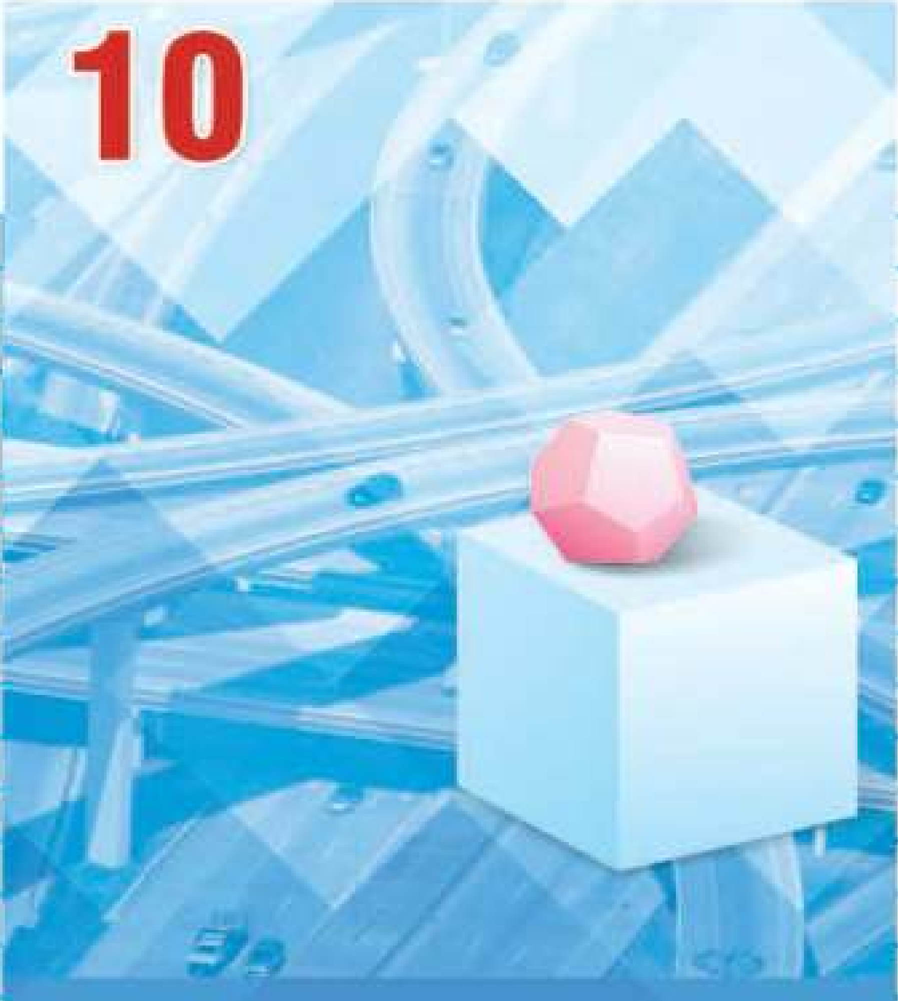
Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова

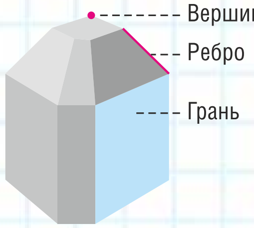
ГЕОМЕТРИЯ

10

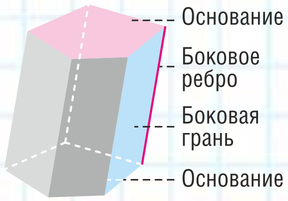


Тела

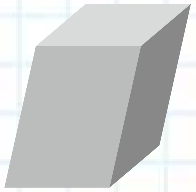
Многогранник



Призма

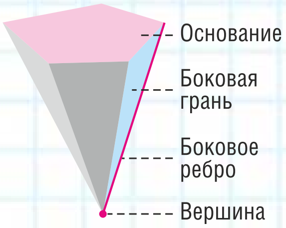


Параллелепипед

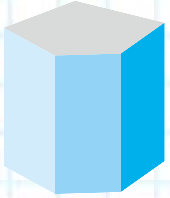


Противоположные грани равны.
Противоположные рёбра равны.
Противоположные грани параллельны.
Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пирамида



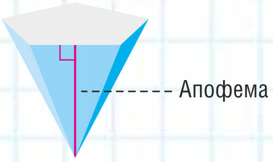
Прямая призма



$S_{бок} = Pl$

P — периметр основания,
l — боковое ребро.

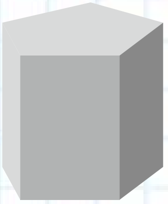
Правильная пирамида



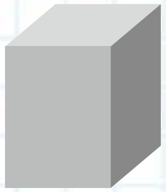
$S_{бок} = pl$

p — полупериметр основания,
l — апофема.

