В. В. Казаков

# ГЕОМЕТРИЯ

# 9

В. В. Казаков

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

*Допущено*
*Министерством образования*
*Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2019

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
К14

В оформлении обложки использован фрагмент фрески
Рафаэля Санти «Афинская школа»

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики
Белорусского государственного университета
(кандидат физико-математических наук, старший преподаватель *Г. О. Кукрак*);
учитель математики высшей квалификационной категории
государственного учреждения образования «Несвижская гимназия»
*П. М. Романчук*

**Казаков, В. В.**
К14 Геометрия : учебное пособие для 9-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В. В. Казаков. — Минск : Народная асвета, 2019. — 191 с. : ил.
ISBN 978-985-03-3107-6.

**УДК 514(075.3=161.1)**
**ББК 22.151я721**

**ISBN 978-985-03-3107-6**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Ребята, в 9-м классе вы завершите знакомство с *планиметрией* (разделом геометрии, изучающим фигуры на плоскости) и продемонстрируете свои знания на экзамене. Чтобы добиться хорошего результата, вам необходимо будет повторить все, что было изучено в 7-м и 8-м классах, и успешно освоить материал 9-го класса.

## Панорама геометрии 9-го класса

В первой главе этого пособия вы познакомитесь с такими понятиями, как *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс острого угла*.

Так, синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе.

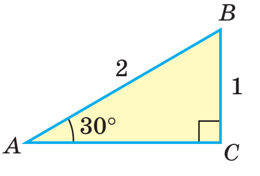



Рис. 1

Например, если в прямоугольном треугольнике $ABC$ (рис. 1) острый угол $A$ равен 30°, катет $BC$ противолежащий этому углу, равен 1, то гипотенуза $AB$ равна 2 и $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Далее, во второй главе, вы узнаете, как найти центр окружности, описанной около треугольника, т. е. проходящей через все его вершины, и окружности, вписанной в треугольник, т. е. касающейся всех его сторон (рис. 2).

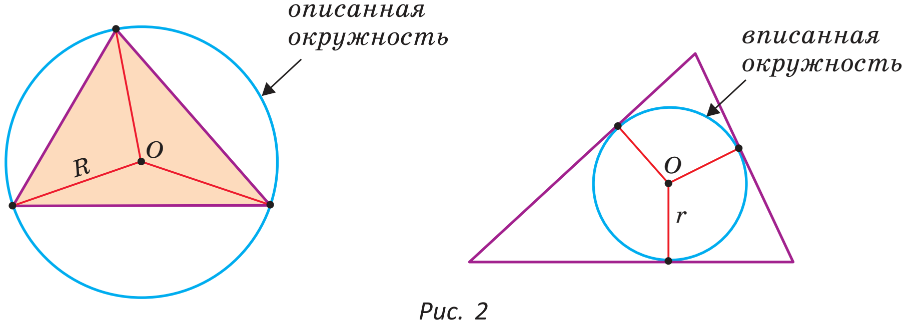
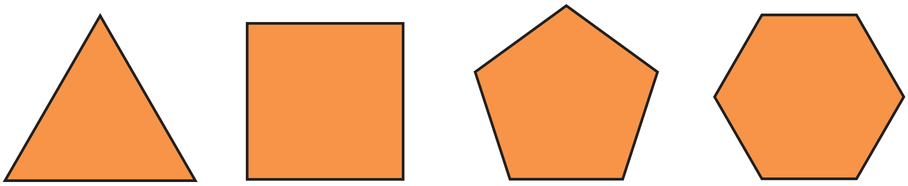



Рис. 2

Третья глава посвящена двум важнейшим теоремам: *теореме синусов* и *теореме косинусов*. Здесь геометрия соединяется с алгеброй. Мы получаем возможность решать многие геометрические задачи при помощи уравнений. Теоремы синусов и косинусов позволяют установить связь между величинами сторон и углов треугольника. При помощи теоремы косинусов мы выведем знаменитую *формулу Герона* о нахождении площади треугольника по трем сторонам $a$, $b$ и $c$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p$ — полупериметр треугольника.



*Правильные многоугольники*

Рис. 3

В четвертой главе рассматриваются правильные многоугольники. Это такие многоугольники, у которых все стороны равны и все углы равны (рис. 3).

Например, равносторонний треугольник является правильным треугольником, а квадрат — правильным четырехугольником.

Здесь же будут обоснованы известные вам формулы длины окружности и площади круга: $C = 2\pi R$ и $S = \pi R^2$.

Итак, в учебном пособии «Геометрия, 9» четыре главы. В начале каждой главы приводится *карта главы* с изображением фигур и свойств, изучаемых в ней.

Все главы содержат дополнительный материал под рубриками: **«Реальная геометрия»**, **«Гимнастика ума»**, **«Моделирование»**, **«Геометрия 3D»**, с которыми вы знакомы из предыдущих классов.

Главы состоят из нескольких параграфов, каждый из которых содержит:

а) теоретический материал (определения, теоремы);

б) задания к параграфу.

Задачи в рубрике «Решаем вместе» (*ключевые задачи*) являются образцами, где показаны приемы решения задач. Часто в них доказываются дополнительные свойства геометрических фигур. *В дальнейшем при решении задач можно ссылаться на эти свойства как на известные геометрические факты.*

**Внимание!**

В рубрике «Решаем самостоятельно» представлены задачи, достаточные для оценки результатов учебной деятельности учащихся при поурочном контроле с использованием десятибалльной шкалы.

Задачи со знаком «*» являются задачами *повышенного уровня* сложности, многие из них носят олимпиадный и исследовательский характер. Они могут использоваться на занятиях с учащимися, проявляющими интерес к математике, а также для их самоподготовки.

Сказанное относится и к учебному материалу со знаком «*».

На обложке учебного пособия изображен фрагмент картины великого итальянского художника эпохи Возрождения Рафаэля «Афинская школа». В центре фрагмента изображены Платон (ученик Сократа) и Аристотель (ученик Платона и наставник Александра Македонского). При помощи **Интернета** выясните, чем знамениты названные исторические персонажи.

Желаем вам успехов в освоении геометрии 9-го класса!

## Это нужно знать (7—8-й классы)

### 7-й класс

1. Признаки равенства треугольников.
2. Свойства и признаки равнобедренного треугольника.
3. Свойства и признаки параллельных прямых.
4. Свойство внешнего угла треугольника.
5. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
6. Свойство катета, лежащего против угла в 30°.

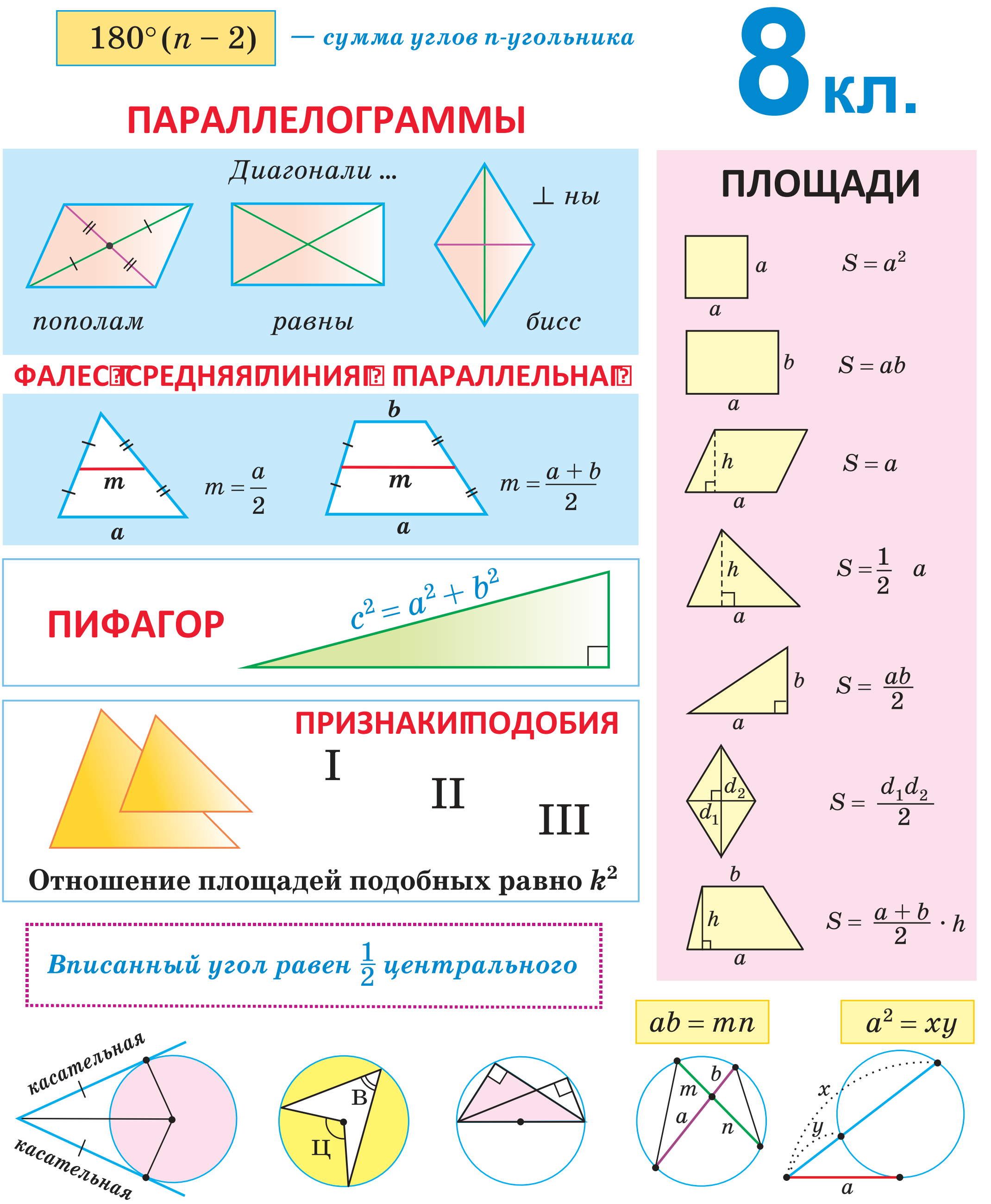
### 8-й класс

1. Формула суммы углов многоугольника.
2. Свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба.
3. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника и средняя линия трапеции.
4. Формулы площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, ромба, трапеции.
5. Свойство медиан треугольника.
6. Теорема Пифагора и ей обратная.
7. Признаки подобия треугольников.
8. Свойство площадей подобных треугольников.
9. Свойство касательной к окружности.
10. Свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки.
11. Теорема о вписанном и соответствующем ему центральном угле.
12. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр.

13*. Свойство отрезков пересекающихся хорд.

14*. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей, проведенных к окружности из одной точки.

Наиболее важные вопросы 8-го класса отражены в следующем опорном конспекте. Для подробного повторения учебного материала 7-го и 8-го классов можно использовать опорные конспекты в конце пособия.



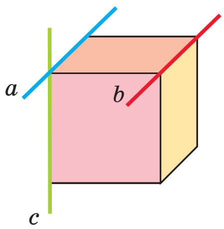

А теперь проверьте умение применять свои знания при решении задач, выполнив следующий тест. Каждая задача в нем оценивается в 10 баллов, общее число баллов равно 100. Правильные ответы можно получить у вашего учителя математики. Попробуйте набрать максимальное число баллов. Успешного выполнения теста!

## Тест по геометрии за 8-й класс

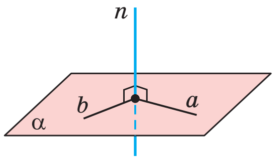
| № | Условия задач | Ответы на выбор |
|---|---|---|
| 1 | Дан параллелограмм $ABCD$, $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, $CD = 4$ см, $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найдите периметр треугольника $AOB$. | 1) 14 см; 2) 15 см; 3) 18 см; 4) 22 см. |
| 2 | Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, $\angle ACB = 40°$. Найдите $\angle COD$. | 1) 40°; 2) 50°; 3) 80°; 4) 60°. |
| 3 | Периметр ромба равен 24 см, площадь — 30 см$^2$. Найдите высоту ромба. | 1) 5 см; 2) 4,5 см; 3) 6 см; 4) 8 см. |
| 4 | В треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 16$ см, $AB = 20$ см. Найдите площадь треугольника $ABC$. | 1) 160 см$^2$; 2) 320 см$^2$; 3) 48 см$^2$; 4) 96 см$^2$. |
| 5 | Высота трапеции равна 10 см, меньшее основание — 4 см, площадь — 100 см$^2$. Найдите большее основание трапеции. | 1) 12 см; 2) 16 см; 3) 20 см; 4) 24 см. |
| 6 | Дан треугольник $ABC$, точки $K$ и $M$ принадлежат сторонам $AB$ и $BC$ соответственно, $KM \parallel AC$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $BK = 4$ см, $AK = KM = 6$ см, $MC = 9$ см. | 1) 50 см; 2) 40 см; 3) 52 см; 4) 64 см. |
| 7 | Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке $O$, $AO = 15$ см, $OC = 5$ см, $BC = 8$ см. Найдите среднюю линию трапеции. | 1) 18 см; 2) 24 см; 3) 32 см; 4) 16 см. |
| 8 | $AB$ и $AC$ — касательные к окружности, $B$ и $C$ — точки касания, $\angle BAC = 64°$. Точки $B$ и $C$ разбивают окружность на две дуги. Найдите градусную меру большей из них. | 1) 128°; 2) 116°; 3) 296°; 4) 244°. |
| 9 | В параллелограмме $ABCD$ высота $BH = 12$ см проведена к стороне $AD$, диагонали $AC = 15$ см, $BD = 13$ см. Найдите площадь параллелограмма. | 1) 84 см$^2$; 2) 96 см$^2$; 3) 72 см$^2$; 4) 108 см$^2$. |
| 10 | $AB = 100$ — диаметр окружности с центром в точке $O$, $BC = 80$ — хорда окружности, $OK \perp AB$, $K \in BC$. Найдите удвоенную площадь треугольника $KOB$. | 1) 1600; 2) 1875; 3) 2400; 4) 2019. |

## Экскурс в стереометрию

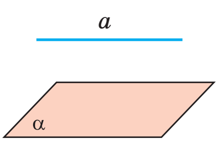
Вспомним, с какими понятиями *стереометрии* (раздела геометрии, изучающего свойства фигур в пространстве) вы познакомились в 7—8-м классах (рис. 4). Считается, что прямая не имеет толщины и бесконечна в обе стороны, плоскость не имеет толщины и бесконечна во все стороны.



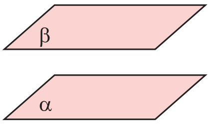

Если дан куб, то прямые $a$ и $b$ параллельны, прямые $a$ и $c$ пересекаются, прямые $b$ и $c$ — скрещиваются.



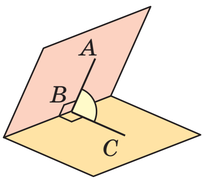

Прямая $n$ называется перпендикулярной плоскости α, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.



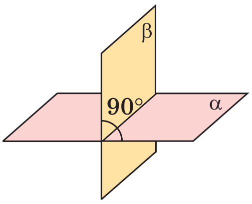

Прямая $a$ называется параллельной плоскости α, если она не пересекает эту плоскость.




Плоскости α и β называются параллельными, если они не пересекаются.




Двугранный угол — это угол между полуплоскостями с общей границей. Он измеряется величиной угла $ABC$.




Плоскости α и β называются перпендикулярными, если они при пересечении образуют двугранный угол, равный 90°.

*Рис. 4*

На рисунке 5 изображены восемь пространственных фигур. Укажите эти фигуры: пятиугольная призма, шар, треугольная пирамида, прямоугольный параллелепипед, треугольная призма, цилиндр, четырехугольная пирамида, конус.

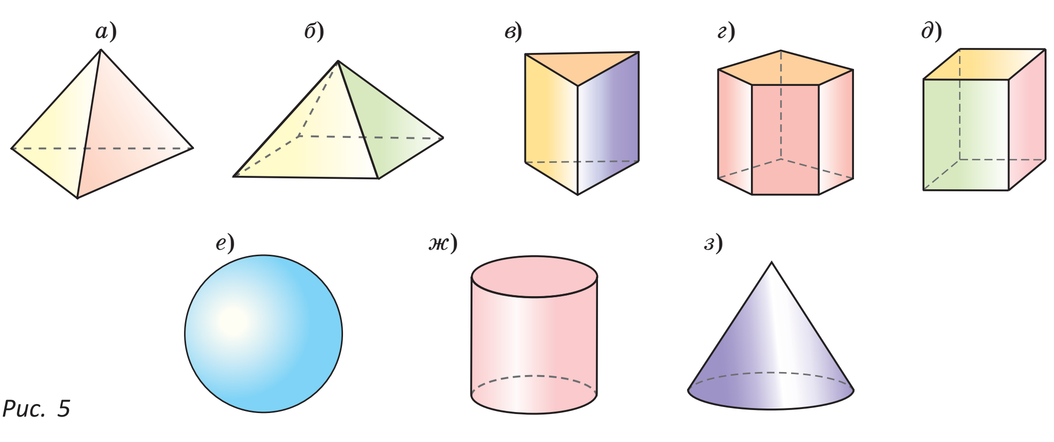


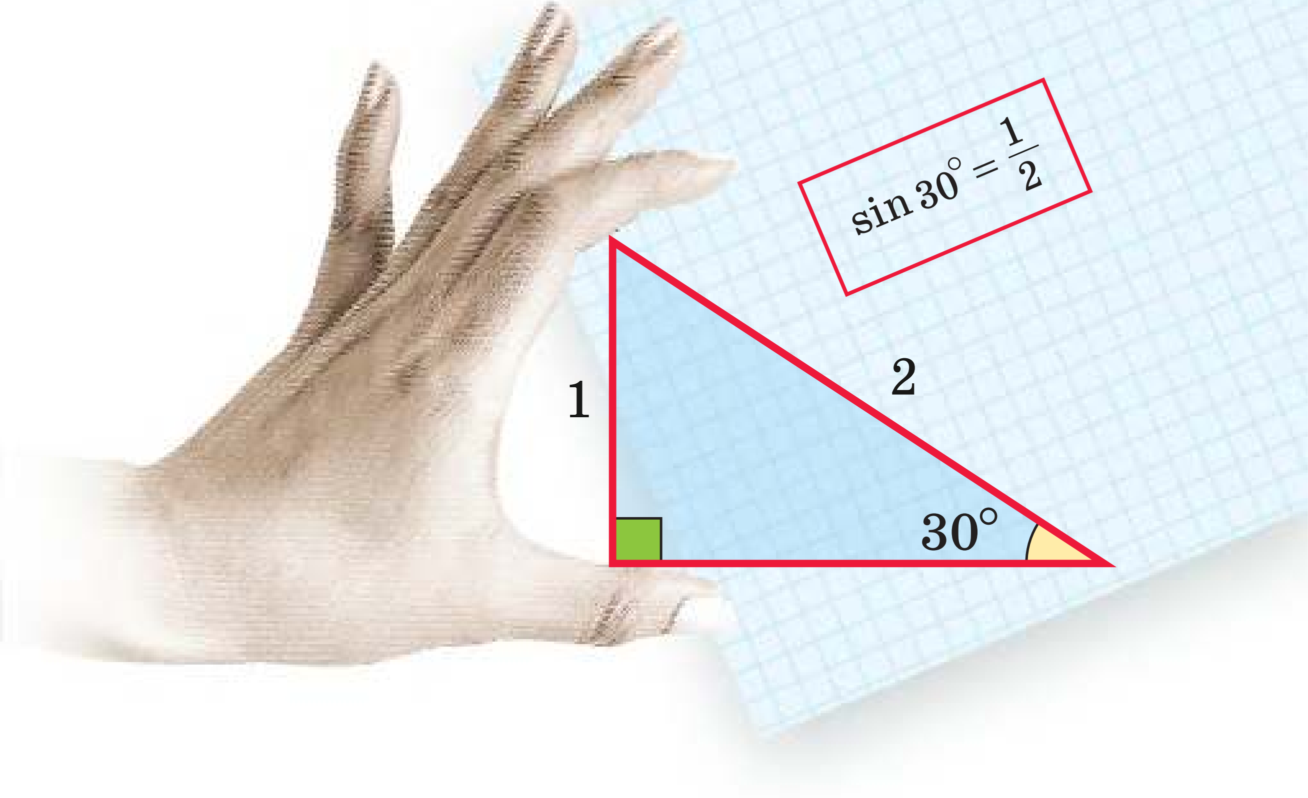

*Рис. 5*

## Глава I

# Соотношения в прямоугольном треугольнике

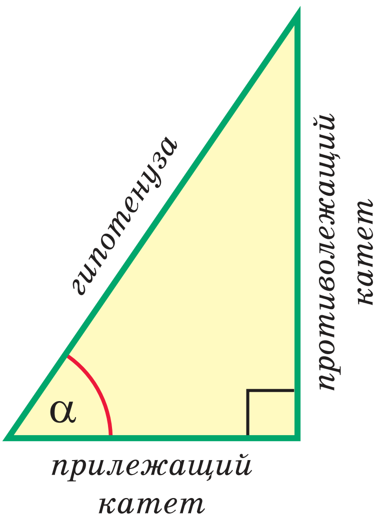
**В этой главе вы узнаете:**

- Что такое синус, косинус, тангенс и котангенс
- Почему синус $30^\circ$ равен $\frac{1}{2}$
- Как найти среднее геометрическое двух чисел



# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## СИНУС КОСИНУС ТАНГЕНС КОТАНГЕНС

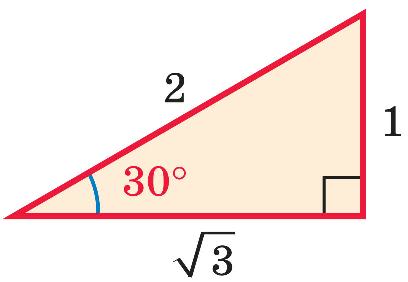



$$\sin\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{прилежащий катет}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{противолежащий катет}}$$




$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$

## ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

*среднее арифметическое* *среднее геометрическое*

$\frac{a+b}{2}$ $\sqrt{ab}$

# § 1. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

## 1. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла

Пусть в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c$, один из острых углов равен $\alpha$, *противолежащий* этому углу катет равен $a$, *прилежащий* катет — $b$ (рис. 6). Отношения катетов к гипотенузе $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, а также отношения катета к катету $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ имеют специальные названия: *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* острого угла — и соответственно обозначаются: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

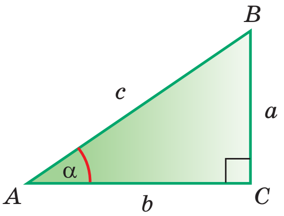


*Рис. 6*

Определение. **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

**Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Определение. **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего* катета к *прилежащему*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

**Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего* катета к *противолежащему*:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

**Пример.** Угол $K$ в $\triangle MNK$ равен $90°$ (рис. 7). Тогда:

$$\sin M = \frac{5}{13}, \qquad \cos M = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{5}{12}, \qquad \operatorname{ctg} M = \frac{12}{5}.$$

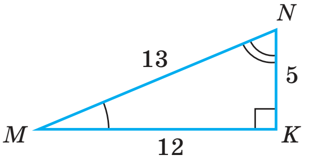


*Рис. 7*

Для угла $N$ катет $MK$ — противолежащий, а катет $NK$ — прилежащий (см. рис. 7, с. 11). Поэтому согласно определениям получаем:

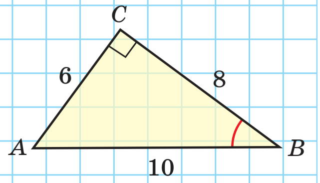
$$\sin N = \frac{MK}{MN} = \frac{12}{13}, \quad \cos N = \frac{NK}{MN} = \frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} N = \frac{MK}{NK} = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{ctg} N = \frac{NK}{MK} = \frac{5}{12}.$$

Можно заметить, что синус острого угла $\alpha$ прямоугольного треугольника и косинус другого острого угла этого треугольника, содержащего $90° - \alpha$, равны, т. е. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Так же $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Например, $\sin 60° = \cos 30°$, $\operatorname{tg} 40° = \operatorname{ctg} 50°$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

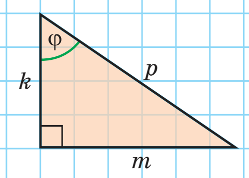
**Тест 1**

а) $\sin B = ...$
б) $\cos B = ...$
в) $\operatorname{tg} B = ...$
г) $\operatorname{ctg} B = ...$




**Тест 2**

а) $\sin \varphi = ...$
б) $\cos \varphi = ...$
в) $\operatorname{tg} \varphi = ...$
г) $\operatorname{ctg} \varphi = ...$



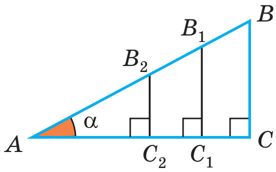



*Рис. 8*

Значение синуса острого угла, а также косинуса, тангенса и котангенса зависит только от величины угла и не зависит от размеров и расположения прямоугольного треугольника с указанным острым углом. Это следует из того, что прямоугольные треугольники с равным острым углом подобны, а у подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны. Так, в $\triangle ABC$ (рис. 8) $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2}$.

## 2. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 1$ (рис. 9). Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $AB = 2$. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$ Тогда:

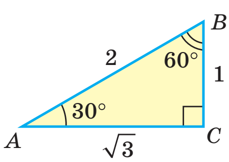


*Рис. 9*

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle B = 90° - \angle A = 60°$ (см. рис. 9), то

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$, у которого $\angle A = 45°$, $AC = BC = 1$ (рис. 10). По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

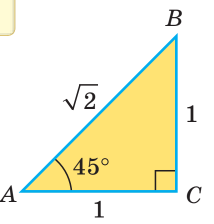


*Рис. 10*

Тогда:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{BC} = 1.$$

Составим таблицу значений синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов для углов 30°, 45° и 60°.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

### 3. Нахождение значений тригонометрических функций

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса данного угла можно приближенно находить при помощи специальных тригонометрических таблиц* либо калькулятора.

---

* Тригонометрические таблицы находятся на с. 54.

Например, с помощью калькулятора, компьютера или мобильного телефона (смартфона) находим: $\sin 45° = 0{,}707106...$ . Приближенное значение тригонометрических функций при решении задач будем брать с округлением до четырех знаков после запятой: $\sin 45° = 0{,}7071$.

Итак, точное значение $\sin 45°$ равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а приближенное — 0,7071.

Таблицы и калькулятор также позволяют находить величину острого угла по значению синуса, косинуса или тангенса. Например, найдем острый угол, синус которого равен 0,4175. Выбрав на компьютере вид калькулятора «инженерный», далее «градусы», нужно ввести последовательно 0,4175 + $\boxed{\text{Inv}}$ + $\boxed{\sin^{-1}}$. На экране появится ответ: 24,676... . Округлим его до десятых долей градуса и получим 24,7°. Учитывая, что 1° содержит 60 угловых минут, получим: $0{,}7° = 0{,}7 \cdot 60' = 42'$. Искомый угол, синус которого 0,4175, приближенно равен $24°42'$.

А теперь выполните **Тест 3**.

**Тест 3**

Какое равенство неверно:

а) $\sin 30° = \frac{1}{2}$;  б) $\cos 60° = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 45° = 1$;  г) $\sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

## 4*. Тригонометрические функции острого угла

Синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла, так как каждому острому углу $x$ соответствует единственное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Они называются *тригонометрическими функциями* и записываются так: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Поскольку в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то для острого угла $x$ справедливо: $0 < \sin x < 1$, $0 < \cos x < 1$, следовательно **синус и косинус острого угла положительны и меньше 1**. Тангенс и котангенс острого угла могут принимать *любое положительное значение*. Например, $\operatorname{tg} 85° \approx 11{,}4$.

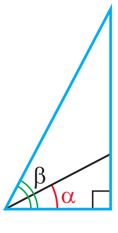
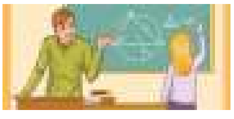


*Рис. 11*

*С увеличением острого угла синус и тангенс возрастают, а косинус и котангенс убывают* (рис. 11), то есть если $\beta > \alpha$, то $\sin\beta > \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$, но $\cos\beta < \cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\alpha$ (см. с. 28, задачу 2*). Это гарантирует, что синус (косинус, тангенс и котангенс) острого угла определяют этот угол однозначно.

## *Моделирование*

Орден на вершине монумента на площади Победы в г. Минске освещается прожектором, который находится на расстоянии 10 м от центра основания. Высота монумента 38 м. Определите величину угла, который луч прожектора составляет с поверхностью земли (с прямой, соединяющей прожектор и основание монумента).

## Задания к § 1

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *В прямоугольном треугольнике ABC, где* $\angle C = 90°$, *катет BC равен 8 см, гипотенуза AB равна 17 см. Найти косинус угла A* (*рис.* 12).

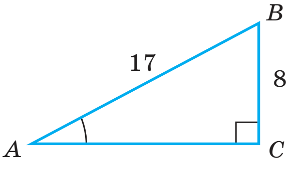



*Рис. 12*

Решение. По теореме Пифагора найдем катет $AC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см). Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Тогда $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

Ответ: $\frac{15}{17}$.

**Задача 2.** *Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна* 20 *см,* $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$ (*рис.* 13). *Найти площадь треугольника.*

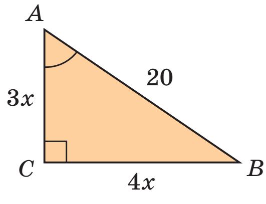



*Рис. 13*

Решение. Так как $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, то $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Обозначим $AC = 3x$ см, $BC = 4x$ см. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(3x)^2 + (4x)^2 = 20^2$, $25x^2 = 400$, $x^2 = 16$, $x = 4$ $(x > 0)$. Тогда $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = 4 \cdot 4 = 16$ (см), $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$ (см$^2$).

Ответ: 96 см$^2$.

**Задача 3*.** *При помощи циркуля и линейки построить угол, синус которого равен* $\frac{4}{5}$.

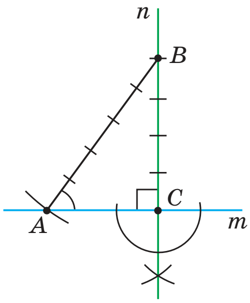



*Рис. 14*

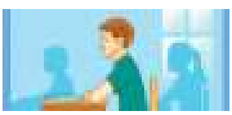
Решение. Идея решения. Построим прямоугольный треугольник с катетом, равным 4 единицы, и гипотенузой, равной 5 единиц. Синус угла, противолежащего указанному катету, будет равен $\frac{4}{5}$.

Построение. 1) Строим прямой угол $C$ (рис. 14), для чего проводим произвольную прямую $m$, отмечаем на ней точку $C$ и строим прямую $n$, проходящую через точку $C$ перпендикулярно прямой $m$ (вспомните по рисунку алгоритм построения).

2) На прямой $n$ от точки $C$ откладываем последовательно четыре равных отрезка. Получаем отрезок $BC$, который содержит 4 единицы.

3) Строим окружность с центром в точке $B$ радиусом, равным пяти единицам. В пересечении этой окружности и прямой $m$ получаем точку $A$. Угол $BAC$ — искомый.

Доказательство. Из $\triangle ABC$ находим $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

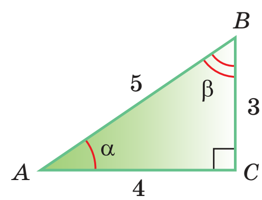



*Рис. 15*

**1.** По рисунку 15 найдите:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha$;

д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$; ж) $\mathrm{tg}\,\beta$; з) $\mathrm{ctg}\,\beta$.

**2.** Используя клеточки в тетради, изобразите прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $C$, такой, что $\mathrm{tg}\,A = \frac{4}{5}$. Определите на глаз величину угла $A$. Проверьте свое предположение при помощи транспортира.

**3.** По рисункам 16, *а*)—*в*) вычислите соответственно $\sin\alpha$, $\cos\beta$ и $\mathrm{tg}\,\gamma$.

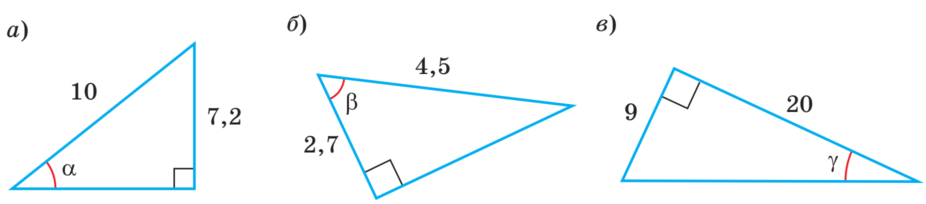



*Рис. 16*

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.

**4.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ гипотенуза $AB$ равна 25 см, катет $AC$ равен 24 см. Найдите:

а) $\sin A$; б) $\cos A$; в) $\operatorname{tg} B$;
г) $\operatorname{ctg} B$; д) $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B$; е) $\sin^2 A + \cos^2 A$.

**5.** При помощи калькулятора или таблиц найдите, округлив ответ до 0,0001:

а) $\sin 5°$; б) $\sin 15°$; в) $\cos 40°$;
г) $\cos 72°$; д) $\operatorname{tg} 50°$; е) $\operatorname{tg} 85°$.

**6.** При помощи калькулятора или таблиц найдите, округлив ответ до 1°, величину острого угла $x$, если:

а) $\sin x = 0{,}4226$; б) $\cos x = 0{,}6820$; в) $\operatorname{tg} x = 0{,}5774$.

**7.** Найдите острые углы α и β треугольников на рисунках 17, *а*)—*в*), используя тригонометрические функции и калькулятор (таблицы). Ответы округлите до 1°.

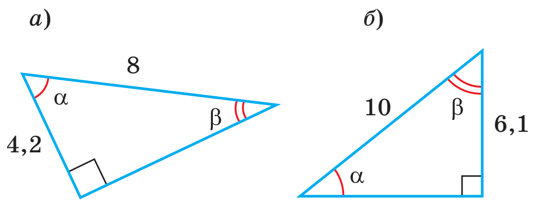



*Рис. 17*

**8.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ (рис. 18), $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $BH$ — высота. Вычислите:

а) синус угла $A$;
б) косинус угла $C$;
в) тангенс угла $CBH$;
г) высоту $AK$ и синус угла $ABC$.

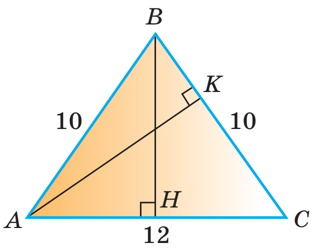



*Рис. 18*

**9.** Найдите синус меньшего острого угла между диагональю прямоугольника и его стороной, если периметр прямоугольника равен 34 см, а одна из сторон — 12 см.

**10.** Заполните пропуски в равенствах, перенеся их в тетрадь:

а) $\sin 60° = \ldots$; б) $\operatorname{tg} 30° = \ldots$;

в) $\sin \ldots = \frac{1}{2}$; г) $\cos \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 45° = \ldots$; е) $\operatorname{ctg} \ldots = \sqrt{3}$;

ж) $\ldots 45° = 1$; з) $\cos \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**11.** Угол $\alpha$ — острый. Найдите:

а) угол $\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

б) угол $\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) угол $\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;

г) угол $\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}5$.

**12.** Найдите косинус острого угла равнобедренной трапеции со сторонами, равными 5 см, 11 см, 6 см, 6 см, и укажите градусную меру этого угла.

**13.** По данным на рисунках 19, *а*)—*в*) найдите длину отрезка $x$, используя определение синуса или косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

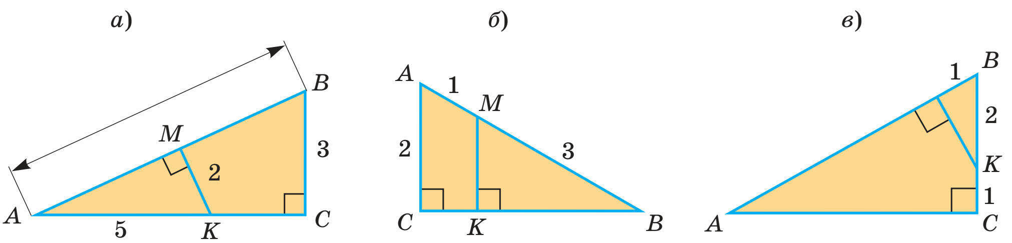



*Рис. 19*

**14.** Основание равнобедренного треугольника равно 8 см, тангенс угла при основании равен 2. Найдите площадь треугольника.

**15.** Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{5}$, один из катетов на 6 см больше другого. Найдите площадь треугольника.

**16.** Окружность с центром $O$ касается катета $AC$ и проходит через вершину $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами $BC = 6$, $AC = 8$; точка $O$ лежит на гипотенузе $AB$ (рис. 20). Найдите радиус этой окружности, используя определение синуса острого угла.

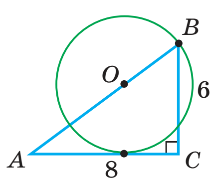
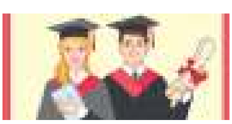



*Рис. 20*



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**17*.** Какие из следующих чисел не могут быть значениями синуса острого угла: 2; $\frac{15}{17}$; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 0,75; $\sqrt{3}-1$?

**18*.** При помощи циркуля и линейки постройте угол $\alpha$, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha = 0{,}6$.

**19*.** Докажите, что если $\alpha$ и $\beta$ — острые углы одного прямоугольного треугольника, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta < 2$; б) $\sin\alpha + \sin\beta > 1$.

**20*.** а) Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, косинус угла при основании равен 0,6. Найдите площадь треугольника.

б) Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, синус противолежащего основанию острого угла равен $\frac{3}{5}$. Найдите площадь треугольника.

**21*.** В остроугольном треугольнике $ABC$ (рис. 21) проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$, $\angle B = 60°$, $A_1C_1 = 4$, $S_{A_1BC_1} = 9$.

а) Докажите, что треугольник $A_1BC_1$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия, равным $\cos B$.

б) Найдите длину стороны $AC$.

в) Найдите $S_{ABC}$.

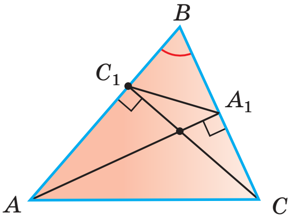



*Рис. 21*

## *Реальная геометрия*

На рисунке 22 изображен дорожный знак «Крутой подъем 12 %». Он означает, что через каждые 100 м, отсчитываемых по горизонтали, высота положения точки увеличивается на 12 м.

**Задание 1.** Определите величину угла подъема при таком знаке, используя понятие тангенса угла.

**Задание 2.** Вычислите, используя тригонометрические функции, на какую высоту относительно первоначального положения поднимется автомобиль, если он проедет по дороге 240 м в гору. Проверьте полученный результат, решив эту же задачу, используя подобие треугольников.

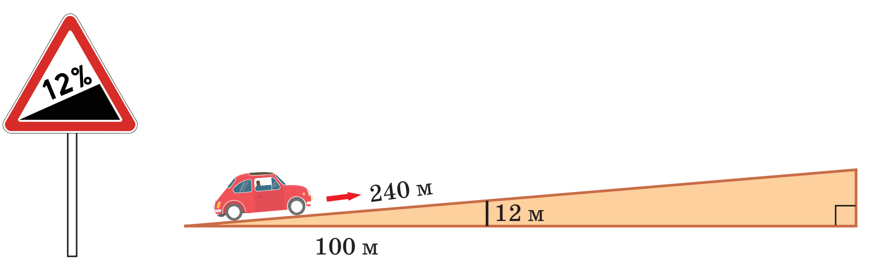



*Рис. 22*

# § 2. Решение прямоугольного треугольника

## 1. Алгоритм решения прямоугольного треугольника

Под *решением прямоугольного треугольника* понимают нахождение его неизвестных сторон и углов по некоторым элементам, определяющим этот треугольник. Рассмотрим три задачи:

1) нахождение катета по гипотенузе и острому углу;
2) нахождение катета по другому катету и острому углу;
3) нахождение гипотенузы по катету и острому углу.

**Задача 1.** *Гипотенуза прямоугольного треугольника равна* 6, *острый угол равен* 32° (рис. 23). *Найти катет, прилежащий к данному углу. Ответ округлить до* 0,1.

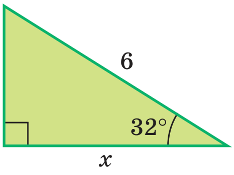


*Рис. 23*

Решение. Примем длину искомого катета за $x$.

$$\left(\text{Известно: } \cos\alpha = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}.\right)$$

$\cos 32° = \frac{x}{6}$, (шаг 1) $x = 6 \cdot \cos 32°$, (шаг 2) $x \approx 6 \cdot 0{,}8480 \approx 5{,}1$. (шаг 3)

Ответ: 5,1.

**Задача 2.** *Катет прямоугольного треугольника равен* 2,5, *а прилежащий к нему угол равен* 68° (рис. 24). *Найти другой катет. Ответ округлить до* 0,1.

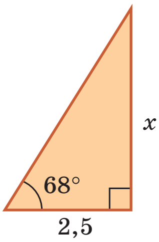


*Рис. 24*

Решение. Примем длину неизвестного катета за $x$.

$$\left(\text{Известно: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{прилежащий катет}}.\right)$$

$\operatorname{tg} 68° = \frac{x}{2{,}5}$, (шаг 1) $x = 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 68°$, (шаг 2) $x \approx 2{,}5 \cdot 2{,}4751 \approx 6{,}2$. (шаг 3)

Ответ: 6,2.

**Задача 3.** *Катет прямоугольного треугольника равен* 4,2, *противолежащий ему угол равен* 29° (рис. 25). *Найти гипотенузу треугольника. Ответ округлить до* 0,1.

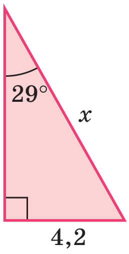


*Рис. 25*

Решение. Примем длину гипотенузы за $x$.

$$\left(\text{Известно: } \sin\alpha = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{гипотенуза}}.\right)$$

$\sin 29° = \frac{4{,}2}{x}$, $x \cdot \sin 29° = 4{,}2$,

$$x = \frac{4{,}2}{\sin 29°} \approx \frac{4{,}2}{0{,}4848} \approx 8{,}7.$$

Ответ: 8,7.

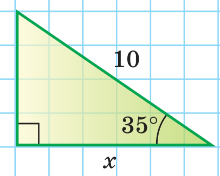
А теперь выполните **Тест 1**.

### Тест 1

Катет $x$ равен:

а) $10 \sin 35°$; б) $\dfrac{10}{\cos 35°}$;

в) $10 \cos 35°$; г) $10 \operatorname{ctg} 35°$.




## 2*. Правила решения прямоугольного треугольника

Преобразуем формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса и запишем результаты для треугольника на рисунке 26:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad a = c \cdot \sin\alpha, \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad b = c \cdot \cos\alpha, \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha, \qquad b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, \qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \qquad a = \frac{b}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

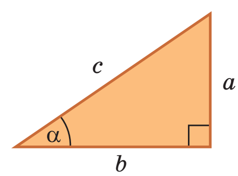


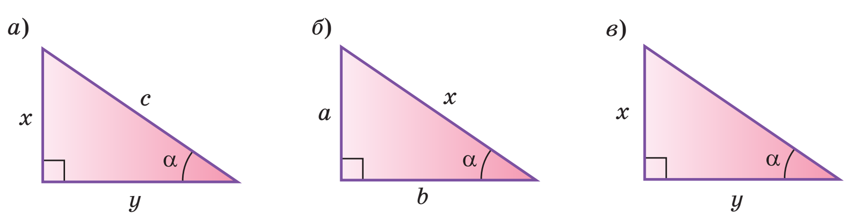

*Рис. 26*

Удобно пользоваться следующими правилами:

**Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла** (рис. 27, *а*).

**Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла** (рис. 27, *б*).

**Катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к первому катету угла** (рис. 27, *в*).




$$x = c \sin\alpha \qquad\qquad x = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad\qquad x = y \operatorname{tg}\alpha$$

$$y = c \cos\alpha \qquad\qquad x = \frac{b}{\cos\alpha} \qquad\qquad y = x \operatorname{ctg}\alpha$$

*Рис. 27*

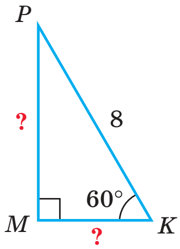



*Рис. 28*

**Пример.**

В $\triangle MPK$ известно: $\angle M = 90°$, $\angle K = 60°$, $PK = 8$ (рис. 28).

$$MP = PK \cdot \sin K = 8 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$MK = PK \cdot \cos K = 8 \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

### Полезно запомнить!

Если в прямоугольном треугольнике с углом $30°$ (или $60°$) дан *меньший катет* $a$, то *больший катет* $b = a\sqrt{3}$ (рис. 29, *а*). А если дан *больший катет* $b$, то *меньший катет* $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$ (рис. 29, *б*).

Если в прямоугольном треугольнике с углом $45°$ дан *катет* $a$, то *гипотенуза* $c = a\sqrt{2}$ (рис. 30, *а*), а если дана *гипотенуза* $c$, то *катет* $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (рис. 30, *б*).

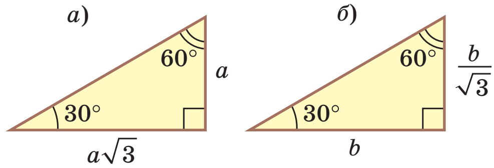



*Рис. 29*

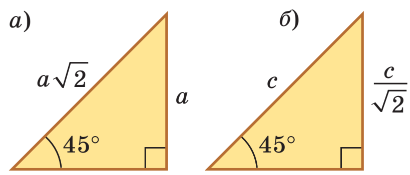


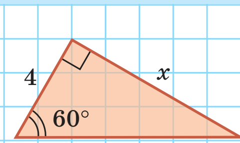

*Рис. 30*

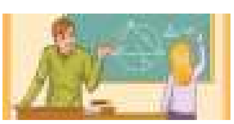
А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Длина стороны $x$ равна:

а) 8; б) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; г) 6.



## Задания к § 2

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *В прямоугольном треугольнике ABC известно:* $\angle C = 90°$, $AC = 8$, $\angle A = \alpha$, $CH$ — *высота, проведенная к гипотенузе* (рис. 31). *Найти проекцию HB катета BC на гипотенузу.*

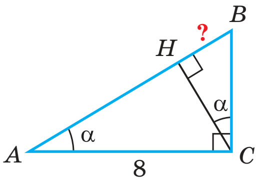


Рис. 31

Решение. Заметим, что $\angle BCH = \angle A = \alpha$, так как эти углы дополняют $\angle B$ до $90^\circ$. Из $\triangle ABC$ $\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, $BC = AC\operatorname{tg}\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha$. Из $\triangle BHC$ $\frac{HB}{BC} = \sin\alpha$, $HB = BC\sin\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

Ответ: $8\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

**Задача 2*.** *В равнобедренной трапеции ABCD меньшее основание BC равно* 7, *боковая сторона AB равна* 10, $\sin A = 0{,}8$. *Найти площадь трапеции.*

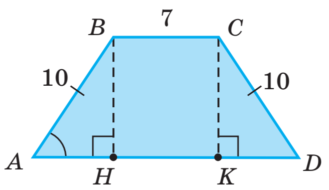
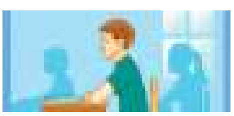


Рис. 32

Решение. Площадь трапеции находится по формуле $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2}\cdot h$. Найдем большее основание и высоту трапеции. Проведем в трапеции высоты $BH$ и $CK$ (рис. 32). Так как $HBCK$ — прямоугольник (все углы прямые), то $HK = BC = 7$. Из равенства прямоугольных треугольников $AHB$ и $DKC$ (по катету и гипотенузе) $AH = KD$. Из прямоугольного треугольника $AHB$ находим: $BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot 0{,}8 = 8$, откуда $AH = 6$ (пифагорова тройка 6, 8, 10). Тогда $AD = 2AH + HK = 2 \cdot 6 + 7 = 19$, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}\cdot BH = \frac{7+19}{2}\cdot 8 = 104$.

Ответ: 104.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

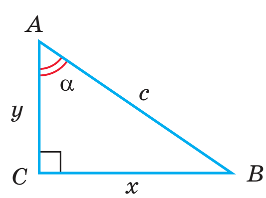


Рис. 33

**22.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ (рис. 33) $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Найдите:

а) угол $B$; б) катет $BC$; в) катет $AC$.

**23.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $\angle B = \beta$. Найдите:

а) катет $BC$; б) гипотенузу $AB$; в) $S_{ABC}$.

**24.** Найдите сторону прямоугольного треугольника, которая обозначена буквой $x$ на рисунках 34, *а*)—*в*). Ответы округлите до 0,1. При расчетах используйте калькулятор или таблицы.

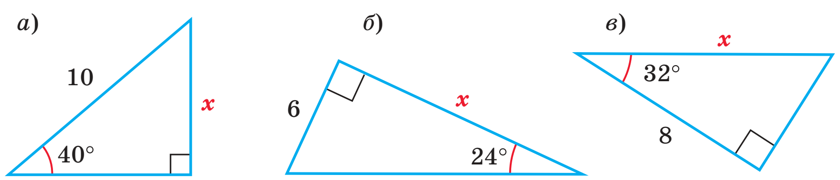


Рис. 34

**25.** Найдите неизвестные стороны треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$), если:

а) $AB = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$;  б) $AB = 8$, $\cos B = 0{,}75$;

в) $BC = 4$, $\sin A = \frac{2}{3}$;  г) $AC = 1{,}5$, $\operatorname{tg} A = 2$.

**26.** По данным на рисунках 35, *а)—г)* найдите сторону $x$ и площадь $S$:

а) прямоугольника;
б) равнобедренного прямоугольного треугольника;
в) квадрата;
г) равностороннего треугольника.

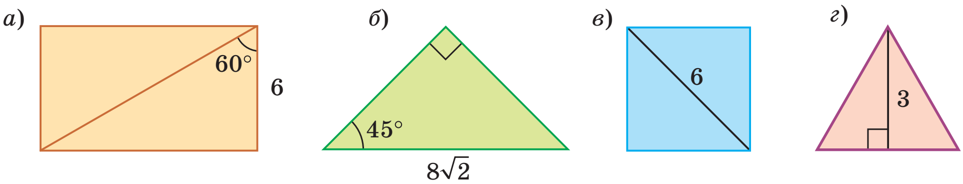
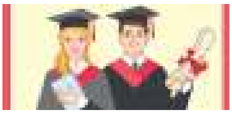



*Рис. 35*

**27.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15 см, синус острого угла при вершине равен 0,8. Вычислите площадь треугольника.

**28.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $BC = 4$ см и $AD = 10$ см. Известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите площадь трапеции.

**29.** Дан параллелограмм $ABCD$. Его высота $BK$ проведена к стороне $AD$, $AK : KD = 1 : 2$, $BC = 24$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\cos C = \frac{4}{5}$.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**30*.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, высота $CH$ равна 12, медиана $CM$ равна 15. Найдите синус меньшего острого угла треугольника $ABC$.

**31*.** а) Боковая сторона равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$) равна $a$, угол при основании равен $\alpha$ (рис. 36). Найдите площадь треугольника $ABC$.
б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$) и углом $\alpha$ при большем основании (рис. 37). Найдите площадь трапеции.

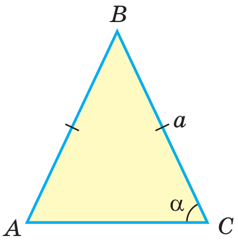



Рис. 36

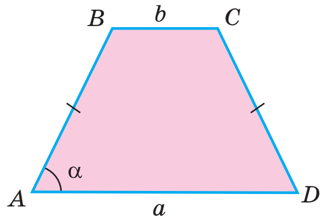



Рис. 37

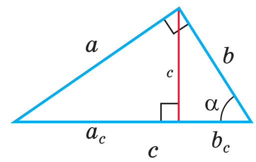



Рис. 38

**32*.** В треугольнике $ABC$ высота $BH$ и медиана $BM$ делят $\angle ABC$ на три равных угла. Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

**33*.** В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза $c$ и острый угол $\alpha$ (рис. 38). Найдите: катет $a$, катет $b$, высоту $h_c$, проекции $a_c$ и $b_c$ катетов $a$ и $b$ на гипотенузу.

## Моделирование

Определите, можно ли разместить под лестницей длиной 6 м, составляющей с полом угол в 50° (рис. 39), ящик с размерами $2 \times 2 \times 3$ (м). Рассмотрите разные варианты расположения ящика (ящик можно класть набок).

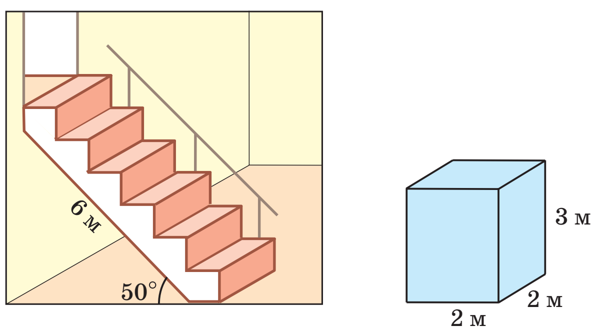



Рис. 39

## Гимнастика ума

По рисунку 40 найдите:

а) $\operatorname{tg} C$;
б) $\sin A$;
в) $\operatorname{ctg} B$.

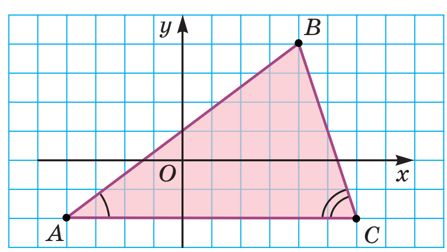



Рис. 40

При помощи **Интернета** выясните, что означает термин «*тригонометрия*», когда он возник. В каких сферах деятельности используется тригонометрия.

## § 3. Тригонометрические формулы

Используя формулы $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, где $a$ и $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза прямоугольного треугольника, можно получить формулы, связывающие значения тригонометрических функций острого угла.

