пересекающихся хорд окружности



## Углы в окружности



$$\text{Вписанный} = \frac{1}{2} \text{ Центрального}$$

## § 25. Касательная к окружности

*Окружность* — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от ее центра, которое равно радиусу окружности. Если расстояние от центра до точки больше радиуса окружности, то говорят, что точка находится *вне* окружности, а если меньше радиуса, то — *внутри* окружности. Все точки плоскости, находящиеся от центра окружности на расстоянии, меньшем или равном радиусу, образуют *круг*.

На рисунке 321 точки  $A, E, D$  принадлежат окружности с радиусом  $R$  и центром  $O$ , точка  $B$  находится внутри окружности (внутри круга), точка  $C$  — вне окружности (вне круга),  $OA = OE = OD = R$ ,  $OB < R$ ,  $OC > R$ .

Можно установить, что прямая и окружность могут иметь только три различных взаимных положения (рис. 322): прямая и окружность не имеют общих точек (прямая  $a$ ), имеют одну общую точку (прямая  $b$ ), имеют две общие точки (прямая  $c$ ).

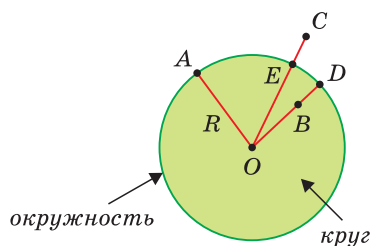


Рис. 321

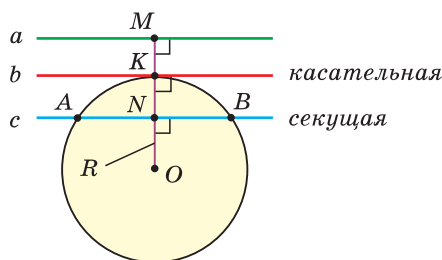


Рис. 322

В первом случае расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса ( $OM > R$ ), во втором — равно радиусу ( $OK = R$ ), в третьем — меньше радиуса ( $ON < R$ ). Говорят, что прямая  $b$  касается окружности в точке  $K$ , а прямая  $c$  пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ .

**Определение.** Прямая, проходящая через две точки окружности, называется **секущей** к окружности.

**Определение.** Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности.

**Теорема (признак касательной).**

Если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

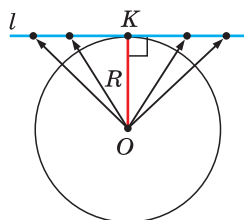


Рис. 323

Доказательство. Пусть  $OK$  — радиус окружности, прямая  $l$  проходит через точку  $K$  и перпендикулярна  $OK$  (рис. 323). Нужно доказать, что  $l$  — касательная.

Так как наклонная длиннее перпендикуляра, то расстояние от точки  $O$  до всех остальных точек прямой  $l$  больше радиуса  $OK$ . Поэтому все точки прямой, кроме точки  $K$ , лежат вне окружности. Следовательно, прямая  $l$  и окружность имеют единственную общую точку  $K$ , и прямая  $l$  по определению является касательной. Теорема доказана.

Доказанная теорема гарантирует, что касательная к окружности существует в каждой ее точке, и дает способ построения касательной.

**Теорема (свойство касательной).**

**Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.**

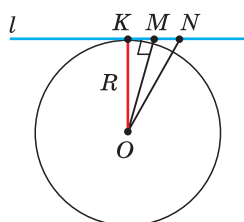


Рис. 324

Доказательство. Пусть  $l$  — касательная к окружности с центром в точке  $O$ , где  $K$  — точка касания,  $OK$  — радиус (рис. 324). Нужно доказать, что  $OK \perp l$ .

Пусть радиус  $OK$  не перпендикулярен  $l$ , а перпендикуляром является отрезок  $OM$ . На прямой  $l$  отложим  $MN = KM$ . Получим равные прямоугольные треугольники  $OMK$  и  $OMN$  (по двум катетам), откуда  $ON = OK$ . Так как отрезок  $ON$  равен радиусу, то точка  $N$  принадлежит окружности. Тогда прямая  $l$  и окружность имеют, по крайней мере, две общие точки, что противоречит определению касательной. Следовательно,  $OK \perp l$ .

Теорема доказана.

Заметим, что из точки вне окружности к одной окружности можно провести ровно две касательные, которые обладают следующим свойством.

**Теорема (о касательных, проведенных из одной точки).**

**Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности (соединяющих данную точку и точку касания), равны между собой.**

Доказательство. Пусть  $AB$  и  $AC$  — касательные к окружности, где  $B$  и  $C$  — точки касания. Нужно доказать, что  $AB = AC$  (рис. 325). Проведем

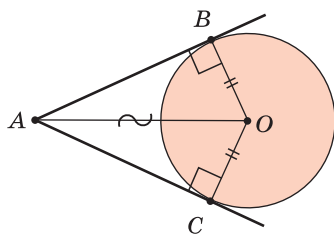


Рис. 325

отрезок  $AO$  и радиусы  $OB$  и  $OC$ . Так как радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то  $OB \perp AB$ ,  $OC \perp AC$ . Прямоугольные треугольники  $ABO$  и  $ACO$  равны по катету ( $OB = OC$  как радиусы) и гипотенузе (гипотенуза  $AO$  — общая). Из равенства треугольников следует, что  $AB = AC$ . Теорема доказана.

Говорят, что окружность касается луча (отрезка), если она касается прямой, содержащей этот луч (отрезок) в точке, принадлежащей лучу (отрезку).

**Определение.** Если окружность касается сторон угла, то она называется **вписанной в угол**.

**Теорема (свойство окружности, вписанной в угол).**  
**Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.**

Докажите эту теорему самостоятельно, используя рисунок 325.

Из теоремы вытекает, что центры всех окружностей, вписанных в угол, лежат на биссектрисе угла (рис. 326).

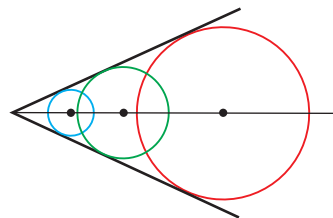


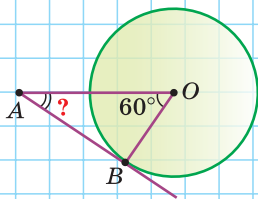
Рис. 326

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

### Тест 1

Найдите угол  $A$ , если  $AB$  — касательная.

а)  $60^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $30^\circ$ ; г)  $90^\circ$ .

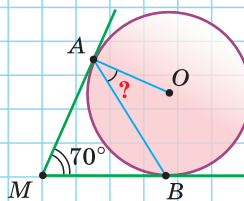


### Тест 2

$A$  и  $B$  — точки касания.

Найдите  $\angle BAO$ .

а)  $30^\circ$ ; б)  $35^\circ$ ; в)  $45^\circ$ ; г)  $15^\circ$ .





## Задания к § 25

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

#### ключевые задачи

**Задача 1.** Из точки  $A$  к окружности с центром  $O$  проведены две касательные  $AB$  и  $AC$ , где  $B$  и  $C$  — точки касания,  $OB = 6$  см,  $AC = 8$  см. Найдите длину отрезка  $AK$  (рис. 327).

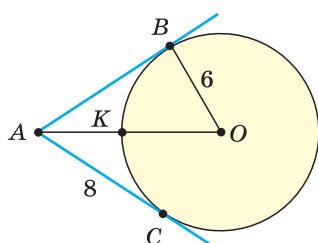


Рис. 327

Решение. Воспользуемся тем, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, и тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой. Тогда  $AB = AC = 8$  см,  $OB \perp AB$  и треугольник  $ABO$  — прямоугольный. По теореме Пифагора  $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$  (см). Так как  $OK = OB = 6$  см как радиусы одной окружности, то  $AK = AO - OK = 10 - 6 = 4$  (см).  
 Ответ: 4 см.

**Задача 2.** В угол  $A$  вписана окружность, прямая  $MN$  — касательная (рис. 328). Найдите периметр треугольника  $AMN$ , если  $AB = 12$  см.

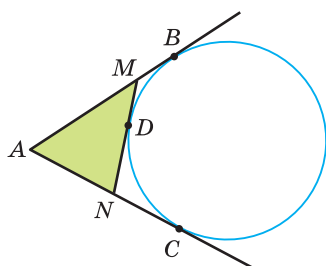


Рис. 328

Решение. Пусть  $B$ ,  $C$  и  $D$  — точки касания. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то  $AC = AB = 12$  см,  $MB = MD$  и  $NC = ND$ . Тогда  $AM + MD = AM + MB = AB = 12$  см,  $AN + ND = AN + NC = AC = 12$  см,  $P_{AMN} = (AM + MD) + (AN + ND) = AB + AC = 12 + 12 = 24$  (см).  
 Ответ: 24 см.

*Замечание.* Полезно запомнить:  $P_{AMN} = 2AB$ .

**Задача 3.** Построить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности, проходящую через точку, взятую вне окружности.

Решение. Пусть дана окружность с заданным центром  $O$  и точка  $M$  вне окружности (рис. 329, а).

Построение.

1-й шаг. Проводим отрезок  $MO$  и на нем как на диаметре строим окружность (рис. 329, б). Для чего отрезок  $MO$  делим пополам, находим его середину  $O_1$  и радиусом  $O_1M$  строим окружность.

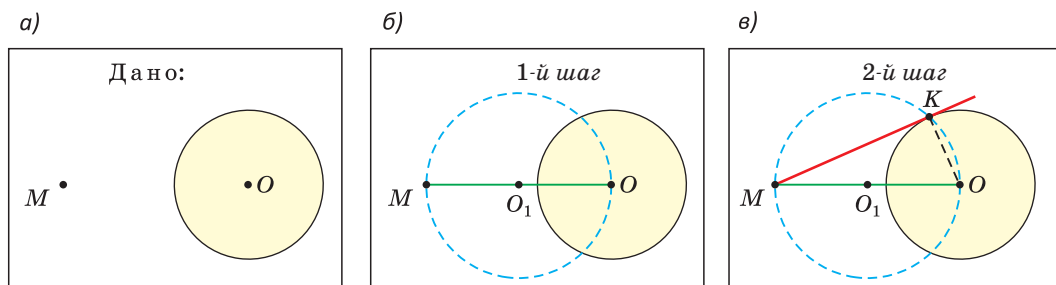


Рис. 329

**2-й шаг.** Отмечаем точку  $K$  пересечения построенной окружности и данной. Проводим прямую  $MK$ , которая и будет искомым касательным к данной окружности (рис. 329, в).

**Доказательство.** Угол  $MKO$  — прямой, так как его вершина лежит на окружности и он опирается на диаметр (доказано в 7-м классе). Поэтому  $OK \perp MK$ , и тогда по признаку касательной прямая  $MK$  является касательной к окружности.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**351.** Изобразите окружность с центром в точке  $O$  и радиусом 3 см. Вне окружности отметьте точку  $A$ , где  $OA = 5$  см. Проведите из точки  $A$  касательную к данной окружности. Обозначьте точку касания буквой  $B$ . Объясните, почему треугольник  $AOB$  — прямоугольный. Проведите другую касательную  $AC$ , где  $C$  — точка касания. Объясните, откуда следует, что  $AB = AC$ . Найдите при помощи теоремы Пифагора длину отрезка  $AB$ . Проверьте полученный результат измерением.

**352.** На каждом из рисунков 330, а)–в) из точки  $A$  проведена касательная к окружности с центром в точке  $O$ . Найдите величину угла, отмеченного знаком вопроса.

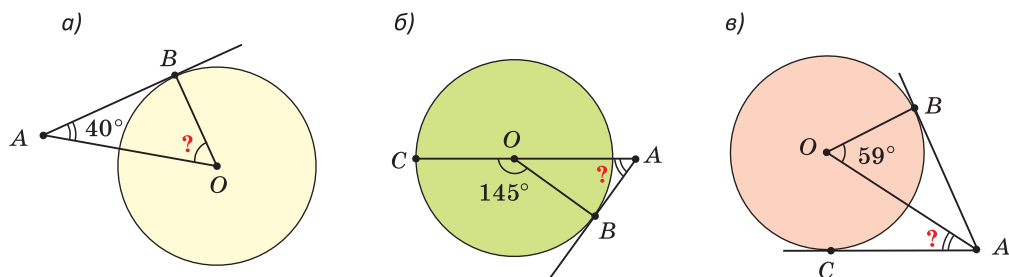


Рис. 330

**353.** На рисунках 331, а)–в) точка  $O$  — центр окружности, прямые  $MA$  и  $MB$  — касательные,  $A$  и  $B$  — точки касания. Найдите:

- а) величину угла  $\alpha$  (рис. 331, а);  
 б) сумму углов  $\alpha + \beta$ , если  $MK = OA = 5$  см (рис. 331, б);  
 в) длину отрезка  $BM$ , если  $OA = 6$  см,  $KM = 4$  см (рис. 331, в).

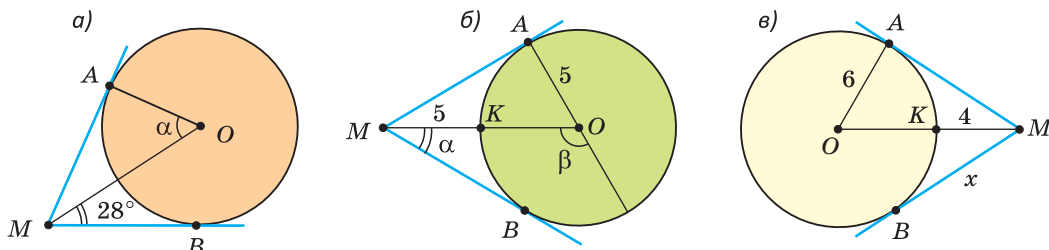


Рис. 331

**354.** На рисунках 332, а), б)  $AB$  — касательная к окружности,  $B$  — точка касания,  $O$  — центр окружности. Найдите:

- а)  $\angle BOC$ , если  $OC = 3\sqrt{3}$  см,  $AB = 3$  см (рис. 332, а);  
 б)  $AC$ , если  $AB = 12$  см,  $OC = 9$  см (рис. 332, б).

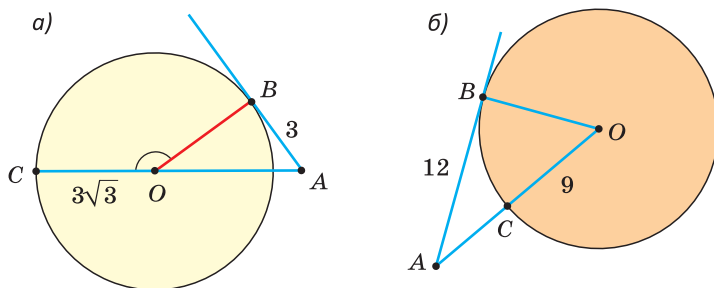


Рис. 332

**355.** К окружности проведены касательная  $AB$  ( $B$  — точка касания) и секущая  $AC$ , проходящая через центр  $O$  окружности,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 4\sqrt{3}$  см. Найдите диаметр окружности (рис. 333).

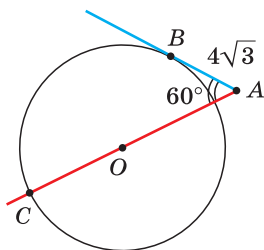


Рис. 333

**356.** Окружность с центром в точке  $O$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle B = 56^\circ$ ,  $\angle C = 74^\circ$  (рис. 334). Найдите  $\angle ALB$ .

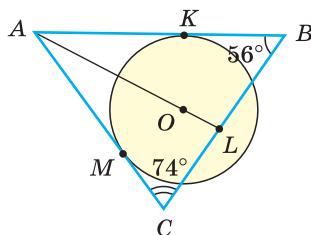


Рис. 334



357. Окружность с центром в точке  $O$  касается стороны  $AB$  треугольника  $AOB$  в точке  $K$  и пересекает сторону  $OB$  в точке  $C$  (рис. 335);  $BC = 2$  см,  $AK = 2$  см,  $KB = 4$  см. Найдите:

а)  $OB$ ;                      б)  $S_{AOB}$ .