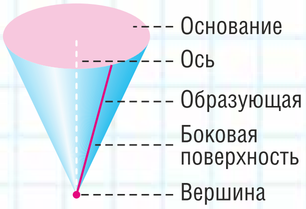
Правильная призма



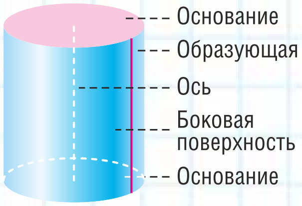
Прямой параллелепипед



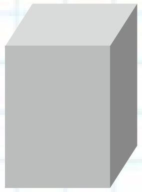
Конус



Цилиндр



Прямоугольный параллелепипед



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

d — диагональ,
a, b, c — измерения.

Прямые в пространстве

Две прямые

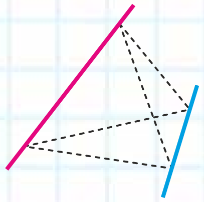
Принадлежат одной плоскости

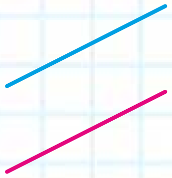
Нет → Скрещивающиеся

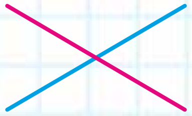
Да → Имеют общую точку

Нет → Параллельные

Да → Пересекающиеся







Прямая и плоскость в пространстве

Прямая и плоскость

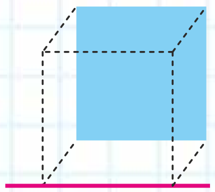
Имеют общую точку

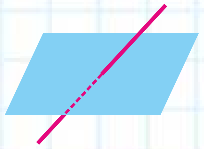
Нет → Параллельные

Да → Общая точка единственная

Нет → Прямая лежит в плоскости

Да → Пересекающиеся





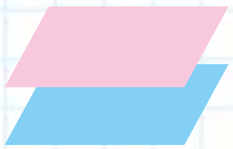
Две плоскости в пространстве

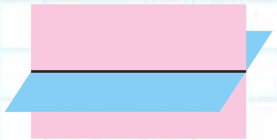
Две плоскости

Имеют общую точку

Нет → Параллельные

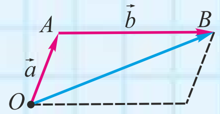
Да → Пересекающиеся





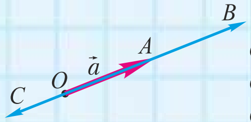
Векторы

Сложение векторов



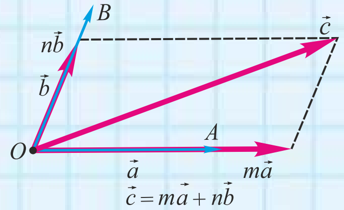
$\vec a = \overrightarrow{OA}$
$\vec b = \overrightarrow{AB}$
$\vec a + \vec b = \overrightarrow{OB}$

Умножение вектора на число



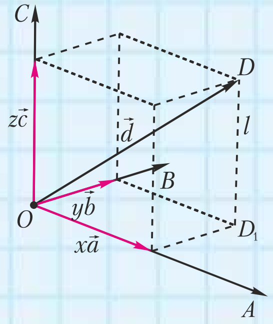
$\overrightarrow{OA} = \vec a$
$\overrightarrow{OB} = k\vec a,\ k > 0$
$\overrightarrow{OC} = l\vec a,\ l < 0$

Выражение любого вектора через два неколлинеарных вектора



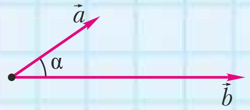
$\vec c = m\vec a + n\vec b$

Выражение любого вектора через три некомпланарных вектора



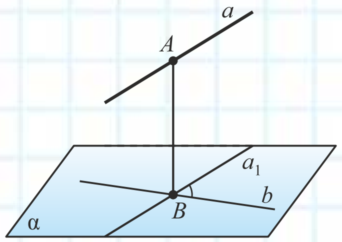
Векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ компланарны только тогда, когда $m\vec a + n\vec b + k\vec c = \vec 0$ і $m^2 + n^2 + k^2 \neq 0$.
Если векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ некомпланарны, то через них однозначно выражается любой вектор $\vec d$:
$$\vec d = x\vec a + y\vec b + z\vec c$$

Скалярное произведение векторов



$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos\alpha$$

Две прямые в пространстве



Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

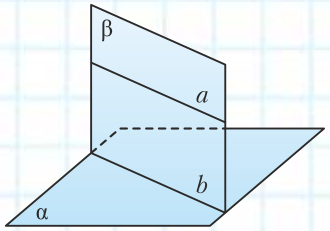
Если $a \dot{-} b$, $a_1 \parallel a$ и $a_1 \cap b = B$, то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b)$.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Если $a \dot{-} b$, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$ и $AB \perp b$, то $d(a, b) = AB$.