### 1. Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$.

Тогда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

**Следствие.**

*Так как синус и косинус острого угла* $\alpha$ *положительны, то*

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

### 2. Выражение тангенса и котангенса через синус и косинус

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Доказательство. а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, б) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$.

**Следствие.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Проверим справедливость основного тригонометрического тождества. Верно ли, например, что $\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$? Да, это верно, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

### 3. Основная задача

Дано: $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\beta$ — острый угол.

Найти: $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.

Решение. *Способ* 1. Используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$, $\cos^2\beta = 1 - \frac{25}{169}$, $\cos^2\beta = \frac{144}{169}$, $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$. Так как косинус *острого угла* больше нуля, то $\cos\beta = \frac{12}{13}$; откуда $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{12}{5}$.

*Способ* 2. Изобразим прямоугольный треугольник с катетом 5 и гипотенузой 13 (рис. 41). Синус угла, противолежащего данному катету, равен $\frac{5}{13}$. Поэтому этот угол равен β. По теореме Пифагора другой катет равен $\sqrt{13^2-5^2}=12$. Тогда $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{12}{5}$.

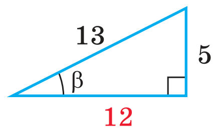


*Рис. 41*

*Способ* 3. Пусть катет, противолежащий углу β, равен $5x$, тогда гипотенуза равна $13x$. По теореме Пифагора прилежащий катет равен $\sqrt{(13x)^2-(5x)^2}=\sqrt{144x^2}=12x$. Отсюда $\cos\beta=\frac{12x}{13x}=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$ $=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{12}{5}$.

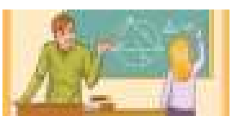
Ответ: $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$.

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Если $\cos\alpha=0{,}8$ и угол α — острый, то $\sin\alpha$ равен:

а) 0,8;  б) 0,6;  в) 0,2;  г) 1,6.



## Задания к § 3

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
**ключевые задачи**

**Задача 1.** *В параллелограмме ABCD* (рис. 42) *сторона* $BC=50$ *см, высота* $BK=30$ *см,* $\cos A=\frac{8}{17}$. *Найти периметр параллелограмма.*

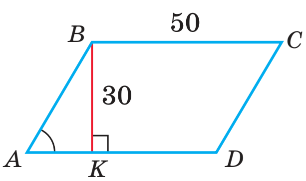


*Рис. 42*

Решение. Из треугольника $ABK$ находим: $\sin A=\frac{BK}{AB}$, $AB=\frac{BK}{\sin A}$. Из основного тригонометрического тождества следует: $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

$\sin^2 A+\left(\frac{8}{17}\right)^2=1$, $\sin^2 A=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}$, $\sin A=\frac{15}{17}$

(так как угол $A$ — острый, то $\sin A>0$). Тогда

$AB=\frac{BK}{\sin A}=\frac{30}{\frac{15}{17}}=34$ (см), $P_{ABCD}=2(AB+BC)=2\cdot(34+50)=168$ (см).

Ответ: 168 см.

**Задача 2*.** *Доказать, что при увеличении угла от* $0°$ *до* $90°$:

а) *синус угла увеличивается от* 0 *до* 1, *а косинус — уменьшается от* 1 *до* 0;

б) *тангенс угла увеличивается от* 0 *до бесконечности.*

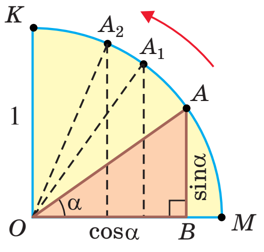



*Рис. 43*

Решение. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники с гипотенузой, равной 1. Для этого опишем радиусом $OM$, равным 1, четверть окружности — дугу $MK$ (рис. 43). Пусть $\angle AOM = \alpha$. Опустим из точки $A$ перпендикуляр $AB$ на $OM$. Тогда $\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$, $\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$. При повороте радиуса $OM$ вокруг центра $O$ против часовой стрелки, начиная от $OM$ и заканчивая $OK$, угол $\alpha$ будет увеличиваться от $0°$ до $90°$ (образуя указанные на чертеже углы: $\angle MOA$, $\angle MOA_1$, $\angle MOA_2$ и т. д.). Величина катета $AB$, противолежащего углу $\alpha$, будет увеличиваться от 0 до 1. А величина катета $OB$, наоборот, будет уменьшаться от 1 до 0. Таким образом, **при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его синус увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.**

Из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ также следует (учитывая положительность синуса и косинуса острого угла), что с увеличением синуса от 0 до 1 косинус уменьшается от 1 до 0.

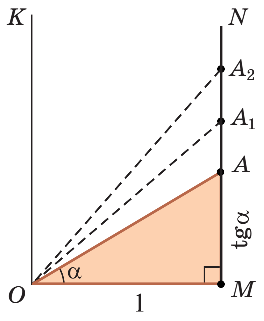
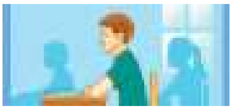



*Рис. 44*

б) Для определения изменения тангенса угла удобно рассматривать треугольники, у которых прилежащий катет не изменяется и остается равным 1, а противолежащий катет изменяется. Рассмотрим прямоугольный треугольник $AOM$, у которого отрезок $OM = 1$, $\angle AOM = \alpha$ (рис. 44). По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$. Угол $\alpha$ станем изменять, перемещая точку $A$ по прямой $MN$, начиная от точки $M$ и проходя через точки $A$, $A_1$, $A_2$ и т. д. При этом угол $\alpha$ и его тангенс начнут возрастать. Таким образом, когда угол $\alpha$ при движении точки $A$ вверх будет стремиться к углу $KOM$, равному $90°$, то тангенс этого угла будет неограниченно возрастать.

К такому же выводу можно прийти, рассматривая формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. При увеличении угла $\alpha$ от $0°$ до $90°$ числитель дроби будет увеличиваться от 0 до 1, а знаменатель — уменьшаться от 1 до 0, значит, вся дробь будет увеличиваться от 0 до бесконечности. Таким образом, **при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его тангенс увеличивается от 0 до бесконечности.**



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**34.** Дан острый угол $\alpha$.

а) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

б) Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

в) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

г) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

**35.** а) Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha$ — острый угол и $\sin\alpha = 0{,}8$.

б) Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha$ — острый угол и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

**36.** Заполните пропуски в формулах, переписав их в тетрадь:

а) $\sin^2\beta + \ldots = 1$; б) $\cos^2\alpha = 1 - \ldots$;

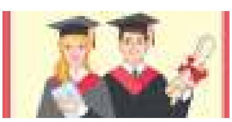
в) $\ldots = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ldots}{\ldots}$.

**37.** Найдите:

а) синус, тангенс и котангенс острого угла, косинус которого равен $0{,}6$;

б) косинус, тангенс и котангенс острого угла, синус которого равен $\frac{7}{25}$.

**38.** В окружности с радиусом, равным 6 см, проведены диаметр $AB$ и хорда $AC$. Найдите длину хорды $BC$, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**39*.** Сравните величины острых углов $\alpha$ или $\beta$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$.

**40*.** Выясните, что больше: $\sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — острый угол.

**41*.** Докажите, что для острого угла $\alpha$ справедливо тождество $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

**42*.** Выведите для острого угла $\alpha$ формулы $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, разделив почленно обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$ и на $\cos^2\alpha$.

**43*.** Найдите синус острого угла $\alpha$, если его котангенс равен $1\frac{1}{3}$.

## Реальная геометрия

На рисунке 45 показаны размеры железнодорожной насыпи, поперечное сечение которой имеет форму равнобедренной трапеции. Найдите по указанным размерам примерную высоту $h$ насыпи. Ответ округлите до 0,1 м.


*Рис. 45*

## Геометрия 3D

**Задача.** В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат, диагональ которого $AC = 4\sqrt{6}$ см. Диагональ $CD_1$ боковой грани составляет с ребром основания $DC$ угол 60° (рис. 46). Найдите объем параллелепипеда.

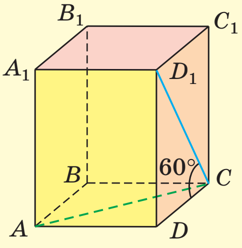



*Рис. 46*

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле $V = abc$, где $a$, $b$ и $c$ — его измерения. Так как $ABCD$ — квадрат, то $AD = DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного треугольника $D_1DC$ находим $D_1D = DC \operatorname{tg} 60° = DC\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ (см). Искомый объем $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 576$ (см$^3$).

Ответ: 576 см$^3$.

**Задание.** Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 47). Периметр ее основания равен 12 см, диагональ $CB_1$ боковой грани составляет с боковым ребром $BB_1$ угол, котангенс которого равен 1,5. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

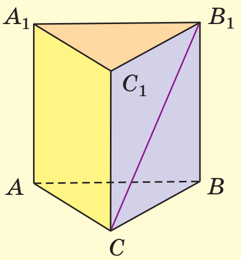



*Рис. 47*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.
3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного угла.

### Умеем

1. Решать прямоугольный треугольник.
2. Зная $\sin\alpha$, где $\alpha$ — острый угол, находить $\cos\alpha$ и обратно.
3. Зная $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$, где $\alpha$ — острый угол, находить $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.
4. Доказывать основное тригонометрическое тождество.

# § 4. Синус, косинус, тангенс и котангенс тупого угла

### 1. Определение значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла $\alpha$ от 0° до 180°

Ранее мы дали определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла через отношение сторон прямоугольного треугольника. Сделаем теперь это для углов от 0° до 180°.

Рассмотрим полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 48). От положительной полуоси $Ox$ против часовой стрелки отложим острый угол $\alpha$, сторона которого пересекает полуокружность в точке $M(x;\ y)$. Из прямоугольного треугольника $OMN$, где $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, получаем: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, то есть синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла $\alpha$ выражаются через координаты $x$ и $y$ точки $M(x;\ y)$. Точно так же определяются значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для любого угла $\alpha$ из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Таким образом, синусом угла $\alpha$ называется ордината $y$, косинусом — абсцисса $x$, тангенсом — отношение ординаты к абсциссе $\frac{y}{x}$, а котангенсом — отношение абсциссы к ординате $\frac{x}{y}$ точки $M$ единичной полуокружности.

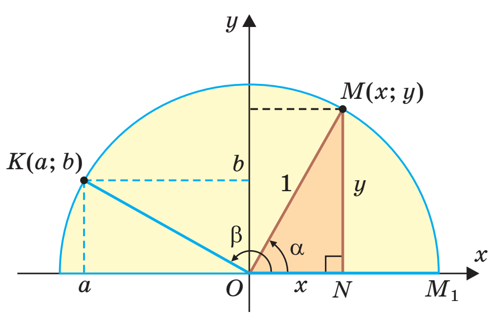



*Рис. 48*

Например, для тупого $\angle KOM_1 = \beta$ (рис. 48), где $K(a;\ b)$, получим:

$$\sin\beta = b,\ \cos\beta = a,\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Для любого положения точки $M(x;\ y)$ на единичной полуокружности верно равенство $x^2 + y^2 = 1$ (докажите самостоятельно). Поэтому для углов $\alpha$, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, верно основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Также верны тождества: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

## 2. Нахождение синуса, косинуса, тангенса и котангенса тупых углов

Пусть $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, откуда $\angle A_1OB = 180° - \alpha$ (рис. 49). Так как $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$ по гипотенузе и острому углу, то $A_1B_1 = AB$, $OB_1 = OB$.

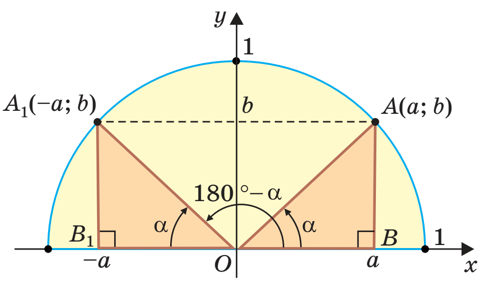



*Рис. 49*

Точки $A$ и $A_1$ имеют координаты: $A(a;\ b)$ и $A_1(-a;\ b)$. Тогда $\sin\alpha = b$, $\cos\alpha = a$, $\sin(180° - \alpha) = b$, $\cos(180° - \alpha) = -a$, то есть для углов от $0°$ до $180°$ справедливы равенства:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Можно пользоваться следующим правилом:

***Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла.***

***Косинус тупого угла равен косинусу смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».***

**Пример 1.** $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, а затем наоборот, получим равенства:

$$\operatorname{tg}\,(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\,\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\,(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\,\alpha.$$

Можно пользоваться следующим правилом:

***Тангенс (котангенс) тупого угла равен тангенсу (котангенсу) смежного с ним острого угла, взятому со знаком «минус».***

**Пример 2.** $\operatorname{tg}120^\circ = -\operatorname{tg}60^\circ = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}135^\circ = -\operatorname{ctg}45^\circ = -1$.

Указанные формулы и правила позволяют находить значения тригонометрических функций тупого угла через значения тригонометрических функций острого угла, который дополняет данный тупой угол до 180°: синусы углов, дополняющих друг друга до 180°, равны между собой, а косинусы, тангенсы и котангенсы — противоположны. Так как синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла положительные, то синус тупого угла положительный, а косинус, тангенс и котангенс — отрицательные.

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Вычислите: $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$.

### 3*. Значения тригонометрических функций для углов 0°, 90°, 180°

Если луч $OM$ совпадет с лучом $OM_1$ (рис. 50), то будем считать, что $\alpha = 0^\circ$. Тогда:

а) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значение $\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно;

б) $\angle M_2OM_1 = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$; значение $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно;

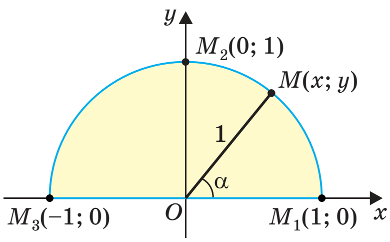


*Рис. 50*

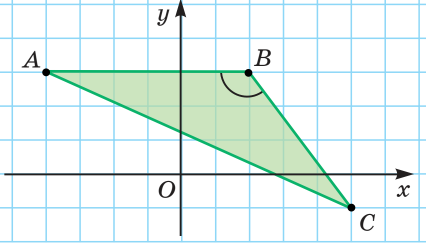
в) $\angle M_3OM_1 = 180^\circ$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$; значение $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0}$ не определено, так как деление на нуль невозможно.

Поскольку проекции радиуса, равного 1, на оси координат меньше либо равны 1, то для углов $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ справедливы неравенства: $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ .

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

По рисунку найдите косинус угла $B$.



### *Гимнастика ума*

Если максимально расставить пальцы руки, то углы между мизинцем и остальными пальцами будут составлять примерно 30°, 45°, 60°, 90° (рис. 51).

Интересно, что если пальцы пронумеровать цифрами от 0 до 4, как на рисунке, то для нахождения синуса углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90° можно использовать формулу $\sin\alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$, где $\alpha$ — данный угол, а $n$ — номер пальца. Проверьте самостоятельно работу этой формулы.

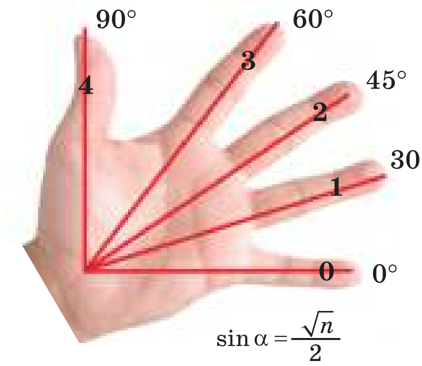



*Рис. 51*

## Задания к § 4

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти* $\cos\alpha$ *и* $\operatorname{tg}\alpha$, *если* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ *и* $\alpha$ — *тупой угол.*

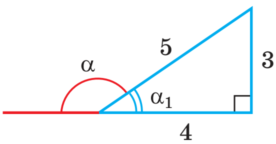
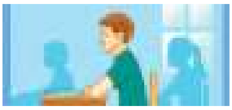



*Рис. 52*

Решение. *Способ* 1. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Поскольку угол $\alpha$ — тупой, то его косинус отрицательный. Поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$.

*Способ* 2. Синус острого угла $\alpha_1$, смежного с данным тупым углом $\alpha$, равен также $\frac{3}{5}$. Построим прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (рис. 52). В нем $\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$. Так как косинусы смежных углов противоположны, то $\cos\alpha = -\cos\alpha_1 = -\frac{4}{5}$. Аналогично, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**44.** Точки $M_1$, $M_2$, ..., $M_8$ получаются при повороте радиуса $OM$ единичной полуокружности вокруг точки $O$ против часовой стрелки соответственно на углы 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180° (рис. 53).

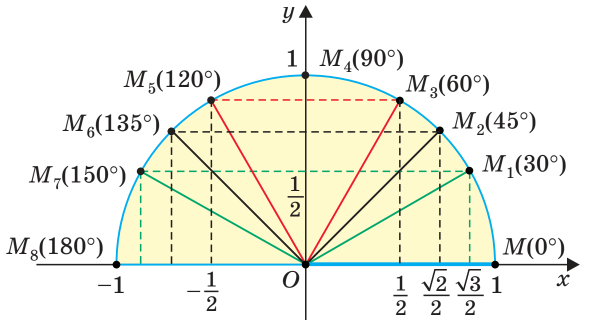



*Рис. 53*

а) Используя рисунок, найдите координаты точек $M$, $M_1$, $M_2$, ..., $M_8$.
б) По координатам соответствующих точек найдите $\sin 135°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 150°$.
в)* Найдите $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\sin 90°$, $\cos 90°$.

**45.** При помощи формул $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ или правил нахождения значений тригонометрических функций тупого угла найдите:

а) $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$;
б) $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$;
в) $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{ctg} 150°$.

**46.** Известно, что угол $\alpha$ тупой. Найдите $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\alpha = 0{,}6$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

**47.** Известно, что $90° < \alpha < 180°$. Найдите $\sin\alpha$, если:

а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; в) $\cos\alpha = -0{,}2$.

**48.** а) В $\triangle ABC$ (рис. 54) стороны $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $\sin\angle ABC = \frac{3}{4}$. Найдите высоту $AH$ и $S_{ABC}$.
б) В параллелограмме $ABCD$ (рис. 55) стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\cos\angle ABC = -0{,}6$. Найдите высоту $CK$ и $S_{ABCD}$.

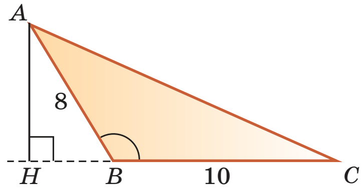



*Рис. 54*

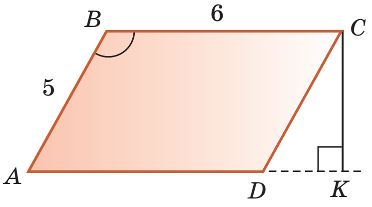
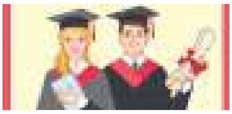



*Рис. 55*

**49.** Используя калькулятор (таблицы) и тригонометрические формулы (правила), найдите, округлив ответ до 0,0001:

а) $\sin 100°$; б) $\cos 175°$; в) $\operatorname{tg} 115°$; г) $\operatorname{ctg} 140°$.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**50*.** а) Косинус одного из смежных углов равен –0,3. Найдите косинус другого угла.
б) Синус тупого угла параллелограмма равен 0,8. Найдите тангенс острого угла параллелограмма.

**51*.** Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если угол $\alpha$ равен:

а) $0°$; б) $90°$; в) $180°$.

**52*.** Используя единичную полуокружность, докажите, что при увеличении угла от $0°$ до $90°$ его синус увеличивается от 0 до 1, косинус уменьшается от 1 до 0; при увеличении угла от $90°$ до $180°$ его синус уменьшается от 1 до 0, косинус уменьшается от 0 до –1.

**53*.** Докажите, что для углов треугольника $ABC$ верно равенство:

а) $\sin A = \sin(B + C)$; б) $\cos A = -\cos(B + C)$.

### *Гимнастика ума*

1. Найдите значение выражения $\cos 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 30° \cdot \ldots \cdot \cos 180°$.
2. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}\, 1° \cdot \mathrm{tg}\, 2° \cdot \mathrm{tg}\, 3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\, 88° \cdot \mathrm{tg}\, 89°$.

## § 5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма

Тригонометрические функции позволяют получить формулы для вычисления площади треугольника и площади параллелограмма. Сформулируем их в виде двух теорем.

Теорема. **Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, т. е.** $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Доказательство. Пусть в треугольнике $ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$ — острый, $AK = h$ — высота (рис. 56, *а*).

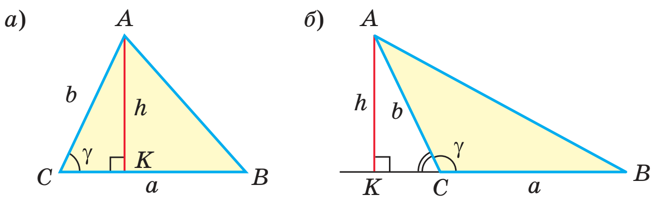



*Рис. 56*

Из прямоугольного треугольника $AKC$ $\sin\gamma = \frac{h}{b}$, $h = b\sin\gamma$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

Если угол $\gamma$ тупой (рис. 56, *б*), то $\angle ACK = 180° - \gamma$ — острый. Из прямоугольного треугольника $AKC$ следует, что $h = b\sin(180° - \gamma)$. Так как $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b\sin\gamma$.

Если $\gamma = 90°$, то $\triangle ABC$ — прямоугольный с катетами $a$ и $b$. Учитывая, что $\sin 90° = 1$, получим: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
Теорема доказана.

Теорема. **Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними, т. е. $S_{пар} = ab\sin\alpha$.**

Используя рисунок 57, докажите эту теорему самостоятельно.

*Замечание.* Если $\alpha = 90°$, то параллелограмм является прямоугольником. Его площадь $S = ab\sin 90° = ab$, так как $\sin 90° = 1$. Таким образом, формула площади прямоугольника $S = ab$ — частный случай формулы площади параллелограмма $S = ab\sin\alpha$.

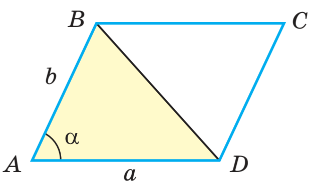
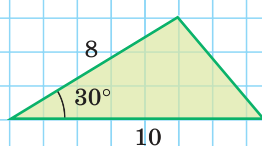


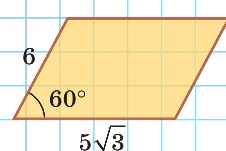

*Рис. 57*

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Найдите площади треугольника и параллелограмма, изображенных на рисунке.




Известно, что слово «синус» в переводе с латинского имеет множество значений: изгиб, дуга, пазуха, бухта, впадина, залив, хорда, забота и нежная любовь. При помощи **Интернета** выясните:

а) какое из значений подходит к математическому понятию «синуса»;

б) какие из значений относятся к медицине и почему насморк врачи иногда называют синуситом.

## Задания к § 5

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Дан параллелограмм ABCD, площадь которого 40 см², а периметр 36 см. Найти стороны параллелограмма, если его угол D равен 150° (рис. 58).*

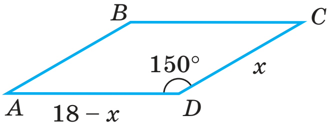



Рис. 58

Решение. Полупериметр параллелограмма равен 18 см. Если $CD = x$ см, то $AD = (18 - x)$ см. Тогда
$S_{ABCD} = CD \cdot AD \cdot \sin D = x(18 - x) \cdot \sin 150°$ см².
Так как $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}x(18 - x)$ см².
По условию $S_{ABCD} = 40$ см². Составим и решим уравнение: $\frac{1}{2}x(18 - x) = 40$, $x^2 - 18x + 80 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = 8$, $x_2 = 10$ — корни. Если $CD = 8$ см, то $AD = 10$ см, если $CD = 10$ см, то $AD = 8$ см.
Ответ: 8 см, 10 см.

**Задача 2*.** *Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, т. е.* $\boxed{S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.}$

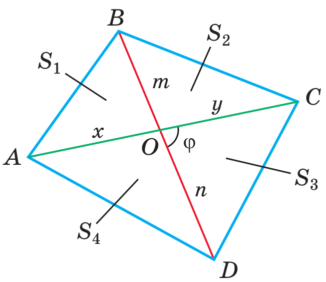



Рис. 59

Доказательство. Пусть диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ четырехугольника $ABCD$ (рис. 59) пересекаются в точке $O$, $\angle COD = \varphi$, $S_1 = S_{AOB}$, $S_2 = S_{BOC}$, $S_3 = S_{COD}$, $S_4 = S_{AOD}$. Докажем, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.
Обозначим $AO = x$, $OC = y$, $BO = m$, $OD = n$. Заметим, что $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, $\angle BOC = 180° - \angle COD$ по свойству смежных углов. Поэтому $\sin\angle AOB = \sin\angle COD = \sin\varphi$, $\sin\angle BOC = \sin\angle AOD = \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$. По формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ получим:

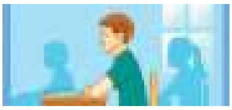
$$S_1 = \frac{1}{2}xm\sin\angle AOB = \frac{1}{2}xm\sin\varphi,\quad S_2 = \frac{1}{2}ym\sin\angle BOC = \frac{1}{2}ym\sin\varphi,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}yn\sin\angle COD = \frac{1}{2}yn\sin\varphi,\quad S_4 = \frac{1}{2}xn\sin\angle AOD = \frac{1}{2}xn\sin\varphi.$$

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}xm\sin\varphi + \frac{1}{2}ym\sin\varphi + \frac{1}{2}yn\sin\varphi + \frac{1}{2}xn\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\big(m(x + y) + n(x + y)\big)\sin\varphi = \frac{1}{2}(x + y)(m + n)\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi.$$

Утверждение доказано.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**54.** Используя формулы $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ и $S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha$, найдите площади треугольников и параллелограмма, изображенных на рисунке 60.

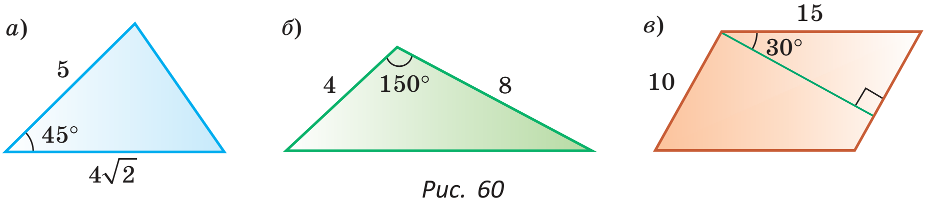



*Рис. 60*

**55.** Найдите площадь треугольника $ABC$, если:

а) $AB = 6{,}5$ см, $BC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle B = 120°$;
б) $AC = 16$ см, $BC = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A + \angle B = 135°$.

**56.** Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если:

а) $AB = 4{,}2$ см, $AD = 6$ см, $\sin C = \frac{2}{3}$;

б) $P_{ABCD} = 48$ см, $BC = 13$ см, $\cos B = -\frac{12}{13}$.

**57.** а) Площадь параллелограмма равна $18\sqrt{3}$ см$^2$, одна из его сторон на 5 см больше другой, а один из углов равен 60°. Найдите периметр параллелограмма.
б) Стороны параллелограмма относятся как 3 : 5, площадь равна 30 см$^2$, а тупой угол параллелограмма равен 150°. Найдите периметр параллелограмма.

**58.** а) Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной $6\sqrt{2}$ см, и углом при основании, равным 75°.

б) Площадь равнобедренного треугольника равна 16 см$^2$, угол при основании 15°. Найдите длину боковой стороны треугольника.

**59.** Выведите формулу площади равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, используя формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

**60.** У ромба $ABCD$ $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Докажите, что $S_{ABCD} = a^2\sin\alpha$.

## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**61*.** а) Площадь равнобедренной трапеции равна $36\sqrt{3}$ см$^2$, угол между диагональю и основанием равен 30°. Найдите длину диагонали трапеции.

б) Найдите площадь равнобедренной трапеции с диагональю, равной 12 см, и углом между диагональю и стороной основания, равным 15°.

**62*.** а) Две стороны треугольника имеют длины $a$ и $b$. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь треугольника.

б) Диагонали выпуклого четырехугольника равны $d_1$ и $d_2$. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать площадь четырехугольника.

**63*.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Используя формулу $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, докажите, что $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

## § 6. Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике

Если для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ выполняется пропорция $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то число $b$ называется *средним пропорциональным чисел* $a$ и $c$ (между числами $a$ и $c$). Из указанной пропорции $b^2 = ac$, откуда $b = \sqrt{ac}$. В такой форме записи число $b$ еще называют *средним геометрическим* чисел $a$ и $c$.

**Пример.** Число 4 является средним пропорциональным, или средним геометрическим чисел 2 и 8, так как $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, или $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$.

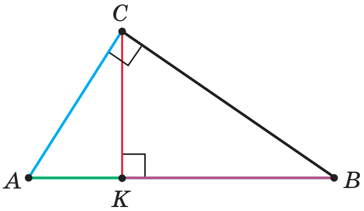


*Рис. 61*

В прямоугольном треугольнике $ABC$, где $\angle C = 90°$, проведем высоту $CK$ (рис. 61). Отрезок $AK$ является проекцией катета $AC$ на гипотенузу, а отрезок $BK$ — проекцией катета $BC$ на гипотенузу. Катеты, гипотенуза, высота и проекции катетов на гипотенузу связаны отношениями, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема (о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике).

**а) Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е.** $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$ (см. рис. 61).

**б) Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, т. е.** $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$, $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$.

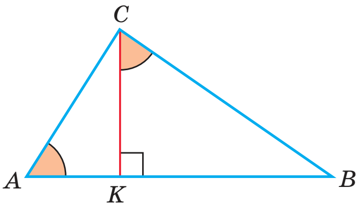



*Рис. 62*

Доказательство. а) Заметим, что если $\angle ACB = 90°$, $CK \perp AB$, то $\angle BCK = \angle A$ (эти углы дополняют $\angle B$ до 90°) (рис. 62). Из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}$, из $\triangle BCK$ $\operatorname{tg}\angle BCK = \frac{BK}{CK}$. Отсюда $\frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}$, $CK^2 = AK \cdot BK$, $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$.

б) Из $\triangle ACK$ $\cos A = \frac{AK}{AC}$, из $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$, откуда $\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC^2 = AB \cdot AK$, $AC = \sqrt{AB \cdot AK}$.

Аналогично доказывается, что $BC = \sqrt{AB \cdot KB}$. Теорема доказана.

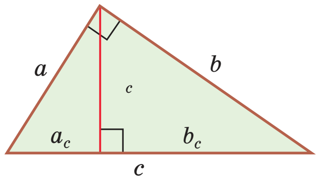



*Рис. 63*

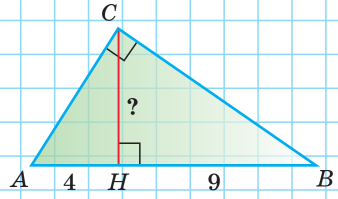
Обозначив катеты $a$ и $b$, гипотенузу $c$, высоту $h_c$, проекции катетов на гипотенузу $a_c$ и $b_c$ (рис. 63), получим следующие формулы:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c, \text{ или } h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$
$$a^2 = c \cdot a_c, \text{ или } a = \sqrt{c \cdot a_c},$$
$$b^2 = c \cdot b_c, \text{ или } b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

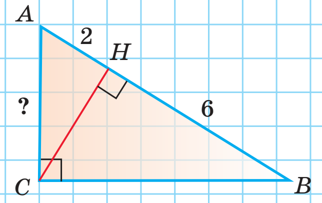
**Тест 1**

Найдите высоту $CH$ прямоугольного треугольника $ABC$.




**Тест 2**

Найдите катет $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$.




## Задания к § 6

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Найти площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 2 см и 8 см.*

Решение. Пусть $CH$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$), $AH = 2$ см — проекция катета $AC$ на гипотенузу, $HB = 8$ см —

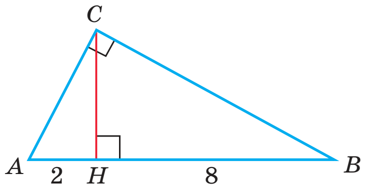


*Рис. 64*

проекция катета $CB$ на гипотенузу (рис. 64). Так как высота $CH$ есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу, то $CH = \sqrt{AH \cdot HB} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см), $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ (см$^2$).

Ответ: 20 см$^2$.

**Задача 2.** *В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK,* $BC = 3\sqrt{5}$ *см,* $AK = 12$ *см* (рис. 65). *Найти гипотенузу AB.*

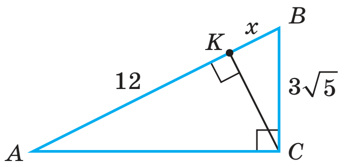


*Рис. 65*

Решение. Пусть $KB = x$ см, тогда $AB = (x + 12)$ см. Катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = AB \cdot KB$, т. е. $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (x + 12) \cdot x$, $x^2 + 12x - 45 = 0$. По теореме Виета (обратной) $x_1 = -15$, $x_2 = 3$. По смыслу задачи $x > 0$. Значит, $KB = 3$ см, $AB = 15$ см.

Ответ: 15 см.

**Задача 3*.** *При помощи циркуля и линейки построить отрезок, равный среднему геометрическому отрезков m и n.*

Решение. Пусть даны отрезки $m$ и $n$. Необходимо построить отрезок $x = \sqrt{mn}$.

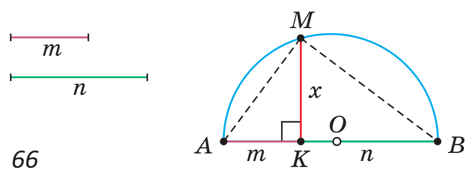


*Рис. 66*

Построение.

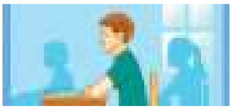
1) На произвольной прямой откладываем данные отрезки: $AK = m$, $KB = n$.

2) На отрезке $AB$ как на диаметре строим полуокружность, для чего находим середину $O$ отрезка $AB$, откуда $OA$ — радиус данной окружности.

3) Из точки $K$ восстанавливаем перпендикуляр к прямой $AB$ до пересечения с полуокружностью в точке $M$ (рис. 66).

Отрезок $MK = x$ — среднее пропорциональное отрезков $AK = m$ и $KB = n$.

Доказательство. $\angle AMB$ — прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр. В прямоугольном треугольнике $AMB$ высота $MK$ является средним пропорциональным проекций катетов $AM$ и $MB$ на гипотенузу $AB$: $MK = \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $x = \sqrt{mn}$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**64.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $CH$ из вершины прямого угла. По данным на рисунках 67, *а*)—*в*) найдите длину отрезка $x$.

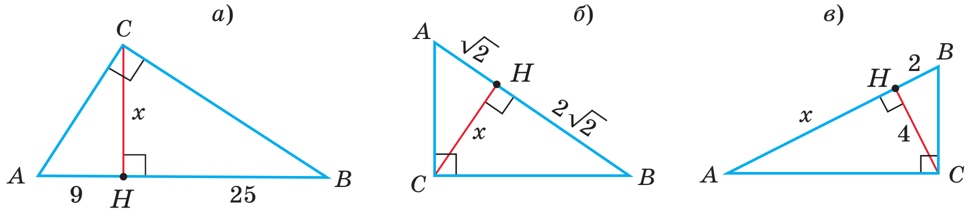



*Рис. 67*

**65.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$, $CH$ — высота, опущенная на гипотенузу. Найдите длину отрезка $x$ (рис. 68, *а*)—*в*).

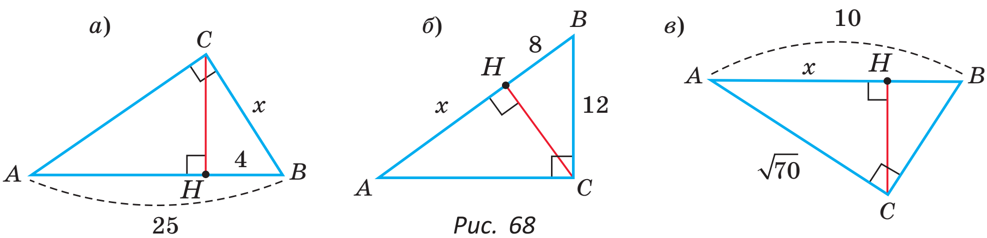



*Рис. 68*

**66.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $BC$ равен 8 см, а проекция катета $AC$ на гипотенузу $AB$ равна 12 см. Найдите длину гипотенузы.

**67.** $AB$ — диаметр окружности (рис. 69). Найдите длину перпендикуляра $MK$.

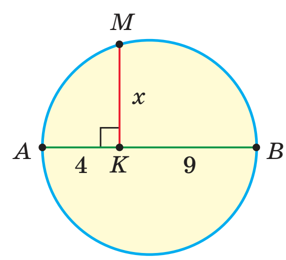
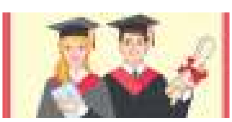



*Рис. 69*

**68.** Дан прямоугольник $ABCD$. Перпендикуляр $BK$, опущенный на диагональ $AC$, делит ее на отрезки, равные 2 см и 6 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

**69.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого высота делит гипотенузу на отрезки, равные 1,2 см и 4,8 см.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**70*.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $AC$ равен проекции катета $BC$ на гипотенузу $AB$. Найдите $\cos A$.

**71*.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$) проведена высота $CH$, катет $AC$ равен 4 см, $BH - AH = 4$ см. Найдите величину угла $A$.

## Повторение*

В 8-м классе мы доказали следующую теорему:

Теорема (о касательной и секущей). *Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, соединяющего данную точку и точку касания, равен произведению отрезков секущей, соединяющих данную точку и точки пересечения секущей с окружностью*, т. е. $a^2 = bc$ (рис. 70).

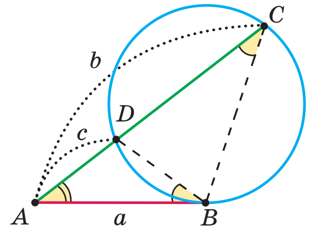


*Рис. 70*

Как видим, отрезок $a$ является средним пропорциональным между отрезками $b$ и $c$ секущей. Глядя на рисунок 70, вспомните идею доказательства теоремы.

**Задача.** Найдите $AC$ (см. рис. 70), если $AB = 4$ см, $AD = 2$ см.

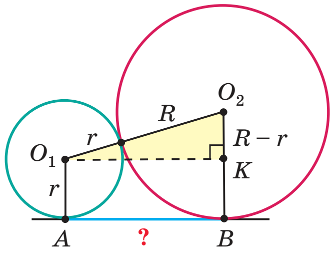


*Рис. 71*

Также в 8-м классе была рассмотрена ключевая задача о нахождении отрезка общей касательной двух касающихся внешним образом окружностей с радиусами, равными $R$ и $r$ (рис. 71). Был получен ответ: $AB = 2\sqrt{Rr}$, т. е. искомый отрезок $AB$ — это удвоенное среднее геометрическое радиусов окружностей.

Восстановите по рисунку 71 решение этой задачи.

**Задача.** Найдите длину отрезка $AB$ (см. рис. 71), если $R = 18$ см, $r = 8$ см.

## Реальная геометрия

Ребята из 9-го класса нашли высоту своей школы следующим образом. Они измерили угол, под которым видна кромка крыши школы (рис. 72), и расстояние от места измерения до фундамента школы. Угол оказался равным 67°, а расстояние 5 м. Далее они применили алгоритм решения прямоугольного треугольника. Учитывая, что рост школьника, который измерял угол, равен 180 см, ребята нашли примерную высоту школы: 13,6 м. Проверьте, не ошиблись ли ребята в вычислениях. Попробуйте найти подобным образом высоту своей школы.

Прибор, при помощи которого определяют углы на местности, называется *эклиметр*. Такой прибор можно изготовить самостоятельно. Для этого потребуется транспортир, нить с грузом и заостренная палка. Заостренную палку втыкают вертикально в землю так, чтобы нить с грузом располагалась вертикально. Поворачивая транспортир, наблюдатель смотрит вдоль прямой $AB$ (рис. 73). По отклонению нити отвеса на транспортире определяют измеряемый угол. Объясните, как определить искомый угол $\alpha$.

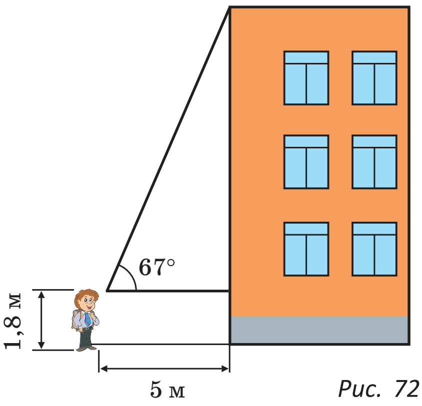


*Рис. 72*

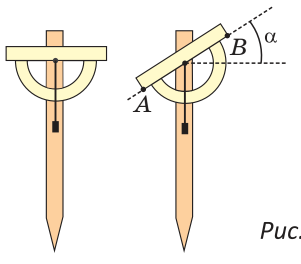


*Рис. 73*

### *Геометрия 3D*

Напомним, что в основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат и все ее боковые ребра равны.

**Задача.** На рисунке 74 изображена правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Ее боковое ребро равно 8 см, а угол $APC$ равен 120°. Перенесите чертеж пирамиды в тетрадь. Найдите:

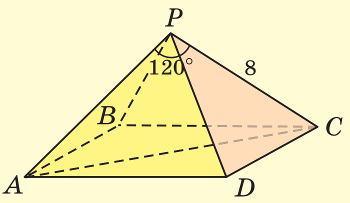



*Рис. 74*

а) площадь диагонального сечения $APC$ этой пирамиды, сделав отдельно чертеж треугольника $APC$;

б) длину высоты $PO$ пирамиды, где точка $O$ — центр основания пирамиды;

в) площадь основания пирамиды;

г) объем пирамиды по формуле $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $h$ — высота пирамиды.

Укажите размеры какого-либо параллелепипеда, который по объему равен данной пирамиде.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Формулы $\sin(180° - \alpha) = \ldots$, $\cos(180° - \alpha) = \ldots$ .
2. Как связаны синус и косинус тупого угла с синусом и косинусом смежного с ним острого угла.
3. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
4. Теорему о среднем пропорциональном (среднем геометрическом) в прямоугольном треугольнике.

### Умеем

1. Находить синус, косинус, тангенс и котангенс углов 120°, 135°, 150°.
2. Выводить формулы площади треугольника и площади параллелограмма, связанные с синусом угла.
3. Доказывать теорему о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике.

## § 7*. Креативная геометрия

### 1. Теорема о площадях треугольников с общим (равным) углом

*Площади треугольников, имеющих общий угол (или равный угол), относятся как произведения сторон, заключающих этот угол* (рис. 75), *т. е.* $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AC \cdot AB} = \frac{b_1c_1}{bc}$.

Доказательство.

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha}{\frac{1}{2}bc\sin\alpha} = \frac{b_1c_1}{bc}.$$

**Следствие.** Верно:

$$S_{AB_1C_1} = \frac{b_1}{b}\cdot\frac{c_1}{c}\cdot S_{ABC}.$$

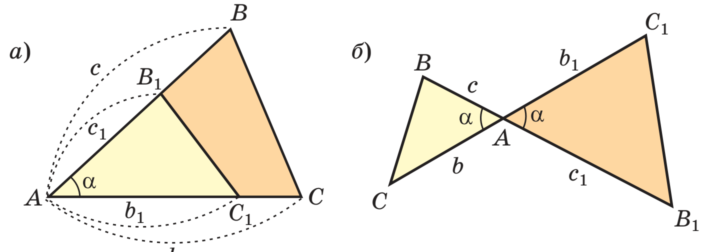



*Рис. 75*

**Задача 1.** *Площадь треугольника* $ABC$ *равна* 16, $AK : KC = 3 : 1$, $AM : MB = 1 : 2$ (рис. 76). *Найти* $S_{AMK}$.

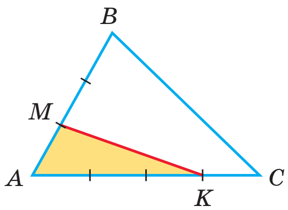



*Рис. 76*

Решение. *Способ* 1. По следствию из теоремы о площадях треугольников с общим углом получаем:

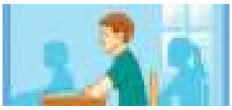
$$S_{AMK} = \frac{AM}{AB}\cdot\frac{AK}{AC}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot 16 = 4.$$

*Способ* 2. $S_{AMK} = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot AK\cdot\sin A =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}AB\right)\cdot\left(\frac{3}{4}AC\right)\cdot\sin A =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A\right) = \frac{1}{4}S_{ABC} = 4.$

Ответ: 4.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**72.** Докажите, что если два треугольника имеют по углу, сумма которых равна 180°, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы, то есть если $\angle C_1AB_1 + \angle CAB = 180°$ (рис. 77), то $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_1c_1}{bc}$.

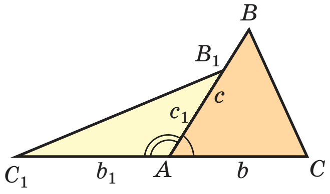



*Рис. 77*

**73.** В $\triangle ABC$ на стороне $AB$ взята точка $M$, на стороне $BC$ — точка $K$ так, что $AM : MB = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 5$. Найдите площадь треугольника $BMK$, если площадь треугольника $ABC$ равна 90.

**74.** Дан параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна 120. На стороне $AB$ взята точка $M$, на стороне $AD$ — точка $K$ так, что $AM = \frac{1}{2}AB$, $AK = \frac{2}{5}AD$. Найдите площадь четырехугольника $MBDK$.

**75.** Используя теорему о площадях треугольников с равным углом, докажите, что в трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), где $O$ — точка пересечения диагоналей, $S_{ABO} = S_{DCO}$.

**76.** Используя данные рисунка 78, докажите, что:

а) $S_{ABC} = S_{AMK}$; б) $S_{MBD} = S_{CKD}$.

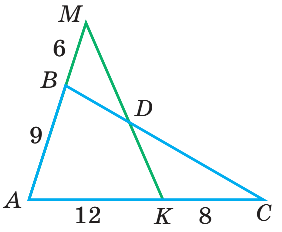



*Рис. 78*

## 2. Теорема Менелая

*Если дан треугольник $ABC$ и прямая $l$ пересекает стороны $BC$, $AB$ и продолжение стороны $AC$ в точках $A_1$, $C_1$ и $B_1$ соответственно* (рис. 79), *то* $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

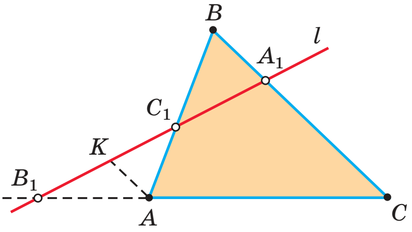



*Рис. 79*

Доказательство. Проведем отрезок $AK \parallel BC$, $K \in l$. Так как $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle KAC_1$ и $\triangle B_1KA \sim \triangle B_1A_1C$ (по двум углам), то $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{A_1B}{KA}$ и $\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{KA}{A_1C}$. Перемножив почленно указанные пропорции, получим $\frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{A_1B}{CA_1}$, откуда $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$.

*Замечание.* При составлении произведения трех отношений теоремы Менелая можно начинать с любой из шести точек (трех вершин треугольника и трех точек пересечения прямой $l$ с прямыми, содержащими стороны треугольника) и двигаться по контуру либо по часовой, либо против часовой стрелки. При этом вершины треугольника и точки пересечения должны чередоваться.

**Задача 2.** *В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$ и $AC$ взяты соответственно точки $M$ и $K$, такие, что $AM : MB = 2 : 1$, $AK : KC = 3 : 2$. Отрезки $CM$ и $BK$ пересекаются в точке $O$. Найти $BO : OK$.*

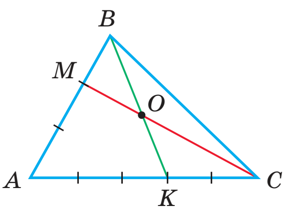



*Рис. 80*

Решение. *Способ* 1 (теорема Менелая). Рассмотрим $\triangle ABK$ (рис. 80). Прямая $MC$ пересекает две его стороны $AB$ и $BK$ соответственно в точках $M$ и $O$ и продолжение третьей стороны $AK$ в точке $C$. По теореме Менелая $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1$, откуда $\frac{2}{1} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{2}{5} = 1$, $\frac{BO}{OK} = \frac{5}{4}$.

*Способ* 2 (теорема Фалеса обобщенная). Проведем $KE \parallel CM$ (рис. 81). По теореме Фалеса $\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$. Тогда $AE$ — три части, $EM$ — две части, $AM$ —

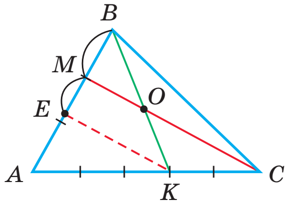



Рис. 81

пять частей, откуда $EM = \frac{2}{5}AM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}AB = \frac{4}{15}AB$.

Но $MB = \frac{1}{3}AB$. Отсюда $\frac{MB}{EM} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{4}{15}AB} = \frac{5}{4}$. Для $\angle KBE$ по теореме Фалеса $\frac{BO}{OK} = \frac{BM}{ME} = \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

**Задача 3.** *Дан равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = BC$), площадь которого равна 80. Точка $K$ делит высоту $BH$ в отношении $1 : 3$, считая от основания. Прямая $AK$ пересекает сторону $BC$ в точке $M$. Найти площадь четырехугольника $HKMC$* (рис. 82).

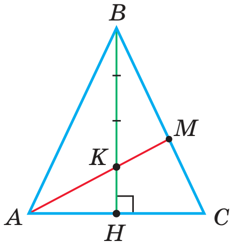



Рис. 82

Решение.

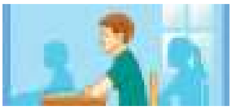
1) $S_{HBC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 40$ ($BH$ — высота и медиана треугольника $ABC$).

2) Применим теорему Менелая к треугольнику $HBC$. Прямая $AM$ пересекает его стороны $BH$ и $BC$ соответственно в точках $K$ и $M$ и продолжение стороны $HC$ в точке $A$. Тогда $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BK}{KH} \cdot \frac{HA}{AC} = 1$, $\frac{CM}{MB} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$, $\frac{CM}{MB} = \frac{2}{3}$. Откуда $\frac{BM}{BC} = \frac{3}{5}$.

3) $S_{BMK} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BK}{BH} \cdot S_{HBC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 40 = 18$.

4) $S_{HKMC} = S_{HBC} - S_{BMK} = 40 - 18 = 22$.

Ответ: 22.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**77.** Докажите при помощи теоремы Менелая, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

**78.** В треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$ и $AC$ взяты соответственно точки $M$ и $K$, такие, что $AM : MB = 3 : 1$, $AK : KC = 2 : 3$. Отрезки $BK$ и $CM$ пересекаются в точке $O$. Найдите площадь треугольника $OCK$, если площадь треугольника $ABC$ равна 70.

**79.** В $\triangle ABC$ проведены отрезки $AM$ и $CK$, которые пересекаются в точке $O$ ($M \in BC$, $K \in AB$). Найдите $S_{ABC}$, если $S_{AOK} = 2$, $S_{MOC} = 3$, $S_{AOC} = 4$.

**Задача 4.** *На сторонах $AB$ и $AD$ прямоугольника взяты соответственно точки $K$ и $M$, такие, что $AK = KB$, $AM : MD = 2 : 1$. Отрезки $DK$ и $BM$*

*пересекаются в точке* $E$ (рис. 83). *Найти площадь треугольника* $KBE$, *если площадь прямоугольника равна* 240.

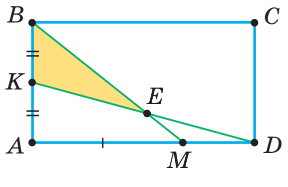



*Рис. 83*

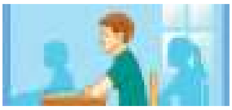
Решение. $S_{ABCD} = AD \cdot AB$, $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} AD \cdot AB = \frac{1}{3} S_{ABCD} = 80$.

Применим теорему Менелая к треугольнику $ABM$, где прямая $KD$ пересекает стороны $AB$ и $BM$ и продолжение стороны $AM$. Получим: $\frac{ME}{EB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AD}{DM} = 1$, $\frac{ME}{EB} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} = 1$, $\frac{ME}{EB} = \frac{1}{3}$. Тогда $\frac{BE}{BM} = \frac{3}{4}$, $\frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}$.

Применим свойство площадей треугольников, имеющих общий угол:

$$S_{KBE} = \frac{BE}{BM} \cdot \frac{BK}{BA} \cdot S_{ABM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 = 30.$$

Ответ: 30.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**80.** В треугольнике $ABC$ $AK : KC = 3 : 2$, $AM : MB = 1 : 2$, $O = BK \cap CM$ (рис. 84). Найдите отношение: а) $\frac{KO}{OB}$; б) $\frac{MO}{OC}$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}}$.

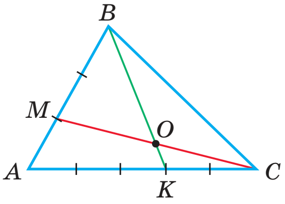



*Рис. 84*

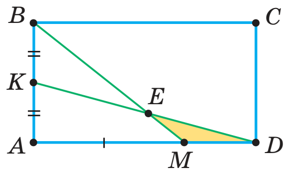



*Рис. 85*

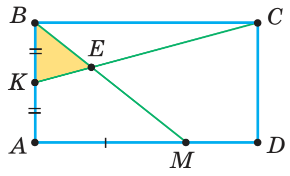



*Рис. 86*

**81.** $ABCD$ — прямоугольник, $AK = KB$, $AM = 2MD$, $S_{ABCD} = 240$ (рис. 85). Найдите $S_{MED}$.

**82.** $ABCD$ — прямоугольник, $AK = KB$, $AM = 2MD$ (рис. 86). Найдите $\frac{S_{KBE}}{S_{ABCD}}$.

### 3. Неравенство Коши

Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел больше либо равно их среднему геометрическому, т. е.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Например, $\frac{9+25}{2} \geqslant \sqrt{9 \cdot 25}$. Действительно, $17 \geqslant 15$.