358. Окружность с центром в точке  $O$  вписана в угол  $BAC$ ,  $B$  и  $C$  — точки касания. Отрезки  $AO$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ ,  $OK = 2$  см,  $OB = 4$  см. Найдите длину отрезка  $AK$ .

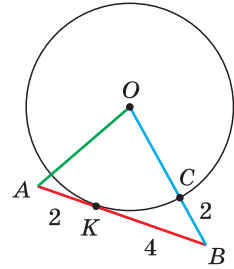


Рис. 335

359. Точка  $M$  лежит вне окружности с центром в точке  $O$ . Точка  $K$  принадлежит окружности. Докажите, что если  $\angle KMO + \angle MOK = 90^\circ$ , то прямая  $MK$  — касательная к окружности.
360. Из точки  $A$  к окружности с центром в точке  $O$  проведены секущая и касательная  $AB$  (где  $B$  — точка касания). Расстояние от центра окружности до секущей равно 6 см, длина отрезка секущей внутри окружности равна 16 см,  $AO = 26$  см. Найдите длину отрезка  $AB$ .
361. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Окружность касается двух меньших сторон треугольника, а ее центр лежит на большей стороне. Найдите длины отрезков, на которые центр окружности делит большую сторону.
362. На координатной плоскости задана окружность с центром в точке  $P(3; 2)$  и радиусом, равным 2. Из точки  $A(-2; 0)$  к окружности проведена касательная, отличная от оси абсцисс, которая касается окружности в точке  $B$ . Найдите площадь треугольника  $APB$ .
363. Постройте при помощи циркуля и линейки окружность заданного радиуса  $m$ , которая касается данной прямой  $l$  в отмеченной на ней точке  $K$ .
364. При помощи циркуля и линейки впишите в данный угол  $A$  окружность данного радиуса  $R$ .
365. Найдите геометрическое место центров окружностей, если все окружности проходят через две данные точки  $A$  и  $B$ .

## § 26. Взаимное расположение окружностей

Если две окружности имеют только одну общую точку, то они называются *касающимися* друг друга в этой точке. А если они имеют две общие точки, то — *пересекающимися*. Прямая, которая проходит через центры двух окружностей, называется *линией центров* этих окружностей.

Справедливо свойство: «**Точка касания двух касающихся окружностей принадлежит линии центров этих окружностей**».

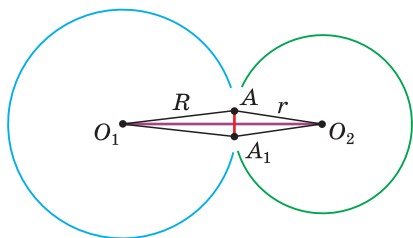


Рис. 336

Действительно, пусть две окружности с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  и радиусами  $R$  и  $r$  касаются в точке  $A$ , которая является их единственной общей точкой.

Предположим, что точка  $A$  не принадлежит прямой  $O_1O_2$  (рис. 336). Построим симметричную ей точку  $A_1$  относительно прямой  $O_1O_2$ . Так как  $O_1O_2$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AA_1$ , то  $O_1A = O_1A_1 = R$ ,  $O_2A = O_2A_1 = r$ . Значит, точка  $A_1$  принадлежит каждой из данных окружностей, то есть является их второй общей точкой. Но по условию общая точка одна. Следовательно, точка  $A$  принадлежит линии центров.

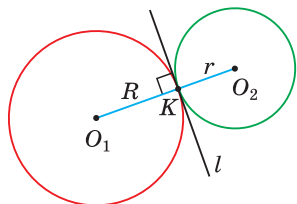


Рис. 337

Две касающиеся окружности имеют *общую касательную*, которая проходит через их общую точку (рис. 337). Пусть  $K$  — точка касания окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , она принадлежит прямой  $O_1O_2$ . Проведем через точку  $K$  прямую  $l \perp O_1O_2$ . По признаку касательной прямая  $l$  является касательной к каждой из окружностей, т. е.  $l$  — общая касательная двух окружностей.

Касающиеся окружности могут располагаться как по разные стороны от их общей касательной (рис. 338, б), так и по одну сторону от нее

(рис. 338, в), так и по одну сторону от нее

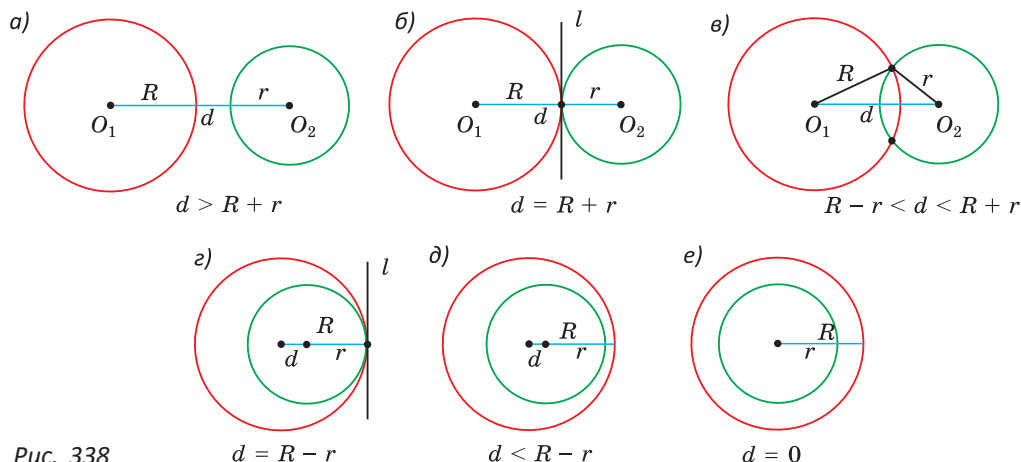


Рис. 338

(рис. 338, з). В первом случае говорят, что они касаются *внешним образом*, во втором — что они касаются *внутренним образом*.

Для двух окружностей с радиусами  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) и расстоянием  $d = O_1O_2$  между их центрами можно выделить шесть случаев их различного взаимного расположения на плоскости (рис. 338, а)—е):

- а) окружности расположены внешним образом и не касаются:  $d > R + r$ ;
- б) окружности касаются внешним образом:  $d = R + r$ ;
- в) окружности пересекаются (в 2 точках):  $R - r < d < R + r$  (неравенство треугольника);
- г) окружности касаются внутренним образом:  $d = R - r$ ;
- д) окружности расположены внутренним образом, не касаются, и их центры не совпадают:  $d < R - r$ ;
- е) окружности расположены внутренним образом, их центры совпадают (*концентрические окружности*):  $d = 0$ .

Из сказанного следует, что из трех отрезков можно построить треугольник, если каждый из них меньше суммы двух оставшихся.

А теперь выполните **Тест 1**.

### Тест 1

Радиусы двух окружностей равны 12 см и 16 см. Расстояние между их центрами равно 24 см. Сколько общих точек имеют эти окружности?																															
а) Одну;								б) две;								в) три;								г) ни одной.							

Если две окружности расположены внешним образом или пересекаются, то можно построить такую общую касательную, что окружности будут лежать по одну сторону от этой касательной. Такая касательная называется *общей внешней касательной* по отношению к данным окружностям. На рисунке 339, а) это касательные  $AB$  и  $A_1B_1$ .

Для окружностей, расположенных внешним образом, можно построить такую общую касательную, что окружности будут лежать по разные стороны от нее. Такая касательная называется *общей внутренней касательной* по отношению к двум данным окружностям. На рисунке 339, б) это касательные  $CD$  и  $C_1D_1$ .

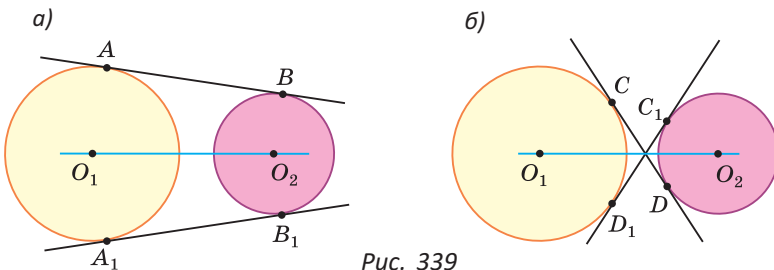


Рис. 339

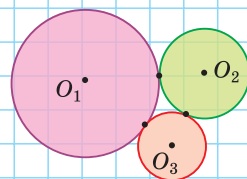
Существуют две внешние и две внутренние касательные к двум указанным окружностям. Эти касательные симметричны относительно линии центров  $O_1O_2$ . Отрезки этих касательных, заключенные между точками касания, равны между собой ( $AB = A_1B_1$ ,  $CD = C_1D_1$ ), а точки пересечения двух внешних касательных (в случае неравных окружностей) и двух внутренних касательных лежат на линии центров.

А теперь выполните **Тест 2**.

### Тест 2

Три окружности с диаметрами 6 см, 8 см и 10 см попарно касаются друг друга. Найдите периметр треугольника  $O_1O_2O_3$ , где  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей.

- а) 48 см;      б) 32 см;      в) 24 см;      г) 16 см.



### Задания к § 26

#### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

#### ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров и делится ею пополам.

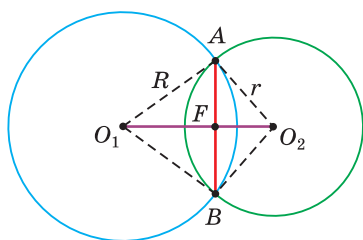


Рис. 340

**Доказательство.** Пусть две окружности с радиусами  $R$  и  $r$  соответственно с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$  (рис. 340). Так как точка  $O_1$  равноудалена от точек  $A$  и  $B$  ( $O_1A = O_1B = R$ ), то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ . Точка  $O_2$  также равноудалена от концов отрезка  $AB$  ( $O_2A = O_2B = r$ ), следовательно, она также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ . Поскольку через две точки проходит единственная прямая, то  $O_1O_2$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ , то есть  $O_1O_2 \perp AB$ ,  $AF = FB$ .

Что и требовалось доказать.

**Задача 2.** Две окружности с радиусами  $R$  и  $r$  касаются внешним образом. Найдите длину отрезка общей внешней касательной этих окружностей, заключенного между точками касания.

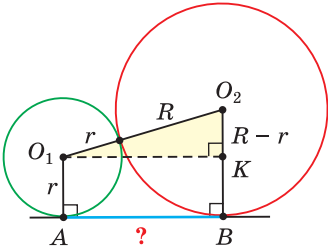


Рис. 341

Решение. Пусть  $AB$  — общая внешняя касательная двух касающихся внешним образом окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 341),  $AB$  — искомый отрезок. Проведем радиусы  $O_1A = r$  и  $O_2B = R$  в точки касания. По свойству касательной  $O_1A \perp AB$ ,  $O_2B \perp AB$ . Из точки  $O_1$  проведем перпендикуляр  $O_1K$  к прямой  $O_2B$ . Четырехугольник  $AO_1KB$  — прямоугольник, так как все его углы прямые. Отсюда  $O_1K = AB$ ,  $BK = AO_1 = r$ .

В прямоугольном треугольнике  $O_1O_2K$   
 $O_2K = O_2B - BK = R - r$ ,  $O_1O_2 = R + r$ .

По теореме Пифагора:

$$O_1K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Значит,  $AB = 2\sqrt{Rr}$ .

Ответ:  $2\sqrt{Rr}$ .

**Задача 3.** В угол вписаны две касающиеся внешним образом окружности. Радиус большей из них равен 6, расстояние от ее центра до вершины угла равно 30. Найти радиус меньшей окружности (рис. 342).

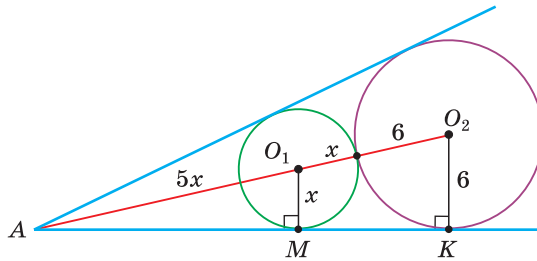


Рис. 342

Решение. Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры данных окружностей, вписанных в угол  $A$ ,  $M$  и  $K$  — точки касания окружностей со стороной угла,  $O_1M$ ,  $O_2K$  — радиусы. Тогда  $O_2K \perp AK$ ,  $O_1M \perp AK$ ,  $O_2K = 6$ ,  $O_1M = x$ ,  $AO_2 = 30$ .

Из подобия прямоугольных треугольников  $AO_1M$  и  $AO_2K$  (по общему острому углу  $O_2AK$ ) следует, что  $\frac{O_1M}{AO_1} = \frac{O_2K}{AO_2} = \frac{6}{30}$ , то есть  $\frac{x}{AO_1} = \frac{1}{5}$ .

Отсюда  $AO_1 = 5x$ ,  $O_1O_2 = x + 6$ ,  $AO_2 = AO_1 + O_1O_2$ ,  $5x + (x + 6) = 30$ ,  $6x = 24$ ,  $x = 4$ .

Искомый радиус  $O_1M = 4$ .

Ответ: 4.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**366.** Даны две окружности с радиусами  $R$  и  $r$  и расстоянием  $d$  между их центрами. Определите, как расположены окружности относительно друг друга, если:

- а)  $R = 12$  см,  $r = 5$  см,  $d = 10$  см;
- б)  $R = 36$  см,  $r = 12$  см,  $d = 48$  см;
- в)  $R = 45$  см,  $r = 15$  см,  $d = 70$  см.

**367.** Две окружности с диаметрами 16 м и 6 м касаются внешним образом. Найдите расстояние между центрами окружностей.

**368.** Две окружности касаются внутренним образом. Расстояние между центрами окружностей равно 224 см. Радиус меньшей окружности равен 56 см. Найдите радиус большей окружности.

**369.** Три окружности с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  и радиусами, равными 2 см, 4 см и 6 см, попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите площадь треугольника  $O_1O_2O_3$ .

**370.** Три равные окружности с центрами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  попарно касаются друг друга. Периметр треугольника  $ABC$  равен 24 см. Найдите радиус этих окружностей.

**371.** Даны две равные пересекающиеся окружности с радиусом 5 м. Длина их общей хорды  $AB$  равна 8 м. Найдите расстояние между центрами окружностей.

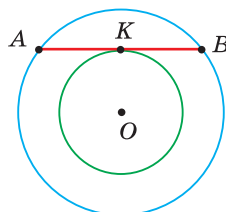


Рис. 343

**372.** Диаметры двух concentрических окружностей равны 6 м и 10 м. Хорда  $AB$  большей окружности касается меньшей окружности (рис. 343). Найдите длину хорды  $AB$ .

**373.** Даны две касающиеся внешним образом окружности (рис. 344). Радиус меньшей окружности равен 4 см. Длина отрезка  $AB$  общей внешней касательной, где  $A$  и  $B$  — точки касания, равна 12 см. Найдите радиус большей окружности.

**374.** Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$  (рис. 345). Прямая  $AB$  — их общая внешняя касательная, где  $A$  и  $B$  — точки касания. Прямая  $KM$  — общая внутренняя касательная этих окружностей. Докажите, что:

- а)  $KM = \frac{1}{2}AB$ ;
- б)  $\angle AKB = 90^\circ$ .