Прямая и плоскость в пространстве

Параллельность прямой и плоскости



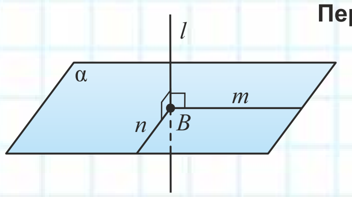
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Если $a \not\subset \alpha$, $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

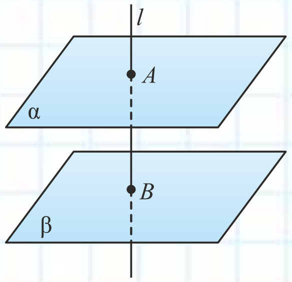
Если $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$ и $\beta \cap \alpha = b$, то $b \parallel a$.

Перпендикулярность прямой и плоскости



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Если $l \perp m$, $m \subset \alpha$, $l \perp n$, $n \subset \alpha$ и $m \cap n \neq \varnothing$, то $l \perp \alpha$.



Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

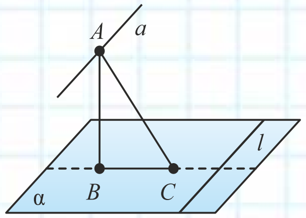
Если $l \perp \alpha$ и $\alpha \parallel \beta$, то $l \perp \beta$.

Если одной прямой перпендикулярны две плоскости, то они параллельны.

Если $\alpha \perp l$ и $\beta \perp l$, то $\alpha \parallel \beta$.

Расстоянием между параллельными плоскостями называется длина перпендикуляра, проведённого из некоторой точки одной плоскости к другой плоскости.

Если $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$ и $AB \perp \beta$, то $d(\alpha, \beta) = AB$.



Прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость тогда и только тогда, когда она перпендикулярна самой наклонной.

Если $BC = \text{Пр}_\alpha AC$ и $l \subset \alpha$, то $l \perp BC$ равносильно $l \perp AC$.

Углом между прямой и плоскостью, которая пересекает эту прямую и не перпендикулярна ей, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

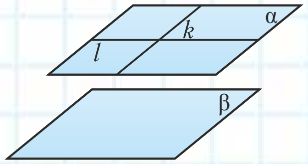
Если $\text{Пр}_\alpha AC = BC$ и $AC \not\perp \alpha$, то $\angle(AC, \alpha) = \angle ACB$.

Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется длина перпендикуляра, проведённого к плоскости из некоторой точки прямой.

Если $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$ и $B \in \alpha$, то $d(a, \alpha) = AB$.

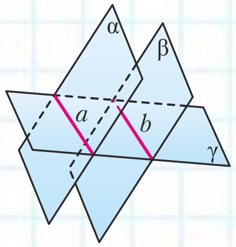
Две плоскости в пространстве

Параллельность плоскостей



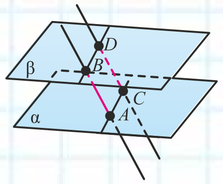
Если плоскость проходит через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Если $k \cap l \neq \varnothing$, $k \subset \alpha$ и $k \parallel \beta$, $l \subset \alpha$ и $l \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.



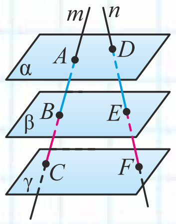
Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны друг другу.

Если $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$ и $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$.



Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны друг другу.

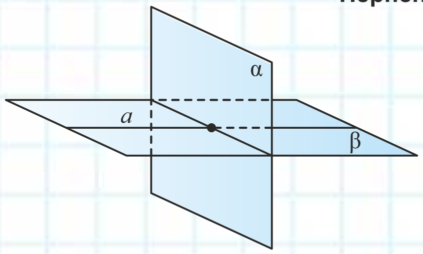
Если $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$ и $AB \parallel CD$, то $AB = CD$.



Отрезки произвольных прямых, заключённые между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.

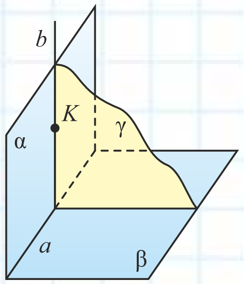
Если $l \parallel \beta \parallel \gamma$, $A \in \alpha$, $D \in \alpha$, $B \in \beta$, $E \in \beta$, $AB \cap \gamma = C$ и $DE \cap \gamma = F$, то $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Перпендикулярность плоскостей



Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Если $a \subset \beta$ и $a \perp \alpha$, то $\beta \perp \alpha$.



Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них.

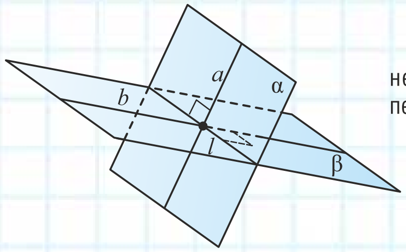
Если $\alpha \cap \beta = a$ и $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$.

Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна этой плоскости.

Если $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ и $\alpha \cap \beta = a$, то $a \perp \gamma$.

Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

Если $\alpha \perp \beta$, $K \in \alpha$, $K \in b$ и $b \perp \beta$, то $b \subset \alpha$.



Углом между пересекающимися плоскостями называется не больший 90° угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в каждой плоскости.

Если $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $a \perp l$, $b \subset \beta$ и $b \perp l$, то $\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$.

Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса учреждений
общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь*

Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2020

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Л27

Перевод с белорусского *Л. А. Романович*

Р е ц е н з е н т ы: кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук, доцент *С. Г. Кононов*); учитель математики высшей квалификационной категории государственного учреждения образования «Гимназия № 25 г. Минска» *С. А. Скарюкина*

ISBN 978-985-599-210-4

УВАЖАЕМЫЕ ДЕСЯТИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы будете изучать геометрию пространства — стереометрию. Если в планиметрии основными объектами изучения являются точка, прямая и те фигуры, все точки которых принадлежат одной плоскости, то в стереометрии к основным объектам изучения добавляется плоскость и изучаются фигуры, имеющие три измерения, которые принято называть телами. К основным телам относятся призма, пирамида, цилиндр, конус, шар.

Стереометрия, как и планиметрия, возникла в Древнем Египте и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. При возведении различных сооружений необходимо было рассчитать, сколько материала потребуется, уметь вычислять расстояние между точками в пространстве и величины углов между прямыми и плоскостями, знать свойства геометрических тел. Египетские пирамиды, построенные за 2–3 тыс. лет до н. э., впечатляют точностью метрических соотношений, которые свидетельствуют о том, что их строители имели значительные знания по стереометрии.

Стереометрию можно рассматривать как обобщение планиметрии, поэтому на любой плоскости в пространстве выполняются все аксиомы и теоремы планиметрии, остаются такими же и определения.

Чтобы облегчить восприятие того или иного утверждения стереометрии и сделать его более наглядным, нужно уметь содержание утверждения проиллюстрировать рисунком. Изображение планиметрической фигуры равно или подобно ей самой. Для стереометрической фигуры и её плоского изображения такое невозможно. Поэтому необходимо научиться строить плоские изображения геометрических фигур такими, чтобы они вызывали в нашем сознании пространственные образы этих фигур, а также «читать» плоские изображения пространственных фигур. В этом нам помогут правила, принятые для таких изображений, в частности штриховое изображение линий, которые не видны при восприятии реальной пространственной фигуры.

Математика, особенно геометрия, в определённом смысле является самым лёгким учебным предметом, так как в ней не нужно заниматься механическим заучиванием содержания. Достаточно понять то, что заучивается, и тогда оно само запоминается. Вместе с тем математика — мощное средство усовершенствования умственных способностей. Она представляет возможность научиться анализировать, находить ошибки в рассуждениях других. Поэтому можно согласиться с высказыванием итальянского учёного Галилео Галилея (1564–1642): «Нужно признать, что попытка трактовать реальные проблемы без геометрии есть попытка сделать невозможное».

Учебное пособие состоит из четырёх разделов: «Введение в стереометрию»; «Параллельность прямых и плоскостей»; «Перпендикулярность прямых и плоскостей»; «Координаты и векторы в пространстве» (для учащихся, изучающих математику на повышенном уровне).

Каждый раздел открывается иллюстрированной страницей с описанием его основного содержания. Параграф начинается с обсуждения вопроса, обозначенного в его названии. Наиболее важные новые понятия, правила и утверждения выделены **полужирным шрифтом**; понятия и факты, на которые необходимо обратить внимание, — *курсивом*. Смысловые блоки в параграфе отмечены разноцветными буквами: **А)**, **Б)**, **В)**, **Г)**.

В учебном пособии вы встретите следующие условные обозначения:

— основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;

— важные правила и утверждения;

— вопросы и задания для самоконтроля;

— задания для работы в классе и дома;

— материал для углубления математических знаний;

— дополнительный материал для самостоятельного ознакомления и изучения;

— учебный материал повышенного уровня.

Для проверки усвоения содержания пояснительного текста, формирования умений по его применению в конце параграфов предусмотрены контрольные вопросы, практическая часть (упражнения, задачи). Если вы не смогли ответить на тот или иной вопрос, необходимо обратиться к пояснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос либо, если потребуется, использовать дополнительную литературу или интернет. Практическая часть включает сгруппированные по смысловым блокам упражнения и задачи с учётом их назначения (упражнения на готовых чертежах; упражнения и задачи для усвоения и закрепления новых понятий и теорем; задачи, решение которых требует использования как новых знаний, так и ранее полученных; упражнения и задачи с практическим содержанием).

При выполнении заданий из практической части вы научитесь сопоставлять, находить общее и частное, делать правильные выводы, применять полученные знания на практике.