Алгебраическое доказательство указанного неравенства таково. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Получим: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$. Так как $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ при всех допустимых $a$ и $b$, то $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0$. Следовательно, неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ верно.

Неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, называется *неравенством Коши* по имени известного французского математика и часто используется при решении олимпиадных задач.

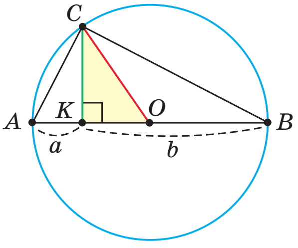
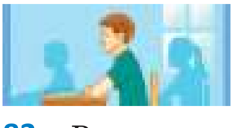


*Рис. 87*

Приведем геометрическое доказательство указанного неравенства. Изобразим окружность с диаметром $AB$ и центром в точке $O$ (рис. 87). На диаметре возьмем точку $K$ (для определенности левее центра $O$). Пусть $AK = a$, $KB = b$. Из точки $K$ восстановим перпендикуляр $KC$, где точка $C$ принадлежит окружности. Проведем радиус $OC$. Так как вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, то $\angle ACB = 90°$ и $\triangle ABC$ прямоугольный, $CK$ — его высота, проведенная к гипотенузе. По теореме о среднем пропорциональном в прямоугольном треугольнике $ABC$ $CK = \sqrt{AK \cdot KB}$. Но радиус $OC$ равен половине диаметра $AB$, т. е. $OC = \frac{AK+KB}{2}$. В $\triangle CKO$ катет меньше гипотенузы, т. е. $OC > CK$, так как катет меньше гипотенузы. Отсюда $\frac{AK+KB}{2} > \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Равенство левой и правой частей неравенства достигается, когда точка $K$ совпадает с точкой $O$ и $\triangle ACB$ становится равнобедренным и прямоугольным. Поэтому справедливо неравенство $\frac{AK+KB}{2} \geqslant \sqrt{AK \cdot KB}$, т. е. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**83.** В трапеции проведены четыре отрезка с концами на боковых сторонах трапеции, параллельные ее основаниям: $k$ — отрезок, проходящий через точку $O$ пересечения диагоналей трапеции; $p$ — отрезок, который делит трапецию на две подобные трапеции (соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны), $m$ — средняя линия трапеции, $s$ — отрезок, который делит трапецию на две равновеликие

трапеции (рис. 88). Зная основания $a$ и $b$ трапеции, найдите длину каждого из указанных отрезков.
Докажите алгебраическим путем, что $k < p$, $p < m$, $m < s$, и убедитесь в правильности рисунка 88.

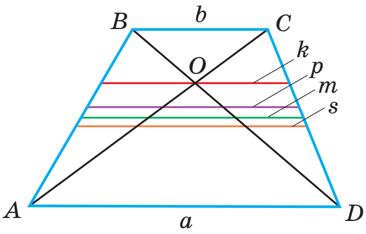



*Рис. 88*

**84.** Дана окружность с диаметром $AB$ и центром в точке $O$, $AK = a$, $KB = b$, $CK \perp AB$, $DO \perp AB$, $KE \perp OC$ (рис. 89). Докажите, что:

а) $CK = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое чисел $a$ и $b$;

б) $DO = \dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое чисел $a$ и $b$;

в) $CE = \dfrac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел $a$ и $b$;

г) $KD = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное чисел $a$ и $b$.

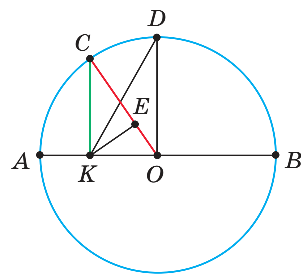



*Рис. 89*

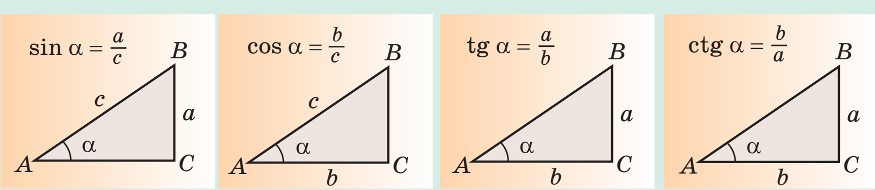
**85.** Используя результат задачи 84, докажите геометрическим путем, что $CE \leqslant CK \leqslant DO \leqslant KD$, откуда $\dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Рассмотрите, при каких $a$ и $b$ нестрогие неравенства обращаются в равенства.

## ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Теорема Чевы.
2. Общая теорема Менелая и ей обратная.
3. Возникновение тригонометрии, ее роль в современной математике.

## ЗАПОМИНАЕМ

**1.**



**2.** Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°:

1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$;

2) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$;

3) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**3.** Тригонометрические формулы (тождества):

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

**Примеры.** $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**4.** Формулы площади треугольника и параллелограмма:

$S_\triangle = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$, $S_{\text{пар}} = ab \sin \gamma$.

**5.** Среднее пропорциональное в прямоугольном треугольнике:

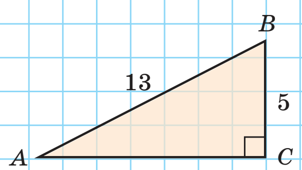
$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$, $a = \sqrt{c \cdot a_c}$, $b = \sqrt{c \cdot b_c}$.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

### Тест 1

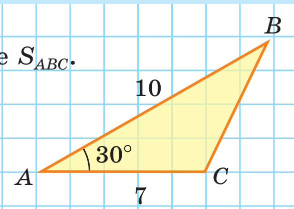
Найдите:

а) $\sin A$;
б) $\cos A$;
в) $\operatorname{tg} A$;
г) $\sin B$.



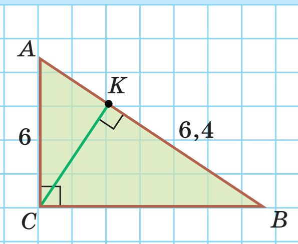

### Тест 2

Найдите $S_{ABC}$.




### Тест 3

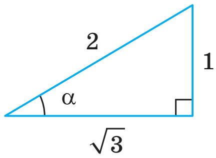
Найдите высоту $CK$ треугольника $ABC$, если $AC = 6$, $KB = 6{,}4$.



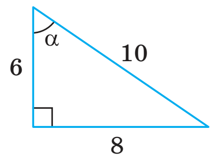
## Подготовка к контрольной работе № 1

**1.** Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла α.

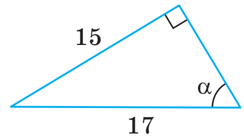
*а)*




*б)*

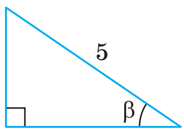



*в)*

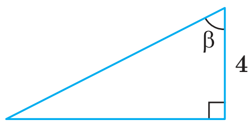



**2.** По углу β и одной из сторон найдите сторону $x$.

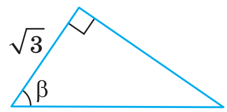
*а)*




*б)*

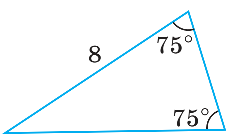



*в)*

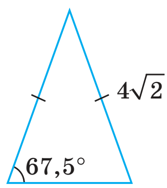



**3.** Найдите площадь треугольника.

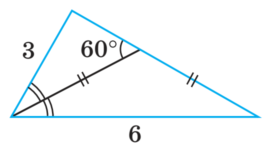
*а)*




*б)*

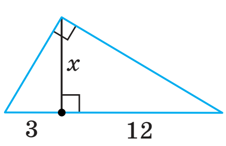



*в)*

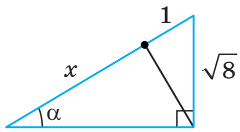



**4.** Найдите длину отрезка, обозначенного буквой $x$.

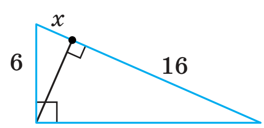
*а)*




*б)*

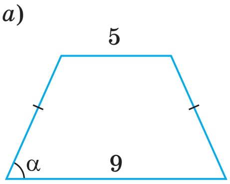



*в)*



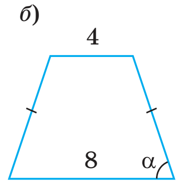

**5.** Найдите площадь равнобедренной трапеции.

*а)*



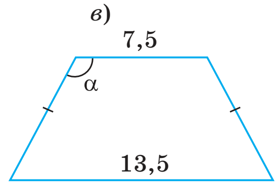

$\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$

*б)*




$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

*в)*




$\sin \alpha = \frac{4}{5}$

## *Тригонометрические таблицы*

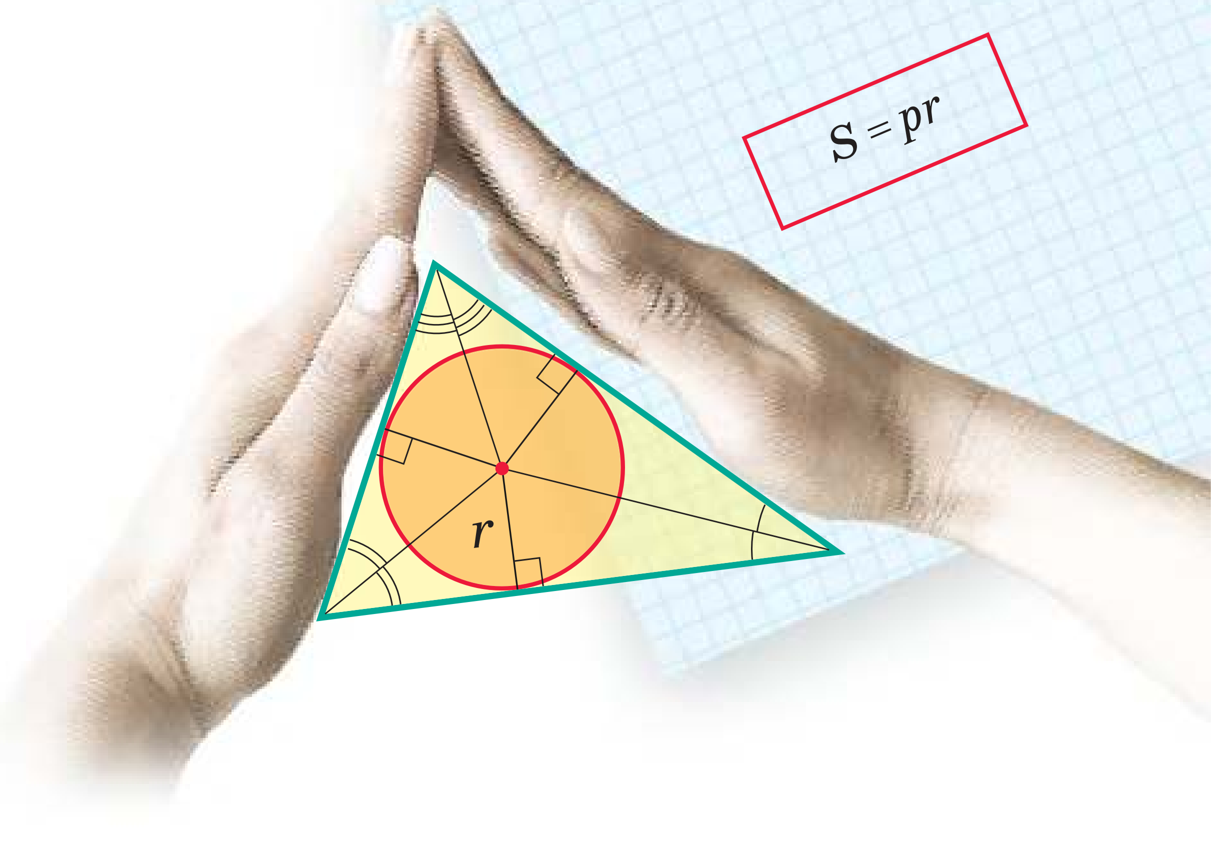
| α | sin α | cos α | tg α | ctg α | α | sin α | cos α | tg α | ctg α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | — | 90° | 1,0000 | 0,0000 | — | 0,0000 |
| 1° | 0175 | 9998 | 0175 | 57,2900 | 89° | 9998 | 0175 | 57,2900 | 0175 |
| 2° | 0349 | 9994 | 0349 | 28,6363 | 88° | 9994 | 0349 | 28,6363 | 0349 |
| 3° | 0523 | 9986 | 0524 | 19,0811 | 87° | 9986 | 0523 | 19,0811 | 0524 |
| 4° | 0698 | 9976 | 0699 | 14,3007 | 86° | 9976 | 0698 | 14,3007 | 0699 |
| 5° | 0872 | 9962 | 0875 | 11,4301 | 85° | 9962 | 0872 | 11,4301 | 0875 |
| 6° | 1045 | 9945 | 1051 | 9,5144 | 84° | 9945 | 1045 | 9,5144 | 1051 |
| 7° | 1219 | 9925 | 1228 | 8,1443 | 83° | 9925 | 1219 | 8,1443 | 1228 |
| 8° | 1392 | 9903 | 1405 | 7,1154 | 82° | 9903 | 1392 | 7,1154 | 1405 |
| 9° | 1564 | 9877 | 1584 | 6,3138 | 81° | 9877 | 1564 | 6,3138 | 1584 |
| 10° | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 | 5,6713 | 80° | 0,9848 | 0,1736 | 5,6713 | 0,1763 |
| 11° | 1908 | 9816 | 1944 | 5,1446 | 79° | 9816 | 1908 | 5,1446 | 1944 |
| 12° | 2079 | 9781 | 2126 | 4,7046 | 78° | 9781 | 2079 | 4,7046 | 2126 |
| 13° | 2250 | 9744 | 2309 | 4,3315 | 77° | 9744 | 2250 | 4,3315 | 2309 |
| 14° | 2419 | 9703 | 2493 | 4,0108 | 76° | 9703 | 2419 | 4,0108 | 2493 |
| 15° | 2588 | 9659 | 2679 | 3,7321 | 75° | 9659 | 2588 | 3,7321 | 2679 |
| 16° | 2756 | 9613 | 2867 | 3,4874 | 74° | 9613 | 2756 | 3,4874 | 2867 |
| 17° | 2924 | 9563 | 3057 | 3,2709 | 73° | 9563 | 2924 | 3,2709 | 3057 |
| 18° | 3090 | 9511 | 3249 | 3,0777 | 72° | 9511 | 3090 | 3,0777 | 3249 |
| 19° | 3256 | 9455 | 3443 | 2,9042 | 71° | 9455 | 3256 | 2,9042 | 3443 |
| 20° | 0,3420 | 0,9397 | 0,3640 | 2,7475 | 70° | 0,9397 | 0,3420 | 2,7475 | 0,3640 |
| 21° | 3584 | 9336 | 3839 | 6051 | 69° | 9336 | 3584 | 6051 | 3839 |
| 22° | 3746 | 9272 | 4040 | 4751 | 68° | 9272 | 3746 | 4751 | 4040 |
| 23° | 3907 | 9205 | 4245 | 3559 | 67° | 9205 | 3907 | 3559 | 4245 |
| 24° | 4067 | 9135 | 4452 | 2460 | 66° | 9135 | 4067 | 2460 | 4452 |
| 25° | 4226 | 9063 | 4663 | 1445 | 65° | 9063 | 4226 | 1445 | 4663 |
| 26° | 4384 | 8988 | 4877 | 2,0503 | 64° | 8988 | 4384 | 2,0503 | 4877 |
| 27° | 4540 | 8910 | 5095 | 9626 | 63° | 8910 | 4540 | 9626 | 5095 |
| 28° | 4695 | 8829 | 5317 | 8807 | 62° | 8829 | 4695 | 8807 | 5317 |
| 29° | 4848 | 8746 | 5543 | 1,8040 | 61° | 8746 | 4848 | 1,8040 | 5543 |
| 30° | 0,5000 | 0,8660 | 0,5774 | 1,7321 | 60° | 0,8660 | 0,5000 | 1,7321 | 0,5774 |
| 31° | 5150 | 8572 | 6009 | 6643 | 59° | 8572 | 5150 | 6643 | 6009 |
| 32° | 5299 | 8480 | 6249 | 6003 | 58° | 8480 | 5299 | 6003 | 6249 |
| 33° | 5446 | 8387 | 6494 | 5399 | 57° | 8387 | 5446 | 5399 | 6494 |
| 34° | 5592 | 8290 | 6745 | 4826 | 56° | 8290 | 5592 | 4826 | 6745 |
| 35° | 5736 | 8192 | 7002 | 4281 | 55° | 8192 | 5736 | 4281 | 7002 |
| 36° | 5878 | 8090 | 7265 | 3764 | 54° | 8090 | 5878 | 3764 | 7265 |
| 37° | 6018 | 7986 | 7536 | 3270 | 53° | 7986 | 6018 | 3270 | 7536 |
| 38° | 6157 | 7880 | 7813 | 2799 | 52° | 7880 | 6157 | 2799 | 7813 |
| 39° | 6293 | 7771 | 8098 | 1,2349 | 51° | 7771 | 6293 | 1,2349 | 8098 |
| 40° | 0,6428 | 0,7660 | 0,8391 | 1,1918 | 50° | 0,7660 | 0,6428 | 1,1918 | 0,8391 |
| 41° | 6561 | 7547 | 8693 | 1504 | 49° | 7547 | 6561 | 1504 | 8693 |
| 42° | 6691 | 7431 | 9004 | 1106 | 48° | 7431 | 6691 | 1106 | 9004 |
| 43° | 6820 | 7314 | 9325 | 0724 | 47° | 7314 | 6820 | 0724 | 9325 |
| 44° | 6947 | 7193 | 9657 | 0355 | 46° | 7193 | 6947 | 0355 | 9657 |
| 45° | 7071 | 7071 | 1,0000 | 1,0000 | 45° | 7071 | 7071 | 1,0000 | 1,0000 |
| α | sin α | cos α | tg α | ctg α | α | sin α | cos α | tg α | ctg α |

# Глава II

# Вписанные и описанные окружности

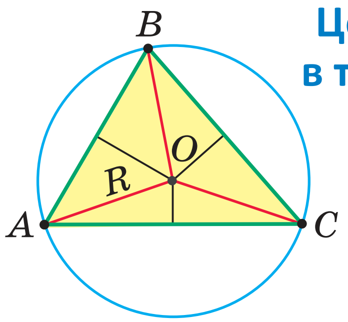
**В этой главе вы узнаете:**

- Где находится центр описанной, а где центр вписанной окружности треугольника
- Формулу площади треугольника $S = pr$
- Свойства вписанного в окружность и описанного около окружности четырехугольника

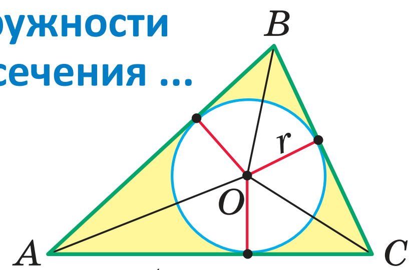


# Описанные и вписанные окружности

**Центр ... окружности в точке пересечения ...**

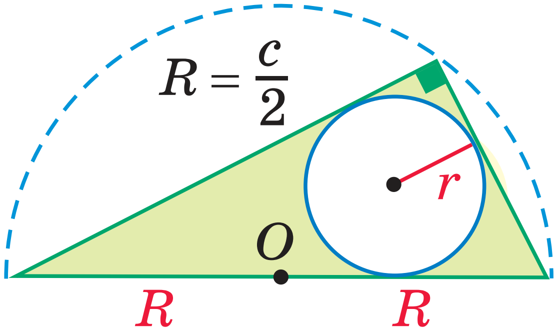



серединных перпендикуляров




биссектрис

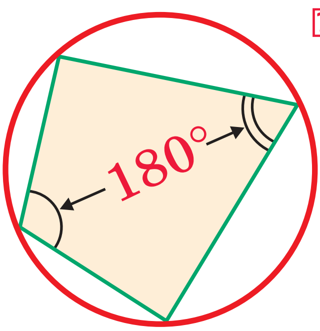
$$S = pr$$



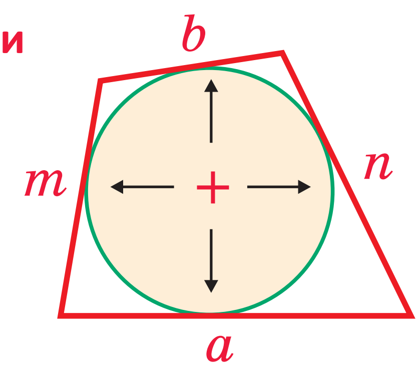

**Прямоугольный**

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

**??угольники**




Вписанный




Описанный

## § 8. Описанная и вписанная окружности треугольника

**Определение.** Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

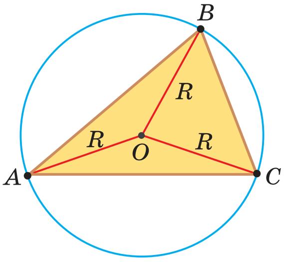



*Рис. 90*

На рисунке 90 изображена окружность с радиусом $R$ и центром $O$, описанная около треугольника $ABC$.

Так как $OA = OB = OC = R$, то центр описанной окружности *равноудален от вершин треугольника*.

Вместо слов «окружность, описанная около треугольника $ABC$», также говорят «окружность, описанная вокруг треугольника $ABC$», или «описанная окружность треугольника $ABC$».

Теорема (об окружности, описанной около треугольника). **Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.**

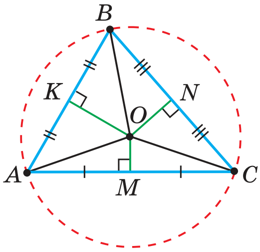



*Рис. 91*

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник $ABC$ (рис. 91). Пусть $O$ — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Проведем отрезки $OA$, $OB$ и $OC$. По свойству серединного перпендикуляра $OA = OC$, $OC = OB$. Так как точка $O$ равноудалена от всех вершин треугольника $ABC$, то окружность с центром в точке $O$ и радиусом $OA$ проходит через все вершины треугольника $ABC$, т. е. является его описанной окружностью. Единственность описанной окружности докажите самостоятельно.

*Замечание.* Так как все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра описанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

**Определение.** Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

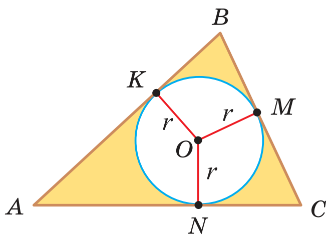



Рис. 92

На рисунке 92 изображена окружность с центром $O$ и радиусом $r$, вписанная в треугольник $ABC$; $K$, $M$ и $N$ — точки ее касания со сторонами треугольника $ABC$.

Так как $OK = OM = ON = r$ и по свойству касательной к окружности $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, то центр вписанной окружности *равноудален от сторон треугольника*.

Вместо слов «окружность, вписанная в треугольник $ABC$», также говорят «вписанная окружность треугольника $ABC$».

Теорема (об окружности, вписанной в треугольник).
**В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну, ее центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.**

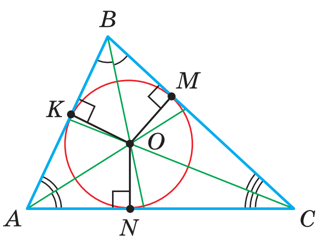



Рис. 93

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник $ABC$ (рис. 93). Пусть $O$ — точка пересечения его биссектрис. Проведем из точки $O$ перпендикуляры $OK$, $OM$ и $ON$ соответственно к сторонам $AB$, $BC$ и $AC$. По свойству биссектрисы угла $OK = ON$, $ON = OM$. Окружность с центром в точке $O$ и радиусом $OK$ будет проходить через точки $K$, $M$ и $N$ и касаться сторон $AB$, $BC$ и $AC$ в указанных точках по признаку касательной. Следовательно, эта окружность является вписанной в треугольник $ABC$. Единственность вписанной окружности докажите самостоятельно.

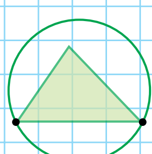
*Замечание.* Так как все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то для нахождения центра вписанной окружности достаточно построить точку пересечения любых двух из них.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

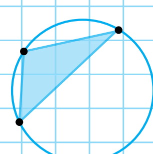
## Тест 1

На каком из рисунков изображена окружность, описанная около треугольника?

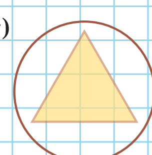
*а*)



*б*)

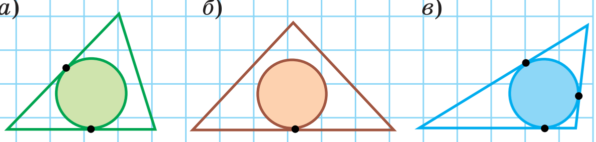


*в*)

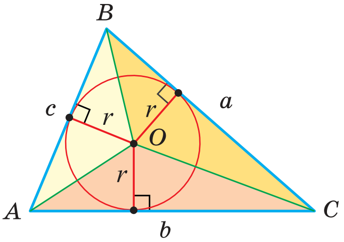


**Тест 2**

На каком из рисунков изображена окружность, вписанная в треугольник?




Теорема. **Площадь треугольника можно найти по формуле $S = pr$, где $p$ — полупериметр треугольника, $r$ — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.**




$S = pr$

*Рис. 94*

Доказательство. Пусть дан треугольник $ABC$ со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $O$ — центр его вписанной окружности (рис. 94). Соединим отрезками точку $O$ с вершинами $A$, $B$ и $C$. Треугольник $ABC$ разобьется на три треугольника: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$. Радиусы $r$, проведенные в точки касания, будут высотами этих треугольников. Площадь треугольника $ABC$ равна сумме площадей указанных треугольников:

$$S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr.$$

Теорема доказана.

**Следствие.**

*Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти по формуле*

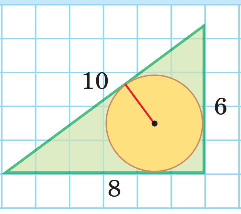
$$r = \frac{S}{p}.$$

Одной из важнейших задач данной темы является задача нахождения радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей данного треугольника.

А теперь выполните **Тест 3**.

**Тест 3**

Используя формулу $S = pr$, найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см, 10 см.



## Задания к § 8

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника $ABC$, у которого $AB = BC = 26$ см, высота $BK = 24$ см* (рис. 95).

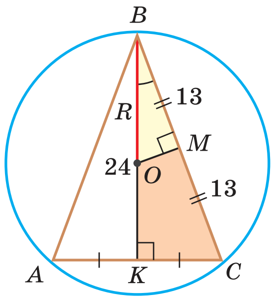


*Рис. 95*

Решение. *Способ* 1 (метод подобия). Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Проведем серединные перпендикуляры к сторонам $AC$ и $BC$, которые пересекутся в точке $O$ — центре описанной окружности. Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, то $BK$ — серединный перпендикуляр к стороне $AC$. Пусть $MO$ — серединный перпендикуляр к стороне $BC$. Тогда $BM = 13$ см, $BO = R$ — искомый радиус. Поскольку $\triangle BMO \sim \triangle BKC$ (как прямоугольные с общим острым углом $CBK$), то $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$, $\frac{13}{R} = \frac{24}{26}$, откуда $R = \frac{13 \cdot 26}{24} = 14\frac{1}{12}$ (см).

*Способ* 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBM$ (см. рис. 95) $\cos\angle OBM = \frac{BM}{BO}$, из $\triangle CBK$ $\cos\angle CBK = \frac{BK}{BC}$, откуда $\frac{BM}{BO} = \frac{BK}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

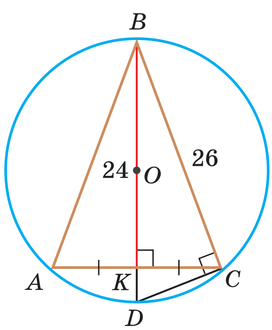


*Рис. 96*

*Способ* 3* (среднее пропорциональное). Продлим высоту $BK$ до пересечения с описанной окружностью в точке $D$ (рис. 96). Так как центр описанной окружности равнобедренного треугольника лежит на прямой $BK$ (см. способ 1), то $BD = 2R$ — диаметр данной окружности. В прямоугольном треугольнике $BCD$ ($\angle BCD = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр) катет $BC$ есть среднее пропорциональное между гипотенузой $BD$ и проекцией $BK$ катета $BC$ на гипотенузу. Поэтому $BC^2 = BD \cdot BK$, $26^2 = 2R \cdot 24$, откуда $R = 14\frac{1}{12}$ (см).

Ответ: $14\frac{1}{12}$ см.

*Замечание.* Из решения ключевой задачи 1 следует свойство: ***«Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на его высоте, проведенной к основанию, или на ее продолжении».***

Верно и обратное утверждение: ***«Если центр окружности, описанной около треугольника, лежит на высоте треугольника или на ее продолжении, то этот треугольник равнобедренный»***.

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

**Полезно запомнить!**

Если в ключевой задаче 1 боковую сторону обозначить $b$, а высоту, проведенную к основанию, — $h_a$, то получится пропорция $\dfrac{\frac{b}{2}}{R} = \dfrac{h_a}{b}$. Отсюда следует удобная формула для нахождения радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника:

$$R = \frac{b^2}{2h_a}.$$

**Задача 2.** *Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$, у которого $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.*

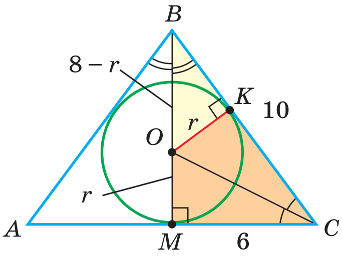



*Рис. 97*

Решение. *Способ* 1 (метод подобия). Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника. Проведем в треугольнике $ABC$ биссектрисы из вершин $B$ и $C$, которые пересекутся в точке $O$ — центре вписанной окружности (рис. 97). Биссектриса $BM$, проведенная к основанию равнобедренного треугольника $ABC$, будет его высотой и медианой, луч $CO$ — биссектриса угла $C$, $OM = r$ — искомый радиус вписанной окружности. Так как $AM = MC = 6$ см, то из $\triangle BMC$ по теореме Пифагора $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см), откуда $BO = BM - OM = 8 - r$ (см). Проведем радиус $OK$ в точку касания окружности со стороной $BC$, $OK \perp BC$. Из подобия прямоугольных треугольников $BKO$ и $BMC$ ($\angle MBC$ — общий) следует: $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Тогда $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{3}{5}$, $5r = 3(8 - r)$, $8r = 24$, $r = 3$ (см).

*Способ* 2 (тригонометрический метод). Из $\triangle OBK$ (см. рис. 97) $\sin\angle OBK = \dfrac{OK}{OB}$, из $\triangle MBC$ $\sin\angle MBC = \dfrac{MC}{BC}$, откуда $\dfrac{OK}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$. Дальнейшее решение совпадает с приведенным в способе 1.

*Способ* 3 (свойство биссектрисы треугольника). $CO$ — биссектриса $\triangle BMC$. Известно, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{MC}{BC}$, $\dfrac{r}{8-r} = \dfrac{6}{10}$, откуда $r = 3$ (см).

*Способ* 4 (формула $S = pr$). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (см$^2$); $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16$ (см). Из формулы площади треугольника $S = pr$ следует: $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

*Замечание.* Из решения ключевой задачи 2 следует свойство: ***«Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на его высоте, проведенной к основанию».***

Верно и обратное утверждение: ***«Если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на высоте треугольника, то этот треугольник равнобедренный».***

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

**Задача 3.** *Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найти радиус R его описанной окружности и радиус r его вписанной окружности.*

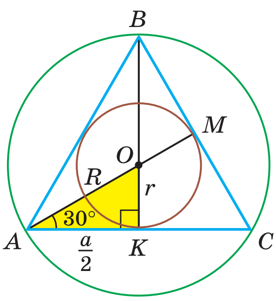



Рис. 98

Решение. *Способ* 1 (тригонометрический метод). Так как в равностороннем треугольнике биссектрисы являются и высотами, и медианами, то его биссектрисы лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Поэтому *в равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают.*

Рассмотрим равносторонний треугольник $ABC$ со стороной $a$, у которого высоты $AM$ и $BK$ пересекаются в точке $O$ — центре описанной и вписанной окружностей (рис. 98). Тогда $OA = OB = R$ — радиусы описанной, $OK = OM = r$ — радиусы вписанной окружности. Так как $AM$ — биссектриса и $\angle BAC = 60°$, то $\angle OAK = 30°$. Поскольку $BK$ — высота и медиана, то $AK = \frac{a}{2}$. Из $\triangle AKO$ $\cos 30° = \frac{AK}{AO}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

В $\triangle AKO$ катет $OK$ лежит против угла в $30°$, поэтому $OK = \frac{1}{2}AO$, $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

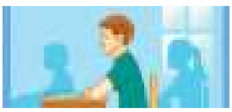
*Способ* 2 (свойство медиан). Поскольку $AM$ и $BK$ — медианы треугольника $ABC$ (см. рис. 98), то по свойству медиан $BO : OK = 2 : 1$. Высоту равностороннего треугольника можно найти по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Откуда $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = BO = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$r = OK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

**Полезно запомнить!**

Поскольку радиус описанной окружности равностороннего треугольника $\boxed{R = \frac{a}{\sqrt{3}}}$, то $\boxed{a = R\sqrt{3}.}$ Значит, сторона равностороннего треугольника в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса его описанной окружности. Чтобы найти радиус $R$ описанной окружности равностороннего треугольника, нужно сторону $a$ разделить на $\sqrt{3}$, а чтобы найти его сторону $a$, нужно радиус $R$ умножить на $\sqrt{3}$. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника $\boxed{r = \frac{1}{2}R.}$



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**86.** Около треугольника $ABC$ описана окружность с центром в точке $O$.

а) Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, *а*).
б) Найдите сторону $AC$, если $K$ — ее середина (рис. 99, *б*).
в) Найдите радиус описанной окружности (рис. 99, *в*).

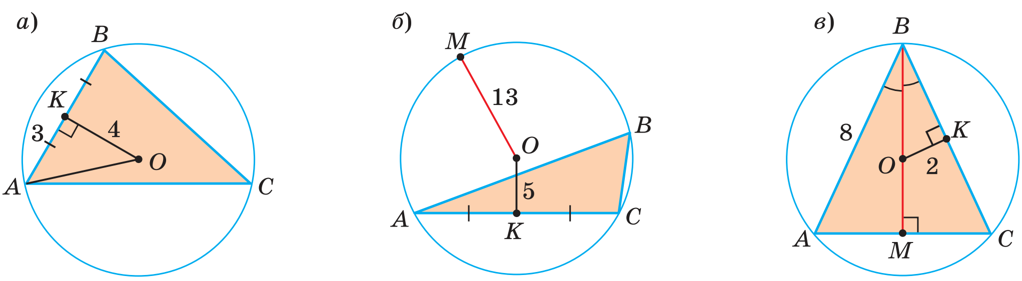



*Рис. 99*

**87.** Около треугольника $ABC$ описана окружность. По данным на рисунках 100, *а*)—*в*) найдите расстояние от центра $O$ окружности до прямой $AC$.

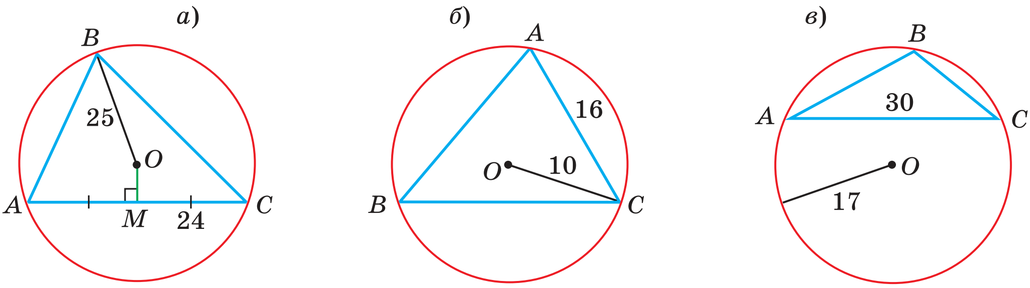



*Рис. 100*

**88.** Используя ключевую задачу 1 (с. 60), найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC$ и высотой $BK$, если:

а) $AB = 12$ см, $BK = 10$ см (рис. 101, *а*);
б) $AB = 30$ см, $BK = 18$ см (рис. 101, *б*).

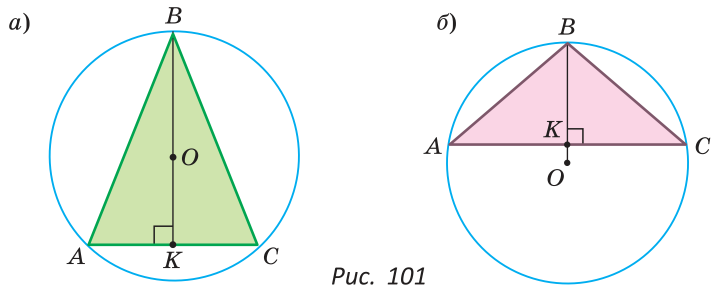



*Рис. 101*

**89.** Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, высота, проведенная к его основанию, равна 8 см. Найдите площадь данного треугольника.

**90.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром в точке $O$.

а) По рисунку 102, *а*) определите радиус вписанной окружности.
б) По рисунку 102, *б*) определите длину отрезка $OB$, если $\angle ABC = 60°$.
в) По рисунку 102, *в*) определите длину стороны $BC$, если диаметр вписанной окружности равен $\sqrt{8}$.

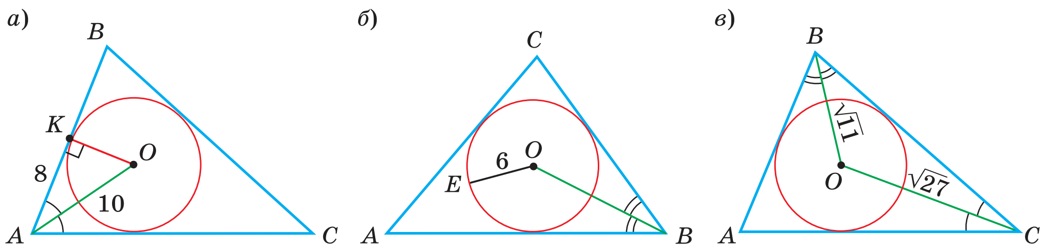



*Рис. 102*

**91.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром в точке $O$. По данным на рисунках 103, *а*)—*в*) определите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

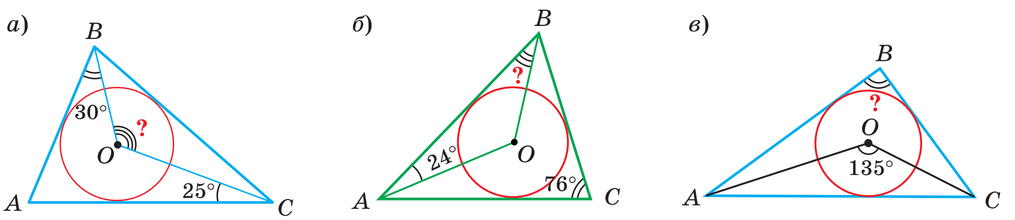



*Рис. 103*

**92.** а) Используя ключевую задачу 2 (с. 61), найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC = 6$ см и высотой $BH = 4$ см, проведенной к основанию (рис. 104).

б) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC = 10$ см и боковой стороной $AB = 13$ см (рис. 105).

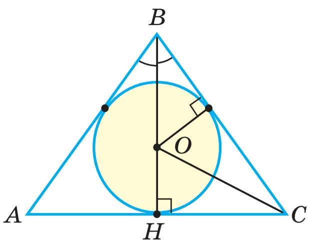



*Рис. 104*

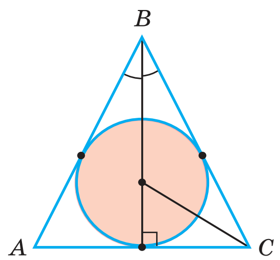



*Рис. 105*

**93.** Дан равносторонний треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$ см. Вычислите:

а) радиус описанной окружности этого треугольника;
б) радиус вписанной окружности этого треугольника.

**94.** а) Найдите радиус $R$ описанной и радиус $r$ вписанной окружности равностороннего треугольника, если его высота $h = 12$ см.
б) Найдите площадь равностороннего треугольника, если радиус $R$ его описанной окружности равен 2 см.

**95.** а) При помощи циркуля и линейки опишите окружность около тупоугольного треугольника.
б) При помощи циркуля и линейки впишите окружность в прямоугольный треугольник.

**96.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$. Определите:

а) радиус его описанной окружности;
б) радиус его вписанной окружности.

**97.** а) Найдите площадь треугольника, у которого периметр равен 18 см, а радиус вписанной окружности — 2 см.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, площадь которого равна 45 см$^2$, а периметр — 30 см.

**98.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$, $O_1$ — центр описанной, $O_2$ — центр вписанной окружности. Найдите длину отрезка $O_1O_2$, если $AB = 20$ см, высота $BH = 16$ см.

**99.** а) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит точкой касания его боковую сторону на отрезки, равные 6 см и 4 см, считая от основания. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

б) Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведенную к основанию, в отношении 4 : 5, считая от основания. Найдите площадь треугольника, если его боковая сторона равна 20 см.

**100.** Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 0,8, периметр треугольника равен 54 см. Найдите:

а) радиус его вписанной окружности;

б) радиус его описанной окружности.

**101.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром $O$, которая касается его сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно в точках $M$, $N$ и $K$. Найдите:

а) $\angle MNK$, если $\angle A = 70°$;

б) $\angle AOB$, если $\angle KMN = 64°$.

**102.** Окружность с центром в точке $O$ описана около треугольника $ABC$ (рис. 106), $OB = R$ — радиус окружности, $BC = a$, $AC = b$, $CH = h_c$ — высота, $OM \perp BC$. Докажите, что:

а) $\angle MOB = \angle A$; б) $\frac{CH}{AC} = \frac{MB}{OB}$; в) $R = \frac{ab}{2h_c}$.

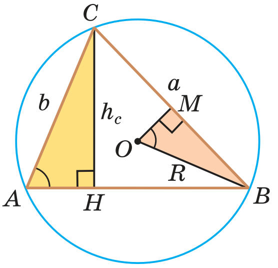
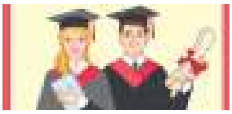


*Рис. 106*



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**103*.** а) В треугольнике $ABC$ $\angle A = 30°$, $BC = 6$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

б) В треугольнике $ABC$ $AB = 10$ см, $BC = 16$ см, высота $BH = 8$ см. Найдите радиус $R$ описанной окружности.

**104*.** В треугольнике $ABC$ $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. Окружность, вписанная в треугольник, касается указанных сторон соответственно в точках $M$, $N$, $K$. Найдите:

а) $AK + MB + NC$; б) длину отрезка $AK$.

**105*.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром в точке $O$ (рис. 107), высота $AM$ проходит через точку $O$, $AM : BC = 2 : 3$, $P_{ABC} = 64$. Найдите радиус вписанной окружности.

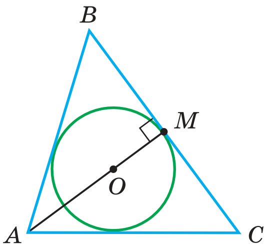



*Рис. 107*

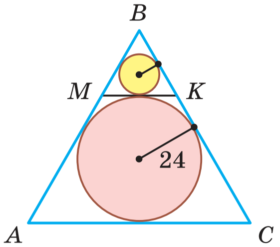



*Рис. 108*

**106*.** В равносторонний треугольник $ABC$ вписана окружность, радиус которой равен 24. Отрезок $MK$ касается этой окружности и параллелен стороне $AC$ (рис. 108). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $MBK$.

**107*.** Докажите, что если центры описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.

**108*.** а) Докажите, что около данного треугольника можно описать только одну окружность.
б) Докажите, что в данный треугольник можно вписать только одну окружность.

**109*.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, $H$ — точка пересечения его высот (ортоцентр), $O$ — центр описанной окружности. Точки $O$, $H$, $A$ и $C$ лежат на одной окружности. Найдите величину угла $B$.

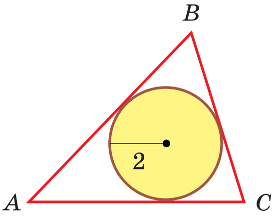



*Рис. 109*

## Гимнастика ума

Радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$ (рис. 109), равен 2 см, площадь треугольника $S = 2019$ см$^2$. Найдите устно периметр $P$ треугольника $ABC$.

Каким свойством, по вашему мнению, обладает треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен 2? Обоснуйте ваше предположение.

## Геометрия 3D

Заготовка представляет собой правильную треугольную призму высотой 2 см, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 6 см (рис. 110). В центре заготовки нужно проделать цилиндрическое отверстие. Расстояние от окружности отверстия до стороны основания равно 0,2 см.

**Задание 1.** Найдите (округлив результат до 1 мм) диаметр сверла для высверливания нужного отверстия.

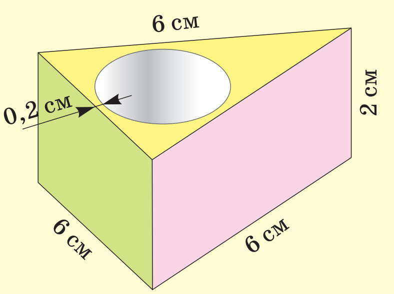



*Рис. 110*

**Задание 2.** По формуле объема цилиндра $V_ц = \pi R^2 H$, где $R$ — радиус основания, $H$ — высота цилиндра, найдите объем цилиндрического отверстия. Примите $\pi \approx 3{,}14$. Ответ округлите до 1 см³.

**Задание 3.** Учитывая, что объем призмы равен произведению ее площади основания на высоту, т. е. $V_{пр} = S_{осн} \cdot H$, вычислите, сколько процентов составляет объем цилиндрического отверстия от объема призмы. Ответ округлите до 1 %.

## § 9. Прямоугольный треугольник и его описанная и вписанная окружности

Теорема. **Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы, т. е. $R = \frac{c}{2}$, где $c$ — гипотенуза.**

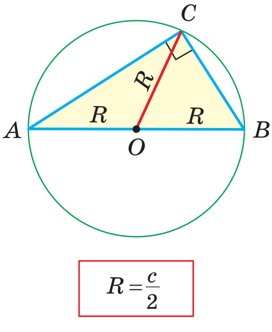



Рис. 111

Доказательство. Проведем в прямоугольном треугольнике $ABC$ медиану $CO$ к гипотенузе $AB$ (рис. 111). Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OC = OA = OB$. Тогда середина гипотенузы — точка $O$ — равноудалена от точек $A$, $B$ и $C$ и поэтому является центром описанной окружности треугольника $ABC$. Радиус этой окружности $R = OA = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$, где $c$ — гипотенуза.

Теорема доказана.

*Замечание.* Также можно доказать, что серединные перпендикуляры к катетам прямоугольного треугольника пересекаются на середине гипотенузы.

Отметим, что у остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника (рис. 112, *а*), у тупоугольного — вне треугольника (рис. 112, *б*), у прямоугольного — на середине гипотенузы (рис. 112, *в*). Обоснуйте первые два утверждения самостоятельно.

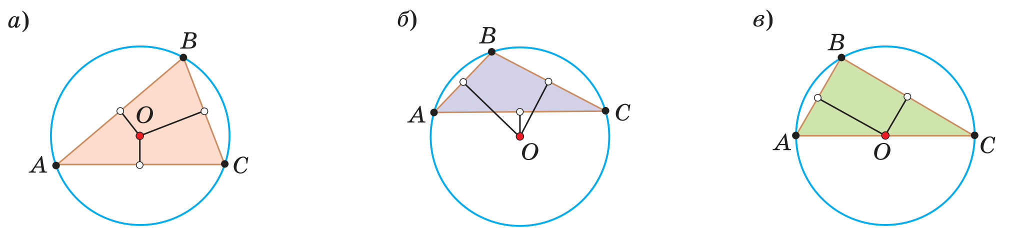



Рис. 112

Теорема. **Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где $r$ — искомый радиус, $a$ и $b$ — катеты, $c$ — гипотенуза треугольника.**

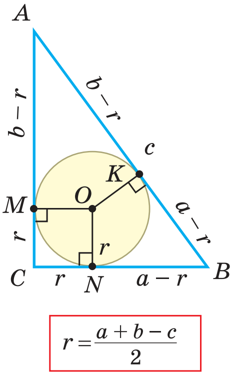



*Рис. 113*

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$. Пусть вписанная в треугольник окружность с центром $O$ и радиусом $r$ касается сторон треугольника в точках $M$, $N$ и $K$ (рис. 113). Проведем радиусы в точки касания и получим: $OM \perp AC$, $ON \perp BC$, $OK \perp AB$. Четырехугольник $CMON$ — квадрат, так как у него все углы прямые и $OM = ON = r$. Тогда $CM = CN = r$, $NB = a - r$, $MA = b - r$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $BK = BN = a - r$, $AK = AM = b - r$. Но $BK + AK = AB$, т. е. $(a - r) + (b - r) = c$, $a + b - 2r = c$, откуда $r = \frac{a+b-c}{2}$. Теорема доказана.

**Следствие.** *$r = p - c$, где $p$ — полупериметр треугольника.*

Доказательство. Преобразуем формулу радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c.$$

Формула $\boxed{r = p - c}$ в сочетании с формулами $\boxed{S = pr}$ и $\boxed{R = \frac{c}{2}}$ дает возможность решать многие задачи, связанные с прямоугольным треугольником, алгебраическим методом.

**Пример.** Дан прямоугольный треугольник, $S = 24$, $R = 5$. Найти $r$.

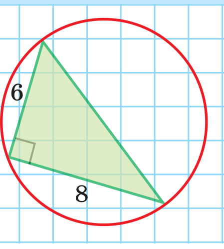
Решение. Так как $r = p - c$, а $R = \frac{c}{2}$, то $p = r + c = r + 2R = r + 10$. Из формулы $S = pr$ следует $24 = (r + 10)r$, $r^2 + 10r - 24 = 0$. По теореме Виета (обратной) $r_1 = 2$, $r_2 = -12$ — посторонний корень.

Ответ: $r = 2$.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

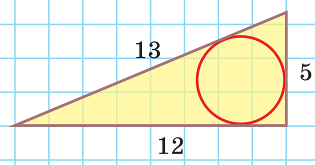
## Тест 1

Найдите радиус окружности, описанной около изображенного треугольника.



## Тест 2

Найдите радиус окружности, вписанной в изображенный треугольник.




## Задания к § 9

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, у которого один из катетов равен* 6, *а радиус вписанной окружности равен* 2.

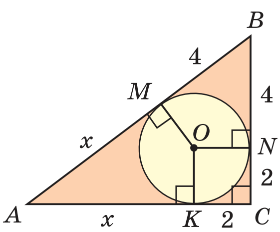



Рис. 114

Решение. *Способ* 1 (геометрический). Пусть в треугольнике $ABC$, где $\angle C = 90°$, $BC = 6$, $r = 2$ — радиус вписанной окружности (рис. 114). Проведем из центра $O$ вписанной окружности перпендикуляры $OK$, $OM$ и $ON$ к сторонам треугольника, которые будут радиусами вписанной окружности. Так как $KONC$ — квадрат, то $NC = KC = r = 2$, $BN = 6 - 2 = 4$. По свойству касательных $BM = BN = 4$, $AM = AK = x$. Тогда $AC = x + 2$, $AB = x + 4$. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $(x + 2)^2 + 6^2 = (x + 4)^2$, $x^2 + 4x + 4 + 36 = x^2 + 8x + 16$, $4x = 24$, $x = 6$. Следовательно, $AB = x + 4 = 6 + 4 = 10$. Радиус описанной окружности $R = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

*Способ* 2 (алгебраический). Подставив в формулу $r = \frac{a + b - c}{2}$ значения $r = 2$ и $a = 6$, получим $c = b + 2$. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. $(b + 2)^2 = 6^2 + b^2$, $b^2 + 4b + 4 = 36 + b^2$, $b = 8$. Тогда $c = 10$, $R = \frac{c}{2} = 5$.

Ответ: 5.

**Задача 2*.** *Гипотенуза прямоугольного треугольника* $c = 18$, *радиус вписанной в него окружности* $r = 2$. *Найти площадь треугольника.*

Решение. *Способ* 1 (геометрический). Пусть в $\triangle ABC$ гипотенуза $AB = c = 18$, $O$ — центр вписанной окружности, $OK$, $OM$, $ON$ — ее радиусы, проведенные в точки касания (рис. 115). Так как $OM \perp AC$, $ON \perp BC$,

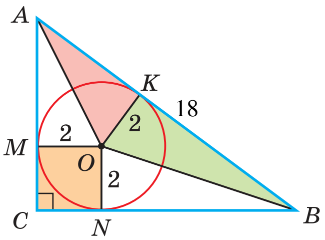



*Рис. 115*

$OK \perp AB$ и $OM = ON$, то $CMON$ — квадрат со стороной, равной радиусу $r$ вписанной окружности, $OK = r$ — высота $\triangle AOB$. Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой, то $AK = AM$, $BK = BN$. Отсюда $\triangle AKO = \triangle AMO$, $\triangle BKO = \triangle BNO$ по катету и гипотенузе.

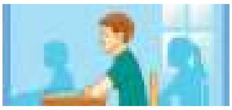
Площадь $\triangle ABC$ равна сумме удвоенной площади $\triangle AOB$ и площади квадрата $CMON$, т. е.

$$S_{ABC} = 2S_{AOB} + S_{CMON} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OK + MO^2 = c \cdot r + r^2 = 18 \cdot 2 + 2^2 = 40.$$

*Способ* 2 (алгебраический). Из формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ следует $2 = \frac{a+b-18}{2}$, $a + b = 22$. Возведем части равенства в квадрат: $(a+b)^2 = 22^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 484$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$ и $S_{ABC} = \frac{ab}{2}$, то $c^2 + 4S = 484$, $324 + 4S = 484$, $S = 40$.

*Способ* 3 (алгебраический). Из формулы $r = p - c$ следует, что $p = r + c$. Из формулы $S = pr$ следует, что $S_{ABC} = (r + c)r = (2 + 18) \cdot 2 = 40$.