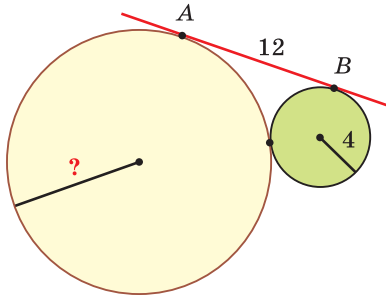


Рис. 344

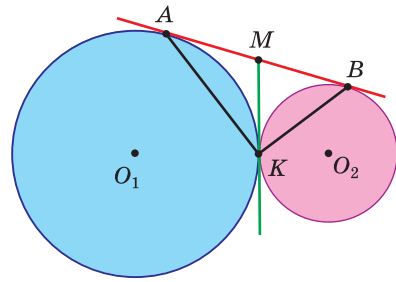


Рис. 345

- 375.** Прямая  $AB$  — общая внешняя касательная двух окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , которые касаются внешним образом (рис. 346),  $A$  и  $B$  — точки касания прямой  $AB$  и окружностей, точка  $F$  — середина отрезка  $AB$ ,  $\angle O_1O_2F = 37^\circ$ . Найдите  $\angle FO_1O_2$ .
- 376.** Даны две окружности с радиусами 9 см и 4 см. Третья окружность касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной  $a$ . Найдите радиус этой окружности. Рассмотрите все варианты.
- 377.** Прямая  $MN$  — общая внутренняя касательная двух окружностей, радиусы которых равны 3 см и 5 см,  $M$  и  $N$  — точки касания (рис. 347). Расстояние между центрами окружностей равно 10 см. Найдите длину отрезка  $MN$ .

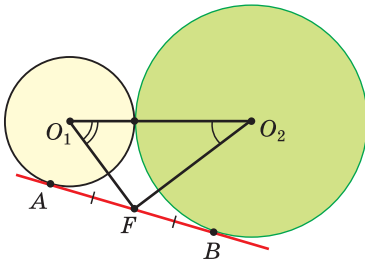


Рис. 346

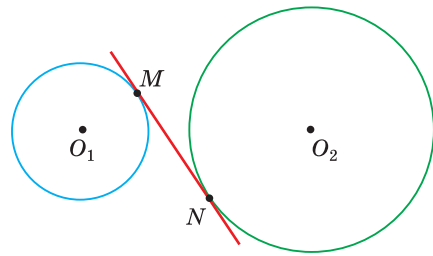


Рис. 347

- 378.** Даны радиусы  $R$  и  $r$  двух окружностей. При помощи циркуля и линейки постройте:
- две окружности с радиусами  $R$  и  $r$ , касающиеся друг друга внешним образом;
  - две окружности с радиусами  $R$  и  $r$ , касающиеся друг друга внутренним образом.
- 379.** Даны две окружности, расположенные внешним образом ( $d > R + r$ ). При помощи циркуля и линейки постройте:
- их общую внешнюю касательную;
  - их общую внутреннюю касательную.

**Гимнастика ума**

Диаметр окружности с центром в точке  $O$  равен 24 см (рис. 348). Окружность с центром в точке  $A$  касается первой окружности внутренним образом. Третья окружность с центром в точке  $B$  касается первой окружности внутренним, а второй — внешним образом. Найдите периметр треугольника  $ABO$ .

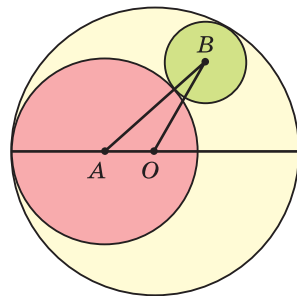


Рис. 348

**ПОДВОДИМ  
ИТОГИ****Знаем**

1. Определение касательной к окружности и секущей.
2. Свойство касательной и признак касательной.
3. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Свойство окружности, вписанной в угол.
5. Все случаи взаимного расположения двух окружностей.

**Умеем**

1. Доказывать признак касательной.
2. Доказывать теорему о свойстве касательной.
3. Доказывать теорему о касательных, проведенных из одной точки к окружности.
4. Строить при помощи циркуля и линейки касательную к данной окружности.

**§ 27. Центральный и вписанный углы**

**Определение.** Центральным углом окружности называется угол, вершина которого находится в центре окружности.

Дуга окружности, заключенная внутри центрального угла, и этот центральный угол называются *соответствующими дуг друг другу*.

**Определение.** Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

На рисунке 349, а) изображен центральный угол  $AOB$ , равный  $80^\circ$ . Ему соответствует дуга  $AB$ , заключенная внутри угла. Поэтому  $\cup AB = 80^\circ$ .



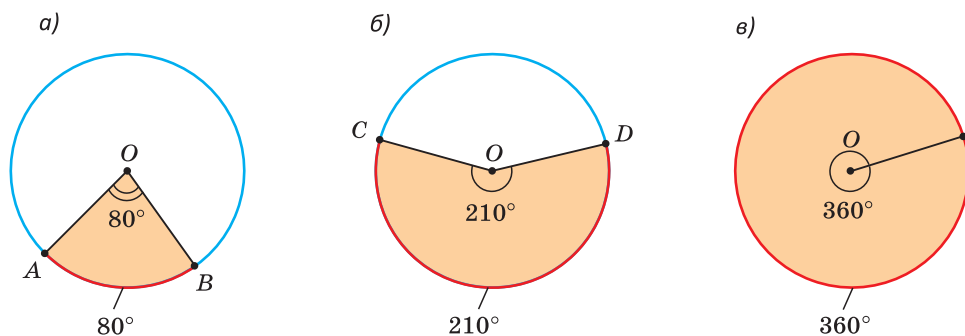


Рис. 349

На рисунке 349, б) центральный угол  $COD$  равен  $210^\circ$ , соответствующая ему дуга  $CD$  также равна  $210^\circ$ . Полному центральному углу (рис. 349, в) соответствует вся окружность. Поэтому окружность содержит  $360^\circ$ . Центральный угол и соответствующая ему дуга могут изменяться от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

На рисунке 350, а) дуги  $AKB$  и  $AMB$  являются *дополнительными* (дополняют друг друга до окружности), поэтому сумма их градусных мер равна  $360^\circ$ . Говорят, что хорда  $AB$  *стягивает* дугу  $AMB$  и дугу  $AKB$ .

На рисунке 350, б) диаметр  $AB$  стягивает полуокружность  $AKB$ , которая равна  $180^\circ$ , так как ей соответствует центральный  $\angle AOB$ , который является развернутым.

Дуги одной окружности или равных окружностей называются *равными*, если равны их градусные меры. Большей считается та дуга, которая имеет большую градусную меру. Если  $\angle AOB = \alpha$  и  $\angle DOC = \alpha$  (рис. 350, в), то  $\cup AB = \cup DC$ .

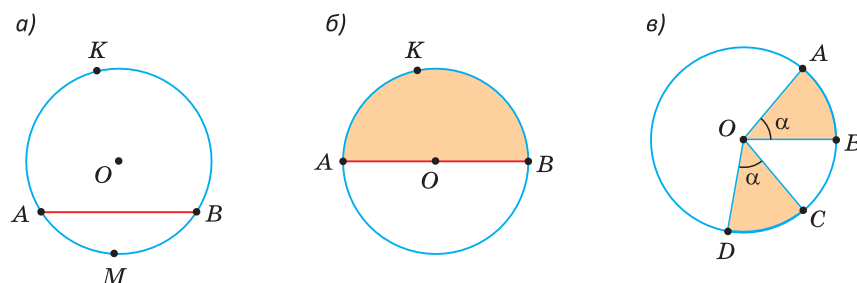


Рис. 350

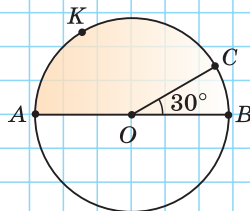
Отметим, что окружность и любая ее дуга характеризуются и длиной, и градусной мерой. Говорят «дуга окружности равна 6 см», также говорят «дуга окружности равна  $30^\circ$ ». Длина дуги прямо пропорциональна ее градусной мере. Дуги одной окружности, имеющие равные градусные меры, равны по длине и наоборот.

А теперь выполните **Тест 1**.

### Тест 1

Если  $AB$  — диаметр,  $O$  — центр окружности, то:

- а)  $\sphericalangle CB = \dots^\circ$   
 б)  $\sphericalangle AKC = \dots^\circ$   
 в)  $\sphericalangle ABC = \dots^\circ$



**Определение.** Вписанным углом называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность.

В определении вписанного угла имеется в виду угол, меньший  $180^\circ$ .

На рисунке 351, а)  $\angle MKN$  — вписанный. Ему соответствует дуга  $MN$ , заключенная внутри этого вписанного угла, и центральный  $\angle MON$ . Говорят, что  $\angle MKN$  и  $\angle MON$  опираются на дугу  $MN$ .

На рисунке 351, б)  $\angle PLE$  — вписанный. Ему соответствует дуга  $PGE$  и содержащий эту дугу центральный угол  $POE$ , который больше  $180^\circ$ .

Любой вписанный угол в 2 раза меньше соответствующего центрального угла и дуги, на которую он опирается. Если  $\angle MKN = 40^\circ$ , то  $\angle MON = \sphericalangle MN = 80^\circ$ , если  $\angle PLE = 120^\circ$ , то  $\angle POE = \sphericalangle PGE = 240^\circ$ .

То есть  $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \sphericalangle AC$  (рис. 351, в). Докажем это утверждение.

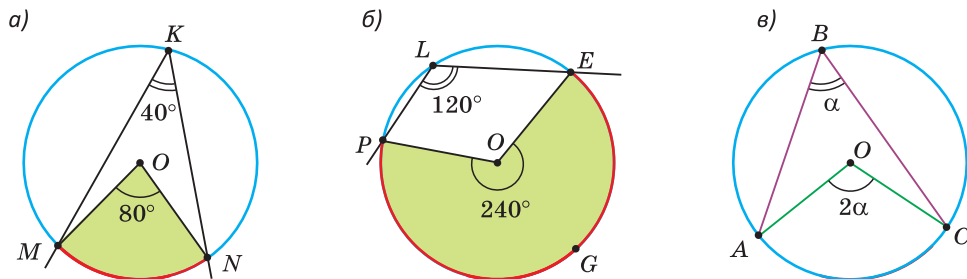


Рис. 351

**Теорема (о вписанном угле).**

Вписанный угол равен половине соответствующего ему центрального угла, а также половине дуги, на которую он опирается.

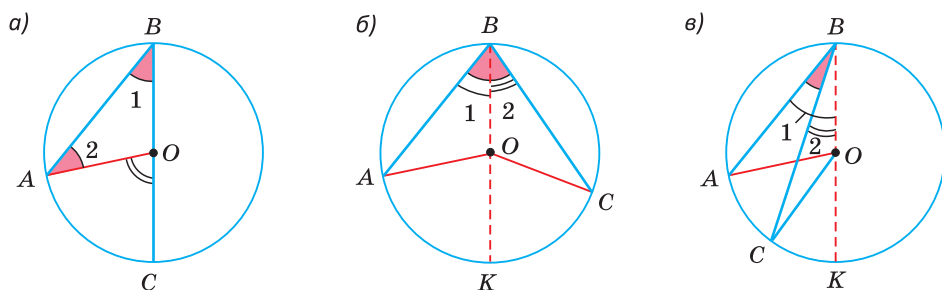


Рис. 352

Доказательство. Рассмотрим три случая.

а) Пусть центр  $O$  окружности лежит на стороне  $BC$  вписанного угла  $ABC$  (рис. 352, а). Тогда  $BC$  — диаметр,  $OA = OB$  как радиусы,  $\triangle AOB$  — равнобедренный,  $\angle 1 = \angle 2$  как углы при его основании;  $\angle AOC$  — внешний для  $\triangle AOB$ . По свойству внешнего угла треугольника  $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle ABC$ , откуда  $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$ .

б) Пусть центр  $O$  окружности лежит внутри вписанного угла  $ABC$  (рис. 352, б). Проведем диаметр  $BK$ . По доказанному в п. а)  $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AK$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup KC$ , тогда  $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC) = \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}\angle AOC$ .

в) Пусть центр  $O$  окружности лежит вне вписанного угла  $ABC$  (рис. 352, в). Проведем диаметр  $BK$ . По доказанному в п. а)  $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AK$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CK$ , тогда  $\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK - \cup CK) = \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}\angle AOC$ .

Теорема доказана.

### Следствия.

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. И обратно, если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр.

На рисунке 353, а)  $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \angle AB_4C$ , поскольку все эти вписанные углы опираются на общую дугу  $AC$ , а, следовательно, их градусные меры равны половине градусной меры дуги  $AC$ .

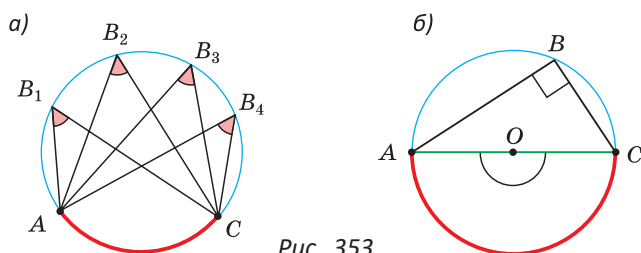


Рис. 353

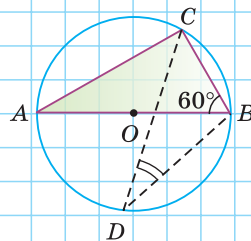
На рисунке 353, б) вписанный угол  $ABC$  опирается на диаметр  $AC$ . Так как соответствующий углу  $ABC$  центральный угол  $AOC$  — развернутый, а соответствующая дуга  $AC$  является полуокружностью, то  $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ .

А теперь выполните **Тест 2**.

### Тест 2

Если  $AB$  — диаметр,  $\angle ABC = 60^\circ$ , то:

- а)  $\angle ACB = \dots$
- б)  $\angle CAB = \dots$
- в)  $\angle CDB = \dots$



### Задания к § 27

#### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** Доказать, что равные хорды одной окружности стягивают равные дуги (речь идет о дугах одновременно меньших (больших) полуокружности).

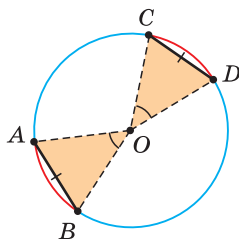


Рис. 354

Доказательство. Пусть хорды  $AB$  и  $CD$  равны (рис. 354). Эти хорды стягивают соответственно дуги  $AB$  и  $CD$ . Так как  $\triangle AOB = \triangle COD$  по трем сторонам ( $OA = OB = OC = OD$  как радиусы одной окружности), то  $\angle AOB = \angle COD$ . Отсюда следует, что  $\cup AB = \cup CD$ . Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

**Задача 2.** Доказать, что дуги, заключенные между параллельными секущими к окружности, равны между собой.

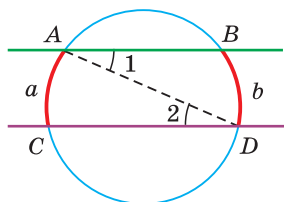


Рис. 355

Доказательство.

Пусть  $AB \parallel CD$  (рис. 355). Проведем хорду  $AD$ . Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых.

Из равенства вписанных углов следует равенство дуг, на которые они опираются, то есть  $\cup AC = \cup BD$ . Что и требовалось доказать.

**Задача 3.** Доказать теорему: «Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри угла».

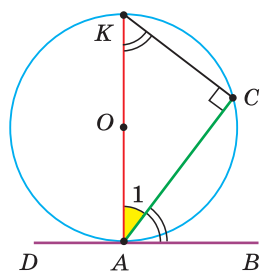


Рис. 356

Доказательство. Пусть  $DB$  — касательная к окружности с центром в точке  $O$ , где  $A$  — точка касания,  $AC$  — хорда. Докажем, что  $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AC$  (рис. 356).

Проведем диаметр  $AK$ . По свойству касательной  $\angle KAB = 90^\circ$  и  $\angle CAB$  дополняет  $\angle 1$  до  $90^\circ$ . С другой стороны,  $\angle C = 90^\circ$  как вписанный угол, опирающийся на диаметр, поэтому  $\angle AKC$  также дополняет  $\angle 1$  до  $90^\circ$ . Поэтому  $\angle CAB = \angle AKC$ . Но  $\angle AKC = \frac{1}{2} \cup AC$ . Откуда  $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AC$ . Что и требовалось доказать.

Случаи, когда угол между хордой и касательной прямой ( $\angle BAK$ ) или тупой ( $\angle CAD$ ), рассмотрите самостоятельно.

*Замечание.* Полезно запомнить свойство: «Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную между касательной и хордой» (рис. 357).