Дополнительные материалы для учебного пособия «Геометрия-10» можно найти на сайте *http://e-vedy.adu.by*, раздел «Математика», курс «Математика. 10 кл.».

Желаем вам успехов!

Авторы

«Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения»
(Н. И. Лобачевский).

РАЗДЕЛ 1 ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

В этом разделе вы будете изучать:

- простейшие пространственные фигуры;
- аксиомы стереометрии и следствия из них;
- построение сечений многогранников.

§ 1. Пространственные фигуры

А) Геометрические фигуры делятся на **плоские** и **пространственные** в зависимости от того, все или не все точки фигуры принадлежат одной плоскости. Плоские фигуры вы изучали в предыдущих классах, там познакомились и с некоторыми пространственными фигурами — призмой (рис. 1), пирамидой (рис. 2), цилиндром (рис. 3), конусом (рис. 4), шаром (рис. 5). Раздел геометрии, в котором изучаются плоские фигуры, называется *планиметрией*, а раздел, в котором изучаются пространственные фигуры, — *стереометрией*.

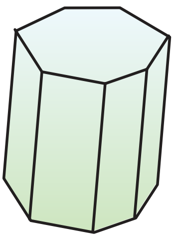


Рис. 1

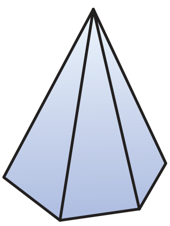


Рис. 2

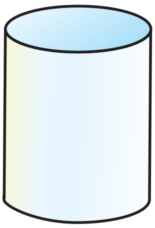


Рис. 3

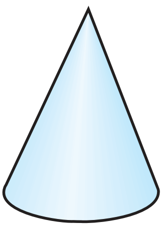


Рис. 4

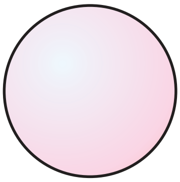


Рис. 5

Ту или иную пространственную фигуру приходится изображать на плоскости листа в тетради или на плоскости доски. Соответствующий рисунок выполняют таким образом, чтобы он создавал то же впечатление, что и сама изображаемая фигура. При этом невидимые линии делают *штриховыми*.

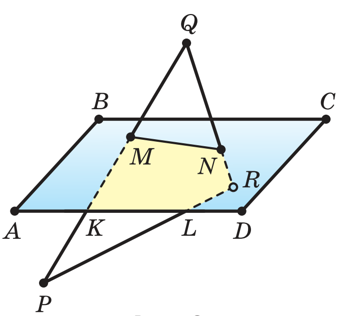


Рис. 6

На рисунке 6 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник PQR, которые пересекаются по отрезку MN. Часть QMN треугольника PQR находится над параллелограммом $ABCD$, часть $PMNR$ — под ним. При этом часть PKL четырёхугольника $PMNR$ видна, а часть $KMNRL$ — не видна. Обращаем внимание на то, что точки K и L треугольника PQR не принадлежат параллелограмму $ABCD$, а значит, и его стороне AD.

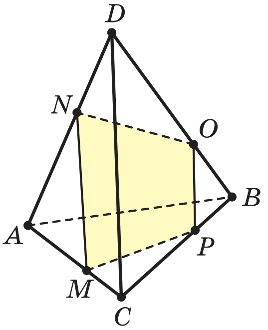


Рис. 7

На рисунке 7 изображена треугольная пирамида $DABC$, которую пересекает плоскость по четырёхугольнику $MNOP$. При этом у пирамиды невидимым является ребро AB, а у сечения $MNOP$ — его стороны NO и MP.

Представление пространственной фигуры на рисунке называют **изображением фигуры**.

Важным классом пространственных фигур являются **многогранники**, под которыми понимают тела, ограниченные плоскими многоугольниками.

Эти многоугольники называются **гранями** многогранника, их вершины — **вершинами** многогранника, а стороны — **рёбрами** многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника (рис. 8).

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. На рисунке 9 изображён невыпуклый многогранник.

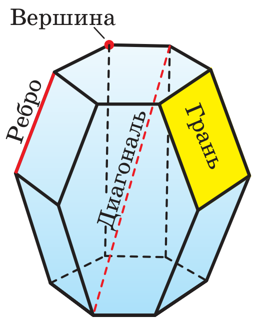


Рис. 8

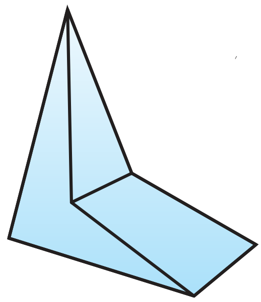


Рис. 9

Б) Мы будем изучать простейшие выпуклые многогранники — призмы и пирамиды.

Призмой называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы называются её **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями**. Рёбра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами** (рис. 10).