Ответ: 40.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**110.** Используя данные рисунков 116, *а*)—*в*), найдите радиус описанной окружности треугольника.

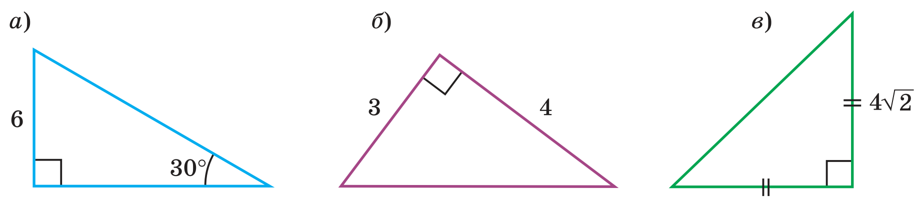



*Рис. 116*

**111.** По данным на рисунках 117, *а*)—*в*) найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

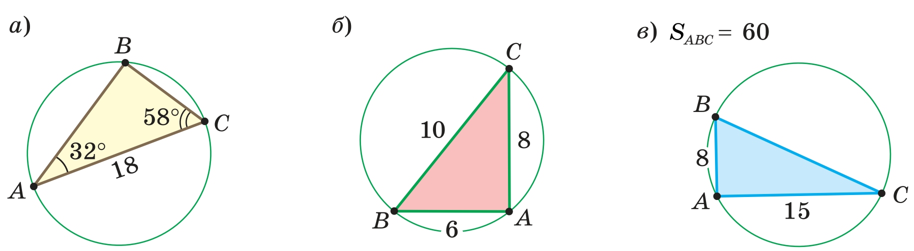



*Рис. 117*

**112.** Найдите радиус описанной окружности прямоугольного треугольника с катетами, равными:

а) 12 см и 16 см; б) 18 м и 24 м;
в) 14 дм и 48 дм; г) 1 км и 2 км.

**113.** а) Найдите площадь прямоугольного треугольника $ABC$, если у него один из катетов равен 6 см, а радиус описанной окружности — 5 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен $\frac{2}{3}$.

**114.** Используя формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$, найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$ и гипотенузой $c$, если:

а) $a = 3$ см, $b = 4$ см; б) $a = 5$ дм, $b = 12$ дм;
в) $a = 7$ см, $c = 25$ см; г) $a = 4$ м, $c = 4\sqrt{2}$ м.

**115.** Используя данные рисунков 118, *а)—г)*, найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

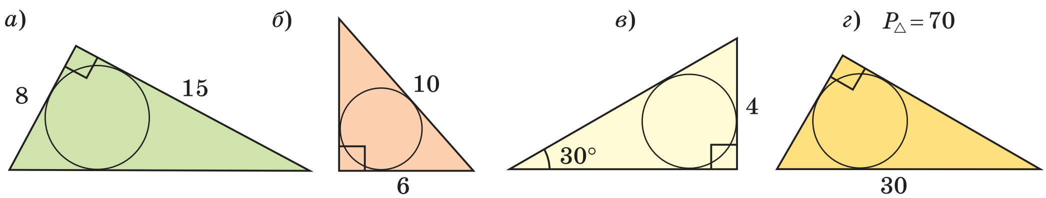


*Рис. 118*

**116.** Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до гипотенузы равно 6 см. Найдите расстояние от этого центра до вершины прямого угла.

**117.** Найдите катеты прямоугольного треугольника, если вписанная окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

**118.** Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен 13 см, вписанной — 4 см. Найдите периметр и площадь треугольника.

## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**119*.** а) Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см$^2$, радиус его вписанной окружности равен 2 см. Найдите диаметр описанной окружности треугольника.

б) Площадь прямоугольного треугольника равна 30 $см^2$, радиус его описанной окружности равен 6,5 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

**120*.** Найдите периметр прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза $c = 14$ см, а радиус вписанной окружности $r = 1$ см.

**121*.** Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника со сторонами, равными 12 см, 16 см и 20 см.

**122*.** Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 9 см и 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

**123*.** а) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.

б) Докажите, что если точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки, равные $m$ и $n$, то площадь треугольника можно найти по формуле $S = mn$.

**124*.** $ABCD$ — прямоугольник (рис. 119), в треугольник $BCD$ вписана окружность с центром $O$. Докажите, что площадь прямоугольника $AKOM$ равна половине площади прямоугольника $ABCD$.

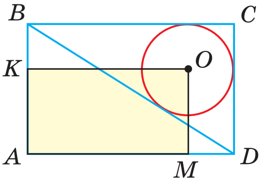


*Рис. 119*

При помощи **Интернета** найдите *формулу Эйлера*, которая связывает расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей с их радиусами.

## *Реальная геометрия*

Есть два листа ДСП (древесно-стружечной плиты). Один из них имеет форму равностороннего треугольника со стороной 1 м, другой — форму прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными 1 м (рис. 120). Из каждого листа необходимо вырезать по одному кругу наибольшего диаметра. Определите, из какого листа будет вырезан круг большего диаметра и каким в этом случае будет процент отходов, если известно, что площадь круга можно найти по формуле $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3{,}14$.

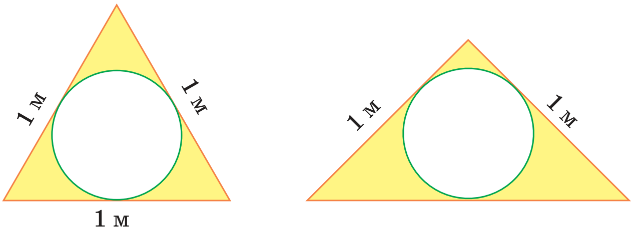


*Рис. 120*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Определение описанной и вписанной окружностей треугольника.
2. Где находится центр описанной, а где центр вписанной окружности треугольника.
3. Где находится центр описанной окружности прямоугольного треугольника и чему равен ее радиус $R$.
4. Формулу радиуса $r$ окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.
5. Формулу площади треугольника, связанную с радиусом $r$ вписанной окружности.

### Умеем

1. Находить центр описанной окружности треугольника.
2. Находить центр вписанной окружности треугольника.
3. Выводить формулу $S = pr$.
4. Доказывать, что $R = \frac{c}{2}$ для прямоугольного треугольника.
5. Выводить формулу $r = \frac{a+b-c}{2}$ для прямоугольного треугольника.

## § 10. Вписанные и описанные четырехугольники

Определение. *Окружность называется* ***описанной*** *около многоугольника, если она проходит через все его вершины. При этом многоугольник называется* ***вписанным в окружность.***

*Окружность называется* ***вписанной*** *в многоугольник, если она касается всех его сторон. При этом многоугольник называется* ***описанным около окружности.***

Пятиугольник $ABCDE$ (рис. 121, *а*) является вписанным в окружность, а четырехугольник $MNPK$ (рис. 121, *б*) — описанным около окружности.

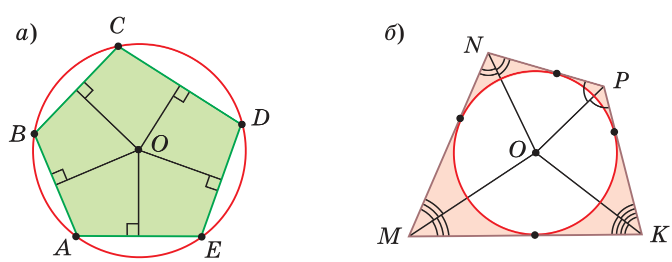
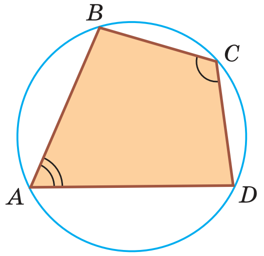



*Рис. 121*

Центр описанной окружности многоугольника находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам, а центр вписанной — в точке пересечения биссектрис его углов.

Обоснуйте эти утверждения самостоятельно.

Теорема (свойство вписанного четырехугольника).
**Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°.**

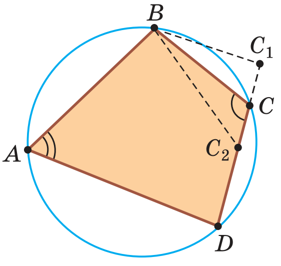



*Если ABCD вписан, то $\angle A + \angle C = 180°$*

*Рис. 122*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 122). Его углы $A$, $B$, $C$ и $D$ являются вписанными в окружность. Так как вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то $\angle A = \frac{1}{2}\cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2}\cup BAD$. Дуги $BCD$ и $BAD$ дополняют друг друга до окружности, и поэтому сумма их градусных мер равна 360°. Отсюда $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Аналогично доказывается, что $\angle B + \angle D = 180°$. Теорема доказана.

Теорема (признак вписанного четырехугольника).
**Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.**




*Если $\angle A + \angle C = 180°$, то ABCD вписан*

*Рис. 123*

Доказательство*. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle A + \angle C = 180°$ (рис. 123). Через вершины $A$, $B$ и $D$ проведем окружность (около любого треугольника можно описать окружность). Если бы вершина $C$ не лежала на данной окружности, а находилась вне ее в положении $C_1$ или внутри нее в положении $C_2$, то в первом случае угол $C$ был бы меньше, а во втором — больше половины градусной меры дуги $BAD$ (по свойству угла между секущими и угла между пересекающимися хордами). Тогда сумма $\angle A + \angle C$ не была бы равна 180°. Следовательно, вершина $C$ лежит на данной окружности. Теорема доказана.

*Замечание*. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, достаточно, чтобы сумма любой пары его противоположных углов была равна 180°.

**Следствия.**

**1.** *Около параллелограмма можно описать окружность, только если этот параллелограмм — прямоугольник* (рис. 124, *а*). *Центр этой окружности лежит в точке пересечения диагоналей прямоугольника.*

**2.** *Около ромба можно описать окружность, только если этот ромб — квадрат* (рис. 124, *б*).

**3.** *Около трапеции можно описать окружность, только если она равнобедренная* (рис. 124, *в*).

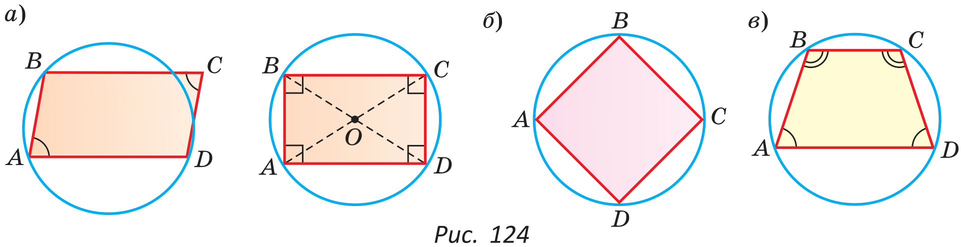


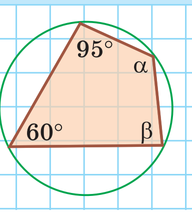

*Рис. 124*

Докажите эти следствия самостоятельно.

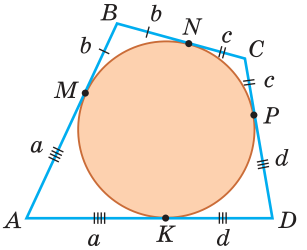
А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Около четырехугольника описана окружность. Найдите градусную меру угла α и угла β.




**Теорема** (свойство описанного четырехугольника).
**Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны между собой.**




*Если ABCD описан, то*
*AB + CD = BC + AD*

*Рис. 125*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, $M$, $N$, $P$ и $K$ — точки касания его сторон с окружностью (рис. 125). Так как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны между собой, то $AM = AK = a$, $BM = BN = b$, $CP = CN = c$, $DP = DK = d$. Тогда

$$AB + CD = a + b + c + d,$$
$$AD + BC = a + d + b + c,$$

откуда $AD + BC = AB + CD$.

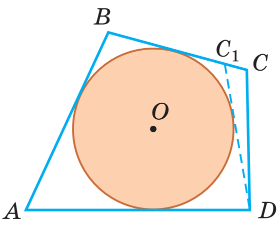
Теорема доказана.

## Следствие.

*Периметр описанного четырехугольника равен удвоенной сумме длин любой пары его противоположных сторон:*

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + CD) = 2 \cdot (BC + AD).$$

**Теорема** (признак описанного четырехугольника).
**Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.**




*Если $AB + CD = BC + AD$, то $ABCD$ описан*

*Рис. 126*

Доказательство*. Пусть для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо, что

$$AB + CD = AD + BC. \quad (1)$$

Проведем окружность, которая касается прямых $AD$, $AB$ и $BC$ (рис. 126). Такая окружность существует, ее центр находится в точке пересечения биссектрис углов $A$ и $B$. Если окружность не касается стороны $CD$, то либо прямая $CD$ не имеет с окружностью общих точек, либо является секущей. Рассмотрим первый случай. Проведем отрезок $DC_1$, который касается окружности. По свойству описанного четырехугольника

$$AB + C_1D = AD + BC_1. \quad (2)$$

Отняв почленно от равенства (1) равенство (2), получим $CD - C_1D = BC - BC_1$, $CD - C_1D = C_1C$, $CD = C_1C + C_1D$, что противоречит неравенству треугольника.

Рассмотрев случай, когда прямая $DC$ — секущая, также придем к противоречию (сделайте это самостоятельно). Следовательно, данная окружность касается стороны $CD$ и в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Теорема доказана.

## Следствия.

**1.** *В параллелограмм можно вписать окружность, только если этот параллелограмм — ромб. Центр этой окружности лежит в точке пересечения диагоналей ромба, а ее диаметр равен высоте ромба* (рис. 127, *а*).

**2.** *В прямоугольник можно вписать окружность, только если этот прямоугольник — квадрат* (рис. 127, *б*).

**3.** *Диаметр окружности, вписанной в трапецию, равен ее высоте* (рис. 127, *в*).

Докажите эти следствия самостоятельно.

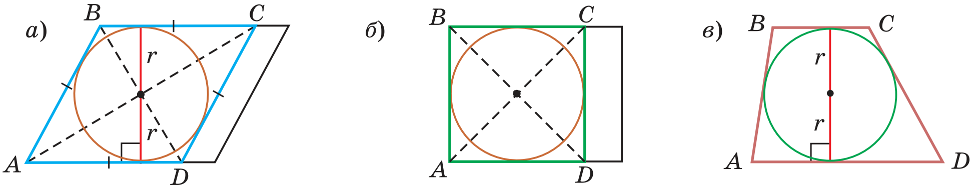



*Рис. 127*

Для описанного многоугольника справедлива формула $S = pr$, где $S$ — его площадь, $p$ — полупериметр, $r$ — радиус вписанной окружности. Доказательство аналогично приведенному в § 8 для треугольника. Выполните его самостоятельно, используя рисунок 128.

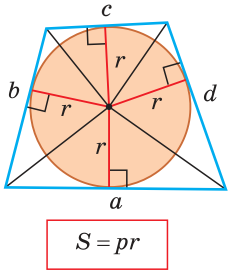
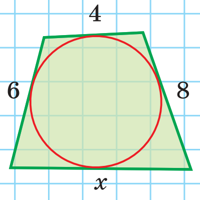



*Рис. 128*

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

В четырехугольник вписана окружность. Найдите длину стороны $x$.




## Задания к § 10

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти радиус окружности, вписанной в ромб с периметром 24 см и острым углом, равным* 45°.

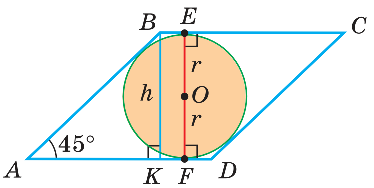



*Рис. 129*

Решение. *Способ* 1 (решение прямоугольного треугольника). Пусть $ABCD$ — ромб (рис. 129), $O$ — центр вписанной в ромб окружности. Известно, что высота $BK$ ромба равна диаметру $EF$ вписанной окружности, т. е. $h = 2r$. Так как у ромба все стороны равны, то $AB = \frac{24}{4} = 6$ (см).

Из прямоугольного треугольника $ABK$ находим, что $\frac{BK}{AB} = \sin A$, откуда $BK = AB \cdot \sin 45° = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (см). Искомый радиус вписанной окружности $r = \frac{BK}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

*Способ* 2 (метод площадей). Ромб — параллелограмм. По формуле площади параллелограмма ($S = ab \sin\gamma$) найдем площадь данного ромба: $S = a \cdot a \cdot \sin\gamma = 6 \cdot 6 \cdot \sin 45° = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$ (см$^2$). С другой стороны, площадь ромба можно найти по формуле площади описанного многоугольника $S = pr$. Поскольку $p = \frac{24}{2} = 12$ (см), то $S = 12r$. Отсюда $18\sqrt{2} = 12 \cdot r$, $r = \frac{18\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (см).

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

**Задача 2.** *Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию ABCD, где* $\angle A = 90°$, *делит точкой касания бо́льшую боковую сторону CD на отрезки* $CK = 1$, $KD = 4$. *Найти площадь трапеции* (рис. 130).

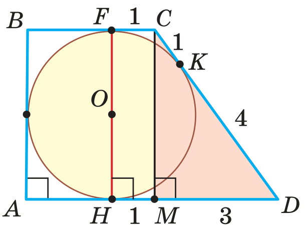



Рис. 130

Решение. *Способ* 1. Площадь трапеции находится по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Необходимо найти сумму оснований и высоту трапеции. Проведем высоту $FH = h$ трапеции, проходящую через центр $O$ вписанной окружности. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $CF = CK = 1$, $DH = DK = 4$. Проведем высоту $CM$. Так как $HFCM$ — прямоугольник (все углы прямые), то $HM = FC = 1$, $MD = 3$. В прямоугольном треугольнике $CMD$ по теореме Пифагора $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогда $AB = CM = h = 4$. По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = 4 + 5 = 9$. Отсюда $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{AD+BC}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} \cdot 4 = 18$.

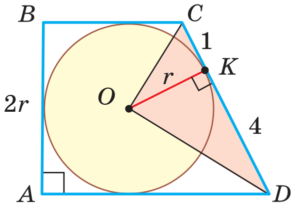



Рис. 131

*Способ* 2*. Центр $O$ вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов $\angle BCD$ и $\angle ADC$. Так как $\angle BCD + \angle ADC = 180°$ как внутренние односторонние углы при $BC \parallel AD$ и секущей $CD$, то $\angle OCD + \angle ODC = 90°$ (рис. 131). Тогда $\angle COD = 90°$, $\triangle COD$ — прямоугольный, радиус $OK = r$ является его высотой, проведенной к гипотенузе $CD$. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, — есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Поэтому $OK = \sqrt{CK \cdot KD}$ или $r = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$. Высота $h$ описанной трапеции равна диаметру вписанной окружности, откуда $AB = h = 2r = 4$. Так как по свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = 9$, то $S_{ABCD} = pr = (AB + CD) \cdot r = 9 \cdot 2 = 18$.

Ответ: 18.

*Замечание.* Полезно запомнить свойство: «***Боковая сторона описанной трапеции видна из центра вписанной окружности под углом 90°***».

**Задача 3*.** *Внутри острого угла $A$ взята точка $M$, из которой опущены перпендикуляры $MB$ и $MC$ на стороны угла $A$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle MBC = 45°$. Найти величину угла $BAC$ (рис. 132, а).*

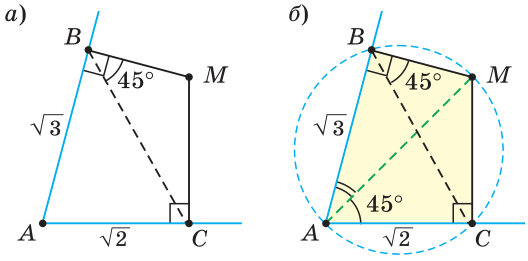
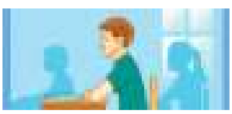



*Рис. 132*

Р е ш е н и е. Так как в четырехугольнике $ABMC$ сумма углов $B$ и $C$ равна 180°, то около него можно описать окружность. Проведем в ней хорду $AM$ (рис. 132, *б*). Поскольку $\angle MAC = \angle MBC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $MC$, то $\angle MAC = 45°$ и прямоугольный треугольник $AMC$ является равнобедренным, $AM = AC\sqrt{2} = 2$.

В прямоугольном треугольнике $ABM$ $\cos\angle BAM = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle BAM = 30°$, $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC = 30° + 45° = 75°$.

О т в е т: 75°.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**125.** Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Используя данные рисунков 133, *а)*—*в)*, найдите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

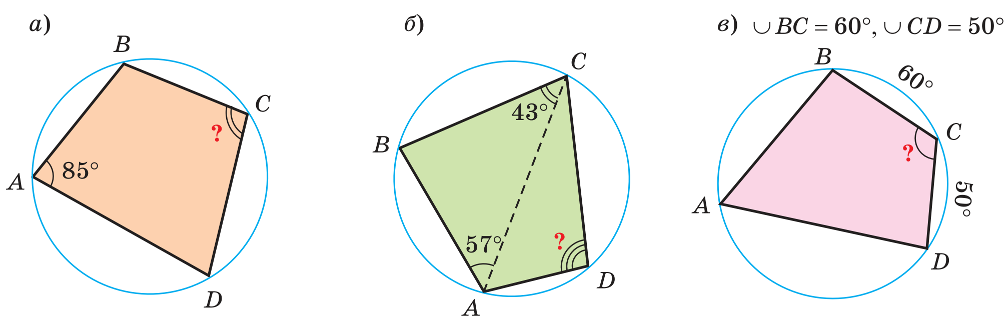



*Рис. 133*

**126.** $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Зная, что:

а) $\angle A$ на 20° больше $\angle C$, найдите $\angle C$;

б) $\angle B : \angle D = 2 : 3$, найдите $\angle D$;

в) $\angle A + \angle B + \angle C = 284°$, найдите $\angle B$;

г) $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 6$, найдите $\angle D$.

**127.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

а) Найдите $\angle BCD$, если $\angle BAC = 26°$, $\angle CBD = 24°$.
б) Найдите $\angle CAD$, если $\angle ABD = 34°$, $\angle ADC = 116°$.

**128.** Центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, лежит на стороне $AD$. По данным на рисунках 134, *а*), *б*) найдите:

а) $\angle CAD$; б) $\angle BCD$.

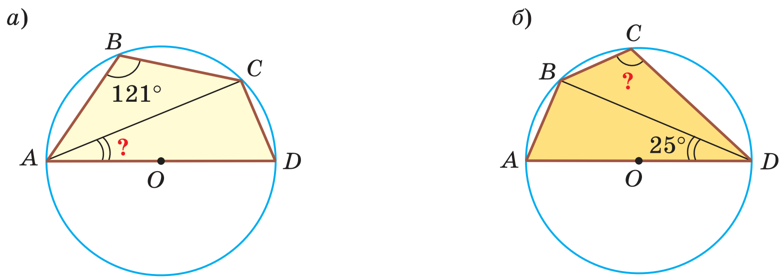



*Рис. 134*

**129.** а) $ABCD$ — вписанная трапеция ($AD \parallel BC$), $\angle A = 68°$. Найдите градусную меру дуги $ABC$.
б) $ABCD$ — вписанная трапеция, средняя линия которой равна 7 см, а боковая сторона — 6 см. Найдите периметр трапеции.

**130.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BDC$.

**131.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$, $O$ — точка пересечения диагоналей, $AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $DO = 4$ см. Найдите длину отрезка $CO$.

**132.** По данным на рисунках 135, *а*), *б*) найдите площади прямоугольников $ABCD$ и $MNPK$, если:

а) $AD = 8$ см, $R = 5$ см; б) $MK : MN = 12 : 5$, $R = 13$ см.

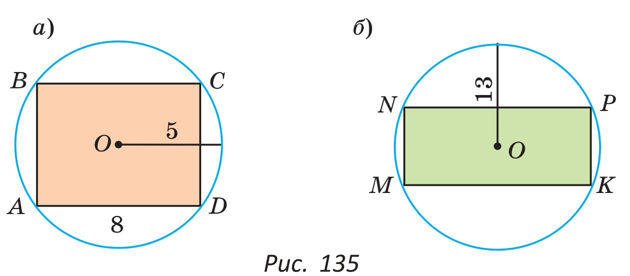



*Рис. 135*

**133.** а) Дана равнобедренная трапеция, у которой диагональ перпендикулярна боковой стороне. Меньшее основание трапеции равно 6 см, а радиус описанной окружности — 5 см. Найдите площадь трапеции.

б) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, большее основание трапеции является диаметром, меньшее основание равно 12 см, высота трапеции равна 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

**134.** В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. По данным на рисунках 136, *а*)—*в*) найдите длину отрезка, обозначенного знаком вопроса.

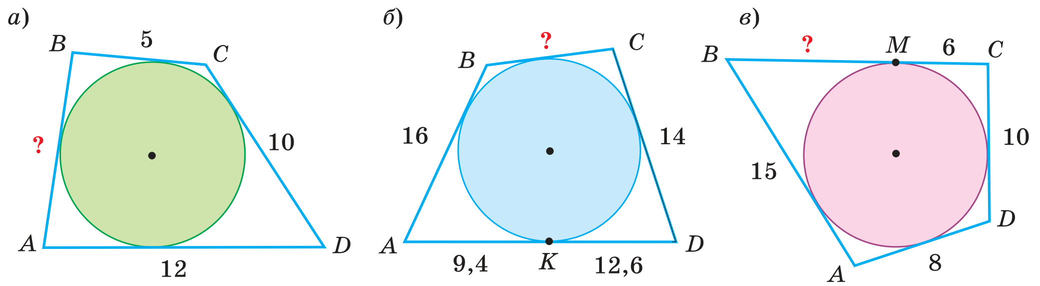



*Рис. 136*

**135.** а) Периметр описанного четырехугольника $ABCD$ равен 48 см. Найдите $BC + AD$.
б) В трапецию $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если $AB + CD = 16$ см.

**136.** а) Около параллелограмма со сторонами 4 см и 5 см описана окружность. Найдите площадь этого параллелограмма.
б) В параллелограмм с периметром 48 см и острым углом 30° вписана окружность. Найдите диаметр этой окружности.

**137.** Сумма двух противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равна 15 см, а радиус вписанной в него окружности — 3 см. Найдите площадь данного четырехугольника.

**138.** а) Дана описанная прямоугольная трапеция $ABCD$ ($\angle A = 90°$), средняя линия ее равна 12,5, боковая сторона $CD$ равна 13. Найдите основания трапеции.
б) Дана описанная равнобедренная трапеция с основаниями, равными 4 и 16. Найдите площадь этой трапеции.

**139.** $ABCD$ — описанный четырехугольник, $BC$ меньше $AB$ на 1 см, $AD$ больше $AB$ на 7 см, $CD$ больше $AB$ в 2 раза. Найдите $AB$.

**140.** $O$ — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, $\angle BAO = 32°$, $\angle CDO = 24°$. Найдите $\angle AOD$.

**141.** а) Радиус окружности, вписанной в ромб, равен 4,5 см, острый угол ромба равен 30°. Найдите периметр ромба.
б) Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

**142.** В равнобедренный треугольник $ABC$, у которого $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, вписана окружность. Касательная $MN$ параллельна $AC$ (рис. 137). Найдите периметр четырехугольника $AMNC$.

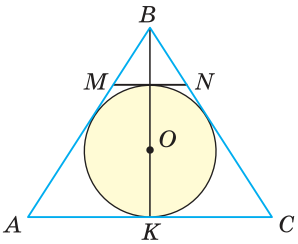
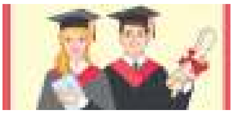


*Рис. 137*

**143.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 25$ см, $BC = 7$ см, диагональ $AC = 20$ см. Найдите диаметр окружности, описанной около трапеции.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**144*.** а) Окружность с радиусом 3 см вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно 4 см. Найдите боковые стороны и большее основание трапеции.

б) В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра этой окружности до концов большей боковой стороны равны 15 см и 20 см. Найдите площадь трапеции.

**145*.** Центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$, лежит внутри трапеции. Основания трапеции равны 6 см и 8 см, высота равна 7 см. Найдите диаметр описанной окружности.

**146*.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AB = CD = 6$ см, $AD = 8$ см, $BC = 4$ см. Биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в точке $K$. Найдите длину отрезка $AK$.

**147*.** Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, если:

а) $\angle ABD = \angle ACD$;

б) $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, где $O$ — точка пересечения диагоналей.

**148*.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AK$ и $BN$, которые пересекаются в точке $I$. Известно, что точки $K$, $I$, $N$ и $C$ лежат на одной окружности. Найдите величину угла $C$.

### *Моделирование*

Кусок ткани имеет форму прямоугольной трапеции, размеры которой указаны на рисунке 138. Из этой ткани модельеру необходимо вырезать круг наибольшего диаметра.

Составьте алгоритм нахождения центра этого круга и величины его радиуса.

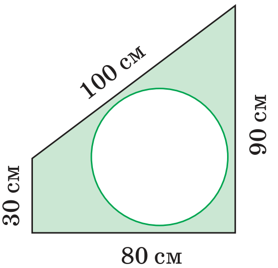


*Рис. 138*

## *Геометрия 3D*

Многогранники (призма, пирамида) и тела вращения (цилиндр, конус, шар) могут быть вписаны друг в друга (рис. 139).

**Задание 1.** В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр так, что его основания вписаны в основания призмы (см рис. 139, *а*). Радиус основания цилиндра равен 4 см, высота цилиндра — 10 см. Найдите размеры призмы.

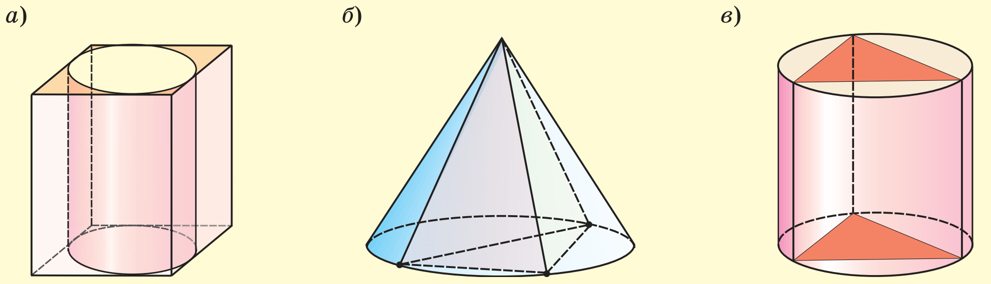



*Рис. 139*

**Задание 2.** В конус вписана треугольная пирамида так, что ее основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (см. рис. 139, *б*). Найдите радиус основания конуса, если стороны основания пирамиды равны 10 см, 24 см, 26 см.

**Задание 3.** В цилиндр вписана правильная треугольная призма так, что основания призмы вписаны в основания цилиндра, а боковые ребра принадлежат боковой поверхности цилиндра (рис. 139, *в*). Найдите площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра $2\sqrt{3}$ см, а его высота — 8 см.

При помощи **Интернета** уточните понятие *правильной призмы*.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

**1.** Определение вписанного четырехугольника.
**2.** Определение описанного четырехугольника.
**4.** Свойство и признак вписанного четырехугольника.
**5.** Свойство и признак описанного четырехугольника.

### Умеем

**1.** Доказывать теорему о свойстве углов вписанного четырехугольника.
**2.** Доказывать теорему о свойстве сторон описанного четырехугольника.

# § 11*. Креативная геометрия

## 1. Окружность, вписанная в треугольник

**Задача 1.** *Окружность вписана в треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Вывести формулу для нахождения длин отрезков, на которые точки касания окружности со сторонами делят каждую сторону треугольника.*

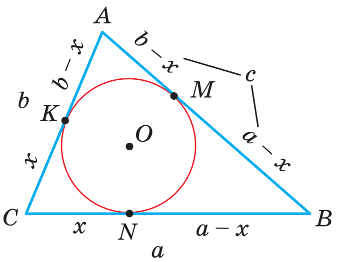



*Рис. 140*

Решение. Пусть $K$, $M$ и $N$ — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами $AC$, $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ (рис. 140). Известно, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны между собой. Тогда, если $CK = CN = x$, то $BN = BM = a - x$, $AK = AM = b - x$. Так как $AB = AM + MB$, то $c = (a - x) + (b - x)$, откуда $x = \frac{a+b-c}{2}$, т. е. $CN = CK = \frac{a+b-c}{2}$. После преобразований получим: $CN = CK = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = p - c$. Аналогично: $BN = BM = \frac{a+c-b}{2} = p - b$, $AK = AM = \frac{b+c-a}{2} = p - a$.

Ответ: $CN = CK = p - c$, $BN = BM = p - b$, $AK = AM = p - a$.

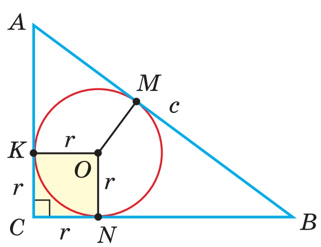
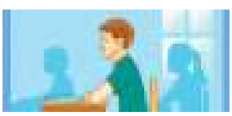



*Рис. 141*

*Замечание.* Если $\angle C = 90°$ (рис. 141), то $CN = CK = r = p - c$ (см. с. 69). Формула радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$ — частный случай результата задачи 1.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**149.** Дан треугольник $ABC$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 8$. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AC$ в точке $K$. Найдите отношение площадей треугольников $ABK$ и $CBK$.

**150.** В треугольник $ABC$, у которого $AB = 8$, вписана окружность. Касательная к окружности пересекает стороны $BC$ и $AC$ в точках $M$ и $K$ соответственно. Периметр треугольника $MCK$ равен 12. Найдите периметр треугольника $ABC$.

**151.** В треугольник со сторонами 7, 9 и 10 вписана окружность. К окружности проведена касательная, которая пересекает две меньшие стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, отсеченного от данного этой касательной.

## 2. Описанная трапеция

**Задача 2.** *Найти площадь описанной равнобедренной трапеции с основаниями $a$ и $b$.*

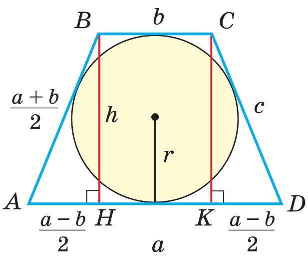



*Рис. 142*

Решение. Площадь трапеции можно найти по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$ и $BC = b$, $AB = CD = c$ — боковые стороны, $BH = h$ — высота (рис. 142). По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$, откуда $2AB = a + b$, $AB = c = \frac{a+b}{2}$. Известно, что в равнобедренной трапеции $AH = \frac{a-b}{2}$ (можно опустить высоту $CK$ и убедиться в этом). Из прямоугольного треугольника $AHB$ получаем: $h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$, $h = \sqrt{ab}$. Отсюда $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

Ответ: $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

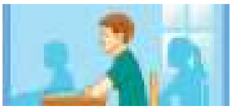
*Замечание.* Площадь описанной равнобедренной трапеции равна произведению среднего арифметического и среднего геометрического ее оснований.

**Полезно запомнить!**

Для *описанной* равнобедренной трапеции с основаниями $a$ и $b$, боковой стороной $c$, высотой $h$, средней линией $m$ и радиусом $r$ вписанной окружности (см. рис. 142) справедливы равенства:

1) $c = \frac{a+b}{2} = m$; 2) $P = 4c = 4m = 2(a+b)$; 3) $h = \sqrt{ab}$;

4) $S = ch$; 5) $r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$; 6) $S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

**152.** а) В равнобедренную трапецию с основаниями 2 см и 8 см вписана окружность. Найдите площадь трапеции.
б) Найдите площадь описанной равнобедренной трапеции, большее основание которой равно 18 см, боковая сторона — 13 см.

**153.** В равнобедренную трапецию площадью 32 см$^2$ с углом 30° вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

**154.** Докажите, что если в прямоугольную трапецию с основаниями $a$ и $b$ можно вписать окружность, то площадь трапеции $S = ab$.

**155.** В прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно 4 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь трапеции равна 48 см$^2$.

### 3. Дополнительные свойства и признаки вписанного четырехугольника

**Теорема.**

*Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда угол между его стороной и диагональю равен углу между противоположной стороной и другой диагональю.*

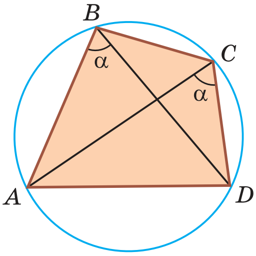
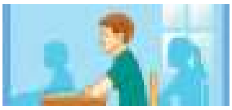



*Рис. 143*

Доказательство. 1. Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 143), то $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.
2. Докажем, что если в некотором четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$, то около него можно описать окружность. Опишем около треугольника $ABD$ окружность.
В 8-м классе (В. В. Казаков. «Геометрия, 8», с. 186) было доказано свойство: ***«Геометрическим местом точек плоскости, из которых данный отрезок AD виден под углом α, является объединение двух дуг окружностей: дуги ABD и ей симметричной относительно прямой AD, исключая точки A и D»***. Данное свойство гарантирует, что вершины всех углов, равных углу $ABD$ и лежащих по одну сторону от прямой $AD$, расположены на дуге $ABD$ окружности. Поэтому окружность, описанная около треугольника $ABD$, пройдет и через вершину $C$. Теорема доказана.

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**156.** Докажите теорему: «***Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведения отрезков диагоналей, на которые они разбиваются точкой пересечения, равны***», т. е. если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ (рис. 144), и обратно.

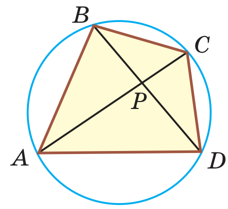


*Рис. 144*

**157.** а) $O$ — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, $\angle BAD = 42°$. Найдите $\angle BCD$.
б) Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P$, $AP = 12$, $PC = 3$, $BP = 4$, $PD = 9$, $\angle CAD = 40°$. Найдите $\angle CBD$.

**158.** В трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 4$, боковая сторона $AB = 5$, $\angle BAC = \angle CDB$. Найдите площадь трапеции.

**159.** а) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADB = 45°$, $\angle BDC = 70°$, $\angle ACB = 45°$. Найдите $\angle ABC$.
б) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = 78°$, $\angle BCD = 102°$, $\angle CBD = 52°$. Найдите $\angle CAD$.

**160.** В треугольнике $ABC$ (рис. 145) $\angle B = 60°$, биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$. Докажите, что около четырехугольника $C_1BA_1I$ можно описать окружность.

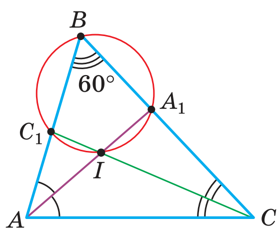


*Рис. 145*

### 4. Вневписанные окружности

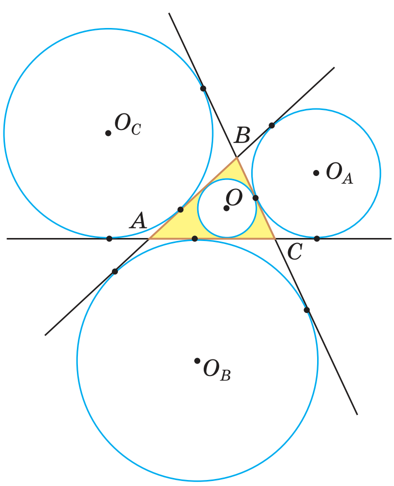


*Рис. 146*

Окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется *вневписанной* окружностью треугольника. На рисунке 146 изображен треугольник $ABC$ и три его вневписанные окружности с центрами $O_A$, $O_B$, $O_C$ и радиусами $r_a$, $r_b$, $r_c$. Центр каждой такой окружности лежит в точке пересечения биссектрис двух внешних углов при вершинах треугольника.

Вневписанные окружности обладают рядом интересных свойств:

**1.** Центры вписанной и вневписанной окружностей лежат на биссектрисе соответствующего внутреннего угла треугольника.

**2.** $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$, где $r$ — радиус вписанной окружности треугольника.

**3.** $4R + r = r_a + r_b + r_c$, где $R$ — радиус описанной окружности $\triangle ABC$.

Попробуйте доказать некоторые из этих свойств.

Найдем радиус $r_a$ вневписанной окружности треугольника $ABC$ со сторонами $a$, $b$ и $c$ (рис. 147). Для этого проведем радиусы $OE$ и $O_AK$. По свойству касательной $OE \perp AC$, $O_AK \perp AC$. Из подобия прямоугольных треугольников $AOE$ и $AO_AK$ (по острому углу) следует $\dfrac{OE}{AE} = \dfrac{O_AK}{AK}$. Так как $AK = \dfrac{1}{2}P_{ABC} = p$, $AE = p - a$ и $r = \dfrac{S}{p}$, где $OE = r$, то $\dfrac{\frac{S}{p}}{p-a} = \dfrac{r_a}{p}$, откуда $S = r_a(p - a)$,

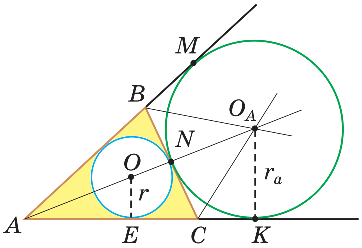
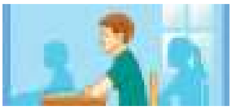


*Рис. 147*

$$\boxed{r_a = \dfrac{S}{p-a}.}$$

**Пример.** Вычислим, используя данную формулу, радиус вневписанной окружности прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, которая касается гипотенузы: $r_c = \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4}{\frac{3+4+5}{2} - 5} = \dfrac{6}{1} = 6.$



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**161.** Пусть в треугольнике $ABC$ $\angle A = 40°$. Найдите $\angle BO_AC$, где $O_A$ — центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны $BC$.

**162.** Найдите радиус вневписанной окружности равностороннего треугольника со стороной, равной $a$.

**163.** Докажите, что для треугольника $O_AO_BO_C$ (см. рис. 146) отрезки $O_AA$, $O_BB$, $O_CC$ являются высотами.

**164.** Вневписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $BC$ в точке $M$, продолжений сторон $AB$ и $AC$ — в точках $N$ и $P$ соответственно. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AC$ в точке $K$, а стороны $AB$ — в точке $L$. Докажите, что:

а) $AN = \dfrac{1}{2}P_{ABC}$; б) $NL = BC$.

**165.** Докажите, что отрезок, соединяющий центр вписанной и центр вневписанной окружности треугольника, делится описанной окружностью этого треугольника пополам.

### 5. Обобщенная теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$) проведена высота $CH$, которая делит его на треугольники $ACH$ и $CBH$, подобные между собой и подобные треугольнику $ABC$ ($\angle A = \angle BCH$) (рис. 148). Тогда теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ может звучать так: сумма квадратов гипотенуз $a$ и $b$ треугольников $CBH$ и $ACH$ равна квадрату гипотенузы треугольника $ABC$. И вообще, если $m$, $n$ и $l$ — соответствующие линейные элементы $\triangle CBH$, $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$, то можно сформулировать обобщенную теорему Пифагора: $m^2 + n^2 = l^2$.

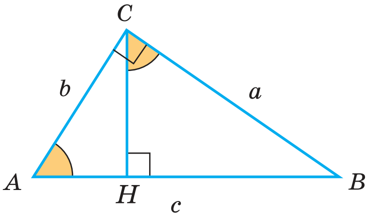
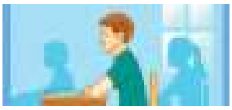


*Рис. 148*

Действительно, из подобия указанных треугольников $\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{l}{c} = k$, откуда $m = ka$, $n = kb$, $l = kc$, $m^2 + n^2 = k^2(a^2 + b^2) = (kc)^2 = l^2$.

**Пример.** Пусть $P_{AHC} = 15$ см, $P_{CBH} = 36$ см (см. рис. 148). Найдем $P_{ABC}$. По обобщенной теореме Пифагора $P_{AHC}^2 + P_{CBH}^2 = P_{ABC}^2$, отсюда $P_{ABC}^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$, $P_{ABC} = 39$.

Ответ: $P_{ABC} = 39$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**166.** В прямоугольном треугольнике с катетами 15 и 20 к гипотенузе проведена высота. Она разбивает данный треугольник на два прямоугольных треугольника. В каждый из полученных треугольников вписана окружность. Найдите:

а) расстояние между точками касания этих окружностей с указанной высотой;
б) расстояние между центрами этих окружностей.

**167.** Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит прямоугольный треугольник на два треугольника, площади которых равны 1 см$^2$ и 4 см$^2$. Найдите гипотенузу данного прямоугольного треугольника.

**168.** Докажите, что для прямоугольного треугольника с катетами $a$ и $b$ и высотой $h$, проведенной к гипотенузе, справедливо равенство

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

**169.** Пусть $CH = h$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$ с гипотенузой $AB$, $r$ — радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, $r_1$ — радиус окружности, вписанной в треугольник $ACH$, $r_2$ — радиус окружности, вписанной в треугольник $BCH$.

а) Докажите, что $r_1 + r_2 + r = h$.
б) Найдите $r$, если $r_1 = 3$, $r_2 = 4$.

### 6. Формула Эйлера для окружностей

Для вписанной и описанной окружностей треугольника с радиусами $R$ и $r$ и расстоянием $d$ между их центрами (рис. 149) справедлива формула Эйлера

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

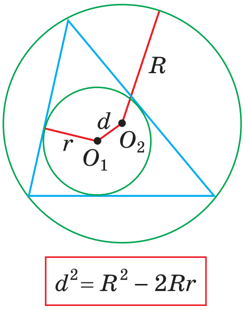


*Рис. 149*

Проверим справедливость этой формулы на примере равнобедренного треугольника $ABC$, у которого $AB = BC = 10$, $AC = 12$ (рис. 150).

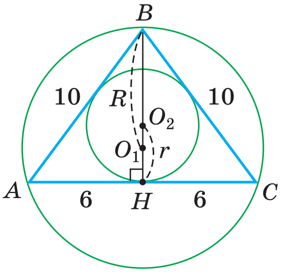
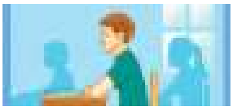


*Рис. 150*

Вначале найдем расстояние между центрами указанных окружностей традиционным способом. Проведем высоту $BH$, длина которой будет равна 8 (пифагорова тройка 6, 8, 10). Центры описанной и вписанной окружностей — соответственно точки $O_1$ и $O_2$ — лежат на прямой $BH$ (свойство равнобедренного треугольника). Тогда $BO_1 = R$, $O_2H = r$, $d = O_1O_2$ — расстояние между указанными центрами. Для нахождения радиуса описанной окружности воспользуемся формулой $R = \frac{b^2}{2h_a}$, где $b$ — боковая сторона, $h_a$ — высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника. Получим $R = \frac{10^2}{2 \cdot 8} = 6\frac{1}{4}$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$. Так как $BO_1 = R = 6\frac{1}{4}$ и $O_1H = 8 - 6\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, то $O_1H < O_2H$. Искомое расстояние $d = O_1O_2 = O_2H - O_1H = 3 - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$.

А теперь найдем $d$ по формуле Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr = \left(6\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{625}{16} - \frac{150}{4} = \frac{25}{16}$, откуда $d = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Как видим, формула Эйлера достаточно эффективна.

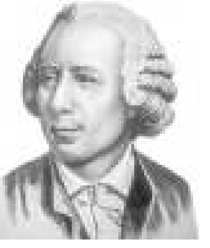


## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**170.** Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16 двумя способами: традиционным и с помощью формулы Эйлера.

**171.** Докажите, что для радиуса $R$ описанной и радиуса $r$ вписанной окружностей треугольника справедливо неравенство $\frac{R}{r} \geqslant 2$.

**172.** При помощи формулы Эйлера докажите, что в равностороннем треугольнике $R = 2r$.



***Интересно знать.*** Леонард Эйлер — выдающийся математик, внесший значительный вклад в развитие математики. Родился в Швейцарии, длительное время работал в России, являясь академиком Петербургской академии наук.

В 1775 году Леонард Эйлер опубликовал теорему: «*Основания высот, основания медиан и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами треугольника, лежат на одной окружности*». Эту окружность называют *окружностью Эйлера или окружностью девяти точек*. Ее радиус в 2 раза меньше радиуса описанной окружности треугольника.

При помощи **Интернета** найдите информацию об *окружности Эйлера*, а также о *прямой Эйлера*. Выясните, как связаны прямая Эйлера и окружность Эйлера.

## ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Окружность девяти точек.
2. Прямая Эйлера.
3. Точка Нагеля, точка Жергонна, точка Торричелли.
4. Жизнь и математическое наследие Леонарда Эйлера.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия, 9» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 9 кл.».

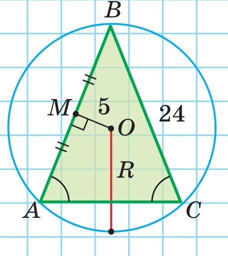
## ЗАПОМИНАЕМ

1. Центр описанной окружности треугольника (многоугольника) лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.
2. Центр вписанной окружности треугольника (многоугольника) лежит в точке пересечения биссектрис его углов.
3. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.
4. Радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника находится по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$.
5. Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180°. И обратно.
6. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны между собой. И обратно.
7. Площадь треугольника и описанного многоугольника можно найти по формуле $S = pr$, где $p$ — полупериметр, $r$ — радиус вписанной окружности.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

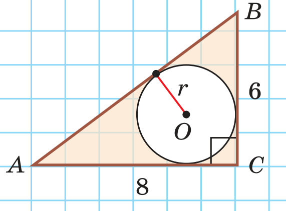
### Тест 1

По данным на рисунке найдите радиус $R$.



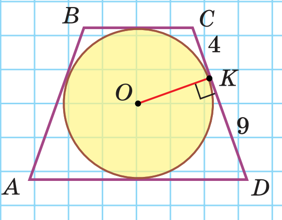

### Тест 2

По данным на рисунке найдите радиус $r$.




### Тест 3

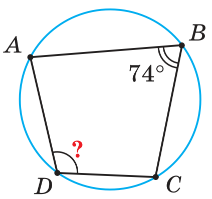
Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$.



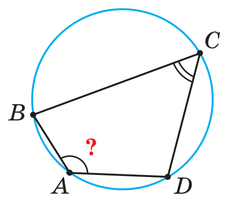
## Подготовка к контрольной работе № 2

**1.** Найдите величину угла, обозначенного знаком вопроса.

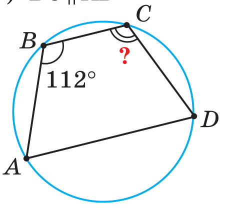
*а)*




*б)* $\angle C : \angle A = 1:3$

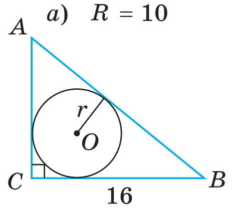



*в)* $BC \parallel AD$

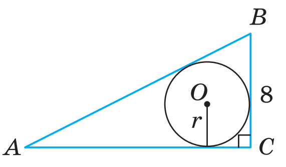



**2.** Найдите радиус $r$ вписанной окружности.

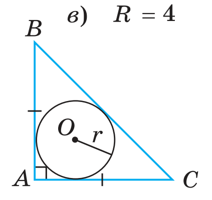
*а)* $R = 10$




*б)* $R = 8{,}5$

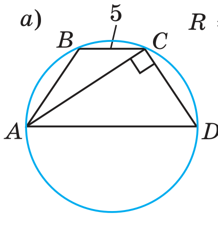



*в)* $R = 4$

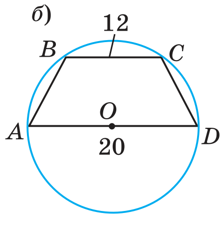



**3.** Найдите высоту трапеции, вписанной в окружность.

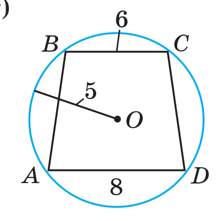
*а)* $R = 6{,}5$




*б)*

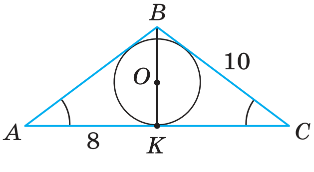



*в)*



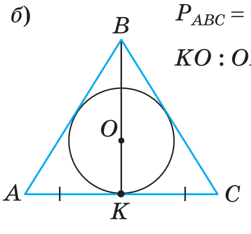

**4.** Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружностей $\triangle ABC$.

*а)*

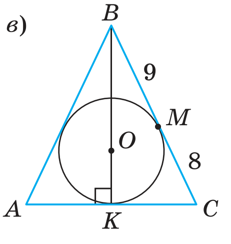



*б)* $P_{ABC} = 64$

$KO : OB = 3:5$

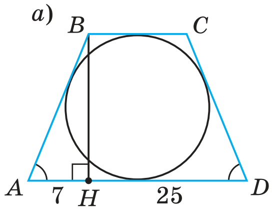



*в)*

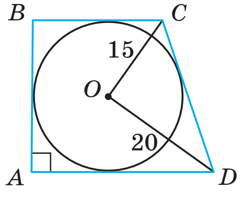



**5.** Найдите площадь описанной трапеции.

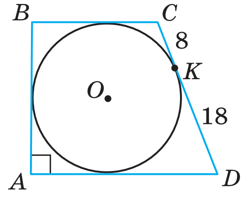
*а)*




*б)*




*в)*



## Повторение главы I

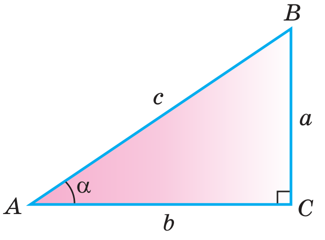
**1. Решение прямоугольного треугольника**

Дано: $a$, $\alpha$.

Найти: $b$, $c$.

Решение. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $c \cdot \sin\alpha = a$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.