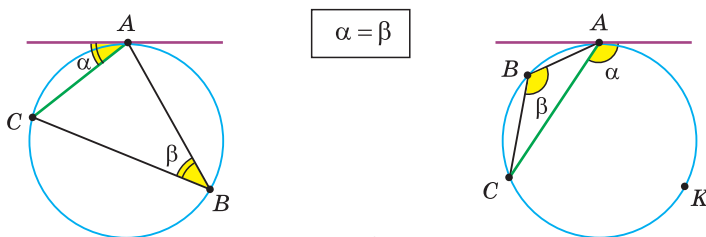


Рис. 357

**Задача 4.** Доказать следующие утверждения: а) диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам (рис. 358, а); б) диаметр, проведенный через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде и делит стягиваемые ею дуги пополам; в) серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности и делит стягиваемые хордой дуги пополам.

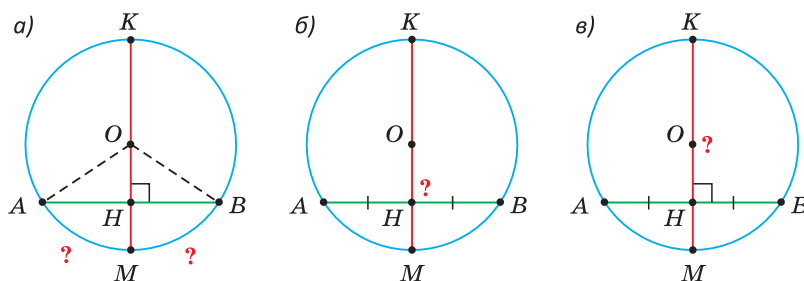


Рис. 358

Доказательство. а)  $\triangle AOB$  — равнобедренный ( $OA = OB$  как радиусы), а его высота  $OH$ , проведенная к основанию  $AB$ , является медианой и биссектрисой (см. рис. 358, а). Поэтому  $AH = HB$ ,  $\angle AOM = \angle BOM$ ,  $\smile AM = \smile BM$ . Утверждения б) и в) докажите самостоятельно (рис. 358, б, в).



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**380.** Нарисуйте окружность, изобразите центральный угол  $AOB$  и вписанный угол  $AKB$ , опирающиеся на ту же дугу, если центральный угол равен:

- а)  $60^\circ$ ;      б)  $90^\circ$ ;      в)  $120^\circ$ ;      г)  $270^\circ$ .

Запишите, сколько градусов содержит в каждом случае вписанный угол и соответствующая дуга.

**381.** По данным на рисунках 359, а)—в) найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса ( $O$  — центр окружности).

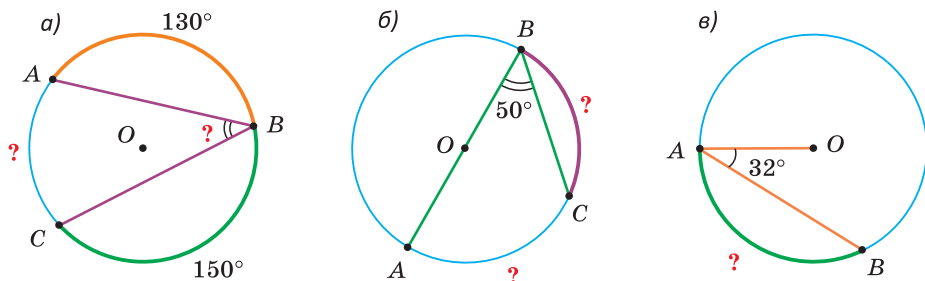


Рис. 359

**382.** Радиус окружности равен 24 см. Найдите длину хорды, которая стягивает дугу, содержащую:

- а)  $60^\circ$ ;      б)  $90^\circ$ ;      в)  $180^\circ$ ;      г)  $300^\circ$ .

**383.** На рисунках 360, а)—в)  $O$  — центр окружности. Найдите угол  $A$ , если:

- а)  $BM \perp KC$ ;      б)  $\triangle BOC$  — равносторонний;      в)  $\angle 1 + \angle 2 = 126^\circ$ .

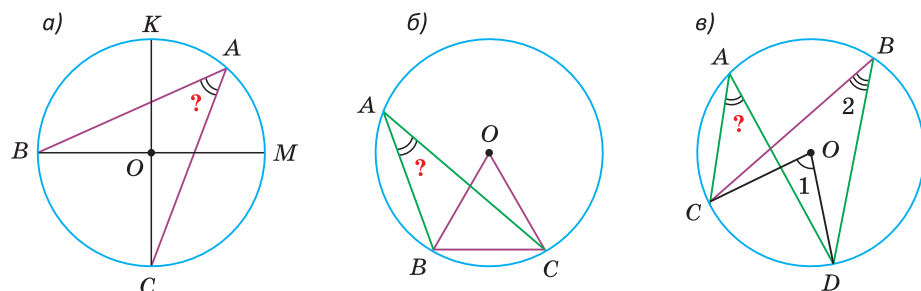


Рис. 360

- 384.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности и являются вершинами равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  и углом при вершине, равным  $78^\circ$ . Найдите градусные меры дуг  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , которые заключены внутри углов треугольника  $ABC$ .
- 385.** а) Вписанный угол  $ABC$  на  $32^\circ$  меньше соответствующего центрального угла  $AOC$ . Найдите центральный угол  $AOC$ .  
 б) Центральный и соответствующий ему вписанный угол вместе составляют  $63^\circ 12'$ . Найдите эти углы.  
 в) Вписанный угол, соответствующий ему центральный угол и дуга, на которую эти углы опираются, вместе составляют  $200^\circ$ . Найдите градусные меры этих углов и дуги.
- 386.** Точка  $O$  — центр окружности (рис. 361),  $\angle B = 110^\circ$ . Найдите  $\angle AOC$ .
- 387.** По данным на рисунке 362 найдите величину угла  $B$ .
- 388.** Окружность вписана в угол  $BAC$ ,  $B$  и  $C$  — точки касания прямых  $AB$  и  $AC$  и окружности (рис. 363). Угол  $BDC$  равен  $40^\circ$ . Найдите величину угла  $A$ .

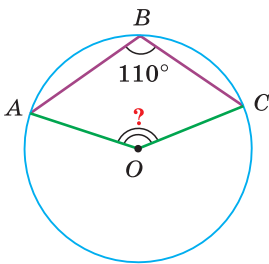


Рис. 361

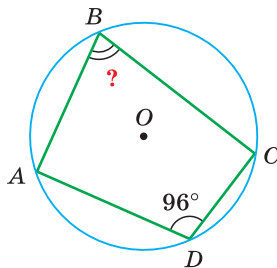


Рис. 362

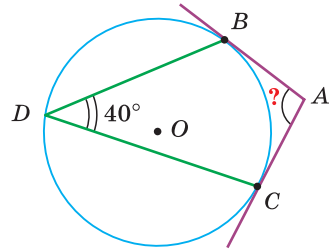


Рис. 363

- 389.** а) В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей эту хорду.  
 б) Хорда окружности равна 24 см, расстояние от центра окружности до прямой, содержащей хорду, равно 5 см. Найдите диаметр окружности.  
 в) В окружности, радиус которой равен 5 см, проведены две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см по разные стороны от центра. Найдите расстояние между хордами.
- 390.** а) Докажите, что дуга окружности, равная  $60^\circ$ , стягивается хордой, равной радиусу окружности.  
 б) Докажите, что вписанный угол, равный  $30^\circ$ , опирается на хорду, равную радиусу окружности.
- 391.** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  и вписанный в нее угол  $ABC$ . Найдите площадь треугольника  $AOC$ , если:  
 а)  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $R = 4$  см;      б)  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $AC = 8\sqrt{2}$  см.

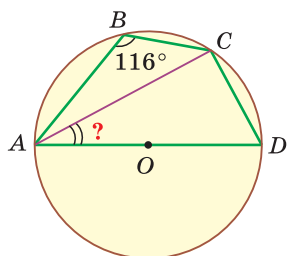


Рис. 364

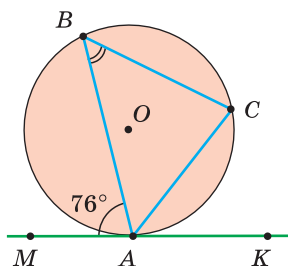


Рис. 365

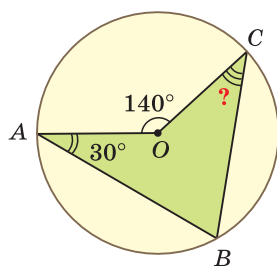


Рис. 366

- 392.** Точка  $O$  является центром окружности (рис. 364),  $\angle ABC = 116^\circ$ . Найдите  $\angle CAD$ .
- 393.** Прямая  $MK$  касается окружности в точке  $A$ ,  $\angle BAM = 76^\circ$ ,  $AC$  — биссектриса угла  $BAK$  (рис. 365). Найдите  $\angle ABC$ .
- 394.** Окружность касается стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  в точке  $K$ , проходит через его вершину  $B$  и пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ ,  $\angle CKN = 40^\circ$ ,  $\angle AKM = 60^\circ$ ,  $\angle A = 50^\circ$ . Найдите  $\angle C$ .
- 395.** а) Докажите, что прямой вписанный угол опирается на диаметр.  
б) На окружности радиусом 9 см отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что  $\angle BAC = 52^\circ$ ,  $\angle ACB = 38^\circ$ . Найдите длину хорды  $AC$ .  
в) Вершины треугольника  $ABC$  принадлежат окружности, радиус которой равен 8,5 см,  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ,  $AC = 8$  см. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- 396.** Хорда  $AC$  окружности равна 6 см и стягивает дугу  $AC$ , равную  $60^\circ$ . Хорда  $AB$  проходит через центр окружности. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
- 397.** Докажите, что окружность, построенная на боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре, проходит через середину основания.

**398.** По данным на рисунке 366 найдите  $\angle BCO$ , где  $O$  — центр окружности.

**399.** В окружности проведены три произвольные хорды  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  (рис. 367). Точки  $K$ ,  $N$  и  $M$  — соответственно середины данных хорд. Докажите, что  $\angle BKN = \angle CMN$ .

**400.** Найдите геометрическое место середин хорд окружности, проведенных из одной точки окружности.

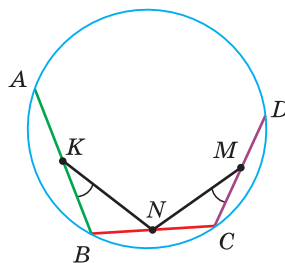


Рис. 367



### Гимнастика ума

На плоскости изображена окружность, ее диаметр  $AB$  и точка  $M$  вне окружности (рис. 368). При помощи односторонней линейки опустите перпендикуляр из точки  $M$  на диаметр. (Односторонняя линейка без делений позволяет проводить только прямые линии.)

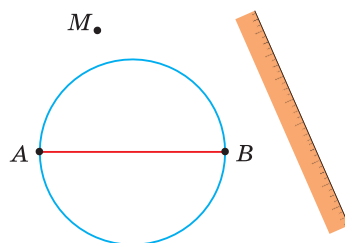


Рис. 368



### ПОДВОДИМ ИТОГИ

#### Знаем

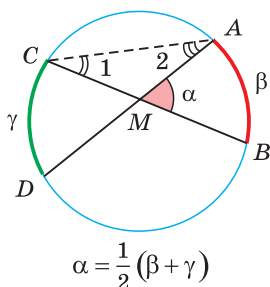
1. Определения вписанного и центрального углов.
2. Как определяется градусная мера дуги окружности и сколько градусов содержит вся окружность.
3. Теорему о вписанном и центральном углах окружности.
4. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу.
5. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.
6. Чему равен угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности.

#### Умеем

1. Доказывать теорему о том, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
2. Доказывать теорему об угле между хордой и касательной.

## § 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными

**Теорема.** Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, заключенных внутри данного угла и угла, вертикального данному, то есть  $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$  (рис. 369).



$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Рис. 369

**Доказательство.** Нужно доказать, что угол  $AMB$  равен полусумме  $\cup AB = \beta$  и  $\cup CD = \gamma$  (см. рис. 369). Проведем хорду  $AC$ . Для  $\triangle AMC$  угол  $AMB$  — внешний, поэтому  $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$ . Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла  $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AB$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CD$ . Тогда  $\angle AMB = \frac{1}{2}\cup AB + \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ .

Теорема доказана.

**Теорема.** Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла, то есть  $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$  (рис. 370).

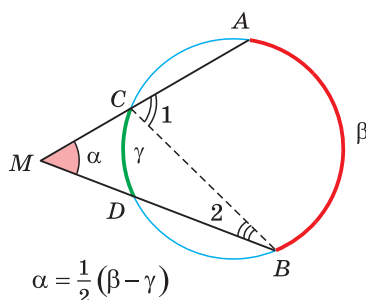


Рис. 370

**Доказательство.** Нужно доказать, что угол  $AMB$  равен полуразности  $\cup AB = \beta$  и  $\cup CD = \gamma$  (см. рис. 370). Проведем хорду  $BC$ . Для  $\triangle MBC$   $\angle 1$  — внешний, поэтому  $\angle 1 = \alpha + \angle 2$ , откуда  $\alpha = \angle 1 - \angle 2$ . Но углы 1 и 2 — вписанные. По свойству вписанного угла  $\angle 1 = \frac{1}{2}\cup AB$ ,  $\angle 2 = \frac{1}{2}\cup CD$ .

Тогда  $\angle AMB = \frac{1}{2}\cup AB - \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ .

Теорема доказана.

**Свойство 1.** Угол между секущей и касательной, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками пересечения и точкой касания.

**Свойство 2.** Угол между двумя касательными, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла и ограниченных точками касания.

На рисунке 371, а) угол  $M$ , равный  $\alpha$ , является углом между касательной и секущей, на рисунке 371, б) — углом между касательными. В обоих случаях  $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ . Докажите указанные свойства самостоятельно.

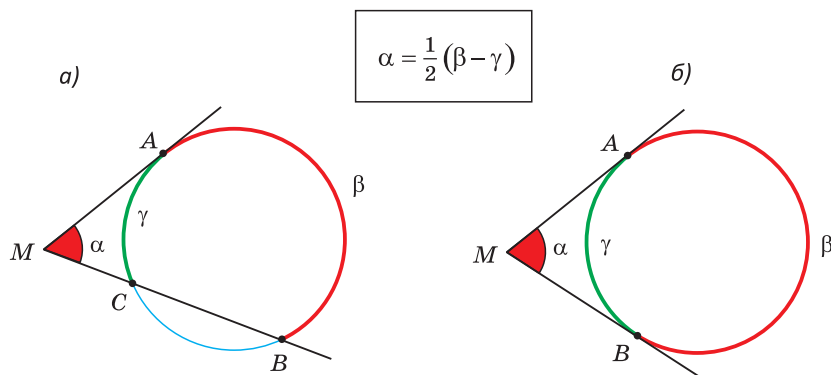
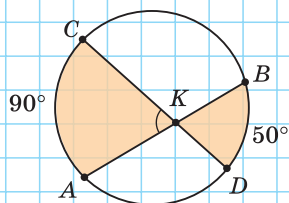


Рис. 371

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

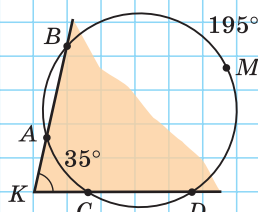
### Тест 1

Если  $\cup AC = 90^\circ$ ,  $\cup BD = 50^\circ$ ,  
то  $\angle AKC = \dots$



### Тест 2

Если  $\cup BMD = 195^\circ$ ,  $\cup AC = 35^\circ$ ,  
то  $\angle BKD = \dots$



## Задания к § 28

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

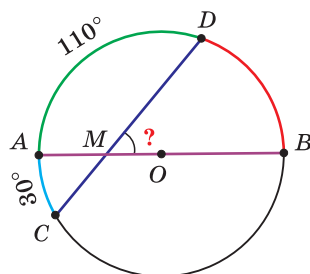


Рис. 372

**Задача 1.** Найти угол  $DMB$  между хордой  $CD$  и диаметром  $AB$ , если известно, что дуга  $AC$  равна  $30^\circ$ , а дуга  $AD$  равна  $110^\circ$  (рис. 372).