В зависимости от количества сторон основания призмы отличают **треугольную**, **четырёхугольную**, **пятиугольную** и т. д. призмы. На рисунке 11 изображена шестиугольная призма.

Совокупность боковых граней призмы образуют **боковую поверхность**.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей боковых граней.

Призмы разделяются на *прямые* и *наклонные*.

Прямая призма — призма, боковые грани которой являются прямоугольниками. Обычно, изображая прямую призму, её боковые рёбра проводят вертикально (рис. 12).

Призма *прямая*, если боковые рёбра перпендикулярны рёбрам основания призмы.

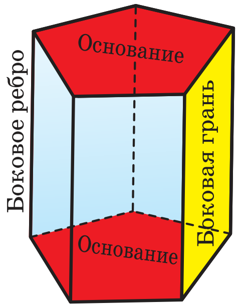


Рис. 10

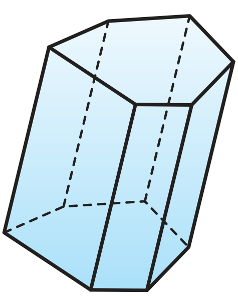


Рис. 11

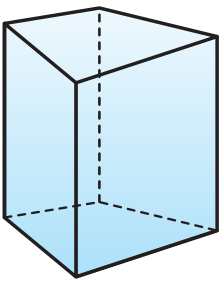


Рис. 12

Призма *наклонная*, если боковые рёбра не перпендикулярны рёбрам основания призмы.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания являются правильными многоугольниками.

Призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом.**

Параллелепипед, как и призма, может быть и прямым (рис. 13), и наклонным (рис. 14).

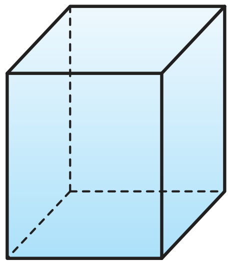


Рис. 13

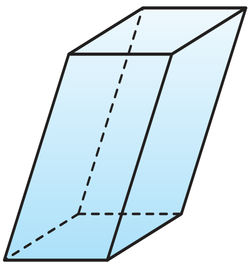


Рис. 14

Прямой параллелепипед, основания которого являются прямоугольниками, называется **прямоугольным параллелепипедом.**

Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется **кубом.**

Все грани куба — равные друг другу квадраты.

В) Пирамидой называется многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные являются треугольниками с общей вершиной.

На рисунке 15 изображена пирамида $TABCDE$. Многоугольник $ABCDE$ называют **основанием пирамиды**, треугольные грани ATB, BTC, CTD, DTE, ETA — **боковыми гранями**, а общую вершину T боковых граней — **вершиной пирамиды.** Обычно в записи обозначения пирамиды первая буква соответствует её вершине.

В зависимости от количества сторон основания пирамиды отличают **треугольную, четырёхугольную, пятиугольную** и т. д. пирамиды. Пирамида на рисунке 15 — пятиугольная, а на рисунке 16 — треугольная.

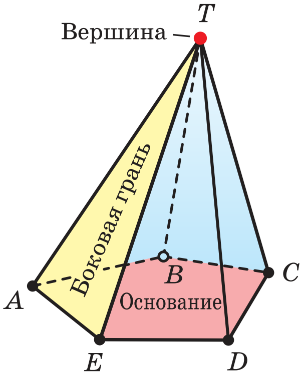


Рис. 15

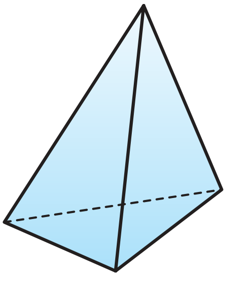


Рис. 16

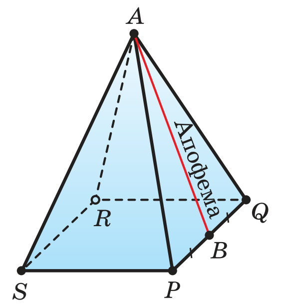


Рис. 17

Пирамида, основание которой — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий её вершину с центром основания, перпендикулярен любой прямой, проведённой в плоскости основания через этот центр, называется **правильной**.

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины пирамиды, называется **апофемой** пирамиды.

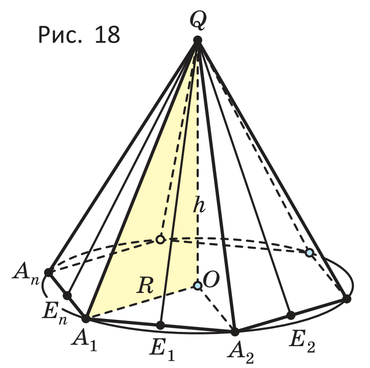
На рисунке 17 изображена правильная четырёхугольная пирамида $APQRS$, отрезок AB — одна из её апофем.

Т е о р е м а 1. У правильной пирамиды равны её: а) боковые грани; б) апофемы.