**2. Значения тригонометрических функций углов 30°, 60°, 45°**

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

**3. Тригонометрические формулы**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

**4. Нахождение значений тригонометрических функций тупого угла**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

**Примеры.** $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

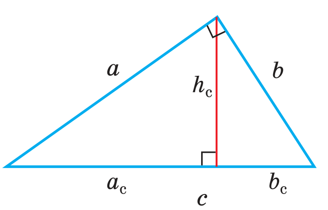
**5. Формулы площади треугольника и площади параллелограмма**

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad S_{\text{пар}} = ab\sin\alpha.$$

**6. Среднее геометрическое в прямоугольном треугольнике**

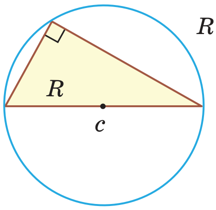
$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c},$$
$$a = \sqrt{c \cdot a_c},$$
$$b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

$$h_c = \frac{ab}{c}, \quad a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}.$$

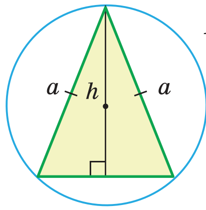


## Повторение главы II

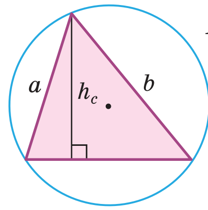
### 1. Нахождение радиуса описанной окружности треугольника




$R = \frac{c}{2}$

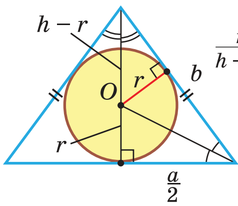



$R = \frac{a^2}{2h}$



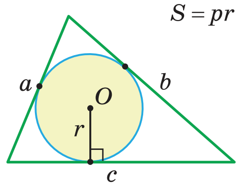

$R = \frac{ab}{2h_c}$

### 2. Нахождение радиуса вписанной окружности треугольника

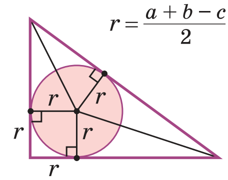



$\frac{r}{h-r} = \frac{\frac{a}{2}}{b}$

$S = pr$

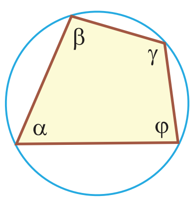



$r = \frac{a+b-c}{2}$

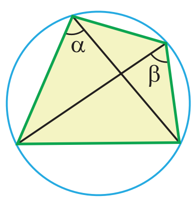



### 3. Вписанный четырехугольник и его описанная окружность

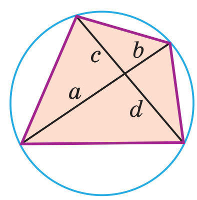
$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180°$




$\alpha = \beta$

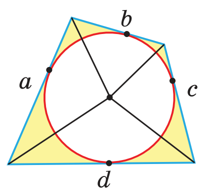



$ab = cd$

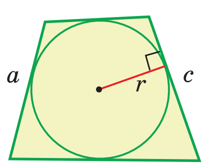



### 4. Описанный четырехугольник. Равнобедренная описанная трапеция

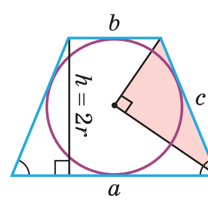
$a + c = b + d$




$S = (a + c)r = pr$

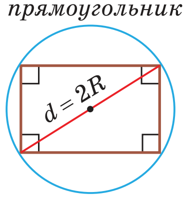



$S = ch \qquad h = \sqrt{ab}$

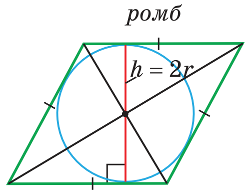



### 5. Параллелограмм и окружность. Прямоугольная описанная трапеция

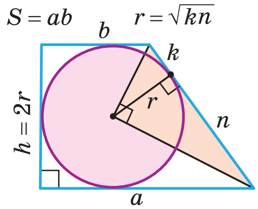
*прямоугольник*




*ромб*




$S = ab \qquad r = \sqrt{kn}$

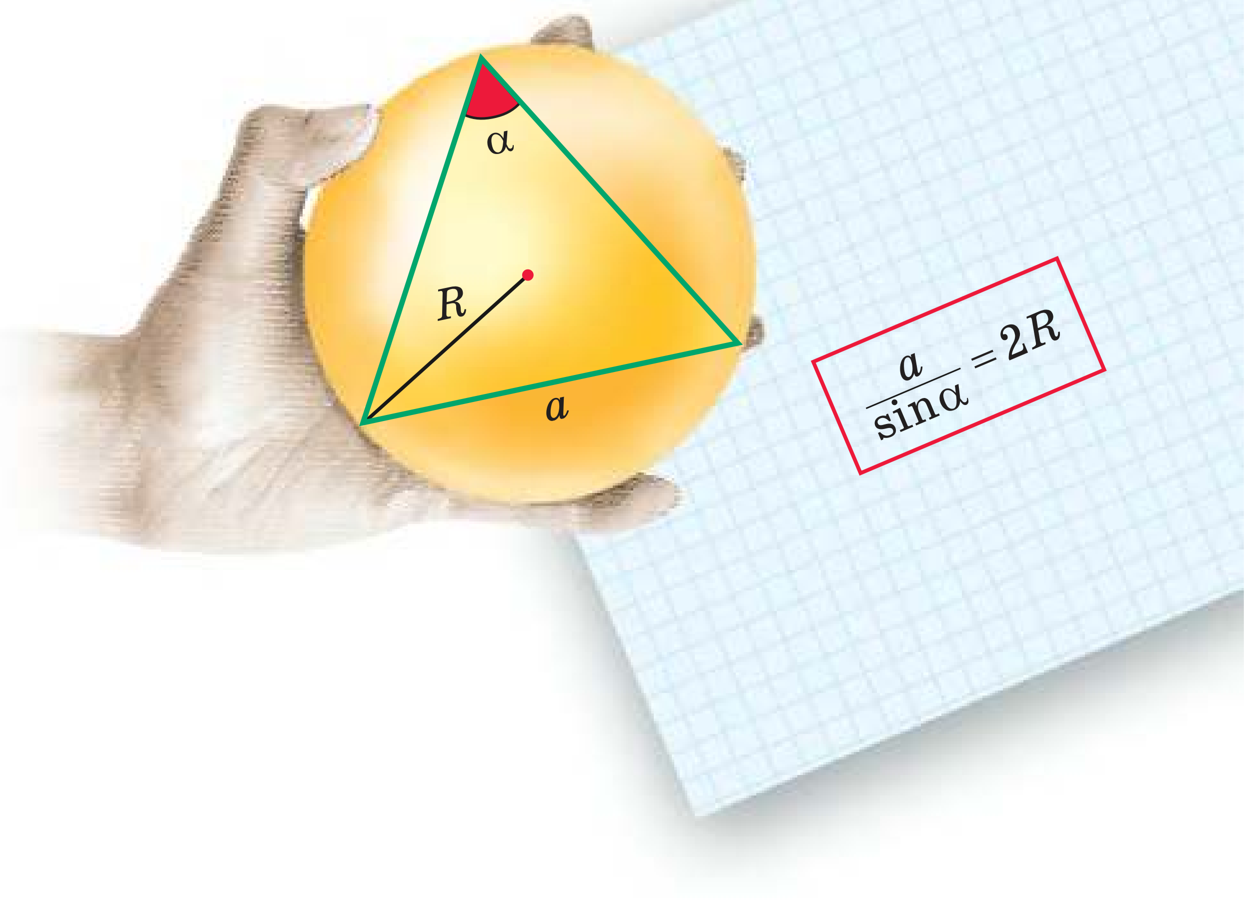


Глава III

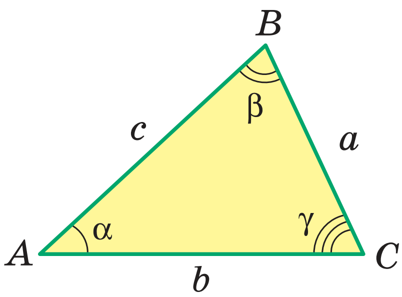
# Теорема синусов, теорема косинусов

**В этой главе вы узнаете:**

- Что утверждают теорема синусов и теорема косинусов
- Как найти величины углов треугольника, зная длины всех его сторон
- Формулу Герона о площади треугольника

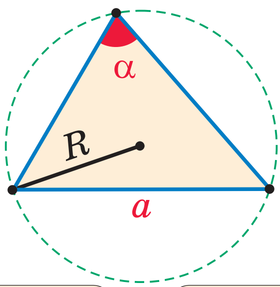


# Теорема синусов и теорема косинусов




$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

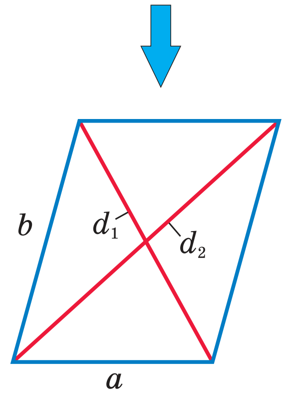



$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

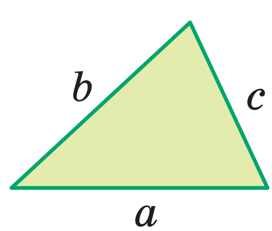
***R***

Свойство диагоналей параллелограмма




$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$$

**Формула Герона**




$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

## § 12. Теорема синусов

Вы уже знаете, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона. Пусть $a$, $b$, $c$ — стороны, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — противолежащие им углы треугольника $ABC$ соответственно (рис. 151). Если сторона $a$ — бо́льшая, $b$ — средняя, $c$ — меньшая, то угол $\alpha$ — больший, $\beta$ — средний, $\gamma$ — меньший. Установим точную связь между длиной стороны треугольника и величиной противолежащего ей угла.

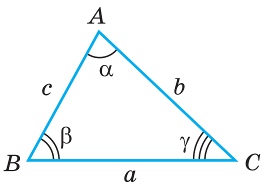



*Рис. 151*

Теорема синусов. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу окружности, описанной около треугольника, т. е.**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Доказательство. Пусть дан треугольник $ABC$, $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $R$ — радиус его описанной окружности. Угол $\alpha$ может быть острым, тупым или прямым. Рассмотрим эти случаи отдельно.

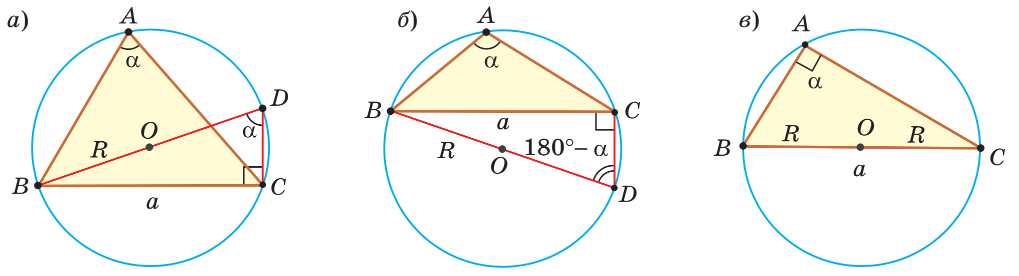



*Рис. 152*

1) Угол $\alpha$ острый (рис. 152, *а*). Проведя диаметр $BD$ и отрезок $DC$, получим прямоугольный треугольник $BCD$, в котором $\angle BCD = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Заметим, что $\angle D = \angle A = \alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $BC$. Из прямоугольного треугольника $BCD$ находим $\sin D = \frac{BC}{BD}$, т. е. $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

2) Угол $\alpha$ тупой (рис. 152, *б*). Проведем диаметр $BD$ и отрезок $DC$. В четырехугольнике $ABDC$ по свойству вписанного четырехугольника $\angle D = 180° - \alpha$. Из прямоугольного треугольника $BCD$ ($\angle BCD = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр) $\sin D = \frac{BC}{BD}$, $\sin(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$. Поскольку $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, откуда $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

3) Для $\alpha = 90^\circ$ справедливость равенства $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ докажите самостоятельно.

В силу доказанного $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Теорема доказана.

Теорема синусов дает возможность решать широкий круг задач. Так, пропорция $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ позволяет решить *две* следующие задачи:

- зная две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них, найти синус угла, противолежащего другой стороне;
- зная два угла треугольника и сторону, противолежащую одному из этих углов, найти сторону, противолежащую другому углу.

С помощью формулы $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ можно решить еще *три* задачи (рис. 153):

- зная сторону треугольника и противолежащий ей угол, найти радиус окружности, описанной около треугольника;
- зная угол треугольника и радиус описанной окружности, найти сторону треугольника, противолежащую данному углу;
- зная сторону треугольника и радиус его описанной окружности, найти синус угла, противолежащего данной стороне.

$\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R}$

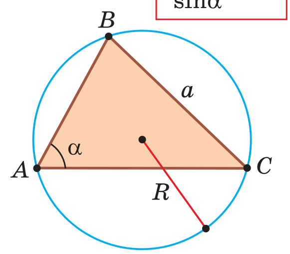
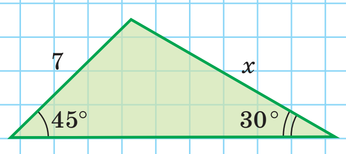



*Рис. 153*

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

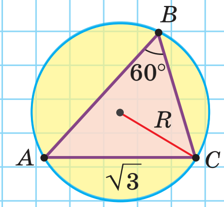
## Тест 1

Найдите сторону $x$ треугольника на рисунке, используя теорему синусов: $\dfrac{x}{\sin 45^\circ} = \dfrac{7}{\sin 30^\circ}$.




## Тест 2

Найдите величину радиуса $R$ на рисунке, используя формулу $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.



### *Повторение*

1) $\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$, $\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

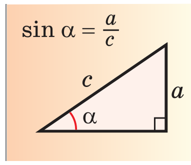
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

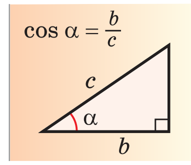
2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$,

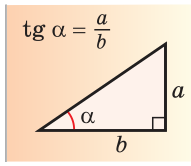
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

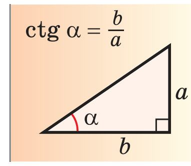
3) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

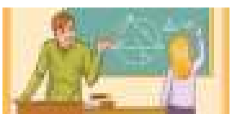
4) $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.



## Задания к § 12

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *В остроугольном треугольнике известны стороны* $a = 8$, $b = 9$ *и угол* $\alpha = 60^\circ$. *Найти два других угла* $\beta$ *и* $\gamma$, *округлив их значения до* $1^\circ$, *и третью сторону треугольника, округлив ее длину до* $0{,}1$.

Решение. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{\sin\beta}$, $\sin\beta = \frac{9\cdot\sin 60^\circ}{8} \approx \frac{9\cdot 0{,}8660}{8} \approx 0{,}9743$. При помощи калькулятора (таблиц) находим $\beta \approx 77^\circ$. Тогда $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 43^\circ$. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, откуда $\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 43^\circ}$, $c = \frac{8\cdot\sin 43^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8\cdot\frac{0{,}6820}{0{,}8660} \approx 6{,}3$.

Ответ: $\beta \approx 77^\circ$, $\gamma \approx 43^\circ$, $c \approx 6{,}3$.

*Замечание.* Если бы по условию треугольник был тупоугольным с тупым углом $\beta$, то, зная $\sin\beta \approx 0{,}9743$, вначале мы нашли бы острый угол $\beta_1 \approx 77^\circ$. А затем, используя формулу $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, получили бы, что $\beta = 180^\circ - \beta_1 \approx \approx 180^\circ - 77^\circ \approx 103^\circ$.

**Задача 2.** *Доказать справедливость формулы площади треугольника* $\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$, *где* $a$, $b$, $c$ *— его стороны,* $R$ *— радиус описанной окружности.*

Доказательство. Воспользуемся известной формулой площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. По теореме синусов $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, откуда $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Тогда $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Выведенная формула позволяет найти радиус описанной окружности треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$.

**Задача 3.** *Найти радиус $R$ окружности, описанной около равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC = 10$ и боковой стороной $BC = 13$* (рис. 154).

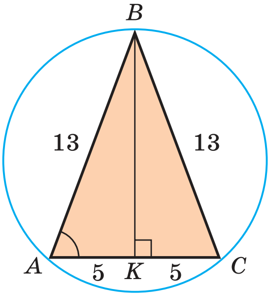



*Рис. 154*

Решение. *Способ* 1. Из формулы $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ следует, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. Найдем $\sin A$. Для этого в треугольнике $ABC$ проведем высоту $BK$, которая будет и медианой, откуда $AK = \frac{1}{2}AC = 5$. Из $\triangle ABK$ по теореме Пифагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, откуда $\sin A = \frac{BK}{AB} = \frac{12}{13}$.

Тогда $2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{13}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{12}$, $R = \frac{169}{2 \cdot 12} = 7\frac{1}{24}$.

*Способ* 2. Используем формулу $S = \frac{abc}{4R}$, из которой $R = \frac{abc}{4S}$. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$, то $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24} = 7\frac{1}{24}$.

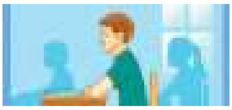
Ответ: $7\frac{1}{24}$.

*Замечание*.* Напомним, что в главе II мы находили радиус $R$ описанной окружности равнобедренного треугольника, проводя серединные перпендикуляры к его сторонам и используя подобие полученных прямоугольных треугольников. Также мы могли использовать формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$, где $b$ — боковая сторона, $h_a$ — высота, проведенная к основанию $a$. Заменив $S$ в формуле $R = \frac{abc}{4S}$ на $\frac{1}{2}ch_c$, получим $R = \frac{ab}{2h_c}$ — формулу радиуса описанной окружности для произвольного треугольника. Итак, мы имеем четыре формулы для нахождения радиуса $R$ описанной окружности треугольника:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2R,} \quad \boxed{R = \frac{abc}{4S},} \quad \boxed{R = \frac{ab}{2h_c},} \qquad \boxed{R = \frac{b^2}{2h_a}.}$$

Произвольный треугольник

Равнобедренный треугольник



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

**173.** Перенесите в тетрадь и заполните таблицу, в которой α и β — углы, $a$ и $b$ — соответствующие этим углам стороны треугольника. Для нахождения неизвестных значений используйте пропорцию $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 4 | | $\sqrt{6}$ |
| $b$ | | 6 | 2 |
| $\alpha$ | 30° | 45° | 120° |
| $\beta$ | 45° | 60° | |

**174.** По данным на рисунках 155, *а)*—*в)* вычислите длину стороны треугольника, обозначенной знаком вопроса. При расчетах используйте калькулятор (таблицы), результат округлите до 0,1.

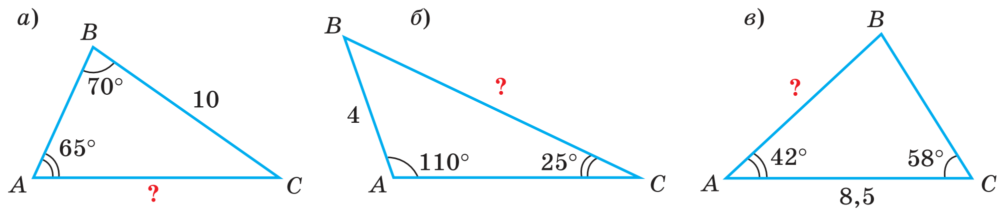



*Рис. 155*

**175.** По данным на рисунках 156, *а)*—*в)* вычислите при помощи калькулятора (таблиц) угол треугольника, обозначенный знаком вопроса. Ответ округлите до 1°.

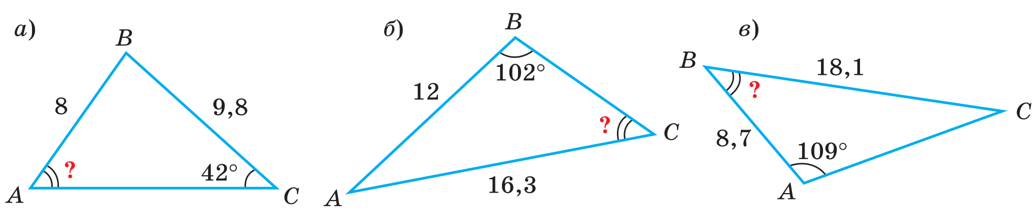



*Рис. 156*

**176.** Сделайте схематический чертеж треугольника $ABC$. При помощи теоремы синусов найдите длину стороны $b$ (округлив ответ до 0,1), если:

а) $a = 4$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$; б) $a = 6{,}5$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$.

**177.** Сделайте схематический чертеж треугольника $ABC$. Найдите величину угла $B$ треугольника $ABC$ (округлив ответ до 1°), если:

а) $BC = 6$, $AC = 3$, $\angle A = 62°$; б) $AB = 4{,}6$, $AC = 4{,}3$, $\angle C = 26°$.

---

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.

**178.** В треугольнике $ABC$ известно: $\sin A = 0{,}8$, $\sin B = 0{,}6$, $AC + BC = 28$ см. Найдите длины сторон $AC$ и $BC$.

**179.** По данным на рисунках 157, *а)*—*в)* вычислите:

а) $\angle B$; б) $AB$; в) $BC$.

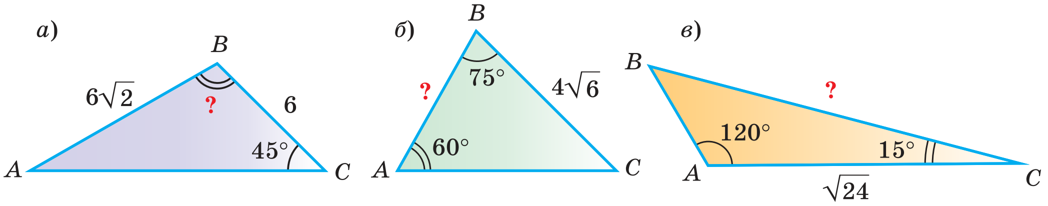



*Рис. 157*

**180.** В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $\sin\angle DAC = \frac{1}{2}$, $\sin\angle BAC = \frac{3}{4}$. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 6$ см.

**181.** По данным на рисунках 158, *а)*—*в)* найдите радиус $R$ окружности, описанной около треугольника $ABC$.

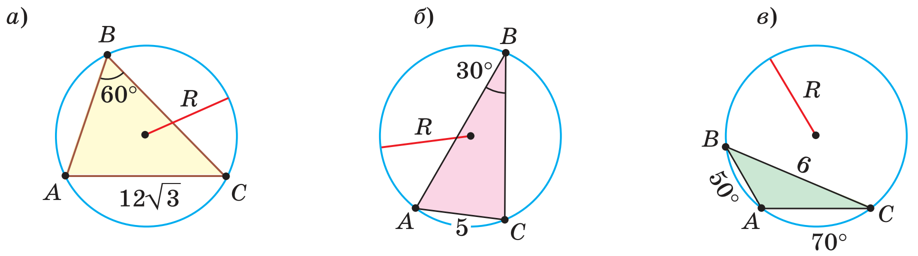



*Рис. 158*

**182.** а) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$ (рис. 159, *а*), если $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $BC = 12$ см.

б) Найдите длину стороны $AB$ треугольника $ABC$ (рис. 159, *б*), если $\angle C = 60°$, а радиус его описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$ см.

в) Найдите величину острого угла $B$ треугольника $ABC$ (рис. 159, *в*), если $AC = \sqrt{8}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 2 см.

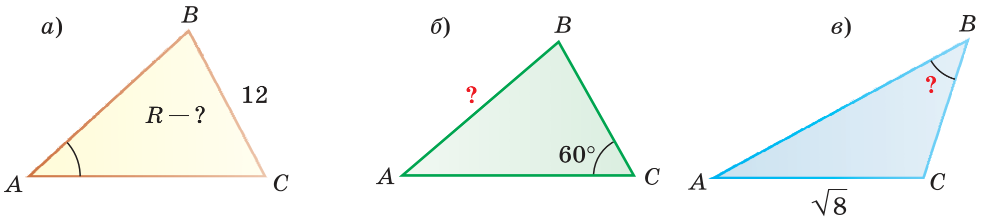



*Рис. 159*

**183.** Около треугольника $ABC$ описана окружность с центром в точке $O$ и диаметром, равным $16\sqrt{2}$ см. Найдите длину стороны $AB$ треугольника $ABC$, если $\angle BOC = 160°$ и $\angle ABC - \angle ACB = 10°$.

**184.** По данным на рисунках 160, *а*)—*в*) вычислите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

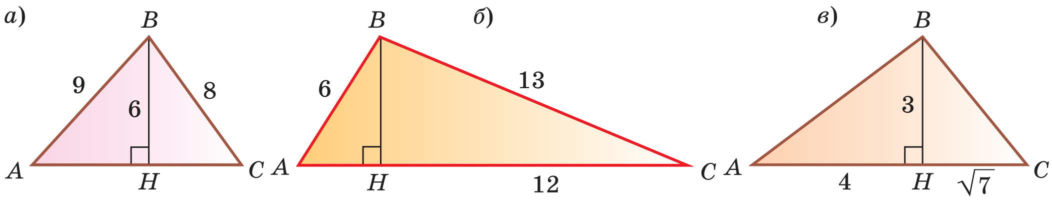



*Рис. 160*

**185.** а) В треугольнике $ABC$ $\angle B = 45°$, $\angle C = 105°$, $BC = 6$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

б) Треугольник $ABC$ равнобедренный, основание $AC = 8$ см, угол при основании равен 15°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

в) Докажите, что если один из углов треугольника равен 30° или 150°, то длина стороны треугольника, противолежащей этому углу, равна радиусу окружности, описанной около треугольника.

**186.** Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами:

а) 10 см, 10 см, 12 см;

б) $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, 8 см.

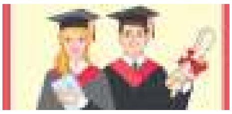
**187.** В треугольнике дана сторона $a$ и углы $\beta$, $\gamma$. Используя теорему синусов, найдите стороны $b$ и $c$.

**188.** Используя формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной $a$.

**189.** В прямоугольнике $ABCD$ $BC = 8$ см, $AB = 6$ см, $M$ — середина стороны $AD$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ACM$.

**190.** а) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$, диагональ $AC = 8\sqrt{3}$ см. Луч $AC$ является биссектрисой угла $BAD$, $\angle ACB = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

б) Основания $BC$ и $AD$ вписанной трапеции $ABCD$ равны 11 см и 21 см соответственно, боковая сторона $AB$ равна 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**191*.** а) Точка $M$ лежит на основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников $ABM$ и $CBM$ равны между собой и не зависят от положения точки $M$.

б) Дан треугольник $ABC$. На его стороне $AC$ взята точка $M$. Докажите, что отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников $ABM$ и $CBM$, не зависит от положения точки $M$.

**192*.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если:

а) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 4)$, $C(4;\ 0)$;
б) $A(-2;\ 0)$, $B(6;\ 6)$, $C(6;\ -4)$.

**193*.** Докажите, что радиус окружности, проходящей через ортоцентр треугольника и две любые его вершины, равен радиусу окружности, описанной около треугольника.

**194*.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, где $AB < BC$; $BM$ — медиана, $BK$ — биссектриса треугольника. Докажите, используя теорему синусов, что $AK < AM$.

**195*.** Докажите, что радиус описанной окружности треугольника больше либо равен половине стороны треугольника.

## *Моделирование*

**Задание 1.**

1) Составьте алгоритм нахождения при помощи теоремы синусов расстояния от точки $A$ до недоступной точки $C$ (рис. 161), если известно, что $AB = c$, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

2) Выразите $AC = b$ через $c$, $\alpha$ и $\beta$.

3) Найдите $AC$ при условии, что $AB = 30$ м, $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Ответ округлите до 1 м.

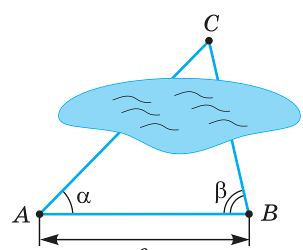



*Рис. 161*

**Задание 2.**

1) Глядя на рисунок 162, составьте математическую модель нахождения высоты $h$ башни, длин $l_1$ и $l_2$ тросов, идущих от вершины башни к земле. Расстояние от наблюдателя до башни измерить рулеткой нельзя, так как башню окружает ров, но можно измерить углы $\alpha$ и $\beta$ и расстояние $a$.

2) Найдите высоту башни и длины тросов при условии, что $a = 4$ м, $\alpha = 63°$, $\beta = 48°$. Ответ округлите до 1 м.

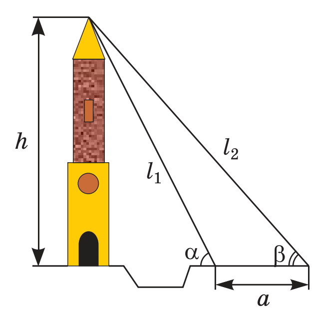



*Рис. 162*

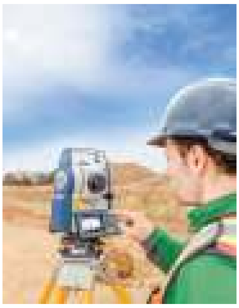


*Рис. 163*

***Интересно знать.*** Приборы для измерения углов на местности называются *угломерами*. Они бывают лазерными и электронными. Инженеры-строители пользуются *тахеометрами* (рис. 163).

На рисунке 164 изображен один из символов Беларуси — Каменецкая вежа, расположенная в Брестской области (г. Каменец). Это наиболее хорошо сохранившаяся оборонительная башня, построенная в 1276—1288 годах по приказу князя Владимира Васильковича. Ее высота составляет 31 м. Вежа является памятником романского стиля с элементами ранней готики.

*Рис. 164*

## § 13. Теорема косинусов

Теорема косинусов позволяет выразить длину любой стороны треугольника через длины двух других его сторон и косинус угла между ними (например, длину стороны $a$ треугольника $ABC$ (рис. 165) через длины сторон $b$ и $c$ и $\cos\alpha$). Теорему косинусов можно назвать самой «работающей» в геометрии. Она имеет многочисленные следствия, которые часто используются при решении задач.

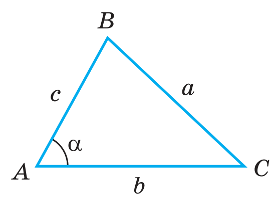



*Рис. 165*

Теорема косинусов. **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е.**

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$$

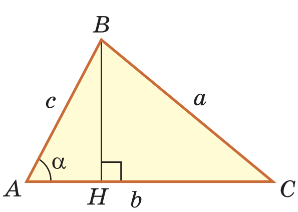



*Рис. 166*

Доказательство.
Докажем теорему для случая, когда в треугольнике $ABC$ угол $A$ и угол $C$ острые (рис. 166).
Проведем высоту $BH$ к стороне $AC$. Из $\triangle ABH$ находим $BH = c\sin\alpha$, $AH = c\cos\alpha$, откуда $HC = b - c\cos\alpha$.
Из $\triangle BHC$ по теореме Пифагора
$a^2 = HC^2 + BH^2 = (b - c\cos\alpha)^2 + (c\sin\alpha)^2 =$
$= b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$.
По основному тригонометрическому тождеству
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Справедливость теоремы для случаев, когда $\angle A$ или $\angle C$ тупой или прямой, докажите самостоятельно. Теорема доказана.

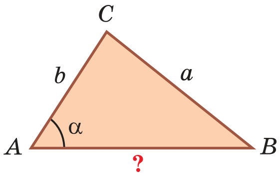
Для сторон $b$ и $c$ теорема косинусов запишется так:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

*Замечание.* Если $\gamma = 90°$, то по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Так как $\cos 90° = 0$, то $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90°$. Таким образом, теорема Пифагора — частный случай теоремы косинусов.

С помощью теоремы косинусов можно решить следующие задачи:

- зная две стороны и угол между ними, найти третью сторону треугольника;
- зная две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, найти третью сторону (рис. 167) (в этом случае возможны два решения).




$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

*Рис. 167*

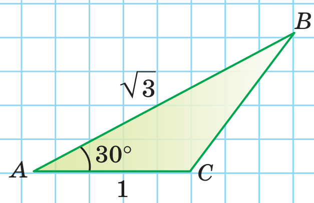
А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

При помощи теоремы косинусов найдите $BC$:

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = \ldots$

2) $BC = \ldots$




Рассмотрим следствия из теоремы косинусов, которые дают возможность решить еще целый ряд задач.

### Следствие 1.

*Теорема косинусов позволяет, зная три стороны треугольника, найти его углы (косинусы углов). Из равенства* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ *следует формула*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Для углов $\beta$ и $\gamma$ получим:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

**Пример 1.** В треугольнике $ABC$ стороны $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найдем $\angle B$ (рис. 168).

По теореме косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$,

$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos B$,

$49 = 64 + 25 - 80\cos B$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\angle B = 60°$.

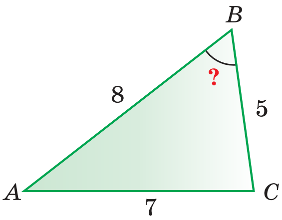


*Рис. 168*

Используя записанную выше формулу, можно сразу получить: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.

## Следствие 2.

С помощью теоремы косинусов можно по трем сторонам определить вид треугольника: *остроугольный*, *прямоугольный* или *тупоугольный*.

Так, из формулы $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ с учетом того, что $2bc > 0$, следует:

1) если $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, то $\cos\alpha > 0$ и угол $\alpha$ острый;
2) если $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, то $\cos\alpha < 0$ и угол $\alpha$ тупой;
3) если $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то $\cos\alpha = 0$ и угол $\alpha$ прямой.

При определении вида треугольника достаточно найти знак косинуса угла, лежащего против большей стороны, поскольку только больший угол треугольника может быть прямым или тупым.

**Пример 2.** Выясним, каким является треугольник со сторонами $a = 2$, $b = 3$ и $c = 4$. Для этого найдем знак косинуса угла $\gamma$, лежащего против большей стороны $c$. Так как $a^2 + b^2 - c^2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = 4 + 9 - 16 < 0$, то $\cos\gamma < 0$, угол $\gamma$ тупой и данный треугольник тупоугольный.

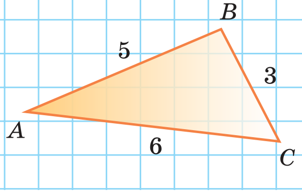
Сформулируем правило определения вида треугольника (относительно углов). *Треугольник является*:

1) *остроугольным, если квадрат его большей стороны меньше суммы квадратов двух других его сторон*: $a^2 < b^2 + c^2$;
2) *тупоугольным, если квадрат его большей стороны больше суммы квадратов двух других его сторон*: $a^2 > b^2 + c^2$;
3) *прямоугольным, если квадрат его большей стороны равен сумме квадратов двух других его сторон*: $a^2 = b^2 + c^2$.

А теперь выполните **Тест 2**.

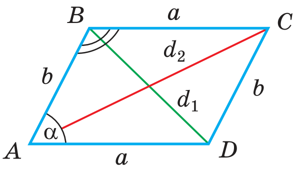
### Тест 2

Выясните, каким является треугольник $ABC$:
а) остроугольным;
б) тупоугольным;
в) прямоугольным.



## Следствие 3.

*Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:* $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.




$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

*Рис. 169*

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AD = a$, $AB = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ и $\angle A = \alpha$ — острый, откуда $\angle B = 180° - \alpha$ — тупой (рис. 169). По теореме косинусов из $\triangle ABD$:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \quad (1)$$

Из $\triangle ABC$: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Поскольку $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

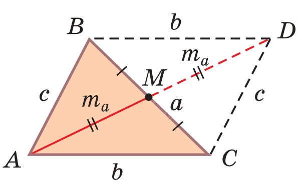
Сложив почленно равенство (1) и равенство (2), получим $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$, что и требовалось доказать.

Данная формула дает возможность:

- зная две соседние стороны и одну из диагоналей параллелограмма, найти другую диагональ;
- зная две диагонали и одну из сторон параллелограмма, найти соседнюю с ней сторону.

## Следствие 4*.

*Медиану $m_a$ треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ можно найти по формуле* $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.




$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

*Рис. 170*

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = m_a$ — медиана треугольника (рис. 170). Продлим медиану $AM$ за точку $M$ на ее длину: $MD = AM = m_a$. Проведем отрезки $BD$ и $DC$. Так как у четырехугольника $ABDC$ диагонали $AD$ и $BC$ точкой пересечения делятся пополам, то он — параллелограмм. По свойству диагоналей параллелограмма $AD^2 + BC^2 = 2AC^2 + 2AB^2$, $(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Отсюда следует, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Утверждение доказано.

Аналогично: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

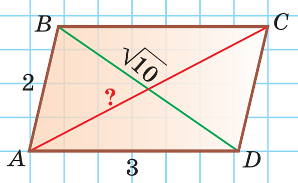
Формула медианы позволяет:

- зная три стороны треугольника, найти любую из его медиан;
- зная две стороны и медиану, проведенную к третьей стороне, найти третью сторону;
- зная три медианы, найти любую из сторон треугольника.

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4***.

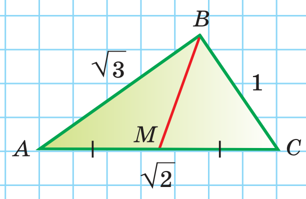
**Тест 3**

Найдите диагональ $AC$ параллелограмма, зная, что $BD = \sqrt{10}$.




**Тест 4***

Найдите медиану $BM$ треугольника $ABC$ по формуле медианы.




## Задания к § 13

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** а) *Дан треугольник* $ABC$, $a = 5$, $b = 3$, $\gamma = 120°$. *Найти сторону* $c$.
б) *Дан треугольник* $ABC$, $a = 7$, $c = 8$, $\alpha = 60°$. *Найти сторону* $b$.

Решение. а) По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma =$
$= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 25 + 9 - 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Отсюда $c = \sqrt{49} = 7$.

б) Пусть $b = x$. По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$, то есть $7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60°$, $49 = 64 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Отсюда $b = 3$ или $b = 5$, так как для наборов длин отрезков 7, 3, 8 и 7, 5, 8 выполняется неравенство треугольника.
Ответ: а) 7; б) 3 или 5.

**Задача 2.** *Две стороны треугольника равны* 6 *и* 10, *его площадь —* $15\sqrt{3}$. *Найти третью сторону треугольника при условии, что противолежащий ей угол — тупой.*

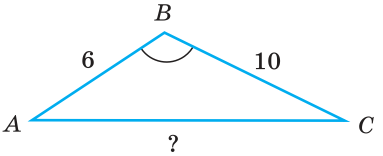



*Рис. 171*

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ стороны $AB = 6$, $BC = 10$ и $S_{ABC} = 15\sqrt{3}$ (рис. 171).

Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B$, то $15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin B$, откуда $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\sin 60° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по условию

$\angle B$ — тупой, то $\angle B = 120°$, $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$. Для нахождения стороны $AC$ применим теорему косинусов: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cdot \cos B$, $AC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$, $AC = 14$.

Ответ: 14.

**Задача 3*.** *Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5.*

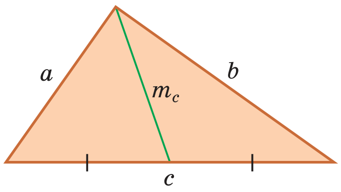
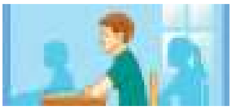



*Рис. 172*

Решение. Обозначим стороны треугольника $a$, $b$, $c$. Пусть $a = 6$, $b = 8$, $m_c = 5$ — медиана (рис. 172). По формуле медианы $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, откуда $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, $4 \cdot 25 = 72 + 128 - c^2$, $c^2 = 100$, $c = 10$. По обратной теореме Пифагора данный треугольник со сторонами 6, 8 и 10 — прямоугольный, его площадь равна половине произведения катетов: $S_\triangle = \frac{ab}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Ответ: 24.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**196.** Используя теорему косинусов, найдите сторону $x$ (рис. 173, *а*, *б*).

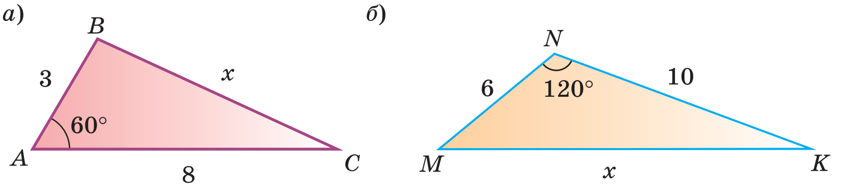



*Рис. 173*

**197.** Используя калькулятор (таблицы), найдите сторону $c$ треугольника, округлив результат до 0,1 см, если:

а) $a = 10$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 50°$;
б) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\gamma = 132°$.

**198.** В треугольнике $MNK$ стороны $MK = 4$ см, $NK = 6$ см, $\cos K = \frac{2}{3}$. Найдите длину стороны $MN$.

**199.** В остроугольном треугольнике $ABC$ стороны $AC = 5$ см, $BC = 7$, $\sin C = 0{,}6$. Найдите длину стороны $AB$.

**200.** а) Сторона равностороннего треугольника $ABC$ равна 10 см. На стороне $BC$ взята точка $M$ так, что $BM : MC = 2 : 3$. Найдите длину отрезка $AM$.

б) На гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ взята точка $M$ так, что $AM : MB = 2 : 1$. Найдите длину отрезка $CM$, если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см.

**201.** Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, косинус острого угла между ними равен $\frac{2}{7}$. Найдите периметр параллелограмма.

**202.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AM = 9$ см и $BK = 6$ см, которые пересекаются в точке $E$, $\angle MEK = 120°$. Найдите сторону $AB$ треугольника $ABC$.

**203.** а) В треугольнике $ABC$ сторона $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle C = 30°$, $BC - AB = 4$ см. Вычислите длины сторон $AB$ и $BC$.

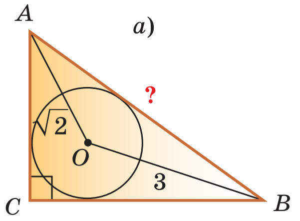
б) В треугольнике $ABC$ сторона $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 60°$, $AB : AC = 1 : 2$. Вычислите длины сторон $AB$ и $AC$.

**204.** В треугольнике $ABC$ стороны $AB = 5$ см, $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$. Найдите наименьшее возможное значение длины стороны $AC$.

**205.** В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром $O$. Найдите длину стороны $AB$, если:

а) $\angle C = 90°$, $OA = \sqrt{2}$, $OB = 3$ (рис. 174, *а*);

б) $\angle AOB = 150°$, $AC = 3$, $BC = 4$ (рис. 174, *б*).



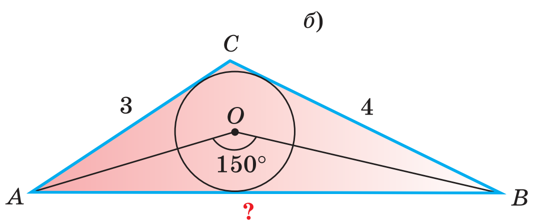




*Рис. 174*

**206.** а) В треугольнике $ABC$ стороны $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, $AC = 3$ см. Найдите градусную меру угла $A$.

б) В треугольнике $ABC$ стороны $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. Найдите градусную меру угла $B$.

**207.** а) Найдите косинус меньшего угла треугольника со сторонами, равными 2 см, 3 см и 4 см.

б) Найдите косинус большего угла треугольника со сторонами, равными 5 см, 6 см, 7 см.

**208.** Выясните, каким является треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным), если его стороны равны:

а) 10, 8 и 7; б) 20, 21 и 29; в) 5, 6 и 8.

**209.** а) Периметр треугольника $ABC$ равен 18. Вычислите его площадь по данным рисунка 175.
б) Угол $ABC$ параллелограмма $ABCD$ равен 120°. Вычислите периметр параллелограмма по данным рисунка 176.

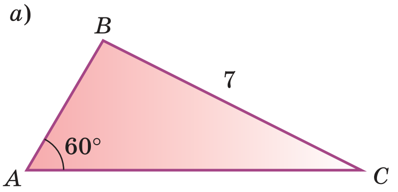



*Рис. 175*

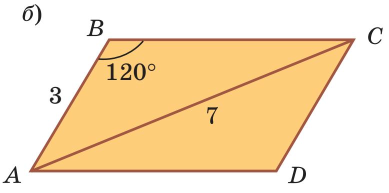



*Рис. 176*

**210.** а) В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 3$ см, $AD = 4$ см, диагональ $AC = 6$ см. Найдите длину диагонали $BD$.

б) В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 2\sqrt{6}$ см, диагонали $AC = 4$ см, $BD = 8$ см. Найдите длину стороны $AD$.

**211.** а) В параллелограмме стороны равны 7 см и 9 см, а диагонали относятся как 4 : 7. Найдите диагонали параллелограмма.
б) В параллелограмме одна из диагоналей на 2 см больше другой, а стороны равны 11 см и 13 см. Найдите диагонали параллелограмма.

**212.** а) В равнобедренном треугольнике $ABC$ стороны $AB = BC = 4$ см, $AM = 3$ см — медиана (рис. 177). Найдите основание $AC$ треугольника.
б) В треугольнике $ABC$ стороны $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. На сторонах $BC$ и $AC$ взяты точки $F$ и $K$ соответственно, такие, что $BF = 2FC$, $AK = KC$ (рис. 178). Найдите длину отрезка $KF$.

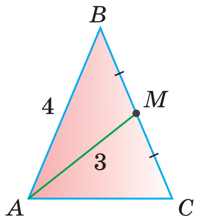



*Рис. 177*

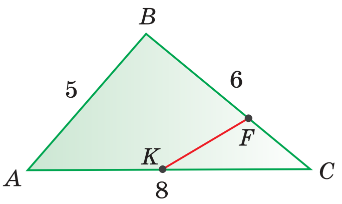


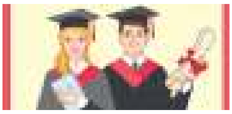

*Рис. 178*

**213.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AC$ в точке $K$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $AK = 5$ см, $KC = 10$ см, $\angle A = 60°$.

**214.** Найдите длину медианы треугольника со сторонами 7 см, 11 см, 12 см, проведенную из вершины большего угла треугольника.

**215.** а) В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали $AC = 6$ см, $BD = 9$ см, $O$ — точка пересечения диагоналей, $\cos\angle COD = \frac{1}{4}$. Найдите среднюю линию трапеции.

б) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), диагональ $AC$ равна 9 см, $AD - CD = 3$ см, $\cos\angle CAD = \frac{5}{6}$. Найдите периметр трапеции.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**216*.** Две стороны треугольника равны 8 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите третью сторону треугольника.

**217*.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AB = BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 3$. Найдите диагональ $BD$.

**218*.** В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 2 и 3, а угол между ними равен $60°$. Найдите диагонали четырехугольника.

**219*.** В треугольнике $ABC$ $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Докажите, что с увеличением угла $A$ сторона $a$ увеличивается.

**220*.** Выясните, каким является треугольник с высотами, равными 3, 4 и 5: остроугольным, прямоугольным или тупоугольным.

**221*.** Докажите, что площадь параллелограмма (не являющегося прямоугольником) можно вычислить по формуле $S = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$, где $d_1$, $d_2$ — диагонали ($d_2 > d_1$), $\alpha$ — острый угол параллелограмма.

### *Реальная геометрия*

**Задание 1.** Объясните, как можно найти расстояние между точками $A$ и $B$ (рис. 179), если известны расстояния от точки $M$, где находится наблюдатель, до точек $A$ и $B$ и угол $AMB$. Найдите это расстояние при условии, что $MA = 30$ м, $MB = 20$ м, $\angle AMB = 68°$. Ответ округлите до метров.

(Для самоконтроля. Ответ: искомое число в метрах равно числу дней в феврале високосного года.)

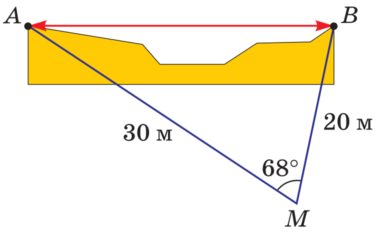



*Рис. 179*

**Задание 2.** Из одного населенного пункта выходят две дороги, угол между которыми 60° (рис. 180). Одновременно по одной дороге выезжает автомобиль со скоростью 80 км/ч, по другой — автобус со скоростью 50 км/ч. Определите в минутах, через какое время расстояние между автобусом и автомобилем станет равным 7 км.

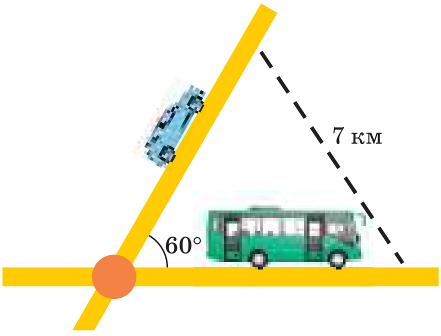



*Рис. 180*

(Для самоконтроля. О т в е т: искомое число равно $n$, где 1) — Меркурий; 2) — Венера; 3) — Земля; ...; $n$) — Сатурн.)

**Задание 3.** Определите угол обстрела футбольных ворот с 11-метровой отметки (рис. 181). Для этого можно найти в Интернете размеры футбольных ворот и произвести расчеты. А можно выйти на школьное футбольное поле, измерить шагами расстояние от 11-метровой отметки до одной из стоек ворот, например расстояние $AB$ (расстояние $AC$ будет таким же), и ширину ворот, т. е. длину $BC$. Затем при помощи теоремы косинусов следует найти $\angle BAC = \alpha$. Попробуйте оба способа и сравните результаты.

(Для самоконтроля. О т в е т: искомое число градусов равно числу лет, прожитых А. С. Пушкиным.)

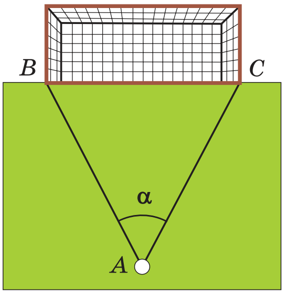



*Рис. 181*

## *Геометрия 3D*

**Задание.** Дана прямая треугольная призма (боковые грани — прямоугольники), в основании которой лежит треугольник со сторонами 5 см и 6 см. Косинус угла α между ними равен 0,6 (рис. 182). Бóльшая по площади боковая грань призмы является квадратом.

Найдите:

а) площадь боковой поверхности призмы;

б) площадь полной поверхности призмы.

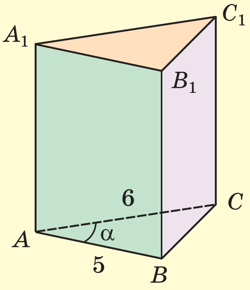



*Рис. 182*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Теорему синусов.
2. Основные задачи, которые позволяет решить теорема синусов.
3. Теорему косинусов.
4. Алгоритм нахождения косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Формулу, связывающую стороны и диагонали параллелограмма.
6. Как по трем сторонам треугольника определить его вид: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный.

7*. Формулу медианы треугольника.

### Умеем

1. Доказывать теорему синусов.
2. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон, находить угол, противолежащий другой стороне.
3. По двум углам и стороне, противолежащей одному из углов, находить сторону, противолежащую другому углу.
4. По стороне треугольника и противолежащему ей углу находить радиус описанной окружности.
5. Доказывать теорему косинусов.
6. Находить косинус угла треугольника, зная три его стороны.
7. Находить диагональ параллелограмма, зная две его соседние стороны и другую диагональ.

8*. Находить медиану треугольника, зная три его стороны.

# § 14. Формула Герона. Решение треугольников

### 1. Формула Герона

Мы знаем, как найти площадь треугольника по основанию и высоте, проведенной к этому основанию: $S = \frac{1}{2}ah$, а также по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Теперь мы выведем формулу нахождения площади треугольника по трем сторонам.

Теорема (формула Герона).
**Площадь треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ можно найти по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.**

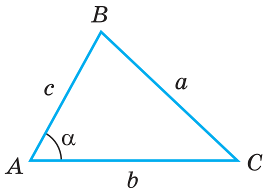



*Рис. 183*

Доказательство. $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (рис. 183). Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ следует, что $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Для $0°<\alpha<180°$ синус положительный. Поэтому $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Из теоремы косинусов $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, откуда $\cos^2\alpha=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$.

Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{1}{2}bc\cdot\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=$

$=bc\cdot\frac{1}{bc}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2}}=\sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}.$

Так как $\frac{b+c-a}{2}=\frac{b+c+a-2a}{2}=p-a$, $\frac{a-b+c}{2}=\frac{a+c+b-2b}{2}=p-b$, $\frac{a+b-c}{2}=$ $=\frac{a+b+c-2c}{2}=p-c$, то $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Теорема доказана.

## 2. Решение треугольников

*Решением треугольника* называется нахождение его неизвестных сторон и углов (иногда других элементов) по данным, определяющим треугольник. Такая задача часто встречается на практике, например в геодезии, астрономии, строительстве, навигации.

Рассмотрим *алгоритмы* решения трех задач.

**Задача *A*** (решение треугольника по двум сторонам и углу между ними).

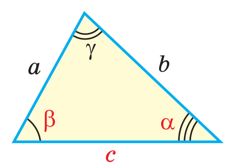



*Рис. 184*

Дано: $a$, $b$, $\gamma$ (рис. 184).

Найти: $c$, $\alpha$, $\beta$.

Решение.

1) По теореме косинусов $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

2) По следствию из теоремы косинусов $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

3) Угол $\alpha$ находим при помощи калькулятора или таблиц.

4) Угол $\gamma=180°-\alpha-\beta$.

*Замечание.* Нахождение угла $\alpha$ по теореме синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},\ \sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right)$ требует выяснения того, острый или тупой угол $\alpha$.

**Задача *B*** (решение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам).

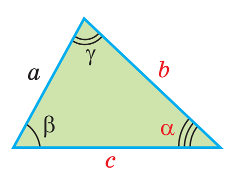



*Рис. 185*

Дано: $a$, $\beta$, $\gamma$ (рис. 185).

Найти: $\alpha$, $b$, $c$.

Решение.

1) Угол $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

2) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ($\sin\alpha$ и $\sin\beta$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

3) Сторону $c$ можно найти с помощью теоремы косинусов или теоремы синусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ или $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ($\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ находим при помощи калькулятора или таблиц).

**Задача *C*** (решение треугольника по трем сторонам).

Дано: $a$, $b$, $c$ (рис. 186).

Найти: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и радиус $R$ описанной окружности.

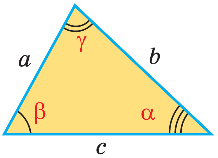


*Рис. 186*

Решение:

1) По следствию из теоремы косинусов

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

2) Зная $\cos\alpha$, угол $\alpha$ находим при помощи калькулятора или таблиц.

3) Аналогично находим угол $\beta$.

4) Угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

5) Радиус $R$ описанной окружности треугольника можно найти по формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$, где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

*Замечание*.* Вторым способом нахождения $R$ будет нахождение косинуса любого угла при помощи теоремы косинусов $\left(\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$, затем нахождение по косинусу угла его синуса $\left(\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\right)$ и, наконец, использование теоремы синусов $\left(\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R\right)$ для нахождения $R$.

## Задания к § 14

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ ключевые задачи

**Задача 1.** *Найти площадь $S$ и радиус $R$ описанной окружности треугольника со сторонами* 9, 12 *и* 15.

Решение. *Способ* 1. Воспользуемся формулой Герона. Обозначим $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$. Получим: $p = \dfrac{9 + 12 + 15}{2} = 18$, $p - a = 18 - 9 = 9$, $p - b =$

$= 18 - 12 = 6$, $p - c = 18 - 15 = 3$. Тогда $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$ $= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 9 \cdot 6 = 54$. Радиус $R$ описанной окружности найдем из формулы $S = \frac{abc}{4R}$. Имеем: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 15}{4 \cdot 54} = 7{,}5$.

Ответ: $S = 54$, $R = 7{,}5$.

*Способ* 2. Так как $9^2 + 12^2 = 15^2$, поскольку $(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 = (3 \cdot 5)^2$, то треугольник — прямоугольный по обратной теореме Пифагора. Его площадь равна половине произведения катетов: $S = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$, а радиус описанной окружности равен половине гипотенузы: $R = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

**Задача 2.** *Найти площадь трапеции с основаниями, равными* 5 *и* 14, *и боковыми сторонами, равными* 10 *и* 17.

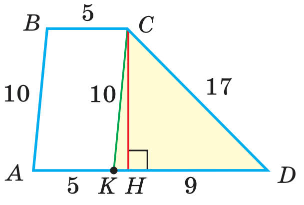



*Рис. 187*

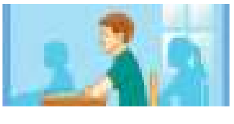
Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = 14$ и $BC = 5$, боковые стороны $AB = 10$ и $CD = 17$. Проведем $CK \parallel AB$ (рис. 187). Так как $ABCK$ — параллелограмм, то $CK = AB = 10$, $AK = BC = 5$, откуда $KD = AD - AK = 9$. Найдем высоту $CH$ треугольника $KCD$, которая равна высоте трапеции. Площадь треугольника $KCD$ найдем по формуле Герона, обозначив его стороны $a = 10$, $b = 17$, $c = 9$. Получим:

$$p = \frac{10 + 17 + 9}{2} = 18,\ p - a = 18 - 10 = 8,$$

$$p - b = 18 - 17 = 1,\ p - c = 18 - 9 = 9,$$

$S_{KCD} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 9} = 36$. Так как $S_{KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH$, то $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot CH = 36$, $CH = 8$. Площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{14 + 5}{2} \cdot 8 = 76$.

Ответ: 76.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**222.** Стороны треугольника $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$. Найдите:

а) полупериметр треугольника $p = \frac{a + b + c}{2}$;

б) значения выражений $p - a$, $p - b$, $p - c$;

в) площадь треугольника по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}$.

**223.** При помощи формулы Герона найдите площадь треугольника со сторонами:

а) 7 см, 15 см, 20 см; б) 10 м, 10 м, 4 м.

**224.** а) Найдите площадь параллелограмма, одна сторона которого равна 15 см, а диагонали — 8 см и 26 см.
б) Найдите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 9 см и 10 см, а одна из диагоналей — 17 см.

**225.** а) Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 20 см, 13 см, 11 см.
б) Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 40 см, 37 см, 13 см.

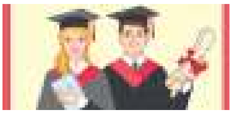
**226.** а) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 5 см и 15 см, а боковые стороны — 9 см и 17 см.
б) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 3 см и 12 см, а диагонали — 13 см и 14 см.

**227.** Найдите площадь треугольника и радиус описанной окружности треугольника со сторонами 15 см, 13 см и 4 см.

**228.** Решите треугольник, у которого известны:

а) $a = 4$; $b = 5$; $\gamma = 30°$; б) $a = 1$; $b = 2$; $\gamma = 45°$;
в) $a = 8$; $\beta = 60°$; $\gamma = 50°$; г) $b = 10$; $\beta = 100°$; $\gamma = 32°$;
д) $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; е) $a = 50$; $b = 40$; $c = 20$.

**229.** Медианы, проведенные к двум сторонам треугольника, равны 12 см и 9 см, третья сторона треугольника равна 6 см. Найдите площадь треугольника.



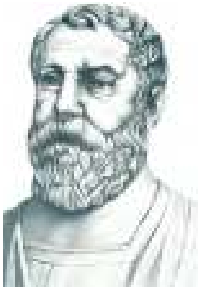
## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**230*.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами, равными 29 см, 25 см и 6 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами, равными 20 см, 15 см, 7 см.

**231*.** Найдите радиус окружности, касающейся сторон треугольника, равных 13 и 15, центр которой лежит на третьей стороне, равной 14.

**232*.** Центр $O$ окружности, вписанной в треугольник $ABC$, соединен с его вершинами отрезками. Площади треугольников, на которые разбивается треугольник $ABC$, равны 7 см$^2$, 15 см$^2$, 20 см$^2$. Найдите стороны треугольника.

***Интересно знать.*** **Герон Александрийский** — один из величайших инженеров античного мира. Многие его изобретения до сих пор вызывают восхищение. Вот только некоторые из них: одометр — механизм для нахождения расстояний на местности, автомат по продаже воды, устройство для автоматического открывания дверей и многое другое.



При помощи **Интернета** выясните, чем еще знаменит математик Герон. Какие треугольники называются *героновыми треугольниками*? Установите при помощи Википедии, почему этого ученого звали Героном Александрийским и мог ли он встречаться с Пифагором.

## Гимнастика ума

Придумайте красивый способ нахождения площади изображенного на рисунке 188 треугольника.

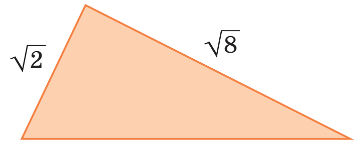



*Рис. 188*

# § 15*. Креативная геометрия

## 1. Примеры решения задач с использованием теоремы синусов и теоремы косинусов

**Задача 1.** *Внутри угла $A$, равного $60°$, взята точка $M$, которая находится на расстоянии 1 от одной стороны угла и на расстоянии 2 от другой стороны. Найти расстояние от точки $M$ до вершины угла $A$ (рис. 189, а).*

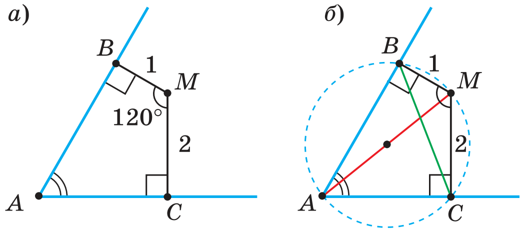



*Рис. 189*

Решение. Пусть $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, $MB = 1$, $MC = 2$. Найдем длину отрезка $AM$. Сумма углов четырехугольника $ABMC$ равна $360°$. Поэтому $\angle BMC = 120°$.

Так как в четырехугольнике $ABMC$ $\angle B + \angle C = 180°$, то около него можно описать окружность по признаку вписанного четырехугольника (рис. 189, б). Поскольку прямой вписанный угол опирается на диаметр, то отрезок $AM$ — диаметр этой окружности, т. е. $AM = 2R$, где $R$ — радиус. Из $\triangle BMC$ по теореме косинусов $BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2 \cdot MB \cdot MC \cdot \cos 120° = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$, $BC = \sqrt{7}$. Из $\triangle ABC$ по теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, откуда $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°} = AM$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

*Замечание.* Вторым способом решения будет продление отрезка $BM$ до пересечения с лучом $AC$ и использование свойств полученных прямоугольных треугольников. Рассмотрите этот способ самостоятельно.

**Задача 2.** *В прямоугольном треугольнике $ABC$ известно: $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 15°$, высота $CH = 2$* (рис. 190). *Найти гипотенузу $AB$.*

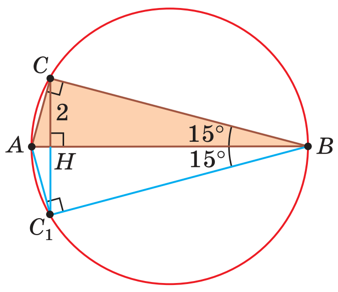



*Рис. 190*

Решение. Построим $\triangle ABC_1$, симметричный $\triangle ABC$ относительно прямой $AB$ (см. рис. 190). Поскольку $\angle ACB + \angle AC_1B = 180°$, то вокруг четырехугольника $ACBC_1$ можно описать окружность, где $AB$ — диаметр этой окружности (прямой вписанный угол опирается на диаметр). Треугольник $C_1CB$ вписан в эту окружность, $\angle CBC_1 = 30°$, $CC_1 = 4$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin \angle CBC_1} = 2R$, $\frac{4}{\sin 30°} = AB$, откуда $AB = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ: 8.

**Задача 3.** *Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $BC = a$ и $AC = b$. На гипотенузе $AB$ как на стороне построен квадрат $ADFB$* (рис. 191). *Найти расстояние от центра $O$ этого квадрата до вершины $C$ прямого угла, т. е. отрезок $CO$.*

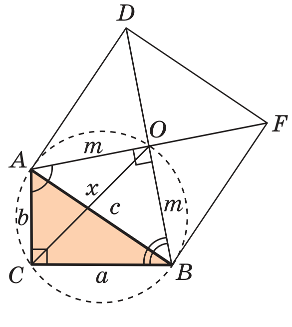



*Рис. 191*

Решение. *Способ* 1. Так как $\angle AOB = 90°$ (диагонали квадрата $ADFB$ взаимно перпендикулярны), то $\angle AOB + \angle ACB = 180°$, поэтому четырехугольник $AOBC$ является вписанным в окружность, ее диаметр $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $AO = OB = m = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Пусть $CO = x$. По теореме косинусов

из $\triangle AOC$ находим $\cos \angle OAC = \frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm}$,

из $\triangle BOC$ находим $\cos \angle OBC = \frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$.

По свойству вписанного четырехугольника $\angle OAC + \angle OBC = 180°$. Поскольку $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\frac{b^2 + m^2 - x^2}{2bm} = -\frac{a^2 + m^2 - x^2}{2am}$, откуда находим $x^2 = ab + m^2 = ab + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$. Тогда $x = CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

*Способ* 2. Используем теорему Птолемея, которая гласит: **«Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон»**. Для нашей задачи получаем (см. рис. 191):

$$CO \cdot AB = CB \cdot AO + AC \cdot OB,$$

$$CO \cdot c = a \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}}, \text{ откуда } CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

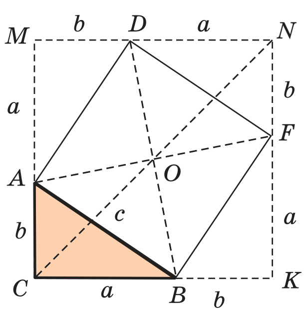



*Рис. 192*

*Способ* 3. Достроим $\triangle ABC$ до квадрата $CMNK$, как показано на рисунке 192. Можно показать, что центр квадрата $CMNK$ совпадет с центром квадрата $ADFB$, т. е. с точкой $O$ (точки $B$ и $D$ симметричны относительно центров обоих квадратов). Тогда $CN = (a+b)\sqrt{2}$, $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $CO = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

**Задача 4.** *Точка $O$ — центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, $S_{AOB} = 7$ см$^2$, $S_{BOC} = 15$ см$^2$, $S_{AOC} = 20$ см$^2$. Найти стороны треугольника* (*см. задачу* 232*).

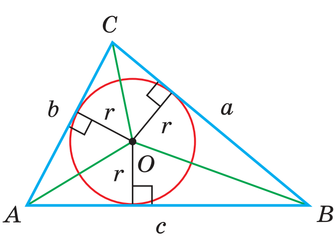



*Рис. 193*

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $r$ — радиус вписанной окружности (рис. 193). Тогда $S_{BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{AOB} = \frac{1}{2}cr$, $S_{AOC} = \frac{1}{2}br$.

Отсюда $a = \frac{2S_{BOC}}{r} = \frac{30}{r}$, $b = \frac{2S_{AOC}}{r} = \frac{40}{r}$, $c = \frac{2S_{AOB}}{r} = \frac{14}{r}$. Применим формулу Герона:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{r} + \frac{40}{r} + \frac{14}{r}\right) = \frac{42}{r}, \quad p - a = \frac{12}{r}, \quad p - b = \frac{2}{r},$$

$$p - c = \frac{28}{r}; \quad S_{ABC} = \sqrt{\frac{42}{r} \cdot \frac{12}{r} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{28}{r}} = \frac{168}{r^2}.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = 7 + 15 + 20 = 42$ (см$^2$). Из уравнения $\frac{168}{r^2} = 42$ находим $r = 2$. Откуда $a = \frac{30}{2} = 15$ (см), $b = \frac{40}{2} = 20$ (см), $c = \frac{14}{2} = 7$ (см).

Ответ: 15 см; 20 см; 7 см.

## 2. Теорема Стюарта

Следующая теорема позволяет найти длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

**Теорема Стюарта.** *«Если a, b и c — стороны треугольника и отрезок d делит сторону c на отрезки, равные x и y* (рис. 194), *то справедлива формула*

$$\boldsymbol{d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy}».$$

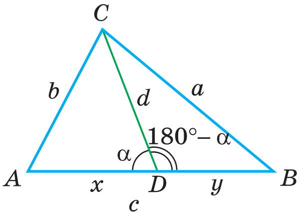


*Рис. 194*

Доказательство. По теореме косинусов из $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ (см. рис. 194) следует:

$$b^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$a^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(180° - \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy\cos\alpha. \qquad (2)$$

Умножим обе части равенства (1) на $y$, равенства (2) — на $x$: $yb^2 = yd^2 + yx^2 - 2ydx\cos\alpha$, $xa^2 = xd^2 + xy^2 + 2xdy\cos\alpha$.

Сложим почленно полученные равенства:

$xa^2 + yb^2 = d^2(x + y) + xy(x + y)$.

Из последнего равенства выразим $d^2$:

$d^2 = a^2 \cdot \frac{x}{x+y} + b^2 \cdot \frac{y}{x+y} - xy$. Теорема доказана.

**Следствие.**

*Биссектрису треугольника можно найти по формуле* (рис. 195)

$$\boldsymbol{l_c^2 = ab - xy}.$$

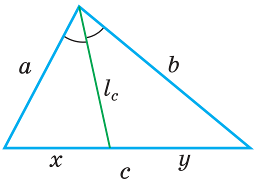


*Рис. 195*

Доказательство. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Разделив сторону $c$ в отношении $a : b$, получим:

$x = \frac{c}{a+b} \cdot a$, $y = \frac{c}{a+b} \cdot b$. По теореме Стюарта

$$l_c^2 = a^2 \cdot \frac{y}{c} + b^2 \cdot \frac{x}{c} - xy = a^2 \cdot \frac{b}{a+b} + b^2 \cdot \frac{a}{a+b} - xy =$$

$$= \frac{ab}{a+b} \cdot (a+b) - xy = ab - xy.$$

**Задача 5.** *Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник — равнобедренный (теорема Штейнера—Лемуса).*

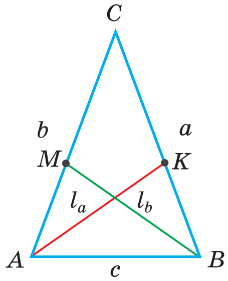


*Рис. 196*

Доказательство. Пусть дан треугольник $ABC$, $AK = l_a$ и $BM = l_b$ — биссектрисы, проведенные к сторонам $BC = a$ и $AC = b$ соответственно, и $l_a = l_b$ (рис. 196). Нужно доказать, что $a = b$. Выразим $l_a$ и $l_b$ через $a$, $b$ и $c$ и приравняем полученные выражения. Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Поэтому $\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, откуда $CK = \frac{a}{b+c} \cdot b$, $BK = \frac{a}{b+c} \cdot c$;

$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$, откуда $CM = \frac{b}{a+c} \cdot a$, $AM = \frac{b}{a+c} \cdot c$.

По формуле биссектрисы треугольника $l_a^2 = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$, $l_b^2 = ac - \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+c} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$.

Из условия $l_a = l_b$ следует: $ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Перенеся слагаемые в одну сторону равенства и разложив на множители (проделайте это самостоятельно), получим: $(a-b)\cdot\left(1 + ab\cdot\frac{a^2+ab+b^2+2c(a+b)+c^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\right) = 0$. Отсюда $a - b = 0$, $a = b$ (второй множитель при положительных $a$, $b$ и $c$ больше нуля). Утверждение доказано.

### 3. Теорема Птолемея о вписанном четырехугольнике

*Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, т. е.* $\boldsymbol{d_1d_2 = ac + bd}$ (рис. 197).

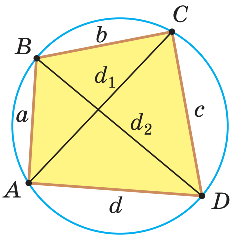


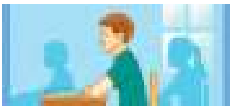
*Рис. 197*

Доказательство. Из $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ по теореме косинусов $\cos B = \frac{a^2+b^2-d_1^2}{2ab}$, $\cos D = \frac{c^2+d^2-d_1^2}{2cd}$.

Так как $\angle D = 180° - \angle B$ (по свойству вписанного четырехугольника) и $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то $\frac{a^2+b^2-d_1^2}{2ab} = -\frac{c^2+d^2-d_1^2}{2cd}$, откуда $d_1^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$.

Аналогично из $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ получим $d_2^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$.

Тогда $d_1^2 \cdot d_2^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \cdot \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} = (ac+bd)^2$, $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$. Теорема доказана.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**233.** Докажите, что если $m_a$, $m_b$ и $m_c$ — медианы треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$, то справедливы следующие формулы:

а) $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$; б) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

**234.** Двумя способами (алгебраическим и геометрическим) найдите площадь треугольника с медианами, равными 3 см, 4 см и 5 см.

**235.** В треугольник вписана окружность радиуса 2, которая точкой касания делит одну из его сторон на отрезки, равные 1 и 6. Найдите периметр треугольника.

**236.** Используя теорему Птолемея, решите задачу: «Около равностороннего треугольника $ABC$ описана окружность, на дуге $BC$ взята точка $M$. Докажите, что $AM = BM + CM$».

**237.** В треугольнике $ABC$ проведен отрезок $AK$, где $K \in BC$. Используя теорему Стюарта, выразите длину отрезка $AK$ через отрезки $AB$, $AC$, $BK$ и $CK$. Вычислите длину отрезка $AK$, если $AB = 6$, $AC = 9$, $BK = 2$, $KC = 4$.

**238.** При помощи теоремы Стюарта выведите формулу для медианы $m_a$ треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$: $m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

**239.** Медиана треугольника равна $m_a$ и образует с соседними сторонами $b$ и $c$ углы $\beta_1$ и $\gamma_1$ соответственно. Найдите стороны $b$ и $c$.

**240.** Углы треугольника равны $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Найдите сторону $a$ треугольника, если:

а) периметр треугольника равен $P$;
б) площадь треугольника равна $S$.

**241.** а) Найдите биссектрису $AK$ треугольника $ABC$, если $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 7$.
б) Найдите биссектрису равнобедренного треугольника с основанием 5 и боковой стороной 20, проведенную к боковой стороне.

**242.** Стороны параллелограмма равны $a$, $b$, диагонали — $d_1$ и $d_2$. Докажите, что $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$ тогда и только тогда, когда угол параллелограмма равен 45°.

**243.** а) Стороны треугольника равны $a$, $b$ и $c$. Докажите, что медианы $m_a$ и $m_b$ треугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.
б) Докажите, что медианы $m_a$ и $m_b$ треугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда $m_c = \frac{3}{2}c$.

**244.** В параллелограмме $ABCD$ известно: $AD = a$, $AB = b$, $\angle A = \alpha$.

а) Найдите диагонали $BD = d_1$ и $AC = d_2$ параллелограмма ($d_1 < d_2$) и синус угла $\varphi$ между диагоналями.
б) Решите задачу а) при условии, что $a = 2$, $b = 1$, $\angle A = 60°$.

**245.** При помощи циркуля и линейки постройте по данным отрезкам $a$ и $b$ отрезок $x$, если:

а) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$;

б) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

## ЗАПОМИНАЕМ

1. Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу его описанной окружности: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.
2. Радиус описанной окружности треугольника можно найти, используя формулы: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $S = \frac{abc}{4R}$.
3. Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
4. Пусть $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника и $c$ — бóльшая сторона. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то треугольник тупоугольный, если $a^2 + b^2 > c^2$, то треугольник остроугольный, если $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник прямоугольный.
5. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.
6. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

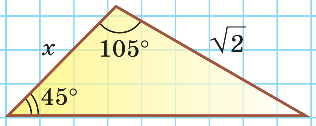
7*. Формула медианы: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

### Тест 1

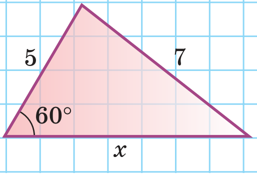
Длина отрезка $x$ равна:

а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2.



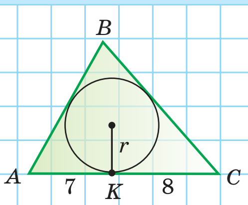

### Тест 2

По данным на рисунке найдите $x$.




### Тест 3

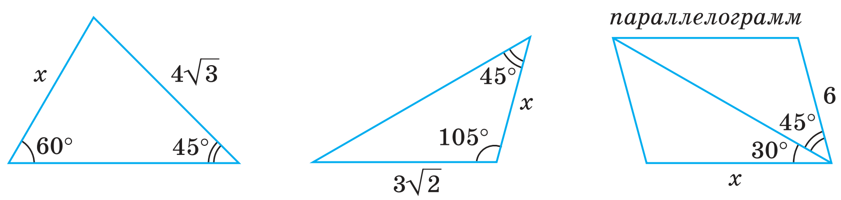
Найдите радиус $r$ вписанной окружности треугольника $ABC$, если его периметр равен 42 и $AK = 7$, $KC = 8$.



## Подготовка к контрольной работе № 3

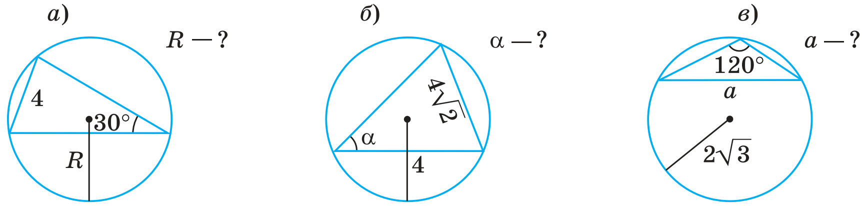
**1.** Найдите длину стороны $x$.

*а)* *б)* *в)*



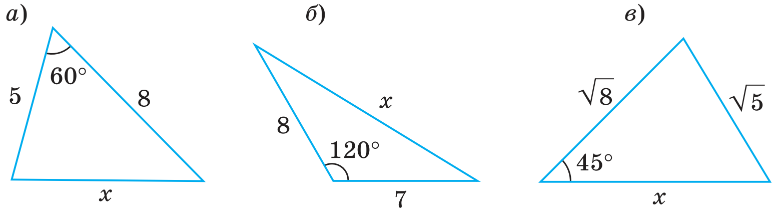

**2.** Найдите радиус $R$ (рис. *а*), угол α (рис. *б*) и сторону $a$ (рис. *в*).

*а)* *б)* *в)*



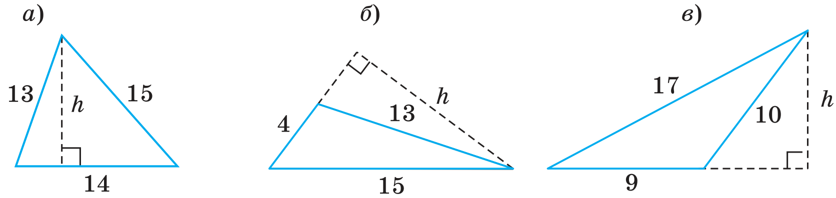

**3.** Найдите длину стороны $x$.

*а)* *б)* *в)*



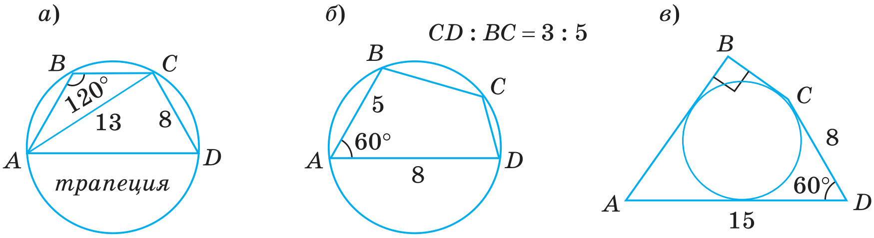

**4.** Зная три стороны треугольника, найдите $S$, $h$ и $R$.

*а)* *б)* *в)*




**5*.** Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

*а)* *б)* $CD : BC = 3 : 5$ *в)*



## ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Теорема Бретшнайдера (теорема косинусов для четырехугольника).
2. Теорема Стюарта и ее приложения.
3. Теорема Апполония.
4. Формула Брахмагупты.

## *Экспресс-повторение главы* III

Соедините разделенные половинки формул по образцу: *A*4 и т. д. Объясните, что означает каждая формула.

A $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \ldots$

B $a^2 = \ldots$

C $R = \ldots$

D $d_1^2 + d_2^2 = \ldots$

E $S = \ldots$

F $m_a = \ldots$

1 $\ldots = 2a^2 + 2b^2$

2 $\ldots = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3 $\ldots = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

4 $\ldots = 2R$

5 $\ldots = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

6 $\ldots = \frac{abc}{4S}$

Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия, 9» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 9 кл.».

Глава IV

# Правильные многоугольники

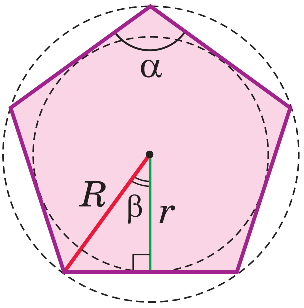
**В этой главе вы узнаете:**

- Определение и свойства правильных многоугольников
- О том, что правильный четырехугольник — это квадрат
- Почему площадь круга равна $\pi R^2$

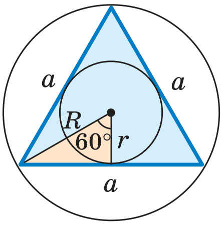
# Правильные многоугольники

## ВСЕ СТОРОНЫ РАВНЫ И ВСЕ УГЛЫ РАВНЫ

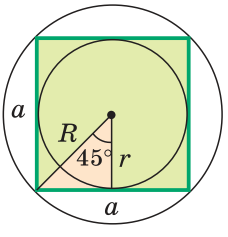
*окружность можно описать, вписать, центры совпадают*



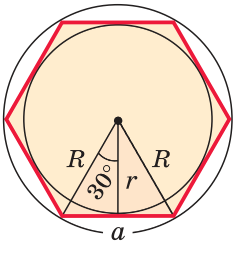

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$




$n = 3$

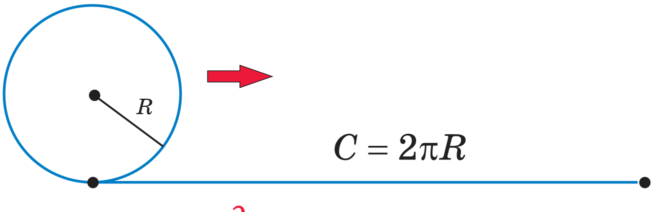



$n = 4$




$n = 6$

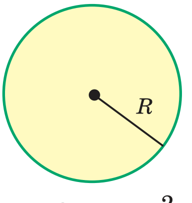
## ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА




$C = 2\pi R$

*длина окружности*

*площадь круга*




$S = \pi R^2$

# § 16. Правильные многоугольники

Определение. **Правильным** многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

На рисунке 198 изображены правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник. Правильный треугольник — это равносторонний треугольник, а правильный четырехугольник — это квадрат.

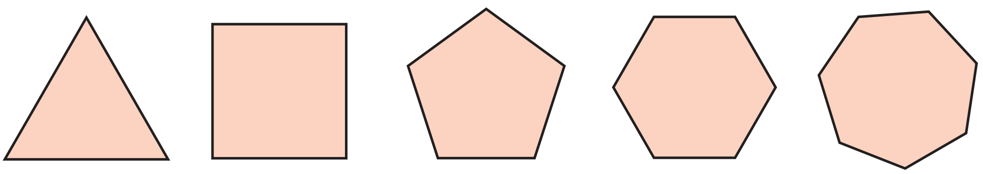


*Рис. 198*

Одной из простейших задач является задача нахождения величины внутреннего угла правильного многоугольника. Так как все углы правильного $n$-угольника равны между собой, а сумма углов любого $n$-угольника равна $180°(n-2)$, то угол $\alpha$ правильного $n$-угольника можно найти по формуле

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Например, для правильного шестиугольника $\alpha = \dfrac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°$.

Теорема. **Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, в любой правильный многоугольник можно вписать окружность; центры этих окружностей совпадают.**

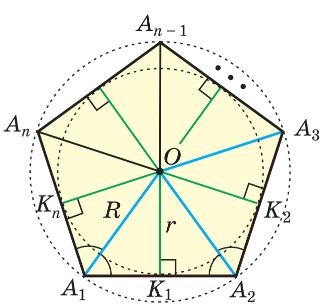



*Рис. 199*

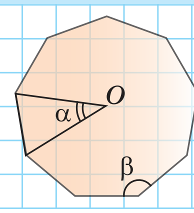
Доказательство. В правильном многоугольнике $A_1A_2A_3...A_n$ проведем биссектрисы внутренних углов $A_1$ и $A_2$. Пусть $O$ — точка пересечения этих биссектрис (рис. 199). Так как $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$ как половины равных углов, то $\triangle A_1OA_2$ — равнобедренный с основанием $A_1A_2$. Проведя отрезок $OA_3$, получим $\triangle A_2OA_3$, равный $\triangle A_1OA_2$ по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, сторона $OA_2$ — общая, $\angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$). Соединив точку $O$ отрезками с остальными вершинами, получим множество равных равнобедренных треугольников. Отсюда $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. Поэтому окружность с центром $O$ и радиусом $R = OA_1$ пройдет через все вершины многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$, т. е. будет его описанной окружностью. А поскольку высоты указанных равных равнобедренных треугольников, проведенные к их основаниям, равны, т. е. $OK_1 = OK_2 = OK_3 = ... = OK_n$, то точка $O$ — также и центр вписанной окружности многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$, радиус которой $r = OK_1$. Теорема доказана.

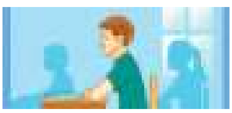
*Точка O называется центром правильного n-угольника.*

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

На рисунке изображен правильный девятиугольник и его центр $O$. Найдите величину угла $\alpha$ и величину угла $\beta$.



## Задания к § 16

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО*

**246.** Сумма длин двух сторон правильного шестиугольника равна 20 см. Найдите периметр этого многоугольника.

**247.** Изобразите правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3...A_8$, «отрезав» у квадрата уголки. Отметьте центр $O$ этого многоугольника. Найдите $\angle A_1OA_2$, $\angle A_1A_2O$, $\angle A_1A_2A_3$. В ответе запишите градусную меру $\angle A_1A_2A_3$.

**248.** Используя формулу суммы углов многоугольника, найдите градусную меру угла правильного $n$-угольника, если $n$ равно:

а) 5; б) 10; в) 18.

**249.** Внутренний угол правильного $n$-угольника равен 150°. Найдите число сторон этого $n$-угольника.

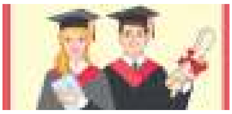
**250.** Сумма градусных мер двух углов правильного многоугольника равна 324°, а его периметр равен 280 см. Найдите длину стороны этого многоугольника.

**251.** Дан правильный $n$-угольник $A_1A_2A_3...A_n$, точка $O$ — его центр, $\angle OA_1A_2 = 85°30'$, $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 6$ см. Найдите периметр этого $n$-угольника.

**252.** Внешний угол правильного $n$-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ равен 60°, периметр — 72 см. Найдите $S_{A_1OA_2}$, где $O$ — центр $n$-угольника.

---

* К каждому параграфу имеется резерв задач, помещенный в пособие «Наглядная геометрия. 9 класс» В. В. Казакова.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**253*.** Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 200).

а) Найдите углы треугольника $A_1A_2A_3$.

б) Найдите углы треугольника $A_1A_3A_5$.

в) Докажите, что все диагонали пятиугольника равны.

г) Докажите, что диагональ $A_1A_3$ параллельна стороне $A_4A_5$.

д) Докажите, что пятиугольник, образованный при пересечении всех диагоналей данного правильного пятиугольника, также является правильным.

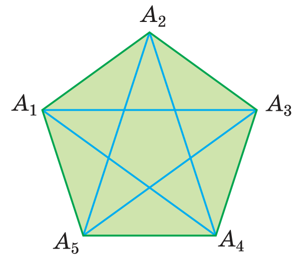



*Рис. 200*

**254*.** На рисунке 201 изображен правильный 8-угольник. Найдите величину угла $\alpha$.

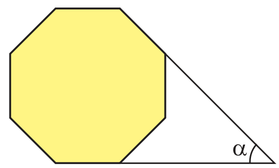



*Рис. 201*

**255*.** Дан правильный 12-угольник $A_1A_2A_3...A_{12}$. Найдите угол между прямыми:

а) $A_2A_7$ и $A_4A_{12}$;

б) $A_1A_3$ и $A_6A_{10}$

(для построения правильного 12-угольника схематически изобразите круглый циферблат часов, разбейте его окружность на 12 равных дуг, отметив точки, соответствующие 1 ч, 2 ч, 3 ч и т. д., и соедините соседние точки отрезками).

### *Гимнастика ума*

Поверхность футбольного мяча сшита из правильных черных пятиугольников и соединяющих их правильных белых шестиугольников.

**Задание.** Известно, что всего черных пятиугольников 12. Определите математическим путем число белых шестиугольников на поверхности мяча, а затем убедитесь в своей правоте на уроке физкультуры.

(Для самоконтроля. О т в е т: число белых шестиугольников на поверхности мяча равно номиналу купюры Республики Беларусь, на лицевой стороне которой размещено изображение Дворца Румянцевых и Паскевичей в г. Гомеле.)

При помощи **Интернета** выясните, в каких странах мира некоторые монеты имеют форму правильного многоугольника.

## § 17. Формулы радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника

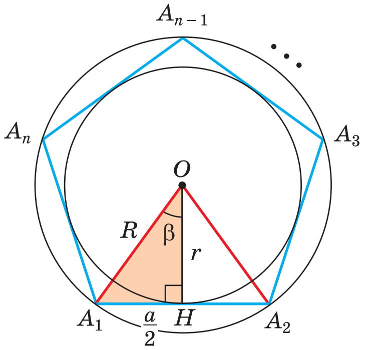



*Рис. 202*

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный $n$-угольник со стороной $a$, где $O$ — его центр, $OA_1 = R$ — радиус описанной окружности, $OH = r$ — радиус вписанной окружности (рис. 202).

Так как $\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n}$, а высота $OH$ равнобедренного треугольника $A_1OA_2$ является биссектрисой и медианой, то угол $\beta = \angle A_1OH = \frac{180°}{n}$, $A_1H = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного треугольника $A_1OH$ находим:

а) $\sin\beta = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $a = 2R\sin\beta = 2R\sin\frac{180°}{n}$, $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$;

б) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, откуда $a = 2r\operatorname{tg}\beta = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$.

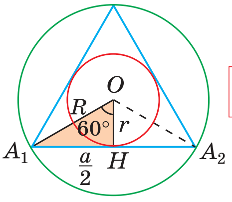
*Замечание.* Выведенные формулы запоминать не обязательно. Важно помнить способ их получения: решение прямоугольного треугольника $A_1OH$.

**Примеры.** 1) Для правильного треугольника (рис. 203) получим:

$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{3} = 120°$, $\beta = \angle A_1OH = 60°$, $\sin 60° = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{3}$, или $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$, $a = 2\sqrt{3}r$, или $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

2) Для правильного четырехугольника (рис. 204) получим:

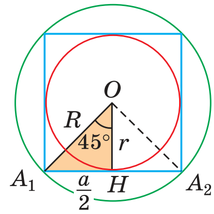
$\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{4} = 90°$, $\beta = \angle A_1OH = 45°$, $\sin 45° = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$, $a = R\sqrt{2}$, или $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} 45° = \frac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot 1 = \frac{a}{2}$, $a = 2r$, или $r = \frac{a}{2}$.




$\boxed{a = R\sqrt{3}}$

$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

*Рис. 203*

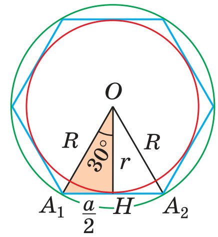



$\boxed{a = R\sqrt{2}}$

$r = \frac{a}{2}$

*Рис. 204*

3) Для правильного шестиугольника (рис. 205) $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, $\beta = \angle A_1OH = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$, откуда $R \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2}$, $a = R$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{r}$, $r \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{2}$, $a = \dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$, или $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.




$\boxed{a = R}$

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

*Рис. 205*

Полезно запомнить формулы, выражающие сторону $a_n$ правильного $n$-угольника через радиус $R$ описанной окружности при $n = 3, 4, 6$:

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R.$$

Для нахождения площади правильного $n$-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ с центром $O$ и радиусом $R$ описанной окружности можно найти площадь треугольника $A_1OA_2$ по формуле $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ и умножить ее на число таких треугольников, т. е. на $n$.

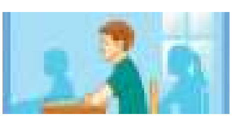
**Пример.**

$$S_6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{6}\right) = 3R^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2};$$

$$S_8 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{8}\right) = 4R^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}R^2;$$

$$S_{12} = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\frac{360^\circ}{12}\right) = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Для нахождения радиуса $r$ окружности, вписанной в правильный многоугольник, можно использовать формулу площади описанного многоугольника $S = pr$.



## Задания к § 17

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**256.** Дан правильный треугольник. Используя формулы $a = R\sqrt{3}$ и $r = \dfrac{1}{2}R$, заполните в тетради таблицу, где $a$ — сторона треугольника, $R$ — радиус описанной окружности, $r$ — радиус вписанной окружности.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 6 | | |
| $R$ | | $4\sqrt{3}$ | |
| $r$ | | | 1 |

**257.** а) Найдите радиус окружности, вписанной в правильный четырехугольник со стороной, равной 8 см.
б) Найдите радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника, периметр которого равен 32 см.

**258.** Дан правильный 6-угольник с периметром, равным 30 см. Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружности этого 6-угольника.

**259.** а) Вычислите радиус описанной окружности правильного 10-угольника со стороной, равной 6 см. Ответ округлите до 0,1 см.
б) Вычислите радиус вписанной окружности правильного 12-угольника со стороной, равной 24 см. Ответ округлите до 0,1 см.

**260.** Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром $O$ и стороной $a = 20$ (рис. 206). Найдите угол $\beta$ и выразите радиусы его описанной и вписанной окружностей через $a$ и $\beta$.

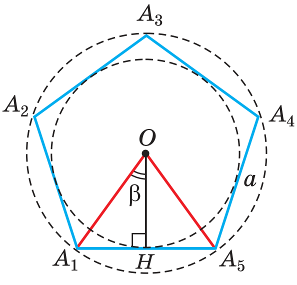
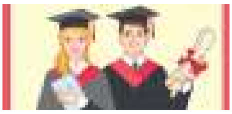


*Рис. 206*

**261.** а) Выразите сторону $a$ правильного 9-угольника через радиус $R$ его описанной окружности.
б) Выразите радиус $r$ окружности, вписанной в правильный 18-угольник, через его сторону $a$.

**262.** Найдите площадь правильного 12-угольника, у которого радиус описанной окружности равен 6 см.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**263*.** Дан правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3...A_8$ (рис. 207).
а) Докажите, что $A_2A_5 \parallel A_3A_4$.
б) Докажите, что $A_1A_2A_5A_6$ — прямоугольник.
в) Докажите, что диагональ $A_1A_5$ проходит через центр многоугольника.
г) Найдите углы треугольника $A_1A_2A_5$.
д) Докажите, что площадь прямоугольника $A_1A_2A_5A_6$ равна $\frac{1}{2}$ площади данного правильного восьмиугольника.

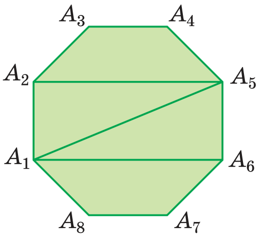


*Рис. 207*

### *Гимнастика ума*

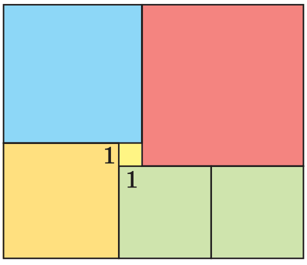


*Рис. 208*

Прямоугольник на рисунке 208 составлен из шести квадратов. Сторона желтого квадрата равна 1. Найдите длину стороны красного квадрата.

(Для самоконтроля. Ответ: длина стороны красного квадрата равна числу периодов в таблице Менделеева.)

При помощи **Интернета** выясните, какую теорему относительно правильных многоугольников доказал великий математик Карл Гаусс и какую геометрическую фигуру он завещал после смерти изобразить на своем памятнике.

## § 18. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник

### 1. Правильный треугольник

Обобщим информацию о правильном (равностороннем) треугольнике.

Запишем формулы высоты $h$, площади $S$, радиуса $R$ описанной и радиуса $r$ вписанной окружностей правильного треугольника $ABC$ со стороной $a$ (рис. 209):

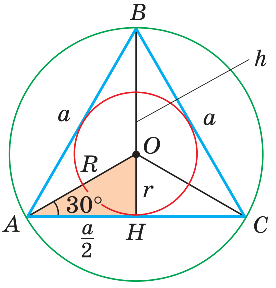



*Рис. 209*

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из $\triangle AOH$, где $\angle OAH = 30°$, следует, что $r = \frac{1}{2}R$.

При заданной стороне $a$ правильного треугольника его можно построить при помощи циркуля и линейки, используя алгоритм построения треугольника по трем сторонам.

Так как $BO : OH = 2 : 1$, то $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. Для построения описанной и вписанной оружностей правильного треугольника достаточно построить его медианы (высоты), точка пересечения которых будет центром искомых окружностей.

### 2. Правильный четырехугольник

Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна $a$, $R$ — радиус описанной, $r$ — радиус вписанной окружности (рис. 210). Диаметр его описанной окружности равен диагонали $AC$. В свою очередь, $AC = a\sqrt{2}$, откуда $2R = a\sqrt{2}$, или $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника $AOD$ также следует, что $AD = AO\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$. Диаметр $KH$ окружности,

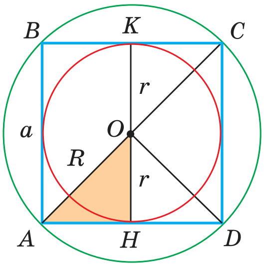



*Рис. 210*

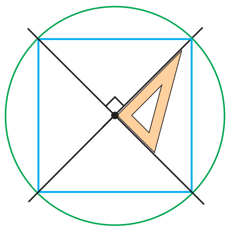


*Рис. 211*

вписанной в квадрат, равен длине стороны квадрата, т. е. $KH = AB = a$, откуда $a = 2r$, $\boxed{r = \frac{a}{2}.}$ Из прямоугольного равнобедренного треугольника $AOH$ также следует, что $r = AH = \frac{a}{2}$.

Для построения квадрата, вписанного в данную окружность с заданным центром, можно построить две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр окружности (рис. 211). Эти прямые пересекут окружность в вершинах квадрата. Обоснуйте это утверждение. Выполните указанное построение при помощи чертежного треугольника.

### 3. Правильный шестиугольник

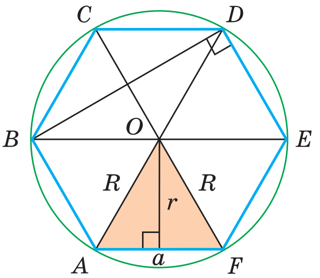



*Рис. 212*

Рассмотрим правильный 6-угольник $ABCDEF$ со стороной $a$, вписанный в окружность с центром $O$ и радиусом $R$ (рис. 212). Его внутренние углы равны по 120°. Треугольник $AOF$ равнобедренный, так как $OA = OF = R$, $\angle AOF = \frac{360°}{6} = 60°$. Поэтому $\triangle AOF$ — равносторонний, откуда $\boxed{a = R.}$

Так как радиус $r$ вписанной окружности является высотой равностороннего треугольника со стороной $a$, то $\boxed{r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.}$

Поскольку $\angle BOC + \angle COD + \angle DOE = 180°$, то большая (главная) диагональ $BE$ правильного шестиугольника проходит через его центр $O$, а все три большие диагонали $AD$, $BE$ и $CF$ разбивают его на шесть равных равносторонних треугольников. Площадь правильного шестиугольника

$$\boxed{S_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.}$$

Меньшая (малая) диагональ $BD$ правильного шестиугольника является диагональю ромба $BCDO$ ($BC = CD = DO = BO = a$) с углами, равными 60° и 120°. Откуда $CD \parallel BE$. Треугольник $BDE$ является прямоугольным ($\angle BDE = 90°$ как опирающийся на диаметр), $\angle BED = 60°$, $\angle DBE = 30°$. Кроме того, $CD \parallel AF$, $BC \parallel FE$, $AB \parallel ED$, а расстояния между указанными парами параллельных прямых равны $a\sqrt{3}$. Докажите это самостоятельно.

Построим при помощи циркуля и линейки правильный шестиугольник, вписанный в данную окружность с радиусом $R$ (рис. 213, $a$). Восполь-

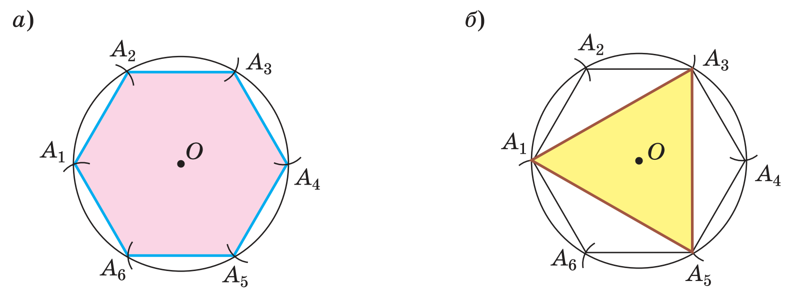



*Рис. 213*

зуемся тем, что $a = R$, где $a$ — сторона правильного шестиугольника. Одну вершину $A_1$ шестиугольника берем на окружности произвольно. Из нее как из центра радиусом, равным радиусу $R$, делаем засечку на окружности и получаем вершину $A_2$. Затем аналогично последовательно строим остальные вершины: $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ — и соединяем их отрезками. Из равенства равносторонних треугольников ($\triangle A_1OA_2 = \triangle A_2OA_3 = \triangle A_3OA_4 = \triangle A_4OA_5 = \triangle A_5OA_6 = \triangle A_6OA_1$) следует равенство углов построенного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, откуда заключаем, что он — правильный.

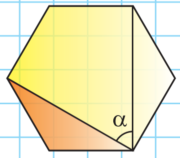
Для построения правильного треугольника, вписанного в данную окружность, достаточно соединить отрезками через одну вершины правильного вписанного шестиугольника (рис. 213, *б*). Для построения правильного 12-угольника следует разделить дуги $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_5A_6$ пополам (построив серединные перпендикуляры к сторонам правильного шестиугольника) и каждую из точек деления соединить отрезками с концами соответствующей стороны.

Применяя указанный способ деления дуг пополам, можно с помощью циркуля и линейки построить множество правильных многоугольников. Так, из правильного 4-угольника можно построить правильный 8-угольник, 16-угольник, и вообще любой правильный $2^k$-угольник, где $k$ — целое число, большее двух.

А теперь выполните **Тест 1**.

### Тест 1

На рисунке изображен правильный шестиугольник, его площадь равна 120 см$^2$. Найдите величину угла $\alpha$ и площадь оранжевого треугольника.



## Задания к § 18

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *В окружности с центром $O$ проведен диаметр $BD$, через середину радиуса $OD$ проведена хорда $AC$, перпендикулярная диаметру $BD$* (рис. 214). *Доказать, что $\triangle ABC$ — правильный.*

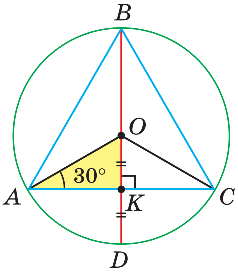



*Рис. 214*

Доказательство. Так как $OK = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$, то в прямоугольном треугольнике $AOK$ $\angle OAK = 30°$. В равнобедренном треугольнике $AOC$ ($OA = OC$) $\angle OCA = 30°$, $\angle AOC = 120°$. Вписанный угол $ABC$ равен половине центрального угла $AOC$, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60°$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Поэтому $AK = KC$. Так как в треугольнике $ABC$ высота $BK$ является и медианой, то он — равнобедренный, $AB = BC$. Отсюда $\angle BAC = \angle BCA = 60°$ и $\triangle ABC$ — равносторонний, т. е. правильный. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Из задачи следует второй способ построения правильного треугольника, вписанного в окружность: строится диаметр $BD$, через середину радиуса $OD$ проводится хорда $AC$, перпендикулярная диаметру. Треугольник $ABC$ — правильный.

**Задача 2.** *Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, диагональ $AC$ равна $6\sqrt{3}$. Найти площадь шестиугольника* (*рис.* 215).

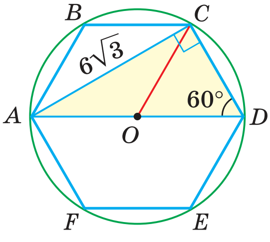


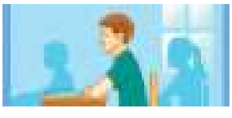

*Рис. 215*

Решение. Вписанный угол $ACD$ опирается на диаметр $AD$, поэтому он прямой. Из прямоугольного треугольника $ACD$: $\angle D = 60°$, $\operatorname{ctg} D = \frac{CD}{AC}$, $CD = AC \operatorname{ctg} 60° =$

$= 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$. Так как $S_{COD} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$,

то $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{COD} = 6 \cdot 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.

Ответ: $54\sqrt{3}$.



### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**264.** Дан правильный треугольник, $a$ — его сторона, $R$ — радиус описанной окружности, $r$ — радиус вписанной окружности, $h$ — высота, $S$ — площадь. Перенесите в тетрадь и заполните таблицу.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 6 | | | | |
| $h$ | | $2\sqrt{3}$ | | | |
| $R$ | | | 2 | | |
| $r$ | | | | $\sqrt{6}$ | |
| $S$ | | | | | $16\sqrt{3}$ |

**265.** Дан правильный четырехугольник, $a$ — его сторона, $R$ — радиус описанной окружности, $r$ — радиус вписанной окружности. Перенесите в тетрадь и заполните таблицу.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 4 | | |
| $R$ | | $8\sqrt{2}$ | |
| $r$ | | | $\sqrt{8}$ |

**266.** а) Из проволоки сделан правильный треугольник со стороной, равной 12 см. Проволоку разогнули и сделали из нее правильный четырехугольник. Найдите длину стороны этого четырехугольника.

б) Из проволоки сделан правильный шестиугольник со стороной, равной 2 см. Проволоку разогнули и сделали из нее правильный треугольник. Найдите длину его стороны.

**267.** а) Найдите площадь правильного шестиугольника со стороной, равной 4 см.

б) Найдите периметр правильного шестиугольника, если радиус вписанной в него окружности равен $6\sqrt{3}$ см.

**268.** Найдите площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 216), если площадь треугольника $ABD$ равна 60 см$^2$.

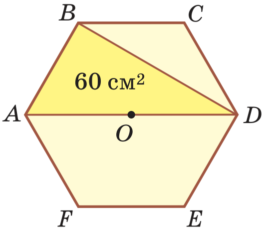



*Рис. 216*

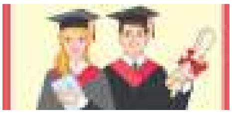
**269.** Дан правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

а) Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника и радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник, если $A_2A_4 = 4\sqrt{3}$ см.

б) Докажите, что расстояние между прямыми $A_2A_3$ и $A_6A_5$ равно длине диагонали $A_2A_4$.

**270.** а) Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки правильного треугольника по его высоте $h$.

б) Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки правильного четырехугольника по его диагонали $d$.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**271*.** а) В правильный треугольник $ABC$ со стороной, равной 6, вписан квадрат $MNPK$ (рис. 217). Найдите длину стороны квадрата.

б) На рисунке 218 изображены правильный треугольник $ABC$ и правильный четырехугольник $EDFC$. Найдите длину стороны $AB$ треугольника, если $FC = 3$.

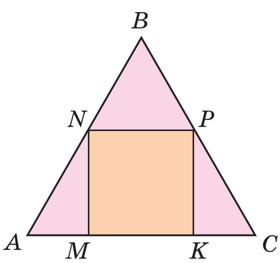


*Рис. 217*

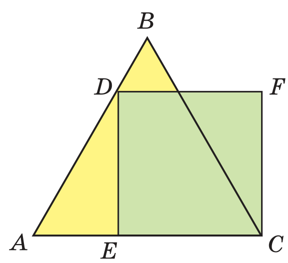


*Рис. 218*

**272*.** Найдите площадь правильного треугольника, если дан:

а) радиус $R$ его описанной окружности;
б) радиус $r$ его вписанной окружности.

**273*.** Придумайте алгоритм построения при помощи циркуля и линейки квадрата по отрезку, равному сумме стороны квадрата и его диагонали.