Решение. Так как  $AB$  — диаметр, то дуга  $ADB$  равна  $180^\circ$ . Тогда дуга  $DB$  равна  $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .

Искомый угол  $DMB$  равен полусумме дуг  $BD$  и  $AC$ , то есть

$$\angle DMB = \frac{1}{2}(\cup DB + \cup AC) = \frac{1}{2}(70^\circ + 30^\circ) = 50^\circ.$$

Ответ:  $50^\circ$ .

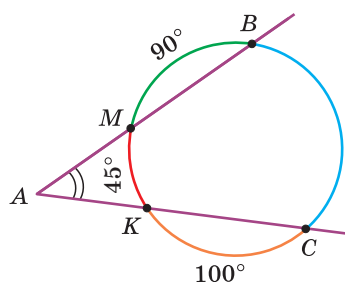


Рис. 373

**Задача 2.** Найти угол  $A$ , если  $\cup KM = 45^\circ$ ,  $\cup MB = 90^\circ$ ,  $\cup KC = 100^\circ$  (рис. 373).

Решение. Вся окружность содержит  $360^\circ$ . Найдем градусную меру дуги  $BC$ .

$$\cup BC = 360^\circ - \cup KC - \cup MK - \cup MB = 360^\circ - 100^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 125^\circ.$$

Искомый угол  $A$  равен полуразности градусных мер дуг  $BC$  и  $MK$ , то есть

$$\angle A = \frac{1}{2}(\cup BC - \cup MK) = \frac{1}{2}(125^\circ - 45^\circ) = 40^\circ.$$

Ответ:  $40^\circ$ .

**Задача 3.** Вершины четырехугольника  $ABCD$  принадлежат окружности, диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $\angle DBC = 26^\circ$ ,  $\angle AMB = 80^\circ$ . Найти угол между прямыми  $AD$  и  $BC$  (рис. 374).

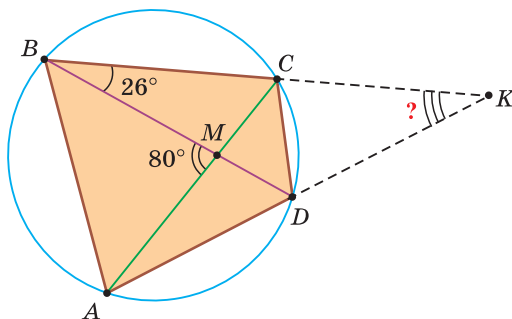


Рис. 374

Решение.

1) Продлим отрезки  $AD$  и  $BC$  до пересечения в точке  $K$ . Вписанный угол  $DBC$  опирается на дугу  $CD$ . Поэтому  $\sphericalangle CD = 2\angle DBC = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$ .

2) Пусть  $\sphericalangle AB = x$ . Так как  $\angle AMB$  — это угол между хордами  $AC$  и  $BD$ , то  $\angle AMB = \frac{1}{2}(\sphericalangle AB + \sphericalangle CD)$ , то есть  $80^\circ = \frac{1}{2}(x + 52^\circ)$ . Откуда  $x = 108^\circ$ ,  $\sphericalangle AB = 108^\circ$ .

3) Так как  $\angle AKB$  — это угол между секущими  $KA$  и  $KB$ , то  $\angle AKB = \frac{1}{2}(\sphericalangle AB - \sphericalangle CD) = \frac{1}{2}(108^\circ - 52^\circ) = 28^\circ$ . Поскольку этот угол острый, то он является углом между прямыми  $AD$  и  $BC$ .

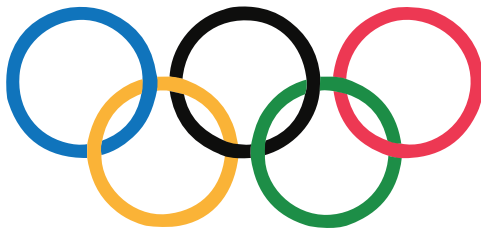
Ответ:  $28^\circ$ .

*Замечание.* Второй способ решения заключается в нахождении углов треугольника  $MBC$ , а затем углов треугольника  $ACK$ .



При помощи **Интернета** выясните историю происхождения эмблемы Олимпийских игр.

Определите, сколько пар пересекающихся колец и сколько пар непересекающихся колец на рисунке.



Выясните, кто из спортсменов Беларуси завоевал больше всех золотых олимпийских медалей.

Вспомните, какие еще эмблемы содержат окружности.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**401.** По данным на рисунках 375, а)–в) найдите градусную меру угла или дуги, которые обозначены знаком вопроса.

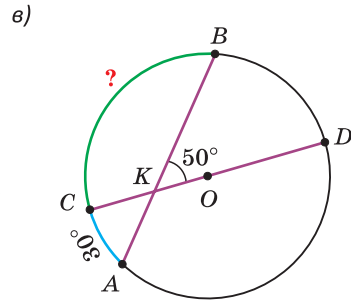
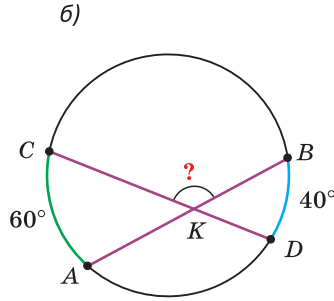
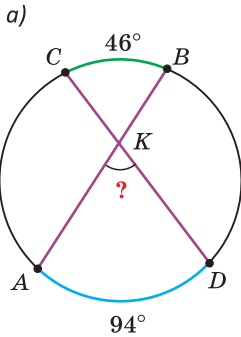


Рис. 375

**402.**  $AB$  и  $AC$  — секущие,  $O$  — центр окружности. Найдите:

а)  $\angle A$  (рис. 376, а);

б)  $\angle A$  (рис. 376, б);

в) градусную меру дуги  $MK$  (рис. 376, в).

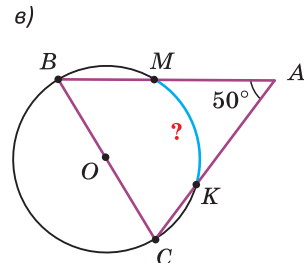
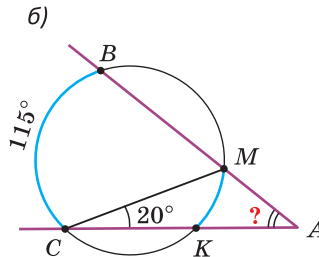
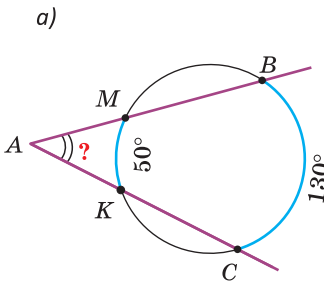


Рис. 376

**403.** Из точки  $M$ , лежащей вне окружности, к этой окружности проведены касательные  $MA$  и  $MB$ . Точки касания  $A$  и  $B$  делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как  $3 : 7$ . Найдите  $\angle AMB$ .

**404.** Прямая  $AK$  — касательная к окружности,  $K$  — точка касания (рис. 377). Дуга  $CB$  равна  $130^\circ$ , дуга  $CK$  равна  $75^\circ$ . Найдите  $\angle A$ .

**405.** Хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ ,  $\angle BKD = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle BD$  на  $20^\circ$  больше  $\sphericalangle AC$ . Найдите  $\sphericalangle AC$ .

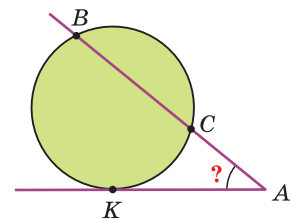


Рис. 377

**406.** Вершины четырехугольника  $ABCD$  лежат на окружности, диагонали пересекаются в точке  $M$ ,  $\angle BAC = 36^\circ$ ,  $\angle CAD + \angle ADC = 138^\circ$ . Найдите  $\angle BMC$ .

**407.** По данным на рисунке 378 найдите  $\alpha - \beta$ .

**408.** Если  $\alpha + \beta + \gamma = 130^\circ$  (рис. 379), то чему равна величина угла  $\beta$ ?

**409.** Известно, что  $\sphericalangle AD = 120^\circ$ ,  $\angle BAC = 32^\circ$  (рис. 380). Найдите угол между прямыми:

- а)  $AC$  и  $BD$ ;                      б)  $AB$  и  $DC$ .

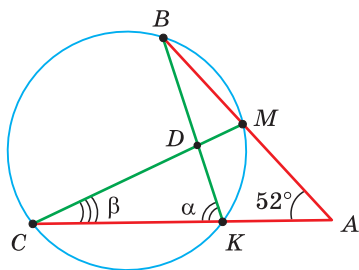


Рис. 378

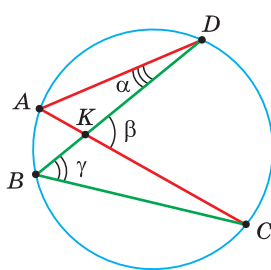


Рис. 379

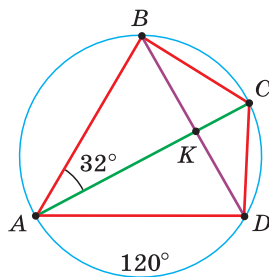


Рис. 380

**410.**  $AB$  — диаметр окружности. Докажите, что:

- а)  $\angle AMB$  — тупой (рис. 381, а);  
б)  $\angle AMB$  — острый (рис. 381, б).

а)

б)

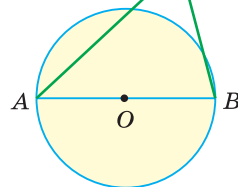
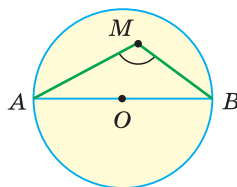


Рис. 381

**411.** На рисунке 382 точка  $O$  — центр окружности,  $\angle BAC = 20^\circ$ ,  $AD = OC$ . Найдите  $\angle C$ .

**412.** Из точки  $A$  проведены касательная  $AB$ , где  $B$  — точка касания, и секущая  $AC$ , проходящая через центр  $O$  данной окружности (рис. 383). Луч  $AN$  — биссектриса угла  $BAC$ . Докажите, что:

- а)  $\sphericalangle MK + \sphericalangle BN = \sphericalangle KB + \sphericalangle NC$ ;                      б)  $\angle ADB = 45^\circ$ .

**413.** Найдите геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки.

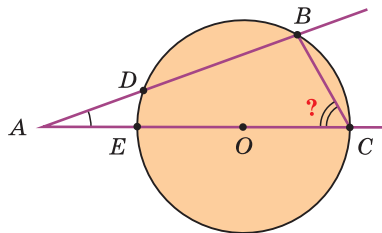


Рис. 382

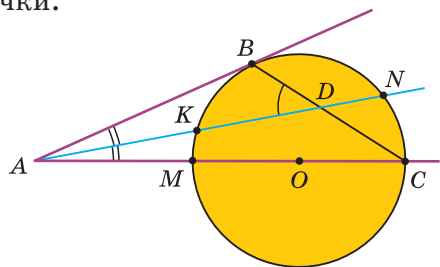


Рис. 383

## § 29. Свойство отрезков хорд и касательных

**Теорема (о пересекающихся хордах).**

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой, то есть  $ab = cd$  (рис. 384).

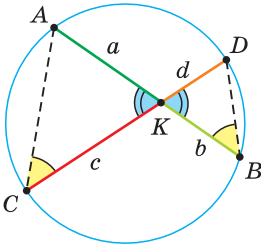


Рис. 384

**Доказательство.** Пусть хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $K$ ,  $AK = a$ ,  $KB = b$ ,  $CK = c$ ,  $KD = d$ . Нужно доказать, что  $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ , или  $ab = cd$  (см. рис. 384). Проведем хорды  $AC$  и  $BD$ . Так как  $\angle AKC = \angle BKD$  как вертикальные, а  $\angle ACD = \angle DBA$  как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $AD$ , то  $\triangle AKC \sim \triangle DKB$  по двум углам. Из подобия треугольников следует, что  $\frac{AK}{CK} = \frac{DK}{BK}$ , или  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ , откуда  $ab = cd$ .

Теорема доказана.

**Теорема (о касательной и секущей).**

Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки ее пересечения с окружностью, то есть  $a^2 = bc$  (рис. 385).

Иногда эту теорему формулируют так: «Квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть», имея в виду указанные отрезки.

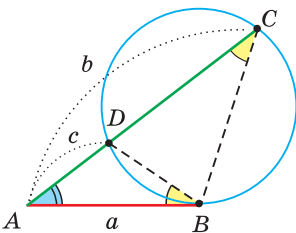


Рис. 385

**Доказательство.** Пусть  $AB$  — касательная, где  $B$  — точка касания и  $AB = a$ ,  $AC$  — секущая,  $AC = b$  — отрезок секущей,  $AD = c$  — его внешняя часть (см. рис. 385). Нужно доказать, что  $AB^2 = AC \cdot AD$ , или  $a^2 = bc$ . Проведем хорду  $BD$ . У треугольников  $ABD$  и  $ACB$   $\angle A$  — общий,  $\angle ABD = \angle ACB = \frac{1}{2} \cup BD$ . Тогда  $\triangle ABC \sim \triangle ADB$  по двум углам. Из подобия треугольников следует, что  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ , или  $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$ , откуда  $a^2 = bc$ .

Теорема доказана.

**Следствие.**

Если из точки, взятой вне окружности, к окружности проведено несколько секущих, то произведения больших отрезков секущих на их внешние части равны между собой:  $AC \cdot AD = AC_1 \cdot AD_1$  (рис. 386).

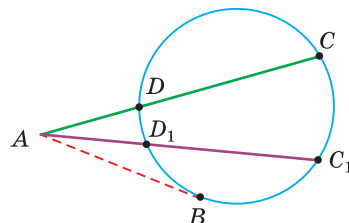


Рис. 386

Докажите это следствие самостоятельно, используя рисунок и теорему о касательной и секущей.

**Задания к § 29****РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**  
ключевые задачи

**Задача 1.** Хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AB = 15$  см,  $CM = 9$  см,  $MD = 4$  см. Найти  $AM : MB$ , если  $AM < MB$  (рис. 387).

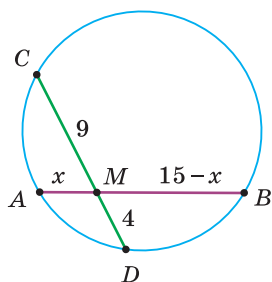


Рис. 387

Решение. Пусть  $AM = x$  см, тогда  $MB = (15 - x)$  см. По теореме о пересекающихся хордах  $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ , то есть  $x(15 - x) = 9 \cdot 4$ .

Решим полученное уравнение:

$$15x - x^2 = 36, x^2 - 15x + 36 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 12$ .

Если  $AM = 3$  см, то  $MB = AB - AM = 12$  см. Так как  $3 < 12$ , то  $AM : MB = 3 : 12 = 1 : 4$ .

Ответ:  $1 : 4$ .

**Задача 2.** Точка  $K$  делит хорду  $AB$  на отрезки  $AK = 7$ ,  $KB = 8$ . Расстояние от центра  $O$  окружности до точки  $K$  равно 5 (рис. 388). Найти радиус окружности.

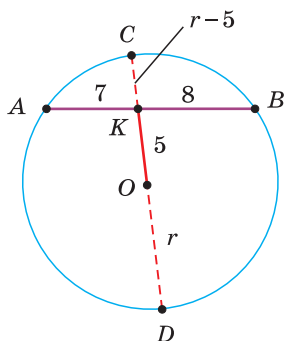


Рис. 388

Решение. Проведем диаметр  $CD$ , содержащий отрезок  $OK$ . Обозначим радиус окружности  $r$ .