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида и точка O — центр её основания (рис. 18).

а) Поскольку треугольники QOA_1 и QOA_2 оба прямоугольные, имеют общий катет QO и равные катеты OA_1 и OA_2, то они равны. Поэтому равны и их гипотенузы QA_1 и QA_2. Аналогично доказывается, что другие боковые рёбра также равны QA_1.

Рис. 18



Боковые грани пирамиды — равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами. Основания этих треугольников также равны друг другу как стороны правильного многоугольника, который лежит в основании пирамиды. Поэтому боковые грани равны между собой по трём сторонам.

б) Поскольку боковые грани пирамиды $QA_1A_2\ldots A_n$ равны между собой, то равны и их высоты, проведённые из вершины Q, это значит, что все апофемы пирамиды $QA_1A_2...A_n$ равны.

Т е о р е м а 2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра её основания и апофемы.

Доказательство. Пусть $QA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида (см. рис. 18). Площадь S её боковой поверхности состоит из площадей боковых граней, которые являются равными друг другу равнобедренными треугольниками с равными апофемами QE_1, QE_2, ..., QE_n. Поэтому

$$S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot QE_2 + ... +$$

$$+ \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2}QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) =$$

$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a,$$

где p — полупериметр основания пирамиды, a — апофема пирамиды.

Г) Ещё один класс пространственных фигур составляют тела вращения, к которым относятся цилиндр, конус, шар.

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 19). При этом вращении одна сторона прямоугольника остаётся неподвижной, её называют *осью цилиндра*. Сторона, противолежащая оси, образует поверхность, которую называют боковой поверхностью цилиндра, а саму сторону — *образующей цилиндра*. Ещё две стороны прямоугольника при вращении образуют поверхности, которые являются равными кругами, эти круги называют *основаниями цилиндра* (рис. 20). На рисунке 21 дано изображение цилиндра.

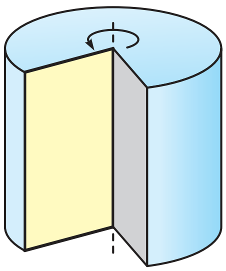


Рис. 19

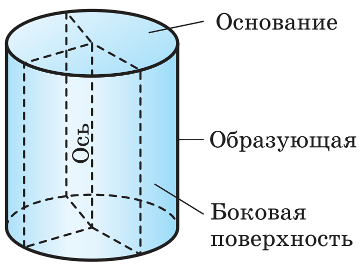


Рис. 20

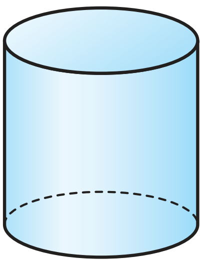


Рис. 21

Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 22), который называют *осью конуса*. Второй катет описывает круг, который называют *основанием конуса*; неподвижную вершину треугольника, которая не принадлежит основанию, называют *вершиной конуса*. Гипотенуза при вращении образует поверхность, которую называют *боковой поверхностью конуса*, саму гипотенузу называют *образующей конуса* (рис. 23). На рисунке 24 дано изображение конуса.

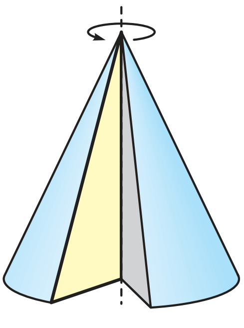


Рис. 22

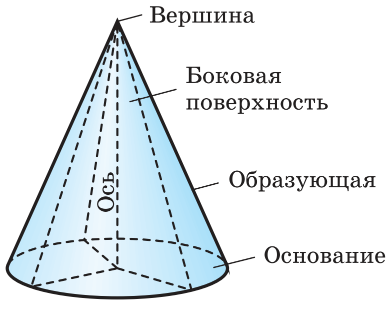


Рис. 23

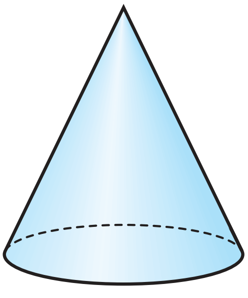


Рис. 24

Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг своего диаметра (рис. 25). При этом вращении окружность описывает поверхность, которую называют *сферой* (рис. 26). На рисунке 27 дано изображение шара.

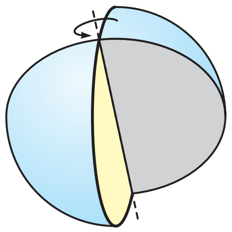


Рис. 25

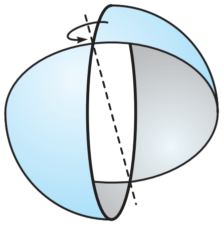


Рис. 26

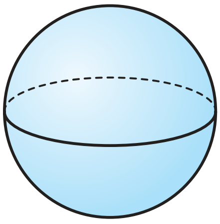


Рис. 27

?