**274*.** Около данной окружности опишите при помощи циркуля и линейки правильный:

а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

### *Моделирование*

Дизайнер хочет изготовить бумажные цветы, вырезав их из кругов, как показано на рисунке 219.

**Задание.** Помогите дизайнеру: составьте алгоритм решения поставленной задачи с использованием циркуля, ножниц и бумаги.

Обоснуйте вашу идею математически и проверьте ее на практике.

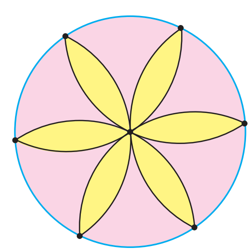


*Рис. 219*

***Интересно знать.*** Ячейки пчелиных сот в форме правильных шестиугольников (рис. 220) всегда восхищали людей. Недаром пчелы считаются одними из величайших инженеров в мире природы. Как точно и соразмерно подгоняют они одну ячейку сот к другой!

Регулярный ячеистый рисунок можно получить из треугольных, квадратных или шестиугольных ячеек. Шестиугольная ячейка является наиболее экономичной. На соты с такими ячейками идет наименьшее количество воска. Впервые такую особенность заметили в IV в. н. э., тогда же было выдвинуто предположение, что пчелы при постройке сот «руководствуются математическим планом».

*Рис. 220*

## Гимнастика ума

Из трех карандашей одной длины можно составить 1 правильный треугольник. Из пяти таких карандашей можно составить 2 правильных треугольника (рис. 221).

Попробуйте из шести карандашей одной длины составить фигуру, состоящую из четырех правильных треугольников.

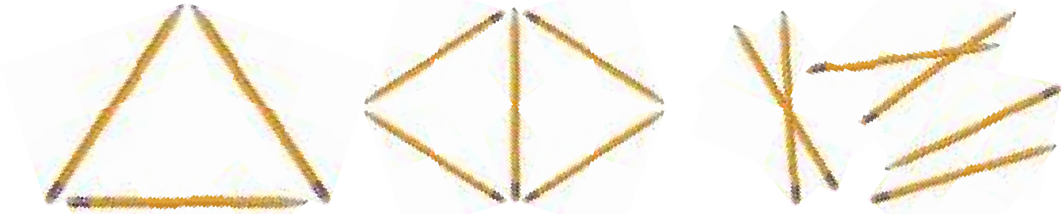


*Рис. 221*

## Реальная геометрия

**Задание 1.** Имеется квадратный лист гипсокартона со стороной 1 м. Из него необходимо получить правильный восьмиугольник, обрезав углы (рис. 222). Определите длины отрезков $x$ и $y$. Ответ округлите до 1 см.

**Задание 2.** Из листа фанеры, имеющего форму правильного треугольника со стороной 1 м, необходимо изготовить правильный шестиугольник, обрезав углы (рис. 223). Определите длины отрезков $x$ и $y$. Ответ округлите до 1 см.

*Замечание.* При выполнении заданий 1 и 2 используйте тригонометрические таблицы и калькулятор.

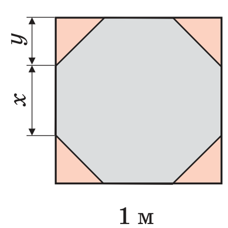



*Рис. 222*

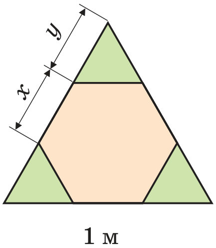



*Рис. 223*

# § 19. Нахождение длины окружности и площади круга

## 1. Длина окружности и площадь круга

Длину окружности, сделанной из гибкой проволоки, можно измерить, если проволоку распрямить в отрезок. Еще древние заметили, что отношение длины любой окружности к ее диаметру есть величина постоянная: длина окружности примерно в 3 раза больше диаметра. Вы можете убедиться в этом при помощи нитки и линейки, используя в качестве окружности верхнюю кромку чашки (рис. 224).

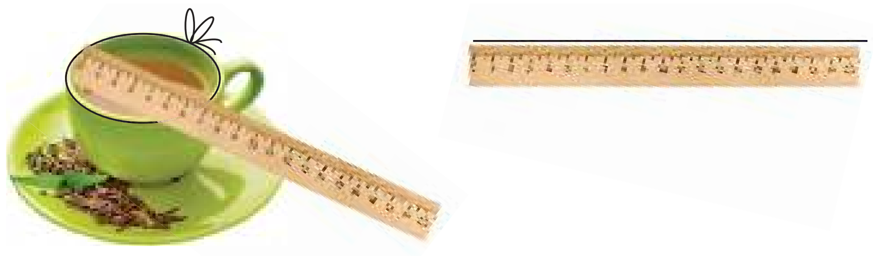


*Рис. 224*

Понятно, что периметр правильного многоугольника, вписанного в окружность, будет стремиться к длине окружности при неограниченном увеличении числа его сторон, а площадь этого многоугольника — к площади круга, ограниченного данной окружностью (рис. 225).

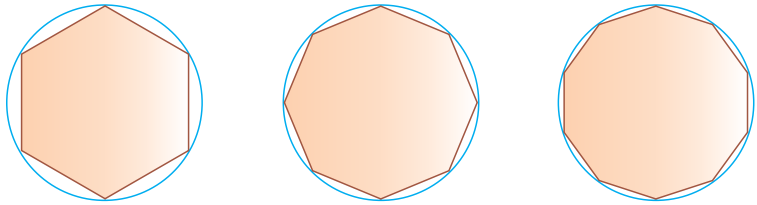


*Рис. 225*

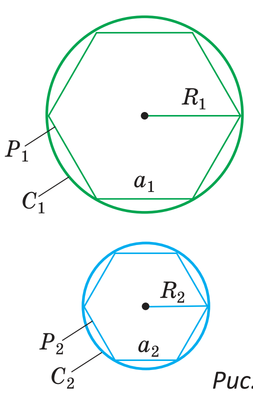



*Рис. 226*

Используя этот факт, выведем уже известные вам формулы длины окружности $C = 2\pi R$ и площади круга $S = \pi R^2$, где $R$ — радиус окружности и круга.

Вначале покажем, что отношение длины любой окружности $C$ к ее диаметру $D = 2R$ есть величина постоянная. Для этого рассмотрим две окружности и два правильных вписанных в них многоугольника с одинаковым числом сторон $n$, где $a_1$ — сторона первого, $a_2$ — сторона второго многоугольника, $P_1$ и $P_2$ — их соответствующие периметры, $C_1$ — длина первой, а $C_2$ — длина второй описанной окружности (рис. 226).

Найдем отношение указанных периметров:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cancel{n} \cdot a_1}{\cancel{n} \cdot a_2} = \frac{2R_1 \sin\cancel{\frac{180°}{n}}}{2R_2 \sin\cancel{\frac{180°}{n}}} = \frac{2R_1}{2R_2}.$$

При неограниченном увеличении числа $n$ периметр $P_1$ устремится к $C_1$, периметр $P_2$ — к $C_2$, а отношение $\frac{P_1}{P_2}$ — к отношению $\frac{C_1}{C_2}$, и тогда $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$. Отсюда следует, что отношение длины окружности к ее диаметру, т. е. $\frac{C}{2R}$ — величина постоянная для любой окружности.

Это отношение обозначается буквой $\pi$. Так как $\frac{C}{2R} = \pi$, то длина окружности $C = 2\pi R$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема. **Длина окружности радиуса $R$ находится по формуле**

$$C = 2\pi R.$$

***Интересно знать.*** Число $\pi \approx 3{,}1415...$ — иррациональное и в десятичном виде представляет собой бесконечную непериодическую дробь. Оно было известно уже древним грекам. Еще Архимед нашел дробь $\frac{22}{7}$, довольно точно приближающую число $\pi$. Мы же для приближенных вычислений будем пользоваться в основном значением $\pi \approx 3{,}14$.

А теперь выведем формулу площади круга.

Теорема. **Площадь круга радиуса $R$ находится по формуле**

$$S = \pi R^2.$$

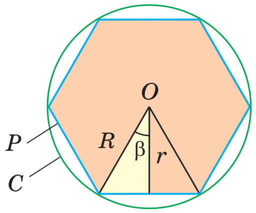


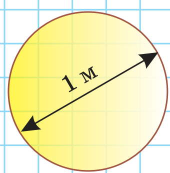
*Рис. 227*

Доказательство. Рассмотрим некоторую окружность радиуса $R$ и вписанный в нее правильный $n$-угольник (рис. 227), площадь которого $S_n = pr = \frac{1}{2}Pr$, где $P$ — его периметр, $r$ — радиус вписанной окружности. При неограниченном увеличении числа $n$ площадь $S_n$ правильного $n$-угольника устремится к площади $S_{кр}$ круга радиуса $R$, периметр $P$ — к длине $C$ описанной окружности, а радиус $r$ — к радиусу $R$ (поскольку угол $\beta$ устремится к нулю). Тогда $\frac{1}{2}Pr$ устремится к $\frac{1}{2}CR$, то есть к $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot R \cdot R$, что равно $\pi R^2$, откуда $S_{кр} = \pi R^2$.
Теорема доказана.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

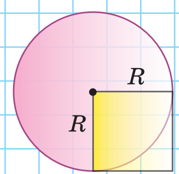
**Тест 1**

Диаметр круглого бревна 1 м. Хватит ли веревки длиной 3 м, чтобы обвязать бревно?




**Тест 2**

Что больше: площадь круга или площадь трех желтых квадратов со стороной, равной радиусу?




## 2. Длина дуги окружности и площадь сектора круга

Поскольку длина окружности $C = 2\pi R$, а ее градусная мера равна $360°$, то длина дуги, содержащей $1°$, равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тогда длина $l$ дуги, содержащей $n°$ (рис. 228), равна $\frac{\pi R}{180} \cdot n$.

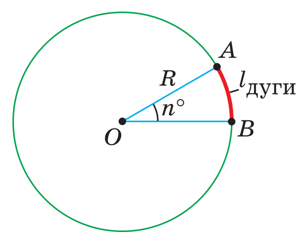



*Рис. 228*

Напомним, что *сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, соединяющей концы радиусов (рис. 229). Радиус круга называется *радиусом сектора*, указанная дуга — *дугой сектора*, центральный угол между радиусами, ограничивающими сектор, — *углом сектора*.

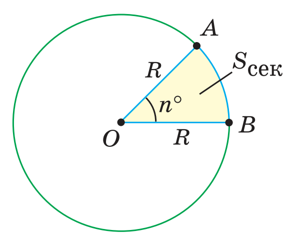



*Рис. 229*

Так как площадь круга $S = \pi R^2$, то площадь сектора с углом в $1°$ равна $\frac{\pi R^2}{360}$, а с углом в $n°$ градусов — $\frac{\pi R^2}{360} \cdot n$.

Заметим, что $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi R}{180} \cdot n\right) \cdot R = \frac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, т. е. площадь сектора равна половине произведения длины дуги сектора на его радиус.

**Пример 1.** Пусть дана дуга окружности с радиусом 9 см, содержащая $30°$ (рис. 230, *а*). Найдем длину дуги:

$$l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n = \frac{\pi \cdot 9}{180} \cdot 30 = 1{,}5\pi \approx 1{,}5 \cdot 3{,}14 \approx 4{,}7 \ \text{(см)}.$$

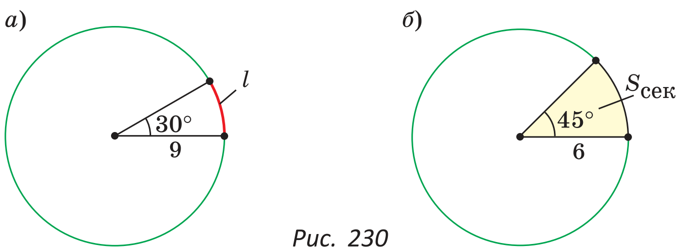



*Рис. 230*

**Пример 2.** Пусть угол сектора содержит 45°, а радиус равен 6 см (рис. 230, *б*). Найдем площадь сектора:

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 45 = 4{,}5 \cdot \pi \approx 4{,}5 \cdot 3{,}14 \approx 14{,}1 \ (см^2).$$

*Замечание.* При вычислении длины дуги (площади сектора) допустимы обе следующие записи: $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$ и $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ ($S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$ и $S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$).

Длина дуги и площадь сектора прямо пропорциональны градусной мере дуги и угла сектора. Поэтому длина дуги так относится к длине окружности, как градусная мера дуги относится к градусной мере окружности. Площадь сектора так относится к площади круга, как градусная мера угла сектора относится к градусной мере полного угла, т. е. справедливы пропорции:

$$\frac{l_{дуги}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ}, \qquad \frac{S_{сек}}{S_{кр}} = \frac{n^\circ}{360^\circ}, \qquad \frac{l_{дуги}}{C} = \frac{S_{сек}}{S_{кр}}.$$

*Замечание.* В третьей пропорции $l_{дуги}$ — это длина дуги сектора.

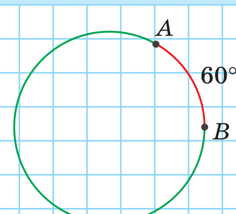
Данные пропорции также позволяют находить длину дуги и площадь сектора. Так, если длина окружности равна 10 см, а градусная мера ее дуги $n^\circ = 120^\circ$, то $\frac{l_{дуги}}{10} = \frac{120^\circ}{360^\circ}$, откуда длина данной дуги $l_{дуги} = \frac{10 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\frac{1}{3}$ (см).

А если площадь круга равна 12 см² и угол сектора равен 80°, то $\frac{S_{сек}}{12} = \frac{80^\circ}{360^\circ}$, откуда площадь данного сектора $S_{сек} = \frac{12 \cdot 80^\circ}{360^\circ} = 2\frac{2}{3}$ (см²).

А теперь выполните **Тест 3** и **Тест 4**.

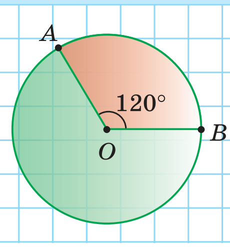
## Тест 3

Длина окружности равна 24 см. Найдите длину дуги $AB$, содержащей 60°.



## Тест 4

Площадь круга равна 60 см². Найдите площадь сектора $AOB$, угол которого равен $120°$.




## Задания к § 19

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Дан сектор $AOB$* (рис. 231), *радиус которого равен* 6, *а площадь — $3\pi$. Найти длину дуги этого сектора. Ответ округлить до* 0,1.

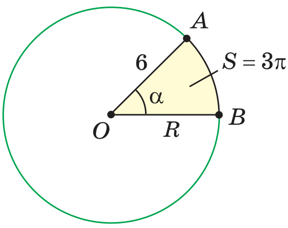



*Рис. 231*

Решение. *Способ* 1. Пусть $\angle AOB = \alpha$, откуда $S_{\text{сек}} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha$. Так как по условию $S_{\text{сек}} = 3\pi$, то $3\pi = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{360°} \cdot \alpha$, откуда $\alpha = 30°$. Найдем длину дуги $AB$: $\cup AB = \dfrac{\pi R}{180°} \cdot \alpha = \dfrac{\pi \cdot 6}{180°} \cdot 30° = \pi \approx 3{,}1$.

*Способ* 2. Воспользуемся пропорцией $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{C} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{кр}}}$. Тогда $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{\pi R^2}$, $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2} = \dfrac{S_{\text{сек}}}{R}$, $\dfrac{l_{\text{дуги}}}{2} = \dfrac{3\pi}{6}$, $l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3{,}1$.

*Способ* 3. Так как $S_{\text{сек}} = \dfrac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot R$, то $3\pi = \dfrac{1}{2} \cdot l_{\text{дуги}} \cdot 6$, $l_{\text{дуги}} = \pi \approx 3{,}1$.

Ответ: 3,1.

**Задача 2.** *Найти площадь сегмента круга, радиус которого равен* 12, *если градусная мера дуги этого сегмента равна* $120°$.

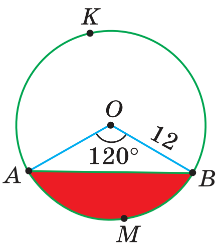



*Рис. 232*

Решение. Напомним, что *сегментом* называется часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности, которая соединяет концы этой хорды.

Пусть $O$ — центр данной окружности, $\cup AMB = 120°$ (рис. 232). Тогда $\angle AOB = 120°$, $OA = OB = 12$ см. Площадь сегмента $AMB$ равна разности площади сектора $AOBM$ и площади равнобедренного треугольника $AOB$.

Так как площадь сектора $AOBM$ $S_{AOBM} = \dfrac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° =$

$= \dfrac{\pi \cdot 12^2}{3} = 48\pi$, а площадь треугольника $AOB$ $S_{AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB =$ $= \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$, то площадь сегмента $AMB$ $S_{AMB} = 48\pi - 36\sqrt{3}$.

Ответ: $48\pi - 36\sqrt{3}$.

*Замечание.* Площадь сегмента $AKB$ (см. рис. 232) можно найти как сумму площадей сектора $OAKB$ и треугольника $AOB$, либо как разность площади круга и площади сегмента $AMB$.

## Гимнастика ума

Фрагмент пазла представляет собой прямоугольник размером 30 × 50 (мм), в котором на противоположных сторонах есть два полукруглых выреза и на двух других сторонах — два выступа в виде полукругов. Вырезы и выступы имеют одинаковый диаметр 12 мм (рис. 233). Найдите площадь этого фрагмента пазла в квадратных сантиметрах.

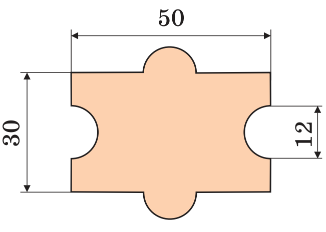



*Рис. 233*

## Реальная геометрия

Из квадратного листа металла необходимо вырезать 4 одинаковых круга наибольшего диаметра (рис. 234). Определите, сколько процентов составят отходы.

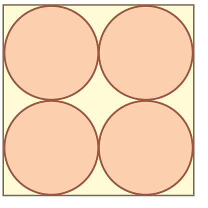
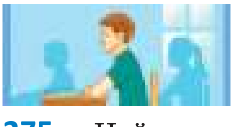


*Рис. 234*

***Интересно знать.*** В 1987 г. был учрежден неофициальный праздник — день числа $\pi$, который отмечают любители математики 14 марта (3-й месяц, 14-е число).

Долгое время математики старались найти как можно большее число знаков числа $\pi$ после запятой. Легко запомнить двенадцать первых знаков числа $\pi \approx 3{,}14159265358\ldots$ при помощи следующей считалки: «*Это я знаю и помню прекрасно, но многие цифры мне лишни, напрасны*», — в которой количество букв в каждом слове означает очередную цифру числа $\pi$: «это» — 3, «я» — 1, «знаю» — 4 и т. д.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**275.** Найдите приближенно длину окружности, если ее радиус равен: а) 10 см; б) 1,5 дм; в) 0,05 м; г) $3\frac{1}{2}$ км. (При вычислениях возьмите $\pi \approx 3{,}14$.)

**276.** Найдите, округлив до целых, радиус окружности, если ее длина равна: а) 60 см; б) 300 мм; в) 6,28 дм; г) 1 м.

**277.** Длина окружности равна 600 см. Найдите длину ее дуги, содержащей:
а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 24°.

**278.** Длина дуги окружности равна 12 см. Вычислите радиус окружности (округлив результат до 0,1 см), если градусная мера дуги составляет:
а) 45°; б) 120°.

**279.** Найдите градусную меру дуги (округлив ответ до 1°), если даны ее радиус $R$ и длина $l$:
а) $R = 10$ см, $l = 15$ см; б) $R = 36$ м, $l = 12$ м.

**280.** Вычислите приближенно градусную меру дуги, длина которой равна радиусу окружности. Ответ округлите до 1°.

**281.** Длина окружности больше ее диаметра на 12 см. Найдите приближенно радиус окружности. Результат округлите до 0,1 см.

**282.** Радиус закругления железнодорожного полотна (рис. 235) равен 1800 м, длина дуги закругления равна 900 м. Найдите, сколько примерно градусов содержит дуга закругления (при расчетах возьмите $\pi \approx 3$).

*Рис. 235*

**283.** а) Определите, на сколько увеличится длина $C$ окружности, если ее радиус $R$ увеличить на 1 см.
б) Во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в 2 раза?

**284.** Дуга $AB$ окружности содержит 120°. Через ее точки $A$ и $B$ проведены касательные $AC$ и $BC$ (рис. 236). Докажите, что длина окружности, касающейся данной окружности и прямых $AC$ и $BC$, равна длине дуги $AB$.

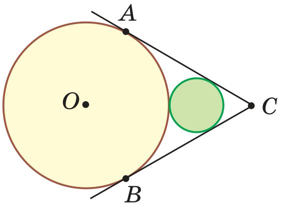



*Рис. 236*

**285.** Найдите приближенно площадь круга, взяв $\pi \approx 3{,}14$, если радиус круга равен:
а) 5 см; б) 10 м; в) 2,5 дм; г) 1 км.

**286.** Найдите приближенно радиус круга (округлив ответ до 0,1), если площадь круга равна:
а) 4 см$^2$; б) 314 дм$^2$.

**287.** Площадь крышки люка равна 0,5 м$^2$. Найдите диаметр люка. Ответ запишите в сантиметрах.

**288.** а) Вычислите площадь круга, если длина его окружности равна 6,28 см. Ответ округлите до 0,01 см$^2$.
б) Вычислите длину окружности, если площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна 15 см$^2$. Ответ округлите до 0,01 см.

**289.** а) Найдите площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с радиусами $R = 8$ см и $r = 5$ см.
б) Дано кольцо (рис. 237). Хорда $AB$ большей окружности касается меньшей окружности и равна 8 см. Найдите площадь кольца.

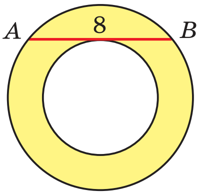


*Рис. 237*

**290.** В окружность вписан квадрат, в этот квадрат вписана окружность. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

**291.** Площадь круга равна $Q$. Найдите площадь сектора с дугой, содержащей:

а) 30°; б) 60°; в) 120°; г) 270°.

**292.** а) На рисунке 238, *а*) площадь закрашенного сектора относится к площади круга как 2 : 9. Найдите градусную меру угла сектора.
б) На рисунке 238, *б*) площадь круга составляет 120 см$^2$. Найдите площадь закрашенного сектора.
в) На рисунке 238, *в*) дуги $EG$ и $KP$ содержат 60° и 120° соответственно, площадь незакрашенного сектора $EOG$ равна 90 см$^2$. Найдите сумму площадей закрашенных секторов $KOE$ и $POG$.

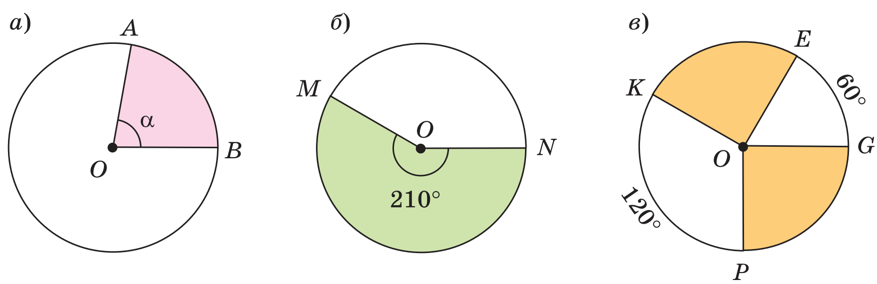


*Рис. 238*

**293.** На рисунке 239 изображена круговая диаграмма. Найдите площадь сектора, составляющего 40 %, если радиус круга равен 10 см.

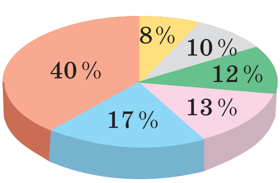


*Рис. 239*

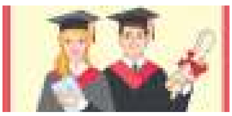
**294.** Найдите отношение площадей вписанного и описанного кругов:

а) для правильного треугольника;
б) для правильного шестиугольника.

**295.** Найдите площадь сектора круга с углом $\alpha$ и радиусом $R$, если:

а) $R = 4$ см, $\alpha = 15°$;
б) $R = 2$ м, $\alpha = 135°$.

**296.** а) Вычислите радиус сектора, если его площадь равна $16\pi$, а дуга сектора содержит $40°$.
б) Вычислите площадь сектора, если площадь круга равна $256\pi$, а длина дуги этого сектора равна $4\pi$.



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**297*.** Из тонкого металлического круга вырезали правильный треугольник наибольшей площади. Определите, сколько процентов составили отходы. Ответ округлите до 1 %.

**298*.** Определите площадь сегмента окружности радиуса $R$ с дугой, равной $\alpha$ градусов, если:

а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 270°$.

**299*.** Из концов дуги $AB$ к окружности, радиус которой равен $R$, проведены касательные, которые пересекаются в точке $D$. Определите площадь фигуры, заключенной между этими касательными и дугой, если градусная мера дуги $AB$ равна:

а) $90°$; б) $120°$.

**300*.** а) Дан правильный треугольник со стороной, равной 2. Построены три сектора с центрами в вершинах треугольника и радиусами, равными 1 (рис. 240). Найдите площадь желтой части треугольника.
б) Дан сектор с углом $90°$ и радиусом, равным 4 (рис. 241). На его радиусах построены полукруги. Найдите площадь красной части сектора.

**301*.** На рисунке 242 изображены три круга равного радиуса площадью 12 см$^2$ каждый, центры которых находятся в вершинах произвольного треугольника. Найдите сумму площадей трех закрашенных секторов этих кругов.

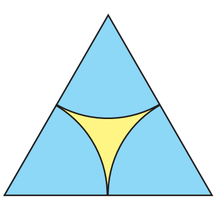


*Рис. 240*

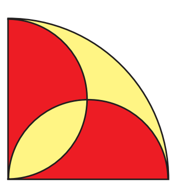


*Рис. 241*

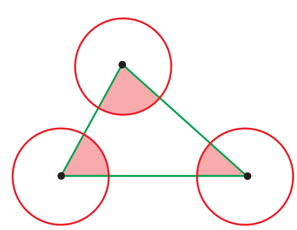


*Рис. 242*

**302*.** Два круга радиуса $R$ каждый расположены на плоскости так, что окружность одного проходит через центр другого. Определите площадь общей части кругов.

**303*.** Дан круг радиуса 1 и вписанный угол $ABC$, равный $60°$ (рис. 243). Найдите наибольшее значение площади закрашенной фигуры.

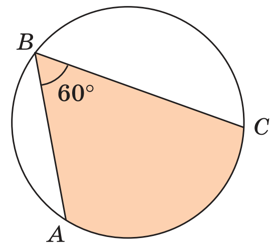
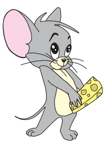



*Рис. 243*

При помощи **Интернета** выясните, почему фразеологизм «квадратура круга» означает «неразрешимую задачу».

## *Гимнастика ума*

Допустим, что земной шар вдоль экватора (длина экватора примерно 40 000 км) обтянули нитью. Затем эту нить удлинили на 20 см и равномерно (на одинаковом расстоянии от поверхности Земли) расположили по окружности над экватором (рис. 244). Сможет ли в полученный зазор между нитью и поверхностью Земли пролезть мышка?



Найдите размер этого зазора.

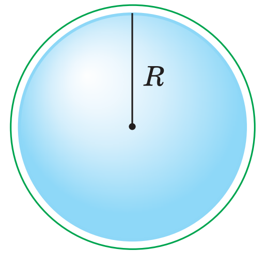



*Рис. 244*

## *Реальная геометрия*

Пицца диаметром 30 см стоит 30 р. Сколько должна стоить пицца того же вида диаметром 20 см (рис. 245)? Подсказка: ответ 20 р. неверный.

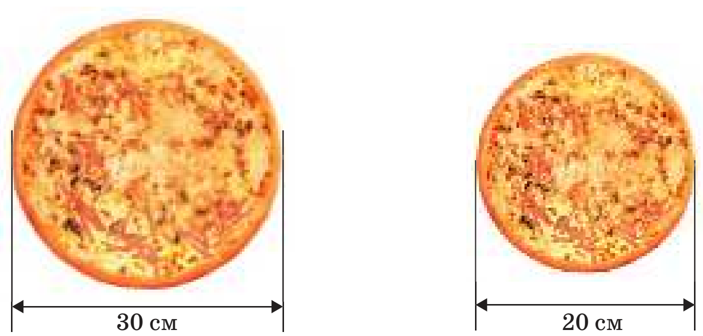
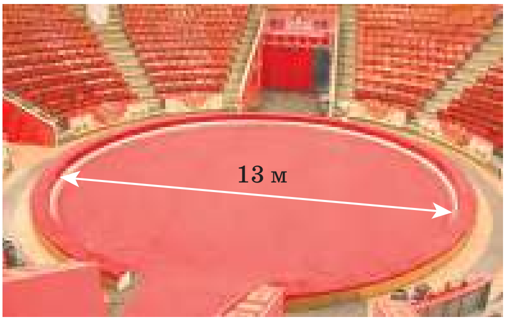



*Рис. 245*

***Интересно знать.*** Белорусский государственный цирк находится на проспекте Независимости в Минске. Первое представление в нем состоялось в 1959 г. Минский цирк вмещает 1625 зрителей. Диаметр цирковой арены (манежа) равен 13 м, как и во всех цирках мира.

С помощью **Интернета** выясните, как цирк связан с геометрией. В частности, что общего у слов «цирк» и «циркуль»? Почему диаметр манежа равен именно 13 м?




**Задание.** а) Определите длину окружности манежа. Подсчитайте, за сколько секунд обезьянка может обежать манеж по окружности со скоростью 10 км/ч.

б) Определите площадь арены в квадратных метрах. Выясните, сколько ведер опилок понадобится, чтобы засыпать манеж, если одним ведром можно засыпать 9 дм$^2$.

## Геометрия 3D

Напомним, что в 8-м классе мы рассмотрели два тела вращения: цилиндр и конус. На рисунках 246 и 247 изображены эти тела и развертки их поверхности на плоскость.

Выполните задания 1 и 2, связанные с этими пространственными фигурами.

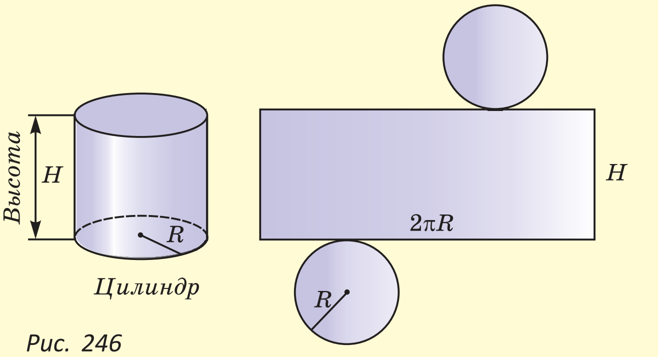



*Рис. 246*

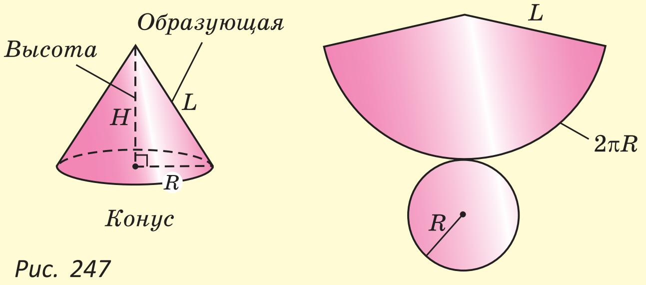



*Рис. 247*

**Задание 1.** Найдите площадь поверхности цилиндра, высота которого равна 10 см, а радиус основания — 4 см. Значение $\pi$ возьмите равным 3.

**Задание 2.** Найдите площадь поверхности конуса, высота которого равна 4 см, а радиус основания — 3 см. Значение $\pi$ возьмите равным 3.

**Задание 3.** Шар называется вписанным в конус, если он касается основания конуса в его центре и боковой поверхности по некоторой окружности (рис. 248). Центр шара при этом лежит на высоте конуса. Если провести плоскость через высоту конуса, то в сечении конуса получится равнобедренный треугольник, а в сечении вписанного шара — его большой круг, вписанный в указанный равнобедренный треугольник. Найдите радиус шара, вписанного в конус с радиусом основания, равным 6 см, и высотой, равной 4 см.

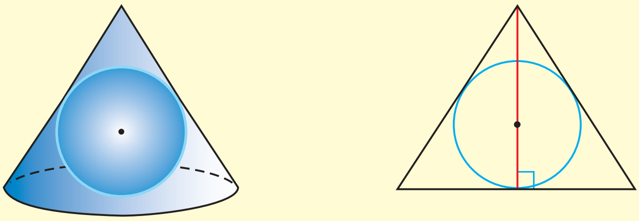


*Рис. 248*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Формулу длины окружности.
2. Формулу площади круга.
3. Алгоритм нахождения длины дуги.
4. Алгоритм нахождения площади сектора.
5. Алгоритм нахождения площади сегмента.

### Умеем

1. Находить длину окружности по ее радиусу.
2. Находить площадь круга по его радиусу.
3. Определять длину дуги окружности по радиусу и градусной мере дуги.
4. Определять площадь сектора по его радиусу и углу.
5. Определять площадь сегмента по радиусу окружности и градусной мере дуги сегмента.
6. Выводить формулу длины окружности.
7. Выводить формулу площади круга.

## § 20*. Креативная геометрия

### 1. Луночки Гиппократа

Луночками Гиппократа называют серповидные фигуры, ограниченные дугами двух окружностей.

**Задача 1.** *На отрезках $AB$, $AM$ и $MB$ построены полукруги с центрами в точках $O$, $O_1$ и $O_2$. $NM \perp AB$, $NM = 10$ (рис. 249). Найти площадь закрашенной части большого полукруга.*

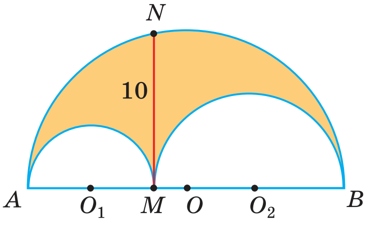



*Рис. 249*

Решение. Площадь закрашенной фигуры равна разности площадей полукруга с диаметром $AB = 2R$ и двух полукругов с диаметрами $AM = 2R_1$ и $MB = 2R_2$, т. е.

$$S_{ANBM} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot R_1^2}{2} + \frac{\pi \cdot R_2^2}{2}\right) =$$

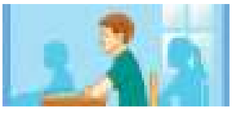
$$= \frac{\pi}{8}\left((2R)^2 - \left((2R_1)^2 + (2R_2)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(AB^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left((AM + MB)^2 - \left(AM^2 + MB^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot 2AM \cdot MB = \frac{\pi}{4} \cdot AM \cdot MB.$$

Так как $\angle ANB = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр $AB$, то $NM$ — высота прямоугольного треугольника $ANB$, проведенная к гипотенузе. А высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, это среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е. $MN^2 = AM \cdot MB$. Следовательно, $S_{ANBM} = \frac{\pi}{4} \cdot MN^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 = 25\pi$.
Ответ: $25\pi$.

При помощи **Интернета** выясните, один ли и тот же человек сформулировал клятву Гиппократа и исследовал гиппократовы луночки.



**РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

**304.** На сторонах прямоугольного треугольника $ABC$ как на диаметрах построены полукруги (рис. 250, *а*). Докажите, что $S_1 + S_2 = S_3$.

**305.** На сторонах прямоугольного треугольника $ABC$ как на диаметрах построены полукруги (рис. 250, *б*). Найдите сумму площадей луночек Гиппократа $S_1 + S_2$, если $AC = 12$, $BC = 5$.

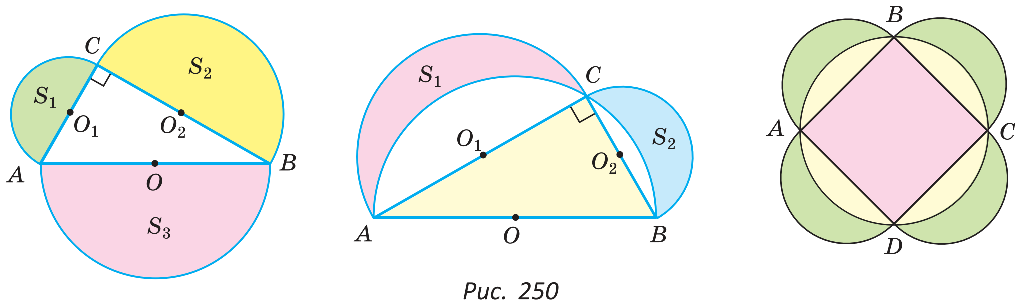



*Рис. 250*

**306.** Около квадрата $ABCD$ описан круг, а на его сторонах построены полукруги как на диаметрах (рис. 250, *в*). Докажите, что сумма площадей зеленых луночек равна площади квадрата.

## 2. Золотое сечение

«Золотое сечение», или «божественная пропорция», — так называют математики деление отрезка некоторой точкой на части так, что больший из полученных отрезков является средним пропорциональным (средним геометрическим) между меньшим отрезком и целым. Другими словами, больший отрезок должен так относиться к меньшему, как целый отрезок относится к большему. Если на отрезке $AB$ отмечена точка $M$ и $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM}$, то отрезок $AM$ — среднее пропорциональное отрезков $AB$ и $MB$. Поэтому точка $M$ делит отрезок $AB$ в отношении золотого сечения.

Пусть $AB = 1$, $AM = x$, $MB = 1 - x$ (рис. 251). Тогда $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, откуда $x^2 + x - 1 = 0$. Учитывая, что $x > 0$, получим $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx$ $\approx 0{,}618033989...$


*Рис. 251*

Таким образом, больший отрезок $AM$ составляет приблизительно 62 %, а меньший отрезок $MB$ — приблизительно 38 % всего отрезка $AB$.

Число $\Phi = \frac{1}{x} \approx 1{,}618033989...$ — считается отношением золотого сечения. Оно примерно равно отношению 8 : 5 (рис. 252).

Золотое сечение обладает определенной гармонией, которую человек находит прекрасной. Многие художественные, музыкальные, поэтические произведения, шедевры архитектуры содержат в своей структуре золотое сечение. Опытным путем установлено, что оптимальным человеку кажется прямоугольник, длина и ширина которого находятся в отношении золотого сечения. Физиологи объясняют это тем, что поле зрения человека, т. е. та часть окружающего мира, которую видит

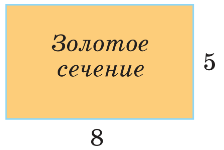



*Рис. 252*

человек, представляет собой прямоугольник со сторонами, находящимися в отношении золотого сечения.

Известно, например, что в знаменитой скульптуре Венеры Милосской (рис. 253) — эталоне женской красоты — талия делит фигуру в отношении золотого сечения.

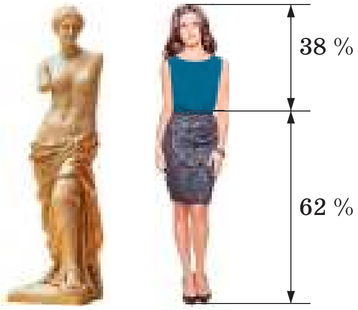


*Рис. 253*

Примечателен один *исторический факт*. Когда информация о Венере Милосской и золотом сечении была опубликована в одном из популярных журналов начала XX в., то в магазинах поблизости женских гимназий вдруг исчезли портняжные метры. Их раскупили девушки гимназистки, чтобы проверить, насколько их фигура близка к идеалу и какой высоты каблук следует носить, чтобы к нему приблизиться.

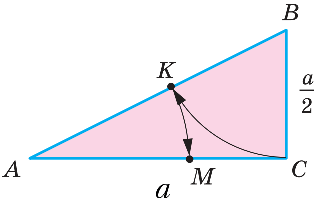


*Рис. 254*

Покажем способ деления отрезка в отношении золотого сечения при помощи циркуля и линейки. Пусть дан отрезок, равный $a$. Построим прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $AC = a$ и $BC = \frac{a}{2}$ (рис. 254). На гипотенузе $AB$ отложим отрезок $BK$, равный отрезку $BC$. Затем на катете $AC$ отложим отрезок $AM$, равный отрезку $AK$. Точка $M$ делит отрезок $AC$ в отношении золотого сечения, т. е. $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

### 3. Построение правильного пятиугольника

С давних времен построению правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки математики уделяли большое внимание. Древние греки умели строить правильные треугольники, четырехугольники, пятиугольники, а также правильные многоугольники, получаемые удвоением числа их сторон: 6-угольники, 8-угольники, 10-угольники и т. д. Далее дело зашло в тупик: они не могли найти способ построения правильных 7-угольников, 9-угольников, 11-угольников. И только 2000 лет спустя великий немецкий математик XVII в. Карл Гаусс решил эту математическую проблему. Будучи 19-летним юношей, он доказал, что можно построить правильный 17-угольник, а вот 7-угольник, 9-угольник, 11-угольник, 13-угольник циркулем и линейкой построить нельзя. Задача о построении правильного 17-угольника была его первым научным открытием. Несмотря на выдающиеся достижения Гаусса в области математики, этой первой своей решенной проблеме он придавал такое значение, что в конце жизни завещал изобразить на могильном камне правильный 17-угольник.

Рассмотрим правильный пятиугольник. Если в нем провести все диагонали (рис. 255), то получится звезда (звездчатый пятиугольник). Звезда была символом школы Пифагора. Замечательно то, что точки пересечения диагоналей пятиугольника делят их в отношении золотого сечения: $\frac{AM}{MC} = \frac{AC}{AM}$. Докажем это.

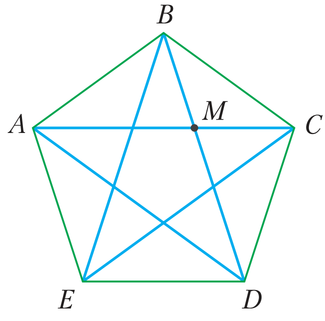



*Рис. 255*

Так как $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ — равные равнобедренные треугольники (рис. 256), то $\angle BAC = \angle ACB = \angle DBC$. Поскольку $AC \parallel ED$, $BD \parallel AE$ (докажите самостоятельно), то $AMDE$ — параллелограмм, поэтому $AM = ED = x$. Но $BC = ED = x$ как стороны пятиугольника. Из подобия треугольников $ABC$ и $BMC$ (по двум углам) следует $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$, или $\frac{AC}{AM} = \frac{AM}{MC}$. Следовательно, точка $M$ делит отрезок $AC$ в отношении золотого сечения.

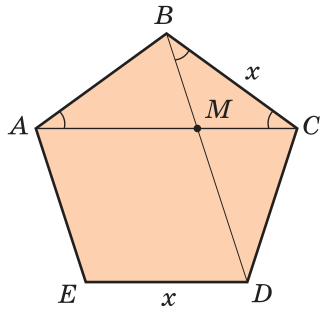



*Рис. 256*

Рассмотрим задачу о построении правильного пятиугольника при помощи циркуля и линейки. Для построения правильного пятиугольника можно взять произвольный отрезок $d$, равный диагонали правильного пятиугольника, и разделить его в отношении золотого сечения. Получив отрезок $x$, который равен стороне правильного пятиугольника, можно легко построить правильный пятиугольник. Продолжите построение сами.

Задача о построении правильного пятиугольника равносильна построению углов, равных 36°, 72°, 108°, а также построению равнобедренного треугольника, биссектриса угла при основании которого разбивает данный треугольник на два равнобедренных. Пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 257) $\angle B = 36°$, $AK$ — биссектриса и $AB = BC = 1$. Обозначим $AC = AK = KB = x$, $KC = 1 - x$. Из свойства биссектрисы вытекает $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, откуда $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, точка $K$ делит отрезок $BC$ в отношении золотого сечения. Из треугольника $ABC$ по теореме косинусов

$$\cos 36° = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

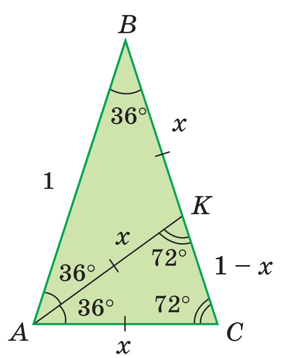
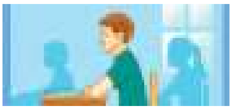



*Рис. 257*

Отметим, что сторона $AC$ треугольника $ABC$ является стороной правильного десятиугольника, вписанного в окружность с радиусом, равным $AB$.



## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**307.** При помощи циркуля и линейки постройте:

а) правильный пятиугольник по данной его стороне $a$;
б) правильный пятиугольник, вписанный в данную окружность.

**308.** При помощи циркуля и линейки постройте правильный десятиугольник с данной стороной $b$.

**309.** Найдите точное значение $\cos 72°$, используя рисунок 257.

***Интересно знать.*** **Карл Фридрих Гаусс** — один из величайших математиков мира, его называли «королем математиков».

Сын печника, родившийся в Германии, он проявил способности к математике в раннем детстве. После окончания школы Гаусс поступил в Геттингенский университет на отделение филологии и хотел стать поэтом. Но позже Гаусс увлекся одной математической задачей и выбрал своей профессией математику.

## ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

**1.** Квадратура круга.
**2.** Золотое сечение.
**3.** Карл Гаусс и его достижения.
**4.** Задача Дидоны.

Дополнительные материалы к учебному пособию «Геометрия, 9» можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, раздел «Математика», курс «Математика. 9 кл.».

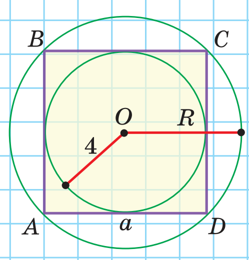
## ЗАПОМИНАЕМ

1. Для квадрата со стороной $a$ справедливо: $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$.
2. Для правильного треугольника со стороной $a$ справедливо:
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$
3. Для правильного шестиугольника со стороной $a$ справедливо:
$$R = a, \; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$
4. Длина окружности находится по формуле $C = 2\pi R$.
5. Площадь круга находится по формуле $S = \pi R^2$.
6. Длина дуги, содержащей $n°$, находится по формуле $l_{\text{дуги}} = \frac{\pi R}{180°} \cdot n°$.
7. Площадь сектора с углом, равным $n°$, находится по формуле $S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot n°$.

## ПРОВЕРЯЕМ СЕБЯ

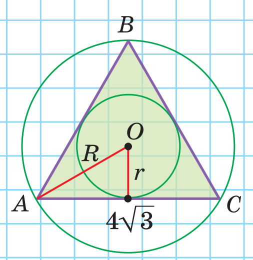
### Тест 1

$ABCD$ — квадрат. Найдите $a$ и $R$.



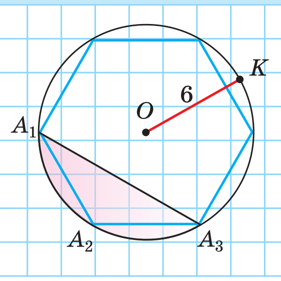

### Тест 2

$\triangle ABC$ правильный. Найдите $R$ и $r$.




### Тест 3

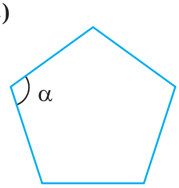
Дан правильный шестиугольник, радиус его описанной окружности $OK = 6$. Найдите площадь сегмента $A_1A_2A_3$.



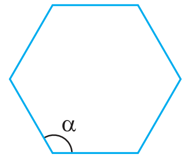
## Подготовка к контрольной работе № 4

**1.** Найдите угол $\alpha$ правильного $n$-угольника.

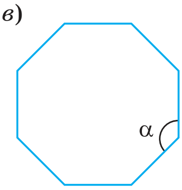
*а)*




*б)*

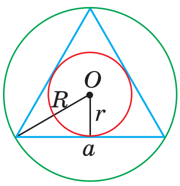



*в)*

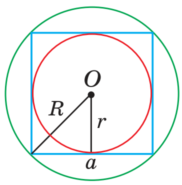



**2.** Найдите указанные элементы правильных многоугольников.

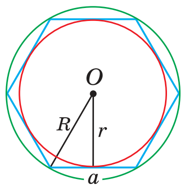
*а)* $a = 4\sqrt{3}$. $R$ — ? $r$ — ?




*б)* $r = 6$. $a$ — ? $R$ — ?

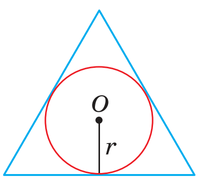



*в)* $R = 2\sqrt{3}$. $a$ — ? $r$ — ?

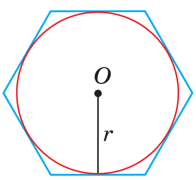



**3.** Найдите указанную величину для правильного многоугольника.

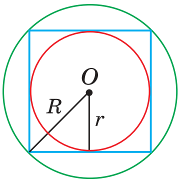
*а)* $S = 16\sqrt{3}$. $r$ — ?




*б)* $r = 2\sqrt{3}$. $S_6$ — ?

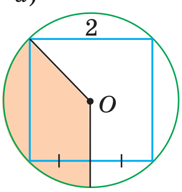



*в)* $R + r = 2 + \sqrt{2}$. $S_4$ — ?

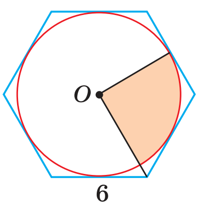



**4.** Дан правильный $n$-угольник. Найдите площадь и периметр закрашенной фигуры, зная сторону $n$-угольника.

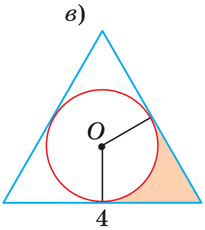
*а)*




*б)*

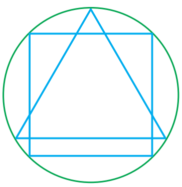



*в)*

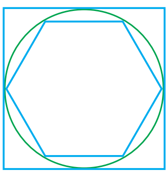



**5*.** Найдите отношение площадей правильных многоугольников.

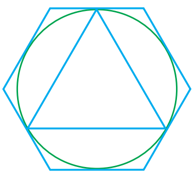
*а)* $S_3 : S_4$ — ?



*б)* $S_4 : S_6$ — ?



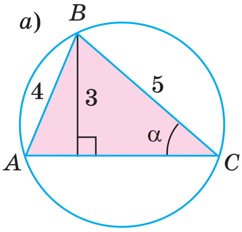
*в)* $S_3 : S_6$ — ?



# Повторение главы III

## 1. Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad S = \frac{abc}{4R}$$

а) 

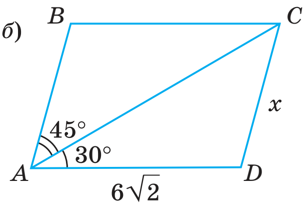

$R - ?$

**Задача.** Найти:
а) радиус $R$ описанной окружности $\triangle ABC$;
б) сторону $x$ параллелограмма $ABCD$.

Решение.

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{4}{\sin\alpha} = 2R$, $\frac{4}{\frac{3}{5}} = 2R$, $R = 3\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$, $x = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6.$

б) 


Ответ: а) $3\frac{1}{3}$; б) 6.

## 2. Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

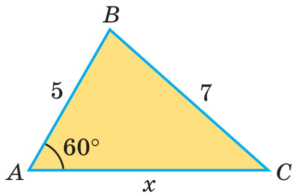
**Задача.** Найти сторону $x$ треугольника $ABC$.

Решение.

$7^2 = 5^2 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cdot\cos 60^\circ$, $49 = 25 + x^2 - 10\cdot x\cdot\frac{1}{2}$,

$x^2 - 5x - 24 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 8$.

Ответ: 8.




## 3. Свойство диагоналей параллелограмма

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

## 4. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

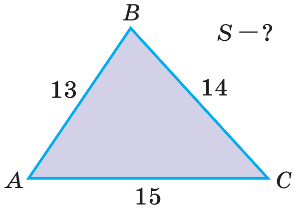
**Задача.** Найти площадь треугольника $ABC$.

Решение.

$p = \frac{13+14+15}{2} = 21$, $p - a = 21 - 13 = 8$,

$p - b = 21 - 14 = 7$, $p - c = 21 - 15 = 6$,

$S = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \sqrt{3\cdot 7\cdot 8\cdot 7\cdot 2\cdot 3} = 3\cdot 7\cdot 4 = 84.$




Ответ: 84.

## Повторение главы IV

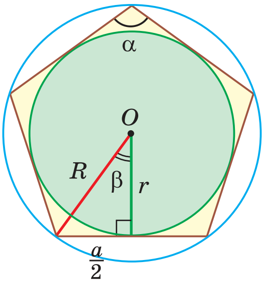
**1. Правильный $n$-угольник**

Все стороны и все углы равны.

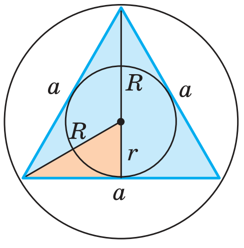
Можно описать и можно вписать окружность, их центры совпадают.

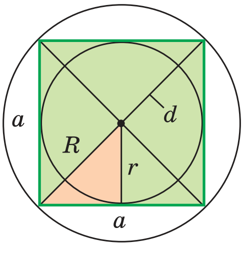
$\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$ — внутренний угол.