Тогда  $KD = OD + OK = r + 5$ ,  $CK = OC - OK = r - 5$ .

По теореме о пересекающихся хордах  $CK \cdot KD = AK \cdot KB$ , то есть  $(r - 5)(r + 5) = 7 \cdot 8$ ,  $r^2 - 25 = 56$ ,  $r^2 = 81$ ,  $r = \pm 9$ .

По смыслу задачи  $r > 0$ .

Поэтому  $r = 9$ .

Ответ: 9.



**Задача 3.** Из точки  $A$  к окружности проведены две секущие  $AB$  и  $AC$  (рис. 389). Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $KB = 14$  см,  $AM = 8$  см,  $MC = 7$  см.

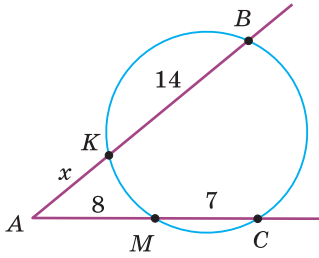


Рис. 389

**Решение.** Воспользуемся свойством секущих к окружности, проведенных из одной точки (следствием из теоремы о касательной и секущей). Получим  $AB \cdot AK = AC \cdot AM$ . Обозначим  $AK = x$  см. Тогда  $(x + 14) \cdot x = (8 + 7) \cdot 8$ ,  $x^2 + 14x - 120 = 0$ ,  $x_1 = -20$ ,  $x_2 = 6$ . Так как по смыслу задачи  $x > 0$ , то  $x = 6$ . Итак,  $AK = 6$  см,  $AB = 20$  см.  
**Ответ:** 20 см.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**414.** На рисунке 390  $CM = 8$  см,  $MD = 6$  см,  $MB = 12$  см. Найдите длину отрезка  $AM$ .

**415.** На рисунке 391  $AM = MB$ ,  $CM = 4$  см,  $MD = 9$  см. Найдите длину отрезка  $AB$ .

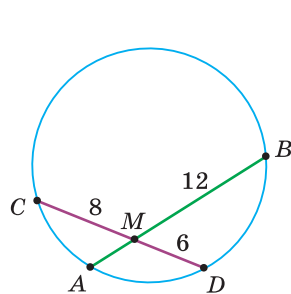


Рис. 390

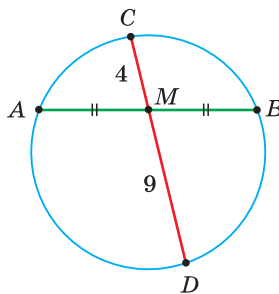


Рис. 391

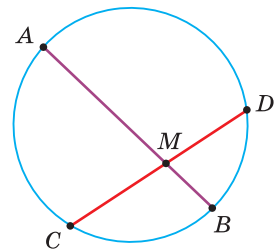


Рис. 392

**416.** На рисунке 392  $AM = 20$  см,  $CM = 2MB$ , отрезок  $MD$  на 2 см меньше отрезка  $CM$ . Найдите длину отрезка  $CD$ .

**417.** Точка  $O$  — центр окружности,  $KB = 7$  см,  $AK = 12$  см,  $CD = 20$  см (рис. 393). Найдите длину отрезка  $KD$ .

**418.**  $AB$  — диаметр окружности (рис. 394, с. 192),  $AB \perp CD$ ,  $KB = 4$  см,  $KD = 6$  см. Найдите радиус окружности.

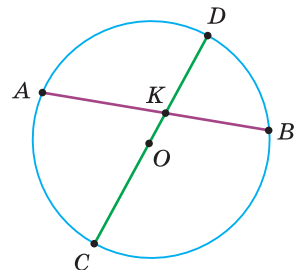


Рис. 393

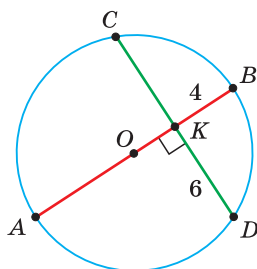


Рис. 394

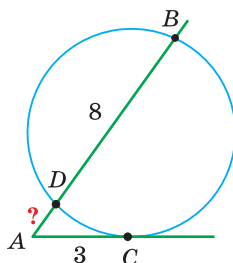


Рис. 395

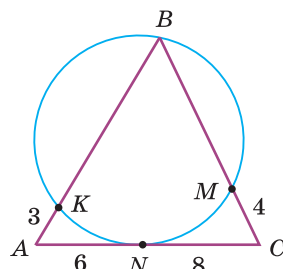


Рис. 396

**419.** Из точки  $M$  к окружности проведены касательная  $MA$ , где  $A$  — точка касания, и секущая, которая пересекает окружность в точках  $C$  и  $D$ . Точка  $D$  лежит на отрезке  $MC$ ,  $MD = 4$  см,  $DC = 12$  см. Найдите длину отрезка  $AM$ .

**420.** На рисунке 395  $AC$  — касательная,  $C$  — точка касания,  $AC = 3$  см,  $AB$  — секущая,  $BD = 8$  см. Найдите длину отрезка  $AD$ .

**421.** На рисунке 396 окружность касается стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  в точке  $N$  и проходит через его вершину  $B$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AK = 3$  см,  $AN = 6$  см,  $NC = 8$  см,  $CM = 4$  см.

**422.** На рисунке 397  $AC$  — касательная к малой окружности,  $C$  — точка касания,  $AD = 2$  см,  $DB = 16$  см. Найдите длину отрезка  $AC$ .

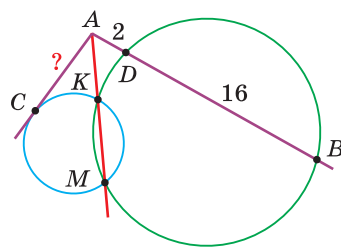


Рис. 397



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Чему равна величина угла между пересекающимися хордами.
2. Чему равна величина угла между секущими, проходящими через одну точку, взятую вне окружности.
3. Свойство отрезков пересекающихся хорд.
4. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных из одной точки, взятой вне окружности.

### Умеем

1. Доказывать теорему об угле между пересекающимися хордами.
2. Доказывать теорему об угле между секущими к окружности.
3. Доказывать теорему об отрезках пересекающихся хорд окружности.
4. Доказывать теорему о касательной и секущей.

### Об одном геометрическом месте точек

**Задача.** Построить дугу окружности, из каждой точки которой данный отрезок  $a$  виден под данным углом  $\alpha$  (рис. 398).

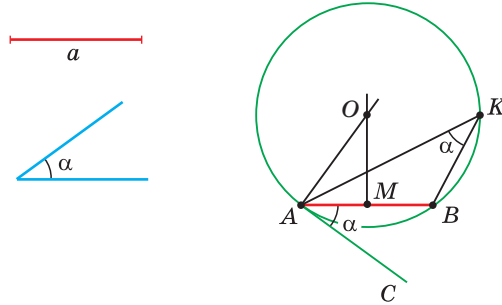


Рис. 398

**Анализ.** Центр искомой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде  $a$ . Серединный перпендикуляр к хорде мы построить можем. Угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Касательную под углом  $\alpha$  к хорде  $a$  мы построить можем. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Восстановить перпендикуляр к касательной в точке касания мы можем. Пересечение этого перпендикуляра и серединного перпендикуляра к данному отрезку даст центр искомой окружности.

**Построение.** Строим серединный перпендикуляр  $MO$  к отрезку  $AB = a$ . Откладываем  $\angle BAC = \alpha$ . Из точки  $A$  восстанавливаем перпендикуляр к прямой  $AC$ . Точка  $O$  — центр окружности, дуга  $AKB$  — искомая.

**Доказательство.**  $OA \perp AC$ , следовательно,  $AC$  — касательная к окружности с радиусом  $OA$ ;  $\angle BAC = \alpha = \frac{1}{2} \angle AOB$  как угол между касательной и хордой;  $\angle AKB = \frac{1}{2} \angle AOB$  как вписанный угол, опирающийся на дугу  $AB$ . Тогда  $\angle AKB = \alpha$ , где  $K$  — произвольная точка дуги  $AKB$ .

Из решенной задачи следует, что геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок виден под углом  $\alpha$ , является объединение двух дуг окружностей: дуги  $AKB$  и ей симметричной относительно прямой  $AB$ , за исключением концов этих дуг, то есть точек  $A$  и  $B$ .

Данное свойство позволяет построить при помощи циркуля и линейки треугольник по стороне, противолежащему углу и какому-либо еще элементу треугольника (рис. 399).

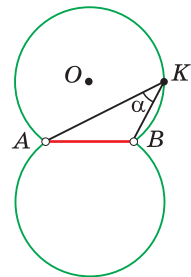


Рис. 399

### Упражнения

1. Построить треугольник по основанию  $a$ , углу при вершине  $\alpha$  и высоте  $h$ , опущенной на это основание.
2. Построить треугольник по основанию  $a$ , углу при вершине  $\alpha$  и медиане, проведенной к стороне  $a$ .

### Геометрия 3D

Из курса геометрии 7-го класса мы знаем, что если вращать круг или полуокруг вокруг его диаметра, то получится **шар** (рис. 400). Поверхность шара называется **сферой**.

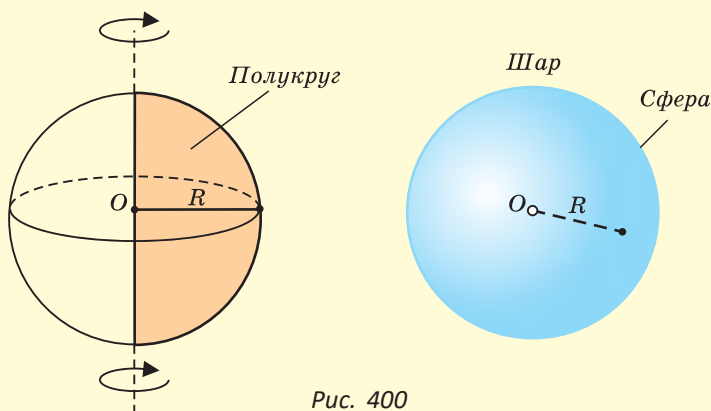


Рис. 400

Если вращать прямоугольник около одной из его сторон, то получится **цилиндр** (рис. 401). Это геометрическое тело имеет поверхность и объем.

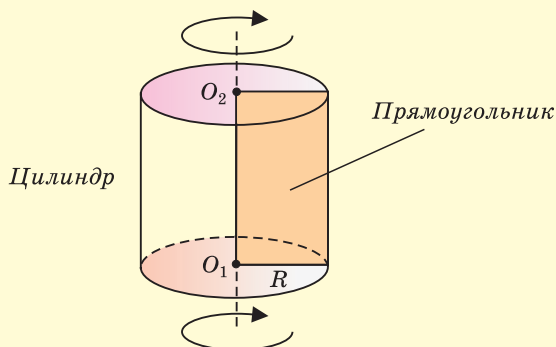


Рис. 401

Поверхность цилиндра состоит из двух кругов и боковой поверхности (рис. 402). Круги называются **основаниями** цилиндра, их радиус  $R$  равен одной из сторон прямоугольника вращения. Если боковую поверхность цилиндра развернуть на плоскость, то получится прямоугольник. Одна из его сторон равна высоте цилиндра, а другая — длине окружности основания, то есть  $2\pi R$ .

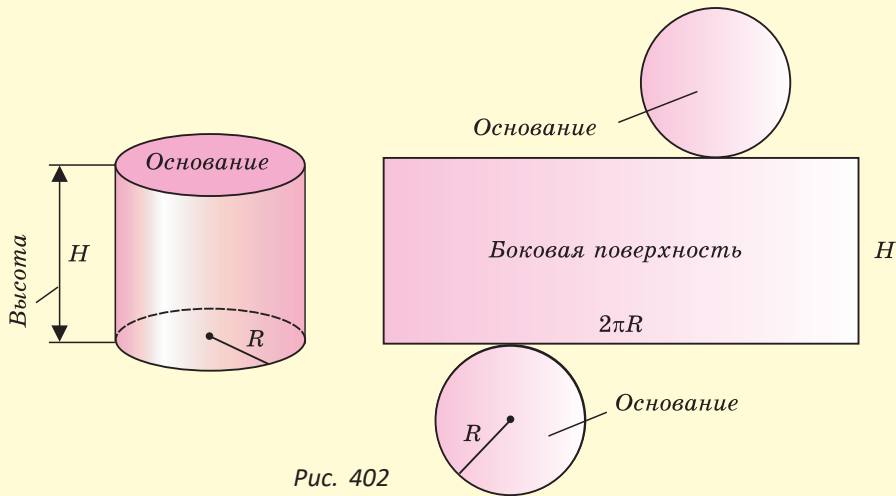


Рис. 402

Высота  $H$  цилиндра равна второй стороне прямоугольника вращения.

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из катетов, то получится **конус** (рис. 403). Как шар и цилиндр, конус — это геометрическое тело, которое имеет поверхность и обладает объемом.

Поверхность конуса состоит из одного круга, который называется основанием конуса, и боковой поверхности. Радиус  $R$  основания равен одному из катетов треугольника вращения. Другой катет является высотой конуса. Высота  $H$  конуса выходит из вершины и перпендикулярна основанию конуса. Если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость, то она будет представлять собой сектор круга (рис. 404).

Рассмотренные нами тела: шар, цилиндр и конус — называют **телами вращения**. В жизни эти тела встречаются довольно часто. Приведите примеры.

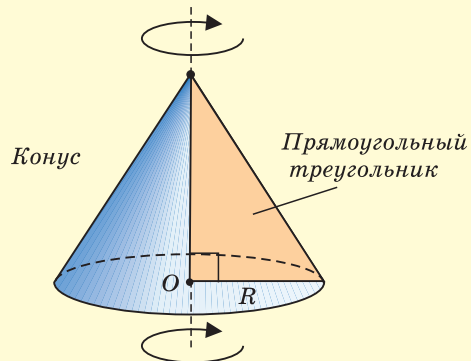


Рис. 403

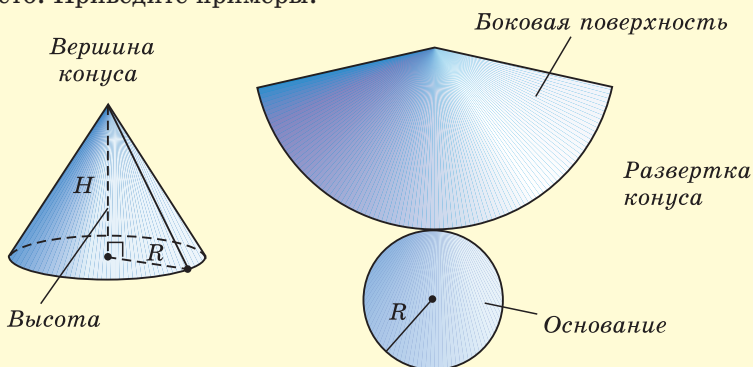


Рис. 404

## Моделирование

### Задание 1

а) Возьмите прямоугольную полоску бумаги размером  $10 \times 20$  см и сверните ее в цилиндр. Скрепите края бумаги скотчем. Определите примерный радиус основания этого цилиндра. Вырежьте два круга найденного радиуса и закрепите их в местах оснований цилиндра.

б) Найдите приближенную площадь полной поверхности цилиндра. Используйте формулу площади круга  $S = \pi R^2$  и значение  $\pi \approx 3,14$ .

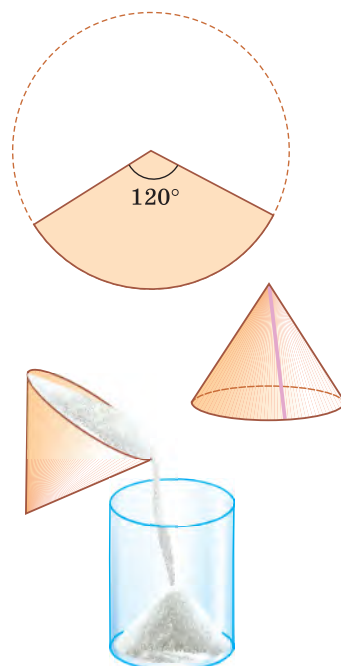
### Задание 2

а) На бумаге изобразите круг радиусом 10 см. Вырежьте из круга сектор с центральным углом в  $120^\circ$ . Сверните этот сектор в конус. Скрепите края бумаги скотчем. Определите примерный радиус  $R$  основания этого конуса и его высоту  $H$ .