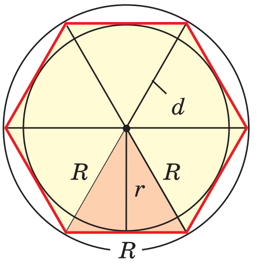
$R = \dfrac{a}{2} : \sin\beta = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}, \qquad r = \dfrac{a}{2} : \operatorname{tg}\beta = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}.$




**2. Правильный треугольник, четырехугольник, шестиугольник**




$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

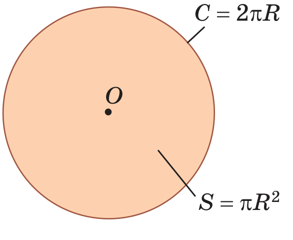
$d = a\sqrt{2}, \quad a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

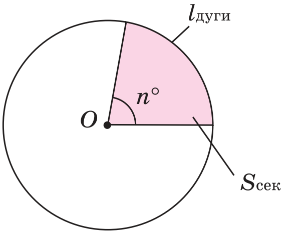
$R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \dfrac{a}{2}$

$a = R, \quad S = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$d = 2R, \quad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

**3. Длина окружности и площадь круга**



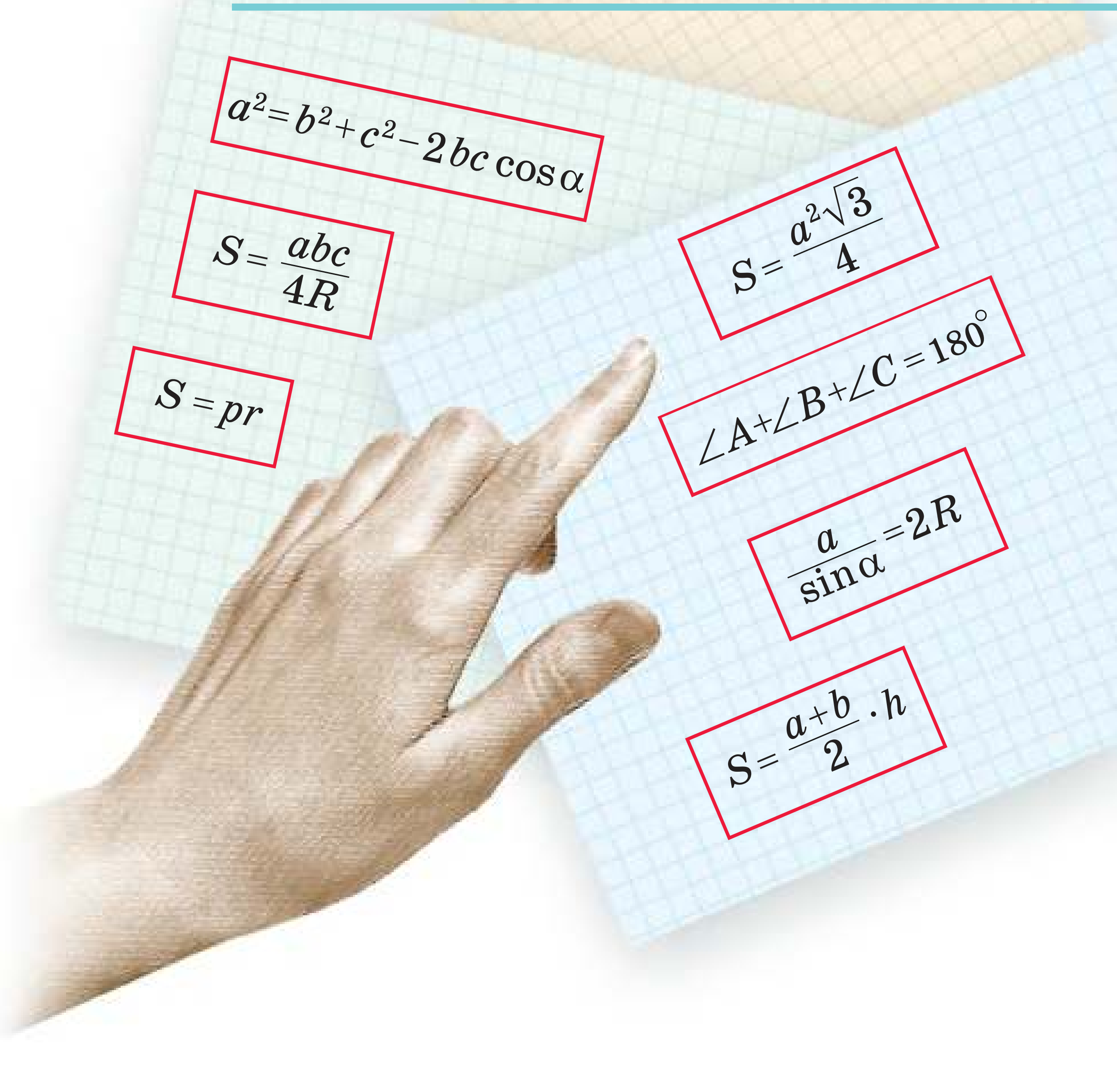

**4. Длина дуги**

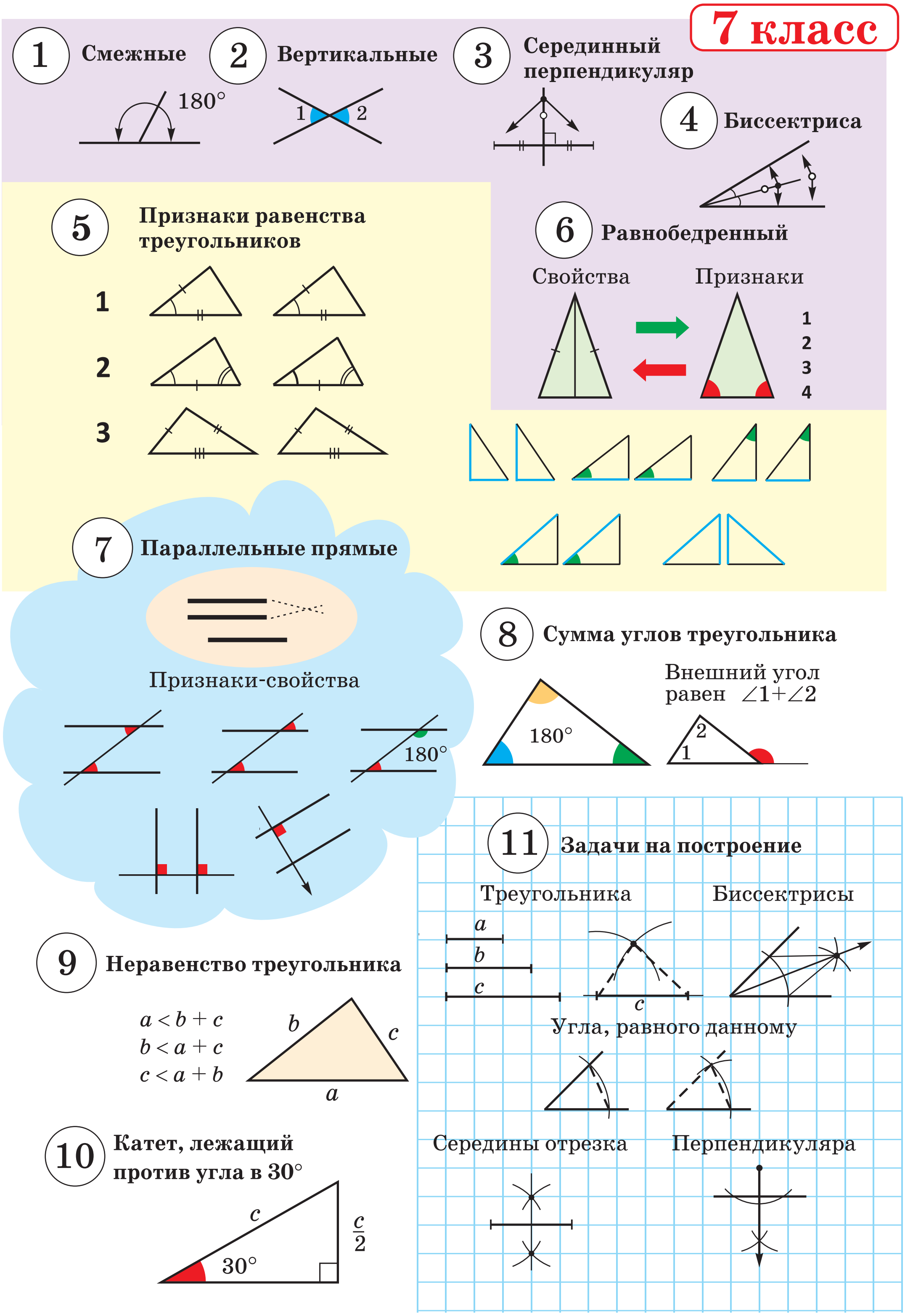
$$\frac{l_{\text{дуги}}}{2\pi R} = \frac{n°}{360°}$$

**5. Площадь сектора**

$$\frac{S_{\text{сектора}}}{\pi R^2} = \frac{n°}{360°}$$

# Повторение геометрии 7– 9 классов




7 класс
1 Смежные
180°
2 Вертикальные
1 2
3 Серединный перпендикуляр
4 Биссектриса
5 Признаки равенства треугольников
1
2
3
6 Равнобедренный
Свойства
Признаки
1
2
3
4
7 Параллельные прямые
Признаки-свойства
180°
8 Сумма углов треугольника
180°
Внешний угол равен ∠1+∠2
2
1
9 Неравенство треугольника
a < b + c
b < a + c
c < a + b
b
c
a
10 Катет, лежащий против угла в 30°
c
c/2
30°
11 Задачи на построение
Треугольника
Биссектрисы
a
b
c
c
Угла, равного данному
Середины отрезка
Перпендикуляра

## Дополните базу знаний по 7-му классу, произнеся вслух пропущенные фрагменты

**1.** Сумма смежных углов равна … .

**2.** Вертикальные углы … .

**3.** Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов … .

**4.** Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон … .

**5.** Признаки равенства треугольников:

1) по двум сторонам и … ;
2) по стороне и двум … углам;
3) по трем … .

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1) по двум … ;
2) по катету и прилежащему … ;
3) по катету и противолежащему … ;
4) по гипотенузе и … углу;
5) по катету и … .

**6.** В равнобедренном треугольнике углы при основании … , а биссектриса, проведенная из вершины к основанию, является его … и … .

**7.** Если две прямые пересечены третьей и накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна $180°$, то прямые … . И наоборот, если …, то … .

**8.** На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, … .

**9.** Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, … и другой прямой.

**10.** Сумма углов треугольника равна … .

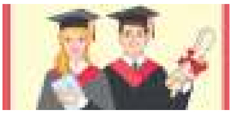
**11.** Внешний угол треугольника — это угол, смежный с его … .

**12.** Внешний угол треугольника равен сумме двух … углов, не … с ним.

**13.** Неравенство треугольника: любая сторона треугольника меньше суммы … .

**14.** Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30°$, равен половине … .

**15.** В треугольнике против большей стороны лежит больший … , а против большего угла лежит … .



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**16.** Биссектрисы смежных углов взаимно ... .

**17.** Любая точка плоскости, равноудаленная от концов отрезка, лежит на ... .

**18.** Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, — это ... .

**19.** Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от сторон угла (и находящихся внутри угла), — это ... .

**20.** Внешний угол треугольника больше любого ... угла треугольника, не смежного с ним.

**21.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются ... .

**22.** Если у треугольника высота является биссектрисой, или высота является медианой, или медиана является биссектрисой, то треугольник ... .

**23.** Биссектрисы треугольника пересекаются ... .

**24.** Катет прямоугольного треугольника меньше ... .

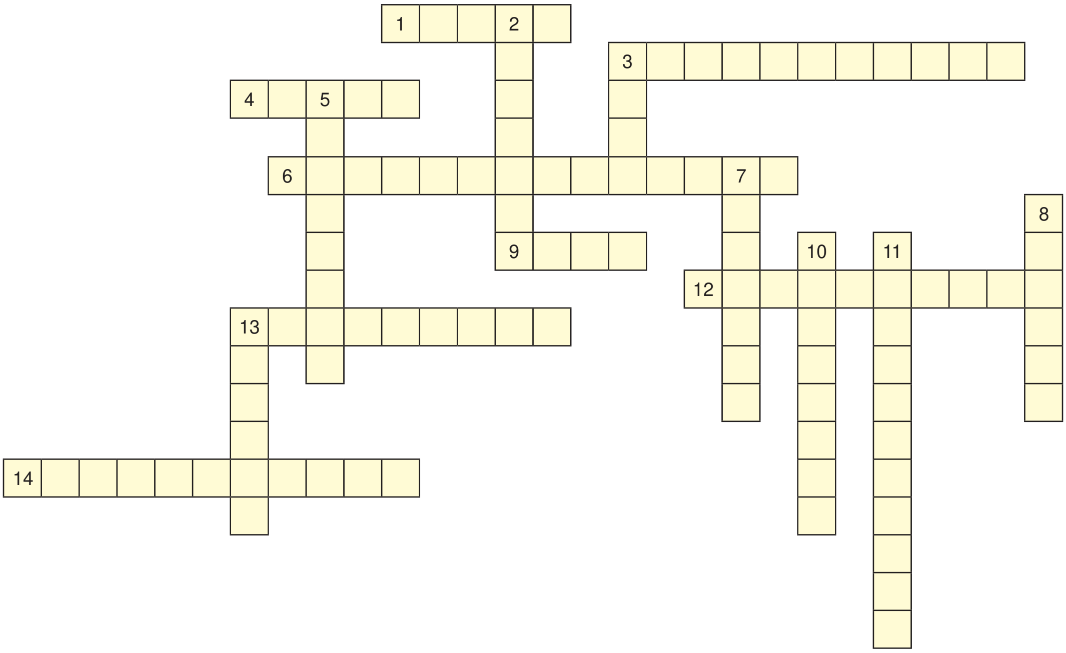
**25.** Для перпендикуляра и двух наклонных, проведенных из одной точки к данной прямой, и проекций наклонных на эту прямую справедливо: «Перпендикуляр меньше наклонной. Проекция наклонной меньше самой ... . Большей ... соответствует большая ..., равным ... — равные ... ».

**26.** В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине ... . Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник — ... .

**27.** Основные задачи на построение при помощи циркуля и линейки:

1) Построение треугольника по трем сторонам.
2) Построение биссектрисы угла.
3) Построение угла, равного данному.
4) Деление отрезка пополам.
5) Построение прямой, перпендикулярной данной.

## *Ваш замечательный кроссворд*



**По горизонтали:**

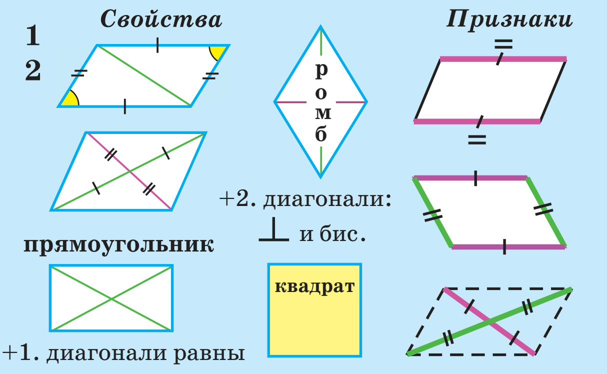
**1.** Отрезок, соединяющий две точки окружности.
**3.** Прямая, которая имеет только одну общую точку с окружностью.
**4.** Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против его острого угла.
**6.** Четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны.
**9.** Параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны.
**12.** Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против его прямого угла.
**13.** Угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность.
**14.** Луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.

**По вертикали:**

**2.** Хорда окружности, проходящая через ее центр.
**3.** Часть плоскости, ограниченная окружностью.
**5.** Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — нет.
**7.** Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.
**8.** Единица измерения углов.
**10.** Два треугольника, углы которых соответственно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.
**11.** Угол с вершиной в центре окружности.
**13.** Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противолежащей стороне треугольника или ее продолжению.

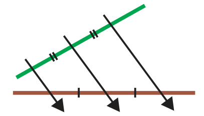
Сумма углов многоугольника $180°(n-2)$

## Параллелограмм

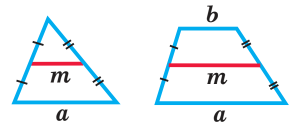



**класс**

## Теорема Фалеса



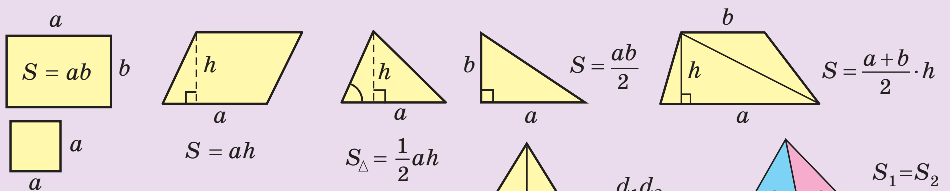
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

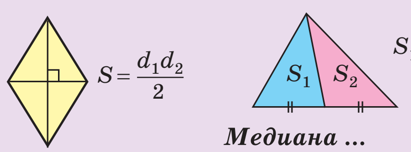



$m=\frac{a}{2}$ $m=\frac{a+b}{2}$

**МЕДИАНЫ 2 : 1**

## Площади



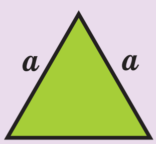

$S=ab$ $S=a^2$ $S=ah$ $S_\triangle=\frac{1}{2}ah$ $S=\frac{ab}{2}$ $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ $S=\frac{d_1d_2}{2}$ $S_1=S_2$

*Медиана ...*
*на два равновеликих*

## Пифагор

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

**обратная**



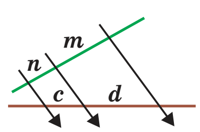

$$\boxed{S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

**Площади подобных треугольников**

$$\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=k^2$$

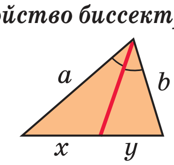
## Подобие

**признак**
**признак**
**признак**




$\frac{n}{m}=\frac{c}{d}$

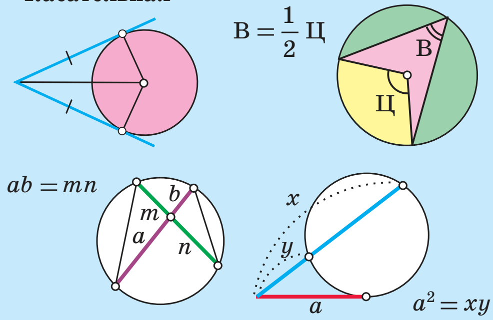
***Свойство биссектрисы угла треугольника***




$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$

**Касательная**

$В=\frac{1}{2}Ц$




$ab=mn$ $a^2=xy$

## Дополните базу знаний по 8-му классу, произнеся вслух пропущенные фрагменты

**1.** Сумма внутренних углов $n$-угольника равна ... .

**2.** Свойства параллелограмма.

В параллелограмме:
1) сумма соседних углов равна ... ;
2) диагональ делит его на ... ;
3)—4) противоположные стороны ... и противоположные углы ... ;
5) диагонали точкой пересечения делятся ... .

**3.** Признаки параллелограмма.

Четырехугольник является параллелограммом, если у него:
1) две стороны ... и ... ;
2) противоположные стороны ... ;
3) диагонали точкой пересечения делятся ... .

**4.** Диагонали прямоугольника ... .

**5.** Признаки прямоугольника:

1) если у параллелограмма диагонали ..., то это прямоугольник;
2) если у параллелограмма один угол прямой, то это ... ;
3) если у четырехугольника все углы прямые, то это ... .

**6.** Диагонали ромба взаимно ... и лежат на биссектрисах его углов.

**7.** Признаки ромба:

1) если у параллелограмма диагонали ..., то это ромб;
2) если у параллелограмма диагональ лежит на биссектрисе его угла, то это ... .

**8.** Теорема Фалеса: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону, то на другой стороне угла отложатся ... .

**9.** Средняя линия треугольника ... основанию и равна ... .

**10.** Средняя линия трапеции ... основаниям и равна их ... .

**11.** Медианы треугольника пересекаются ... и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

**12.** Площадь квадрата $S = a^2$; прямоугольника $S = ab$; параллелограмма $S = ah$; треугольника $S = \frac{1}{2}ah$; ... треугольника $S = \frac{ab}{2}$; трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; ромба $S = \frac{d_1 d_2}{2}$, ... треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

**13.** Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату ... : $a^2 + b^2 = c^2$.

**14.** Обратная теорема Пифагора: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник ... .

**15.** Медиана делит треугольник на два равновеликих ... .

**16.** Отношение площадей подобных треугольников равно отношению квадратов соответствующих сторон и равно квадрату коэффициента ... .

**17.** Треугольники называются подобными, если у них соответствующие ... равны, а ... пропорциональны.

**18.** Три признака подобия треугольников.

Треугольники подобны, если:
1) два ... одного треугольника соответственно равны двум ... другого треугольника;
2) две ... одного треугольника соответственно пропорциональны двум ... другого треугольника, а углы между ними равны;
3) три ... одного треугольника соответственно пропорциональны трем ... другого треугольника.

**19.** Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, ... прилежащим сторонам.

**20.** Теорема Фалеса обобщенная: параллельные прямые отсекают на сторонах угла ... отрезки.

**21.** Касательная ... радиусу, проведенному в точку ... .

**22.** Вписанный угол равен ... соответствующего центрального угла.

**23.** Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, ... .

**24.** Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — ... .

**25.** Угол между пересекающимися хордами равен ... градусных мер дуг, одна из которых заключена внутри данного угла, а другая — внутри ему вертикального.

**26.** Угол между секущими, выходящими из точки вне окружности, равен ... градусных мер дуг, заключенных внутри угла.

**27.** Произведения отрезков пересекающихся хорд ... .

## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**28.** Угол между хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен ... градусной меры дуги, заключенной внутри угла.

**29.** Для касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, квадрат отрезка касательной равен произведению большего отрезка секущей на его … часть.

**30.** Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна ….

**31.** Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный … .

**32.** Биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно … .

**33.** Биссектрисы противоположных углов параллелограмма … .

**34.** Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу при соседней … .

**35.** Середины сторон четырехугольника являются вершинами … .

**36.** Площадь трапеции равна произведению средней линии на …, т. е. $S_{тр} = mh$.

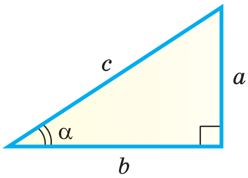
**37.** Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника: треугольники, прилежащие к боковым сторонам …, а прилежащие к основаниям — … .

**38.** Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на части, равные полусумме и … оснований.

**39.** Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной … .

**40.** Площади треугольников с общей высотой относятся как соответствующие … .

# 9 класс




$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

| | 30° | 60° | 45° |
|---|---|---|---|
| sin α | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| cos α | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| tg α | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | 1 |
| ctg α | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 |

**Основное тригонометрическое тождество**

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

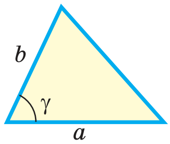
$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  $\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

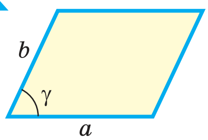
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin 150° = \sin 30°$

$\cos 150° = -\cos 30°$




$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$



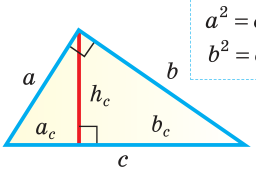

$S_п = ab\sin\gamma$

**среднее геометрическое**

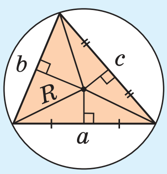
$h_c^2 = a_c \cdot b_c$

$a^2 = c \cdot a_c$

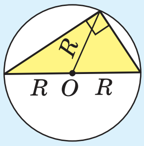
$b^2 = c \cdot b_c$




***Описанная***

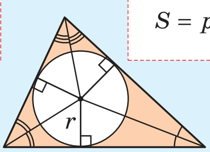



$S = \frac{abc}{4R}$

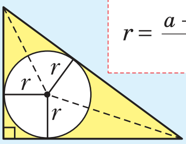



$R = \frac{c}{2}$

***Вписанная***

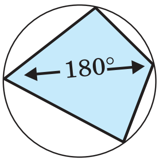


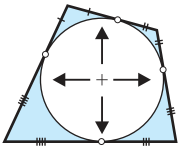

$S = pr$




$r = \frac{a + b - c}{2}$

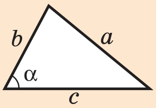
**Свойства?признаки**



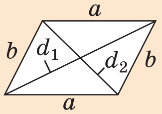



**Теорема косинусов**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$




1. $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
2. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$



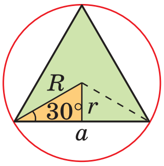

3. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$
4. $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**Формула Герона**

**Теорема синусов**

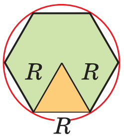
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

***Правильные***




$a = R\sqrt{3}$

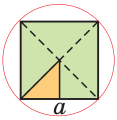
$r = \frac{R}{2}$




$a = R$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$




$r = \frac{a}{2}$

$C = 2\pi R$
*длина окружности*

$S = \pi R^2$
*площадь круга*

## Дополните базу знаний по 9-му классу, произнеся вслух пропущенные фрагменты

**1.** Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинусом — отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенсом — отношение противолежащего катета к прилежащему, котангенсом — отношение прилежащего катета к ... .

**2.** $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \ldots$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$;

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60° = \ldots$, $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \ldots$ .

**3.** Формулы для нахождения значений тригонометрических функций тупого угла:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \ldots$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \ldots$ .

**4.** Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла, косинус тупого угла равен косинусу смежного с ним острого угла, взятого со знаком ... .

**5.** Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \ldots$ .

**6.** Формулы, выражающие тангенс и котангенс угла:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\ldots}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\ldots}{\sin\alpha}.$$

**7.** Площадь треугольника и площадь параллелограмма можно найти по формулам:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab \ldots, \qquad S_{\text{пар}} = ab \ldots .$$

**8.** Высота — есть среднее пропорциональное между ... катетов на гипотенузу:

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}.$$

Катет — есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на ...:

$$a = \sqrt{c \cdot a_c}, \qquad b = \sqrt{\ldots}.$$

**9.** Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения ..., проведенных к его сторонам.

**10.** Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит в точке пересечения его … .

**11.** Площадь треугольника (описанного многоугольника) можно найти по формуле $S = pr$, где $r$ — радиус … окружности, $p$ — полупериметр.

**12.** Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на …, а радиус равен половине … .

**13.** Радиус окружности, вписанной в … треугольник, находится по формуле

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

**14.** У четырехугольника, вписанного в окружность, сумма его противоположных углов равна … . И обратно, если … .

**15.** У четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных … равны между собой. И обратно, если … .

**16.** Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны … . Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

**17.** Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на … между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

**18.** Площадь треугольника можно найти по формуле … :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}.$$

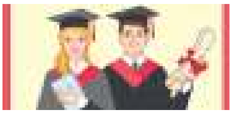
**19.** В правильном (равностороннем) треугольнике сторона $a$, радиус $R$ описанной окружности, радиус $r$ вписанной окружности, высота $h$ и площадь $S$ связаны формулами:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \ldots, \quad a = R\sqrt{3}, \quad r = \frac{1}{2}R.$$

**20.** В правильном … сторона $a$ равна радиусу $R$ описанной окружности.

**21.** Длина окружности радиуса $R$ находится по формуле $C = \ldots$ .

**22.** Площадь круга радиуса $R$ находится по формуле $S = \ldots$ .



## ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

**23.** В правильном треугольнике сторона $a$, радиус $R$ описанной окружности, радиус $r$ вписанной окружности связаны формулами:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\dots}.$$

**24.** Площадь ... можно найти по формуле

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

**25.** Косинус угла ... со сторонами $a$, $b$ и $c$ можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

**26.** Сумма квадратов диагоналей ... равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

# Ответы

## Глава I

**4.** д) 1; е) 1.

**7.** а) $\alpha = 58^\circ$, $\beta = 32^\circ$; б) $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 52^\circ$; в) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 67^\circ$.

**8.** а) $\sin A = \frac{4}{5}$; б) $\cos C = \frac{3}{5}$; в) $\operatorname{tg}\angle CBH = \frac{3}{4}$;
г) $AK = 9{,}6$ см; $\sin\angle ABK = 0{,}96$.

**9.** $\frac{5}{13}$.

**12.** $\frac{1}{2}$ и $60^\circ$.

**13.** а) 7,5; б) 1,5; в) 5.

**14.** 32 см$^2$.

**15.** 20 см$^2$.

**16.** 3,75.

**17*.** $2-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$.

**19*.** Указания. а) Используйте свойство: синус и косинус острого угла меньше 1; б) используйте определения $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ и неравенство треугольника.

**20*.** а) 192 см$^2$; б) 75 см$^2$.

**21*.** а) Указание. $\cos A = \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB}$; б) 8; в) 36.

**22.** а) $\angle B = 90^\circ - \alpha$; б) $BC = c\sin\alpha$; в) $AC = c\cos\alpha$.

**23.** а) $BC = \frac{4}{\operatorname{tg}\beta}$ или $BC = 4\operatorname{ctg}\beta$; б) $AB = \frac{4}{\sin\beta}$ или $AB = 4\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}$;
в) $S = \frac{8}{\operatorname{tg}\beta}$ или $S = 8\operatorname{ctg}\beta$.

**24.** а) 6,4; б) 13,5; в) 9,4.

**25.** а) $AC = 6$; $BC = 8$; б) $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$; в) $AB = 6$, $AC = 2\sqrt{5}$;
г) $BC = 3$, $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

**26.** а) $x = 6\sqrt{3}$, $S = 36\sqrt{3}$; б) $x = 8$, $S = 32$; в) $x = 3\sqrt{2}$, $S = 18$;
г) $x = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$.

**27.** 90 см$^2$.

**28.** 14 см$^2$.

**29.** 144 см$^2$.

**30*.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

**31*.** а) $S = a^2 \sin\alpha \cos\alpha$; б) $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg}\alpha$.

**32*.** Угол $ABC = 90°$. Указание. Поскольку $\triangle ABM$ равнобедренный (докажите), то $AH = HM = x$. Тогда $MC = AM = 2x$. К $\triangle HBC$ примените свойство биссектрисы треугольника и найдите $\sin C$, затем $\angle C$, $\angle HBC$.

**33*.** $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $h_c = c\sin\alpha\cos\alpha$, $b_c = c\cos^2\alpha$, $a_c = c\sin^2\alpha$.

**35.** а) $\frac{3}{4}$; б) $2\sqrt{2}$.

**37.** а) 0,8; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; б) $\frac{24}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$.

**38.** 8 см.

**39*.** а) $\alpha > \beta$. Указание. Рассмотрите прямоугольные треугольники с общим катетом, равным 1; б) $\alpha < \beta$. Указание. Рассмотрите прямоугольные треугольники с общей гипотенузой, равной 5. Либо воспользуйтесь результатом *ключевой задачи 2* (с. 28).

**40*.** $\operatorname{tg}\alpha > \sin\alpha$. Указание. В прямоугольном треугольнике $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Сравните $\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{b}$, учитывая, что $c$ — гипотенуза, $a$ и $b$ — катеты.

**43*.** $\frac{3}{5}$. Указание. Воспользуйтесь формулой $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ (см. предыдущую задачу) или рассмотрите прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4.

**46.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-0,8$; в) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**47.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

**48.** а) 6 см и 30 см$^2$; б) 4 см и 24 см$^2$.

**49.** а) 0,9848; б) –0,9962; в) –2,1445; г) –1,1918.

**50*.** а) 0,3; б) $1\frac{1}{3}$.

**51*.** а) 1; б) 1; в) –1.

**54.** а) 10; б) 8; в) $75\sqrt{3}$.

**55.** а) 39 см$^2$; б) 80 см$^2$.

**56.** а) 16,8 см$^2$; б) 55 см$^2$.

**57.** а) 26 см; б) 32 см.

**58.** а) 18 см$^2$; б) 8 см.

**61*.** а) 12 см; б) 36 см$^2$.

**62*.** а) $\frac{ab}{2}$; б) $\frac{d_1 d_2}{2}$.

**64.** а) 15; б) 2; в) 8.

**65.** а) 10; б) 10; в) 7.

**66.** 16 см.
**67.** 6.
**68.** 4 см.
**69.** 7,2 см$^2$.
**70*.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
**71*.** 60°.
**73.** 24.
**74.** 48.
**75.** Указание. $\frac{S_{ABO}}{S_{DCO}} = \frac{BO \cdot AO}{CO \cdot DO} = \frac{BO}{DO} \cdot \frac{AO}{CO}$. Далее используйте то, что $\triangle BOC \sim \triangle DOA$.
**76.** а) Указание. $\frac{S_{ABC}}{S_{AMK}} = \frac{9 \cdot (12+8)}{(9+6) \cdot 12}$.
**78.** 27.
**79.** 7,8.
**80.** а) $\frac{KO}{OB} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{MO}{OC} = 1$; в) $\frac{S_{KOC}}{S_{MOB}} = \frac{1}{5}$.
**81.** 10.
**82.** $\frac{1}{16}$.

## Глава II

**86.** а) 5; б) 24; в) $2\sqrt{5}$.
**87.** а) 7; б) 6; в) 8.
**88.** а) 7,2 см; б) 25 см.
**89.** 32 см$^2$.
**90.** а) 6; б) 12; в) 8.
**91.** а) 125°; б) 28°; в) 90°.
**92.** а) 1,5 см; б) $3\frac{1}{3}$ см.
**93.** а) 4 см; б) 2 см. Указание. Используйте *ключевую задачу 3* (с. 62).
**94.** а) 8 см и 4 см; б) $3\sqrt{3}$ см$^2$.
**96.** а) 8 см; б) $\left(8\sqrt{3}-12\right)$ см.
**97.** а) 18 см$^2$; б) 3 см. Указание. Воспользуйтесь формулой $S = pr$.
**98.** 2,5 см.
**99.** а) 3 см; б) 192 см$^2$.
**100.** а) 4 см; б) 12,5 см. Указание. Используйте для задания а) формулу $S = pr$, для задания б) формулу $R = \frac{b^2}{2h_a}$.

**101.** а) 55°; б) 116°.

**103*.** а) 12 см. Указание. Проведите диаметр $BK$ и рассмотрите $\triangle BCK$; б) 10 см. Указание. См. п. а) или воспользуйтесь формулой $R = \frac{ab}{2h_c}$.

**104*.** а) 10; б) 2.

**105*.** 6.

**106*.** 8. Указание. Найдите коэффициент подобия треугольников $MBK$ и $ABC$, для чего проведите высоту $BH$, которая пересекает отрезок $MK$ в точке $N$, и найдите отношение $\frac{BN}{BH}$.

**109*.** 60°.

**110.** а) 6; б) 2,5; в) 4.

**111.** а) 9; б) 5; в) 8,5.

**112.** а) 10 см; б) 15 м; в) 25 дм; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ км.

**113.** а) 24 см$^2$; б) 6 см.

**114.** а) 1 см; б) 2 дм; в) 3 см; г) $\left(4-2\sqrt{2}\right)$ м.

**115.** а) 3; б) 2; в) $2\sqrt{3}-2$; г) 5.

**116.** $6\sqrt{2}$ см.

**117.** 8 см и 15 см. Указание. Смотрите *ключевую задачу 1* (с. 70).

**118.** 60 см и 120 см$^2$.

**119*.** а) 10 см; б) 2 см.

**120*.** 30 см.

**121*.** $2\sqrt{5}$ см.

**122*.** 5 см.

**123*.** а) 12 см$^2$; б) Указание. Из *ключевой задачи 2* (с. 70—71) $S = (r + c)r$. С другой стороны, катеты треугольника равны $m + r$, $n + r$ и $S = \frac{(m+r)(n+r)}{2}$. Отсюда $S = mn$.

**125.** а) 95°; б) 100°; в) 125°.

**126.** а) 80°; б) 108°; в) 104°; г) 80°.

**127.** а) 130°; б) 30°.

**128.** а) 31°; б) 115°.

**129.** а) 136°; б) 26 см.

**131.** 8 см. Указание. Воспользуйтесь свойством: произведения отрезков пересекающих хорд равны между собой.

**132.** а) 48 см$^2$; б) 240 см$^2$.

**133.** а) 32 см$^2$; б) 16 см. Указание. В $\triangle BOC$ проведите высоту $OH$.

**134.** а) 7; б) 8; в) 11.

**135.** а) 24 см; б) 8 см.
**136.** а) 20 см$^2$; б) 6 см.
**137.** 45 см$^2$. Указание. Воспользуйтесь формулой $S = pr$.
**138.** а) 10 см и 15 см; б) 80 см.
**139.** 6 см.
**140.** 124°.
**141.** а) 72 см; б) 12 см.
**142.** 15 см. Указание. Найдите диаметр вписанной окружности, высоту $\triangle MBN$, проведенную к $MN$, и воспользуйтесь подобием треугольников $MBN$ и $ABC$.
**143.** 25 см. Указание. Проведите высоты $BH$ и $CK$, найдите длины отрезков $AK$, $KD$, $CK$, $CD$. Докажите, что $\triangle ACD$ — прямоугольный.
**144*.** а) 6 см; 10 см; 12 см; б) 588 см$^2$.
**145*.** 10 см. Указание. Рассмотрите две параллельные хорды длиной 6 см и 8 см с расстоянием 7 см между ними. Из центра описанной окружности проведите перпендикуляры к этим хордам.
**146*.** $2\sqrt{6}$ см. Указание. Поскольку $AB + CD = BC + AD$, то трапеция описанная, центр $O$ вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис и $r = \frac{S}{p}$. Далее рассмотрите $\triangle AOB$.
**148*.** 60°.
**149.** 3 : 5.
**150.** 28.
**151.** 6.
**152.** а) 20 см$^2$ ; б) 156 см$^2$.
**153.** 2 см.
**155.** 3 см.
**157.** а) 138°; б) 40°.
**158.** 24.
**159.** а) 65°; б) 52°.
**161.** 70°.
**162.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
**166.** а) 1; б) $5\sqrt{2}$.
**167.** 5 см.
**169.** б) 5.
**170.** $2\sqrt{5}$.

## Глава III

**173.** $b = 4\sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{6}$; $\beta = 45°$.

**174.** а) 10,4; б) 8,9; в) 7,3.

**175.** а) 55°; б) 46°; в) 44°.

**176.** а) 4,9; б) 21,7.

**177.** а) 26°; б) 24°.

**178.** 12 см и 16 см.

**179.** а) 105°; б) 8; в) 6.

**180.** 30 см.

**181.** а) 12; б) 5; в) $2\sqrt{3}$.

**182.** а) 9 см; б) 6 см; в) 45°.

**183.** 16 см.

**184.** а) 6. Указание. Найдите $\sin A$ и воспользуйтесь тем, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ или используйте замечание *к ключевой задаче 3* (с. 102); б) 7,8; в) $3\frac{1}{3}$.

**185.** а) 6 см; б) 8 см. Указание. в) Воспользуйтесь формулой $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

**186.** а) 6,25 см; б) 5 см. Указание. Используйте формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

**187.** $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

**188.** $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

**189.** $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ см.

**190.** а) 8 см; б) $10\frac{5}{6}$ см. Указание. Можно найти радиус окружности, описанной около треугольника $ACD$.

**192*.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

**194*.** Указание. Из $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$ выразите $\sin\angle ABM$ и $\sin\angle CBM$ соответственно и докажите, что $\angle ABM > \angle CBM$.

**195*.** Указание. $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, $\sin\alpha \leqslant 1$, $2R\sin\alpha \leqslant 2R$, $a \leqslant 2R$. Также можно воспользоваться тем, что диаметр — наибольшая хорда.

**196.** а) 7; б) 14.

**197.** а) 7,8 см; б) 4,6 см.

**198.** $2\sqrt{5}$ см.

**199.** $3\sqrt{2}$ см.

**200.** а) $2\sqrt{19}$ см; б) $\sqrt{21}$ см.

**201.** 32 см.

**202.** $2\sqrt{19}$ см.

**203.** а) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см; б) $AB = 2$ см, $AC = 4$ см. Указание. Выразите неизвестные стороны треугольника через $x$ и примените теорему косинусов.

**204.** 1 см. Указание. Примите неизвестную сторону за $x$ и примените теорему косинусов к $\triangle ABC$.

**205.** а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{37}$.

**206.** а) 60°; б) 120°.

**207.** а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{5}$.

**208.** а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный.

**209.** а) $6\sqrt{3}$; б) 16.

**210.** а) $\sqrt{14}$ см; б) 4 см.

**211.** а) 8 см и 14 см; б) 16 см и 18 см.

**212.** а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{7{,}5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ см.

**213.** 36 см. Указание. Примените свойство касательных к окружности, проведенных из одной точки, и теорему косинусов к $\triangle ABC$.

**214.** 7 см.

**215.** а) 6 см. Указание. Проведите отрезок $CK$, параллельный $BD$ ($K \in AD$), и рассмотрите $\triangle ACK$; б) 25 см.

**216*.** 18 см.

**217*.** $\sqrt{7}$.

**218*.** $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$.

**220*.** Тупоугольным. Указание. Так как $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, то $ah_a = bh_b$, $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, т. е. стороны треугольника обратно пропорциональны высотам: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$, $a = 20x$, $b = 15x$, $c = 12x$.

**223.** а) 42 см$^2$; б) $8\sqrt{6}$ м$^2$.

**224.** а) 96 см$^2$; б) 72 см$^2$.

**225.** а) 12 см; б) 12 см.

**226.** а) 72 см$^2$; б) 84 см$^2$.

**227.** 24 см$^2$ и 8,125 см.

**228.** а) $c \approx 2{,}5$, $\alpha \approx 53°$, $\beta \approx 97°$; б) $c \approx 1{,}5$, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 107°$; в) $\alpha \approx 70°$, $b \approx 7{,}4$, $c \approx 6{,}5$; г) $\alpha \approx 48°$, $a \approx 7{,}6$, $c \approx 5{,}4$; д) $\alpha \approx 41°$, $\beta \approx 56°$, $\gamma \approx 83°$; е) $\alpha \approx 108°$, $\beta \approx 50°$, $\gamma \approx 22°$.

**229.** $24\sqrt{5}$ см$^2$.

**230*.** а) 2 см; б) 12,5 см.

**231*.** 6. Указание. Соедините центр окружности с противоположной вершиной. Найдите сумму площадей полученных при этом треугольников $\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 15\cdot r\right)$ и площадь данного треугольника по формуле Герона.

**232*.** 7 см, 15 см, 20 см. Указание. Смотрите *ключевую задачу 4* к § 15 (с. 124).

**234.** 8 см$^2$.

**235.** 42.

**237.** $\sqrt{43}$.

**239.** $b=\dfrac{2m_a\sin\gamma_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}$, $c=\dfrac{2m_a\sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}$.

**240.** а) $a=\dfrac{P\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; б) $a=\sqrt{\dfrac{2S\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$.

**241.** а) 6; б) 6.

**244.** а) $d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$; $d_2=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$;

$\sin\varphi=\dfrac{2ab\sin\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

**245.** Указание. Рассмотрите углы со сторонами 60° и 120° и теорему косинусов.

## Глава IV

**246.** 60 см.

**247.** 135°.

**248.** а) 108°; б) 144°; в) 160°.

**249.** 12.

**250.** 14 см.

**251.** 80 см.

**252.** $36\sqrt{3}$ см$^2$.

**253*.** а) 108°, 36°, 36°; б) 36°, 72°, 72°.

**254*.** 45°.

**255*.** а) 75°; б) 0°.

**257.** а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см.

**258.** $R=5$ см, $r=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ см.

**259.** а) 9,7 см; б) 44,8 см.

**260.** $\beta = 36°$; $R = \dfrac{10}{\sin 36°}$; $r = \dfrac{10}{\operatorname{tg} 36°}$.

**261.** а) $a = 2R\sin 20°$; б) $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}10°} = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}10°$.

**262.** 108 см$^2$.

**263*.** г) 22,5°; 67,5°; 90°. д) У к а з а н и е. Проведите диагонали прямоугольника $A_1A_2A_5A_6$ и выясните, какую часть площади прямоугольника и какую часть площади восьмиугольника занимает площадь треугольника $A_1OA_2$, где $O$ — центр многоугольника.

**266.** а) 9 см; б) 4 см.

**267.** а) $24\sqrt{3}$ см$^2$; б) 72 см.

**268.** 180 см$^2$.

**269.** а) 4 см и $2\sqrt{3}$ см.

**271*.** а) $12\sqrt{3} - 18$; б) $3 + \sqrt{3}$.

**272*.** а) $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; б) $3\sqrt{3}r^2$.

**275.** а) 62,8 см; б) 9,42 дм; в) 0,314 м; г) 21,98 км.

**276.** а) 9,6 см; б) 47,8 мм; в) 1 дм; г) 0,2 м.

**277.** а) 150 см; б) 100 см; в) 200 см; г) 40 см.

**278.** а) 15,3 см; б) 5,7 см.

**279.** а) 86°; б) 19°.

**280.** 57°.

**281.** 2,8 см.

**282.** 30°.

**283.** а) На 6,28 см; б) в 4 раза.

**285.** а) 78,5 см$^2$; б) 314 м$^2$; в) 19,625 дм$^2$; г) 3,14 км$^2$.

**286.** а) 1,1 см; б) 10 дм.

**287.** 80 см.

**288.** а) 3,14 см$^2$; б) 13,72 см.

**289.** а) $39\pi$ см$^2$; б) $16\pi$ см$^2$.

**290.** 2 : 1.

**291.** а) $\dfrac{Q}{12}$; б) $\dfrac{Q}{6}$; в) $\dfrac{Q}{3}$; г) $\dfrac{3Q}{4}$.

**292.** а) 80°; б) 70 см$^2$; в) 270 см$^2$.

**293.** $40\pi$ см$^2$.

**294.** а) 1 : 4; б) 3 : 4.

**295** а) $\dfrac{2\pi}{3}$ см$^2$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$ м$^2$.

**296.** а) 12; б) $32\pi$.

**297*.** 59 %.

**298*.** а) $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)R^2$.

**299*.** а) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$; б) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2$.

**300*.** а) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$; б) 8. Указание. Соедините концы радиусов и проведите биссектрису угла сектора, поменяйте желтые и красные сегменты местами.

**301*.** 6 см$^2$.

**302*.** $R^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**303*.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**305.** 30.

**309.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

# СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

**Казаков** Валерий Владимирович

**ГЕОМЕТРИЯ**

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*. Художник *Е. А. Ждановская*. Художественные редакторы *О. Н. Карпович, Е. А. Проволович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 05.06.2019. Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,6 + 0,33 форз. Уч.-изд. л. 13,52 + 0,48 форз. Тираж 116 000 экз. Заказ 349.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

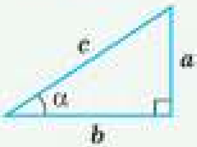
ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

(Название и номер учреждения образования)

| Учебный год | Имя и фамилия учащегося | Состояние учебного пособия при получении | Оценка учащемуся за пользование учебным пособием |
|---|---|---|---|
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |

# Соотношения в прямоугольном треугольнике

## Острый угол




$$\sin\alpha = \frac{a\,(\text{против. к.})}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b\,(\text{прилеж.к.})}{c}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\,(\text{против. к.})}{b\,(\text{прил. к.})}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$



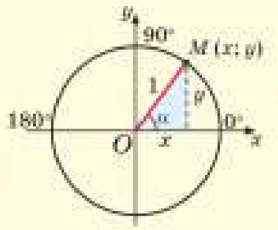
| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

## Тупой угол

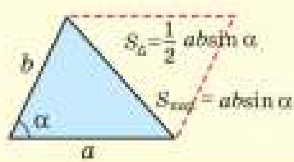


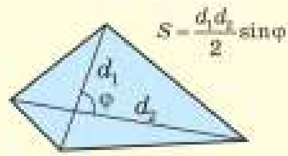

$\sin\alpha = y \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

$\cos\alpha = x \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



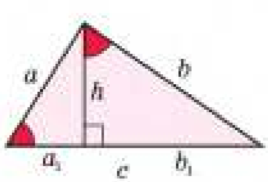

## Задача


Дано: $b$, $\alpha$. Найти: $x$.

Решение.

1. $\cos\alpha = \frac{b}{x}$
2. $b = x\cdot\cos\alpha$
3. $x = \frac{b}{\cos\alpha}$

# Среднее геометрическое




$\frac{a_1}{h} = \frac{h}{b_1}$ (из левого и правого треугольника) $h^2 = a_1 b_1$

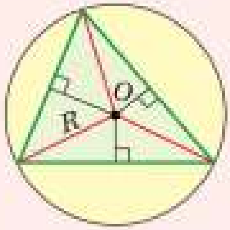
$\frac{a_1}{a} = \frac{a}{c}$ (из левого и большого треугольника) $a^2 = ca_1$

$\frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}$ (из правого и большого треугольника) $b^2 = cb_1$

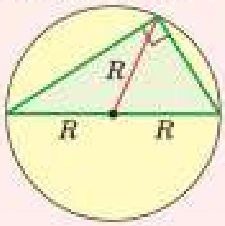
1. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ острого угла.
2. **Значения тр. функций для углов 30°, 60°, 45°.**
3. Решение прямоугольного треугольника.
4. Основное тригонометрическое тождество.
5. Выражение $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
6. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ для $0° \le \alpha \le 180°$.
7. Изменение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$.
8. Формулы для углов $180° - \alpha$.
9. Значения тр. функций для углов 120°, 135°, 150°.
10. **Формула площади треугольника.**
11. Формула площади параллелограмма.
12. Формула площади выпуклого четырехугольника.
13. **Среднее геометрическое в прям. треугольнике.**

# Описанная и вписанная окружности

**1** **Описанная — серединных ⊥-ов**

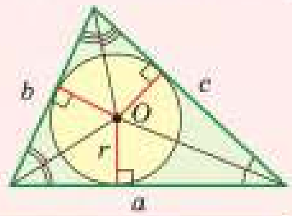



**2** **Прямоугольный**



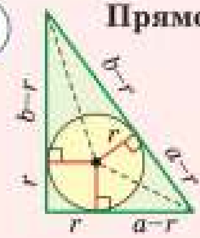

$\boxed{R = \frac{c}{2}}$

**3** **Вписанная — биссектрис**




**4** $\boxed{S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr}$

**5** **Прямоугольный**

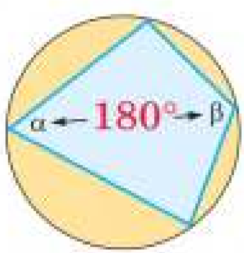



$c = (a - r) + (b - r)$

$\boxed{r = \frac{a + b - c}{2}}$

**6** **Вписанные**

свойство



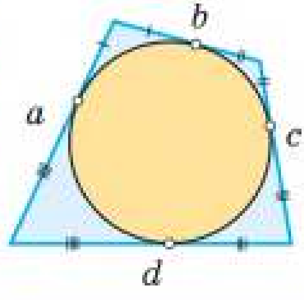

признак

**7**

## ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

**8** **Описанные**

свойство

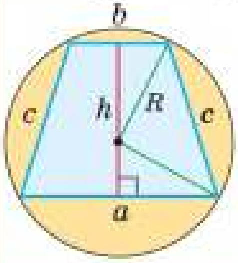



признак

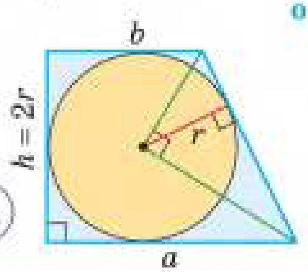
**9**

$\boxed{a + c = b + d}$

**10** **Вписанная трапеция — равнобедренная трапеция**




**11**



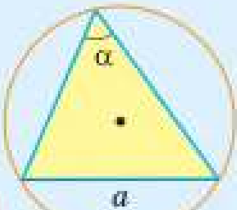

1. Окружность, описанная около треугольника.
2. Окружность, описанная около прям. треугольника.
3. Окружность, вписанная в треугольник.
4. Формула площади $S = pr$.
5. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник.
6. Свойство вписанного 4-ка.
7. Признак вписанного 4-ка.
8. Свойство описанного 4-ка.
9. Признак описанного 4-ка.
10. Свойство вписанной трапеции.
11. Свойство описанной трапеции.

# Теорема синусов и теорема косинусов

## ① Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

**Стороны тр-ка пропорциональны ...**



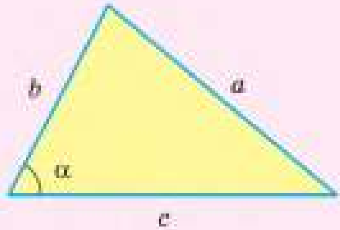

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

② $$R=\frac{abc}{4S}$$

## ③ Теорема косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

**Квадрат любой стороны тр-ка равен ...**




④ **Нахождение косинуса угла по трем сторонам**

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

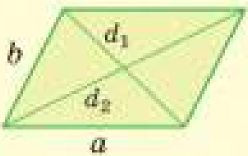
⑤

$b^2+c^2>a^2$ угол α острый

$b^2+c^2=a^2$ угол α прямой

$b^2+c^2<a^2$ угол α тупой

⑥ **Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна ...**




$$d_1^2+d_2^2=2a^2+2b^2$$

⑦ **Формула медианы**

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

## Формула Герона

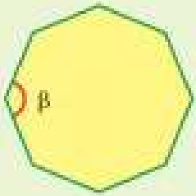
⑧ $$S_\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**1. Теорема синусов.**
2. Формула нахождения $R$ через $S$.
**3. Теорема косинусов.**
4. Нахождение косинуса угла треугольника по трем сторонам.
5. Определение вида треугольника по трем сторонам.
6. Теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.
7. Формула медианы треугольника.
8. Формула Герона.

# Правильные многоугольники

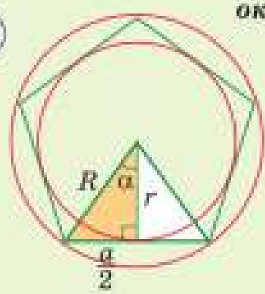
***Можно описать и вписать окружности с общим центром***

**1**




$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

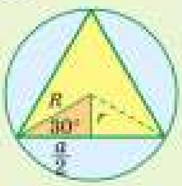
**2**




$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a}{2} = R\sin\alpha \qquad \frac{a}{2} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

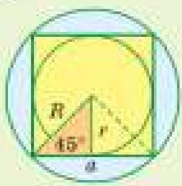
**3**




$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

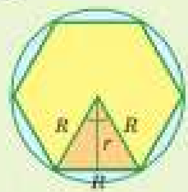
**4**




$$a = R\sqrt{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

**5**




$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**6** **Длина окружности**

$$C = 2\pi R$$

**7** **Площадь круга**

$$S = \pi R^2$$

**8**

$$\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{круга}}}$$

**9**


$\pi \approx 3{,}14159 \ldots$

***Это я знаю и помню прекрасно ...***

1. Правильный многоугольник, его внутренний угол.
2. Описанная и вписанная окружности. Формулы, связывающие $a$ и $R$, $r$.
3. **Правильный треугольник.**
4. Правильный четырехугольник.
5. Правильный шестиугольник.
6. Формула длины окружности.
7. Формула площади круга.
8. **Длина дуги. Площадь сектора.**
9. Площадь сегмента.