б) Найдите объем конуса, используя формулу

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H.$$

Переверните конус вершиной вниз и насыпьте доверху в полученную воронку сахар. Пересыпьте сахар в цилиндрический стакан с делениями. Определите по делениям объем сахара, учитывая, что  $1 \text{ мл} = 1 \text{ см}^3$ . Сравните объем конуса, полученный двумя разными способами.



**Интересно знать.** Форму конуса имеет Мемориальный комплекс «Курган Славы» — памятник Великой Отечественной войны, расположенный в Смолевичском районе (Минская область). Он сооружен в память о героизме советских солдат и офицеров, разгромивших фашистскую армию группы «Центр» в ходе операции «Багратион». В основание кургана заложена земля из городов-героев СССР. На вершине кургана возвышается скульптурная композиция из четырех штыков, символизирующих четыре фронта, освобождавших Беларусь.



### Задание 3

Высота кургана равна 35 м, длина спуска по прямой — 67,3 м. Определите диаметр основания кургана.

## ЗАПОМИНАЕМ

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла.
3. Вписанный угол равен  $\frac{1}{2}$  соответствующего центрального угла или  $\frac{1}{2}$  дуги, на которую он опирается.
4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме градусных мер дуг, заключенных внутри данного угла и внутри угла, ему вертикального.
5. Угол между секущими, проходящими через одну точку вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла.
6. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.
7. Если через одну точку к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

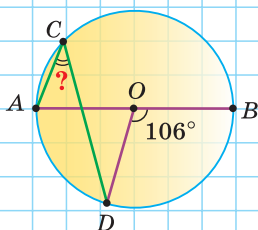


## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

## Тест 1

$O$  — центр окружности. Найдите  $\angle ACD$ .

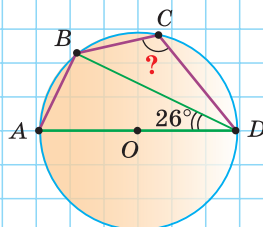
а)  $54^\circ$ ; б)  $74^\circ$ ; в)  $32^\circ$ ; г)  $48^\circ$ .



## Тест 2

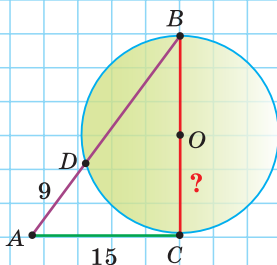
$AD$  — диаметр окружности. Найдите  $\angle C$ .

а)  $126^\circ$ ; б)  $136^\circ$ ; в)  $116^\circ$ ; г)  $154^\circ$ .



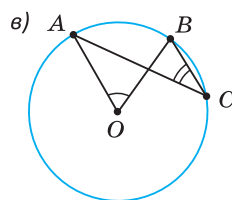
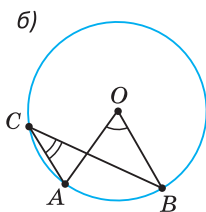
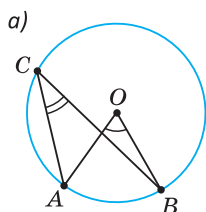
## Тест 3

$AC$  — касательная. Найдите радиус  $OC$ .

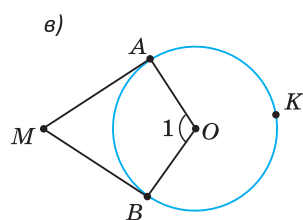
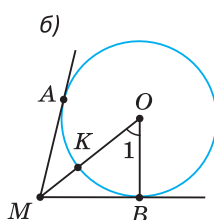
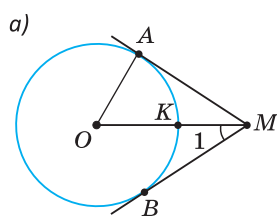


## ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

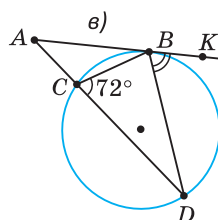
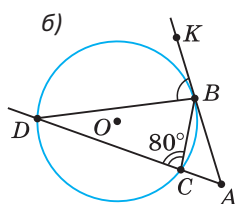
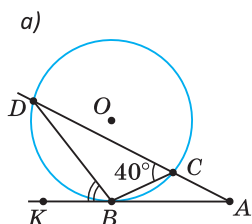
1. Найдите  $\angle C + \angle O$ , если: а)  $\sphericalangle AB = 60^\circ$ ; б)  $\sphericalangle AB = 62^\circ$ ; в)  $\sphericalangle AB = 58^\circ$ .



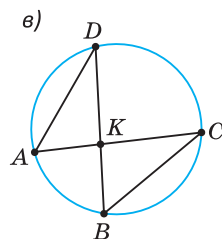
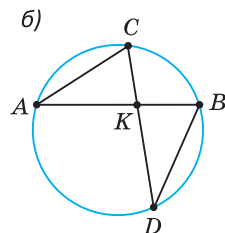
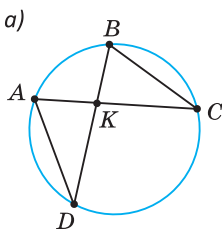
2. Найдите  $\angle 1$ , если: а)  $\sphericalangle AK = 60^\circ$ ; б)  $\sphericalangle AK = 56^\circ$ ; в)  $\sphericalangle AKB = 260^\circ$ .



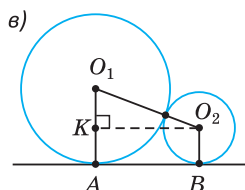
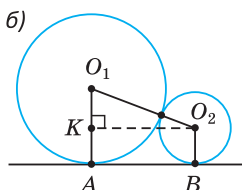
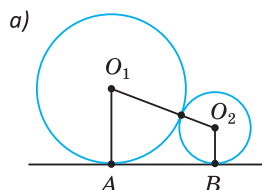
3. Найдите  $\angle KBD$ , где  $B$  — точка касания.



4. Заполните пропуск. а)  $\frac{AK}{BK} = \frac{DK}{BK}$ ; б)  $\frac{CK}{BK} = \frac{AK}{BK}$ ; в)  $DK \cdot KB = AK \cdot \dots$ .



5.  $R = 36$ ,  $r = 25$ . Найдите: а)  $O_1O_2$ ; б)  $O_1K$ ; в)  $S_{AO_1O_2B}$ .

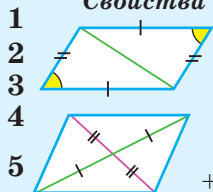




Сумма углов многоугольника  $180^\circ(n - 2)$

## Параллелограмм

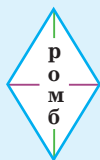
**Свойства**



прямоугольник



+1. диагонали равны

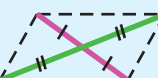
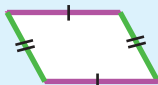
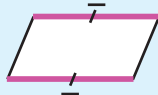


+2. диагонали:  
 $\perp$  и бис.

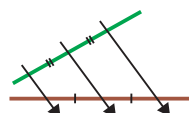


квадрат

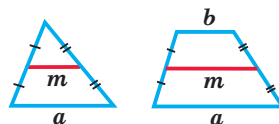
**Признаки**



## Теорема Фалеса



**СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ**

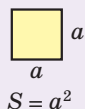
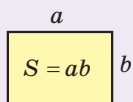


$$m = \frac{a}{2}$$

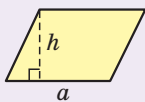
$$m = \frac{a+b}{2}$$

**МЕДИАНЫ 2 : 1**

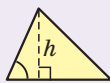
## Площади



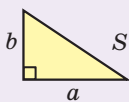
$$S = a^2$$



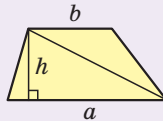
$$S = ah$$



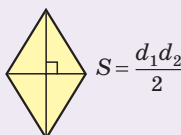
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$$



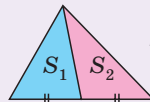
$$S = \frac{ab}{2}$$



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$



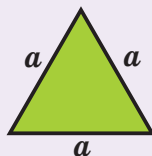
$$S_1 = S_2$$

**Медиана на два равновеликих**

## Пифагор

$$c^2 = a^2 + b^2$$

обратная



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

**Площади подобных треугольников**

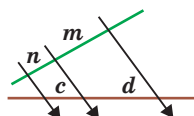
$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = k^2$$

## Подобие

I признак

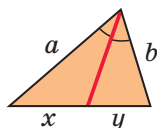
II признак

III признак



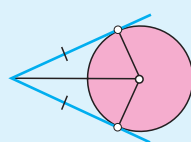
$$\frac{n}{m} = \frac{c}{d}$$

**Свойство биссектрисы угла треугольника**

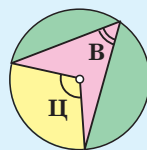


$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

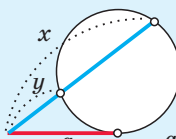
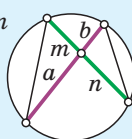
**Касательная**



$$B = \frac{1}{2} \Pi$$



$$ab = mn$$



$$a^2 = xy$$

## База знаний по геометрии. 8-й класс

### Знать и уметь доказывать

1. Сумма внутренних углов многоугольника равна  $180^\circ(n - 2)$ .
2. Свойства параллелограмма:
  - 1) сумма соседних углов равна  $180^\circ$ ;
  - 2) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;
  - 3)—4) у параллелограмма противоположные стороны равны, противоположные углы равны;
  - 5) диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
3. Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если у него:
  - 1) две стороны равны и параллельны;
  - 2) противоположные стороны попарно равны;
  - 3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.
4. Диагонали прямоугольника равны.
5. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.
6. Теорема Фалеса: «Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то на другой стороне угла отложатся равные между собой отрезки».
7. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины.
8. Средняя линия  $m$  треугольника параллельна основанию и равна его половине, то есть если  $M$  и  $K$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ , то  $MK \parallel AC$  и  $MK = \frac{1}{2}AC$ .
9. Средняя линия  $m$  трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме, то есть  $m \parallel a$ ,  $m \parallel b$  и  $m = \frac{a+b}{2}$ , где  $a$  и  $b$  — основания трапеции.
10. Площади: квадрата —  $S = a^2$ ; прямоугольника —  $S = ab$ ; параллелограмма —  $S = ah$ ; треугольника —  $S = \frac{1}{2}ah$ ; трапеции —  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ; прямоугольного треугольника —  $S = \frac{ab}{2}$ ; ромба —  $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ .
11. Теорема Пифагора: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то есть  $a^2 + b^2 = c^2$ ».
12. Признаки подобия треугольников. Треугольники подобны, если:
  - 1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;
  - 2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны;
  - 3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

13. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

14. Прямоугольные треугольники подобны по острому углу.

15. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, т. е. если  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = k^2$ .

16. Биссектриса угла треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть если  $BK$  — биссектриса угла  $B$  треугольника  $ABC$ , то  $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$ .

17. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

18. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.

19. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

20. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

21. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны между собой.

22. Площадь равностороннего треугольника  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

23. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный (обратная теорема Пифагора).

24. Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие основания.

25. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, одна из которых заключена внутри данного угла, а другая — внутри ему вертикального.

26. Угол между секущими, выходящими из точки вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных внутри угла.

27. Угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен половине дуги, заключенной внутри угла.

28. Для касательной и секущей, проведенных через одну точку к окружности, квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его внешнюю часть.

### Повышенный уровень

29. Признаки прямоугольника.

30. Признаки ромба.

31. Признаки равнобедренной трапеции.

32. Пересечение высот треугольника в одной точке.

33. Свойство замечательных точек трапеции.

34. Свойство площадей треугольников с общей высотой.

35. Центально-симметричные и осесимметричные фигуры.

## ОТВЕТЫ

### Глава I

1. а)  $720^\circ$ ; б)  $1440^\circ$ ; в)  $2700^\circ$ . 2. а)  $110^\circ$ ; б)  $140^\circ$ ; в)  $180^\circ$ . 4. 42 см. 5. а) 3; б) 5; в) 6. 6.  $36^\circ$ ;  $126^\circ$ ;  $54^\circ$ ;  $144^\circ$ . 7. а)  $100^\circ$ ; б)  $72^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $144^\circ$ . 8. а) По 160 см; б) 9 см. 9.  $45^\circ$ . 10. Указание: используйте неравенство треугольника. 12.  $540^\circ$ . 13.  $75^\circ$ . 14. Точка пересечения диагоналей. Указание: используйте неравенство треугольника. 15. 18 см, 2 см. Указание: используйте свойство ломаной. 16. Три. 19. а)  $\angle A = \angle C = 50^\circ$ ,  $\angle D = 130^\circ$ ; б)  $\angle A = \angle C = 70^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 110^\circ$ ; в)  $\angle A = \angle C = 80^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 100^\circ$ ; г)  $\angle A = \angle C = 40^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 140^\circ$ ; д)  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 120^\circ$ . 20. а)  $AB = CD = 10$  см,  $AD = BC = 14$  см; б)  $AB = CD = 11$  см,  $AD = BC = 13$  см; в)  $AB = CD = 9$  см,  $AD = BC = 15$  см; г)  $AB = CD = 8$  см,  $AD = BC = 16$  см; д)  $AB = BC = CD = AD = 12$  см. 21. а) 28 см; б) 42 см. 22. 94 см. 23. 38 см. 24. а) 1) 10 см; 2) 5 см; б) 5 см и 10 см. 26. 32 см. 27. 48 см. 28. 24 см. 29.  $52^\circ$ . 30.  $108^\circ$ . 31. 4; 8. 38. 80. 39.  $54^\circ$ . 42. а)  $108^\circ$ ;  $72^\circ$ ; б)  $54^\circ$ . 43. 36 см. 48. (6; 1), (-8; 1), (2; 9). 49. 6 см. 51. Указание: воспользуйтесь теоремой о пересечении высот треугольника. 52. 4 см. 53. 34 см. 54. 36 см. 55. 12 см. 56. 28. 58.  $56^\circ$ . 59.  $154^\circ$ . 60. 40 см. 61. 3 см. 63.  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ . 64.  $90^\circ$ . 65. а) 18 см. 69. г). 71. а) 48 см; б)  $55^\circ$  и  $70^\circ$ ; в) 16 см. 72. а)  $128^\circ$ ; б)  $64^\circ$ ; в)  $52^\circ$ ; г)  $26^\circ$ . 73. а) 48 см; б) 72 см; в) 64 см. 74.  $58^\circ$ . 75. 96 см. 76. 32 см. 77. а)  $30^\circ$ ;  $75^\circ$ ;  $75^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $60^\circ$ . 82.  $180^\circ$ . 83. 54 см. 84. 72 см. 85. 24 см. 87. 6 см. 89. 84 см. 94. Указание: в  $\triangle KBM$  проведите высоту  $BH$ . 95. 18 см. 96. 7. 97. 39 см. 98. 36 см. 99. 37 см. 100. 63 см. 102. 40 см. 103.  $45^\circ$ . 104. 9 см; 32 см. 105. а) 24 м; б) 98 м. 109. 64 см. 110. а) 22 см; б)  $64^\circ$ . 113. 6 см. 114.  $36^\circ$ . 115.  $MK = 4$  см,  $AM = 8$  см,  $CM = 7$  см,  $CP = 10,5$  см. 116. 32 см. 117. 32 см. 119. 93 см. 121. 16 см. 122. 63 см. 125.  $\angle B = 110^\circ$ ,  $\angle D = 50^\circ$ ,  $MN = 19$  см. 126.  $120^\circ$ . 127. а)  $140^\circ$ ; б)  $4 : 3$ . 128. а) 36 см; б) 102 см. 129. а) 12 см, 8 см; б) 7 см, 3 см. 130. 74 см. 131. а) 19 см; б) 15 см; в) 4 см. 132. а) 36 см; б) 52 см. 133. 10 см. 134. 8 см. 136. 2 см. 137. 8 см. 138. 3 см. 139.  $\angle A = \angle D = 60^\circ$ ;  $\angle B = \angle C = 120^\circ$ . 141.  $90^\circ$ . 144. а) 18 см; б) 16 см. 145. 54,8 см. 148.  $29^\circ$ . 149. 16 см. 150. а) 9 см; б) 9,5 см; в) 15 см. 151. 3 см. 152. 8 см.

## Глава II

156. а)  $82 \text{ см}^2$ ; б)  $396 \text{ см}^2$ ; в)  $21 \text{ см}^2$ . 157. 4 см и 6 см. 159. а) 46 дм; б)  $72 \text{ м}^2$ .  
 160.  $45 \text{ см}^2$ . 162. а)  $28 \text{ см}^2$ ; б) 42 см. 163.  $24 \text{ см}^2$ . 164.  $35 \text{ см}^2$ . 165. а) В 9 раз;  
 б) в 4 раза. 166. На 21 %. 167. 15. 170. а)  $60 \text{ см}^2$ ; б)  $28 \text{ см}^2$ ; в)  $48 \text{ см}^2$ .  
 171. а) 5 м; б)  $72 \text{ см}^2$ . 172. а) 36 см; б) 48 см. 173.  $35 \text{ см}^2$ . 174. 9 см.  
 175. 12. 176. а) 54 см; б)  $72 \text{ см}^2$ . 177. 48. 178.  $153 \text{ см}^2$ . 179.  $48 \text{ см}^2$ .  
 180.  $56 \text{ см}^2$ . 181.  $96 \text{ см}^2$ . 182.  $90 \text{ см}^2$ . 183.  $27 \text{ см}^2$ . 185. а)  $12 \text{ см}^2$ ;  
 б)  $17,5 \text{ см}^2$ ; в)  $12,5 \text{ см}^2$ . 186. 16 см. 187. а)  $17 \text{ см}^2$ ; б)  $6 \text{ см}^2$ . 188. а) 12 см;  
 б) 3 м. 190.  $64 \text{ см}^2$ . 191. а)  $60 \text{ см}^2$ ; б) 12 см. 192.  $3 : 8$ . 193. 120 см.  
 194. а)  $30 \text{ см}^2$ ; б)  $10 \text{ см}^2$ ; в)  $20 \text{ см}^2$ ; г)  $20 \text{ см}^2$ . 195. 15 кв. ед. 196. а) 15 см;  
 б) 24 см. 198.  $128 \text{ см}^2$ . 200. 6 см. 201. 120 см, 60 см, 80 см. 202.  $50 \text{ см}^2$ .  
 203.  $60^\circ$ . 205. а) 15 см; б)  $\sqrt{5}$  см; в) 5 дм; г) 4 м. 206. а) 8 см; б) 7 м;  
 в)  $3\sqrt{3}$  см; г)  $\sqrt{10}$  дм. 207.  $60 \text{ см}^2$ . 208.  $54 \text{ см}^2$ . 209. а)  $336 \text{ см}^2$ ; б)  $120 \text{ см}^2$ .  
 210.  $225 \text{ см}^2$ . 211. а) Да; б) нет; в) да. 212. а)  $24 \text{ см}^2$ ; б)  $2,4 \text{ дм}^2$ ; в)  $2 \text{ м}^2$ .  
 213. а)  $2\sqrt{3}$  см,  $4\sqrt{3} \text{ см}^2$ ; б) 24 см,  $4\sqrt{3}$  см. 214. а)  $6000 \text{ м}^2$ ; б)  $168 \text{ дм}^2$ ;  
 в)  $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$ . 215. а) 9 м, 12 м; б)  $24 \text{ см}^2$ . 216. а) 12; б) 20. 217. а) 144;  
 б) 14,4. 219. а)  $8 \text{ см}^2$ ; б) 10 см. 220. 11,2 см. Указание: смотрите ключевую задачу 4. 221. 15 см. 223.  $24 \text{ см}^2$ . 224.  $8 \text{ см}^2$ . Указание: из основания любой медианы (середины стороны) проведите прямую, параллельную одной из оставшихся медиан. Рассмотрите треугольник, ограниченный этой прямой и двумя медианами. 225. 9,6 см. 226. 5. 228. а)  $69 \text{ см}^2$ ;  
 б) 12 см; в) 14 см. 229. а)  $350 \text{ см}^2$ ; б)  $12 \text{ см}^2$ . 230.  $270 \text{ см}^2$ . 231. а) 6 см;  
 б) 4 см. 232.  $77 \text{ см}^2$ . 233.  $28 \text{ см}^2$ . 234.  $128 \text{ см}^2$ . 235. а)  $42\sqrt{3} \text{ см}^2$ ;  
 б)  $24\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 236. а)  $18 \text{ см}^2$ ; б)  $13,2 \text{ см}^2$ . 237. а)  $50\sqrt{5} \text{ см}^2$ ; б)  $30 \text{ см}^2$ .  
 238. 8 см и  $128 \text{ см}^2$ . 239. а) 42; б) 38. 240.  $36 \text{ см}^2$ . 241.  $1 : 2$ .  
 242.  $80 \text{ см}^2$ . 243.  $16 \text{ см}^2$ . 244.  $48 \text{ см}^2$ . 245.  $\frac{1}{6}$ . 246. 25 %. 247.  $30 \text{ см}^2$ .  
 249. Указание: воспользуйтесь тем, что средняя линия отсекает от данного треугольник, площадь которого равна  $\frac{1}{4}$  площади данного.  
 250.  $48 \text{ см}^2$ . 251.  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ . 252.  $80 \text{ см}^2$ . 253. Указание: составьте из 8 полученных треугольников параллелограмм (смотрите задания на с. 29). 255.  $36 \text{ см}^2$ . 256.  $63 \text{ см}^2$ . 257. Указание: смотрите ключевую задачу 4. 259. Указание: проведите через точку  $F$  прямые, параллельные сторонам треугольника. Рассмотрите полученные параллелограммы и равнобедренные треугольники.

## Глава III




261. а); б). 262. а) 20 см; б) 2,4 см; в) 32 см. 263. а) 6 см, 4,5 см; б) 44 см. 264. а) 8 см, 18 см, 6 см; б) 28 см. 265. а) 9 см; б) 9 см. 266. а) 20 см; б) 54 см; в) 15 см; г) 14 см. 268. 22 см. 269.  $120 \text{ см}^2$ . 270.  $24 \text{ см}^2$ . Указание: найдите  $S_{ABP}$ , отношение  $BB_1 : B_1A_1 : A_1P$ ,  $S_{AA_1P}$ ,  $S_{ABA_1}$ ,  $S_{MBB_1}$ ,  $S_{AMB_1A_1}$ . 272. а)  $BC = 12 \text{ см}$ ,  $A_1C_1 = 8 \text{ см}$ ; б)  $AC = 19,6 \text{ см}$ ,  $AB = 15 \text{ см}$ . 273. а) 44 см; б) 31 см. 274. а)  $60^\circ$ ; б)  $30^\circ$ ; в) 7 см; г)  $6 \text{ см}^2$ . 275. 9 м. 276. 6 см. 277. 28 см. 278.  $38^\circ$ . 279. 12 см. 280. 4 см. 283. 4 см; 8 см. 284.  $2 : 5$ . 285.  $9 : 7$ . 286. 12 см. 287. 14 см. 288. а) 9 см и 24 см; б) 8 см и 9 см. 291. При  $A_1C_1 = 5$  треугольники подобны по двум сторонам и углу между ними (2-й признак подобия). 292.  $\triangle FGE \sim \triangle KMN$  по трем сторонам (3-й признак подобия). 293. а) 10,5 см; б) 45 см. 295.  $P_{ABC} : P_{KNM} = 3 : 2$ . 296. а) 78 см; б) 12 см. 297. 3,75 см. 299.  $96 \text{ см}^2$ . 300. а) 4 см; б) 12 см; в) 9 см. 303.  $96 \text{ см}^2$ . 304. 48 см. 305. 7 см. 306. 5 см. 307. 20 см. 308. а) 4; б) 6; в) 12. 310. а) 6; б) 9. 312. а) 3 см; б) 9 см. 313. а) 12 м; б) 1 см и 3 см; в) 8 см. 314. а) 30 см; б) 1120 м. 315. 21 см. Указание: воспользуйтесь тем, что соответствующие высоты в подобных треугольниках относятся как их соответствующие стороны. Обозначьте  $MN = FH = x$ ,  $BF = 30 - x$  и составьте пропорцию. 316.  $20 \text{ см}^2$ . Указание: продлите отрезок  $AM$  до пересечения с прямой  $BC$  в точке  $N$  и рассмотрите две пары подобных треугольников:  $AMD$  и  $NMC$ ,  $BPN$  и  $KPA$ . 318. а) 4 см; б) 10 см; в) 32 см. 319. 21 см. 320. 4 см. 321. 3 см; 4 см. 322.  $3\sqrt{5} \text{ см}$ . 323.  $76^\circ$ . 324.  $75 \text{ см}^2$ . 326. а) Увеличится в 4 раза; б) увеличится в 9 раз; в) увеличится в 6,25 раза; г) уменьшится в 100 раз. 327.  $40 \text{ см}^2$ . 328. а)  $4 : 9$ ; б)  $8 : 5$ . 329.  $1 : 9$ . 330.  $40 \text{ см}^2$ . 331.  $9\frac{3}{8} \text{ м}^2$ . 332.  $160 \text{ см}^2$ . 333.  $18 \text{ м}^2$ . 334. а)  $24 \text{ см}^2$ ; б)  $2\sqrt{S_1S_2}$ ; в)  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ . 335. а)  $96 \text{ см}^2$ ; б)  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ . 336.  $24 \text{ см}^2$ . 337.  $\frac{1}{3}$ . 338.  $8 \text{ см}^2$ . 339.  $30 \text{ см}^2$ . 340. 10 см. Указание: воспользуйтесь подобием треугольников  $ABH$  и  $BCH$  и теоремой о площадях подобных треугольников. 341.  $6 \text{ см}^2$ . 342.  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ . 344. 4. 345. 21. 346. 15. 347. 4. 348. 5. 349.  $60 \text{ см}^2$ . 350.  $12\sqrt{3}$ .

## Глава IV

352. а)  $50^\circ$ ; б)  $55^\circ$ ; в)  $31^\circ$ . 353. а)  $62^\circ$ ; б)  $150^\circ$ ; в) 8 см. 354. а)  $150^\circ$ ; б) 6 см. 355. 24 см. 356.  $99^\circ$ . 357. а) 5 см; б)  $9 \text{ см}^2$ . 358. 6 см. 360. 24 см. 361. 8, 10. 362. 5 кв. ед. 365. Серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

366. а) Пересекаются; б) касаются внешним образом; в) расположены  
 внешним образом. 367. 11 м. 368. 280 см. 369.  $24 \text{ см}^2$ . 370. 4 см.  
 371. 6 м. 372. 8 м. 373. 9 см. 375.  $53^\circ$ . 376. 1,44 см и 36 см. 377. 6 см.  
 381. а)  $\sphericalangle AC = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle ABC = 40^\circ$ ; б)  $\sphericalangle AC = 100^\circ$ ,  $\sphericalangle BC = 80^\circ$ ; в)  $\sphericalangle AB = 116^\circ$ .  
 382. а) 24 см; б)  $24\sqrt{2}$  см; в) 48 см; г) 24 см. 383. а)  $45^\circ$ ; б)  $30^\circ$ ; в)  $42^\circ$ .  
 384.  $102^\circ$ ,  $102^\circ$ ,  $156^\circ$ . 385. а)  $64^\circ$ ; б)  $42^\circ 8'$ ;  $21^\circ 4'$ ; в)  $40^\circ$ ;  $80^\circ$ ;  $80^\circ$ . 386.  $140^\circ$ .  
 387.  $84^\circ$ . 388.  $100^\circ$ . 389. а) 6 см; б) 26 см; в) 7 см. 391. а)  $4\sqrt{3} \text{ см}^2$ ;  
 б)  $32 \text{ см}^2$ . 392.  $26^\circ$ . 393.  $52^\circ$ . 394.  $30^\circ$ . 395. б) 18 см; в)  $60 \text{ см}^2$ .  
 396.  $18\sqrt{3} \text{ см}^2$ . 398.  $40^\circ$ . 399. Указание: проведите отрезки  $AC$  и  $BD$ .  
 400. Указание: проведите из центра окружности перпендикуляры к ука-  
 занным хордам. 401. а)  $70^\circ$ ; б)  $130^\circ$ ; в)  $110^\circ$ . 402. а)  $40^\circ$ ; б)  $37^\circ 30'$ ; в)  $80^\circ$ .  
 403.  $72^\circ$ . 404.  $40^\circ$ . 405.  $50^\circ$ . 406.  $78^\circ$ . 407.  $52^\circ$ . 408.  $65^\circ$ . 409. а)  $88^\circ$ ; б)  $28^\circ$ .  
 411.  $60^\circ$ . 412. а) Указание: выразите градусные меры углов  $BAN$   
 и  $CAN$  через градусные меры дуг, заключенных внутри этих углов.  
 414. 4 см. 415. 12 см. 416. 22 см. 417. 6 см. 418. 6,5 см. 419. 8 см.  
 420. 1 см. 421. 42 см. 422. 6 см.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	3
<b>Глава I. Четырехугольники</b>	
§ 1. Многоугольник .....	11
§ 2. Параллелограмм и его свойства .....	17
§ 3. Признаки параллелограмма .....	23
§ 4. Прямоугольник .....	30
§ 5. Ромб .....	36
§ 6. Квадрат .....	41
§ 7. Теорема Фалеса .....	48
§ 8. Средняя линия треугольника .....	51
§ 9. Свойство медиан треугольника .....	54
§ 10. Трапеция. Средняя линия трапеции .....	57
§ 11. Равнобедренная и прямоугольная трапеции .....	62
 § 12. Центральная и осевая симметрия .....	66
<b>Глава II. Площади многоугольников</b>	
§ 13. Площадь квадрата, прямоугольника .....	77
§ 14. Площадь параллелограмма .....	83
§ 15. Площадь треугольника, прямоугольного треугольника, ромба .....	87
§ 16. Теорема Пифагора .....	94
§ 17. Площадь трапеции .....	103
 § 18. Решение задач по теме «Площади многоугольников»	109
<b>Глава III. Подобие треугольников</b>	
§ 19. Обобщенная теорема Фалеса .....	121
§ 20. Подобие треугольников .....	127
§ 21. Признаки подобия треугольников .....	133
§ 22. Свойство биссектрисы треугольника .....	142
§ 23. Свойство площадей подобных треугольников .....	145
 § 24. Решение задач по теме «Подобие треугольников»	154
<b>Глава IV. Окружность</b>	
§ 25. Касательная к окружности .....	161
§ 26. Взаимное расположение окружностей .....	168
§ 27. Центральный и вписанный углы .....	174
§ 28. Углы, образованные хордами, секущими и касательными .....	183
§ 29. Свойство отрезков хорд и касательных .....	189
База знаний по геометрии. 8-й класс .....	200
Ответы .....	202



---

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащегося за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

**Казаков Валерий Владимирович**  
**Казакова Ольга Олеговна**

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для **8** класса  
учреждений образования, реализующих образовательные  
программы общего среднего образования,  
с русским языком обучения и воспитания  
2-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*.

Художник *Е. А. Ждановская*.

Художественный редактор *Е. А. Ждановская*.

Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*.

Корректор *О. С. Козицкая*.

Подписано в печать 03.05.2024. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,9 + 0,33 форз. Уч.-изд. л. 11,01 + 0,49 форз.

Тираж 118 000 экз. Заказ .

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Адукацыя і выхаванне”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.

Ул. Буденного, 21, 220070, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.

Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.