1. Какие геометрические фигуры называются плоскими; пространственными?
2. Какое тело называют многогранником?
3. Что называют гранями многогранника; рёбрами многогранника; вершинами многогранника?
4. Какой многогранник называется призмой?
5. Что называют основаниями призмы; боковыми гранями призмы; боковыми рёбрами призмы?
6. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?
7. Какая призма называется правильной призмой?
8. Какая призма называется параллелепипедом; прямым параллелепипедом?
9. Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным параллелепипедом?
10. Какие рёбра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?
11. Какой многогранник называется пирамидой?
12. Что называют основанием пирамиды; боковыми гранями пирамиды; вершиной пирамиды?
13. Какая пирамида называется правильной пирамидой?
14. Какой отрезок называется апофемой правильной пирамиды?
15. Сформулируйте свойство боковых рёбер правильной пирамиды; боковых граней правильной пирамиды; апофем правильной пирамиды.
16. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
17. Какое тело называется цилиндром?
18. Какое тело называется конусом?
19. Какое тело называется шаром?
20. Верно ли, что:
а) количество вершин любой призмы — число чётное;
б) количество рёбер любой призмы — число, кратное трём?
21. Найдите количество диагоналей семиугольной призмы.
22. Существует ли пирамида, которая имеет 11 рёбер? Обоснуйте свой ответ.

Задача 1. Найдите площадь боковой поверхности прямой четырёхугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольник с измерениями 4 см и 5 см, а боковое ребро равно 6 см.

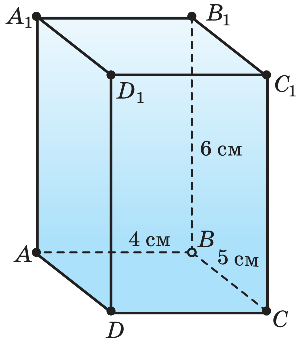


Рис. 28

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма; $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $BB_1 = 6$ см (рис. 28).

$ABB_1A_1, CBB_1C_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$ — прямоугольники ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма), поэтому $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ см.

$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 = 24$ (см^2), так как $AB = CD$, $BB_1 = CC_1$.

$S_{CBB_1C_1} = CB \cdot BB_1 = 5 \cdot 6 = 30$ (см^2), так как $AD = BC$, $AA_1 = CC_1$.

Значит, $S_{бок} = S_{ABB_1A_1} + S_{DCC_1D_1} + S_{CBB_1C_1} + S_{ADD_1A_1} = 2 \cdot \left(S_{ABB_1A_1} + S_{CBB_1C_1}\right) =$

$$= 2 \cdot (24 + 30) = 108 \text{ (см}^2).$$

Ответ: 108 см^2.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра её основания и бокового ребра. Докажите это самостоятельно.

Задача 2. Боковая поверхность правильной четырёхугольной пирамиды равна 240 см^2, а её апофема — 12 см. Найдите площадь основания пирамиды.

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида; $S_{бок} = 240$ см^2; SH — апофема; $SH = 12$ см (рис. 29).

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH$, так как пирамида правильная, поэтому

$$240 = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot 12. \text{ Тогда } P_{ABCD} = 2 \cdot 240 : 12 = 40 \text{ (см)},$$

$$AB = 40 : 4 = 10 \text{ (см), так как } ABCD \text{ — квадрат.}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100 \text{ (см}^2).$$

Ответ: 100 см^2.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей её боковых граней.

Задача 3. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 30 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 24 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, SH — апофема, $SH = 30$ см, O — центр основания $ABCD$, $SO = 24$ см (см. рис. 29).

$OH = \sqrt{SH^2 - SO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ (см), так как $SO \perp OH$, $AB = 2 \cdot OH = 2 \cdot 18 = 36$ (см), так как $ABCD$ — квадрат, $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 36 = 144$ (см).

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 30 = 2160 \text{ (см}^2\text{)},$$

так как пирамида правильная.

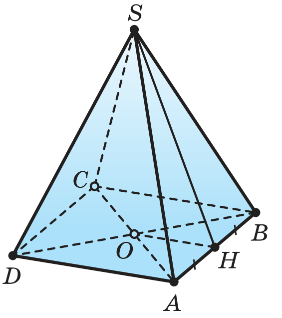


Рис. 29

О т в е т: 2160 см^2.

В правильной пирамиде отрезок, соединяющий центр основания пирамиды с основанием апофемы пирамиды, — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды. Докажите это самостоятельно.

Задача 4. Сторона основания AB правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна $6\sqrt{3}$ см, а отрезок, который соединяет вершину M пирамиды с центром O основания, — 8 см. Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $AB = 6\sqrt{3}$ см, O — центр основания ABC, $MO = 8$ см (рис. 30).

а) $OA = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 6$ (см), так как OA — радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC.

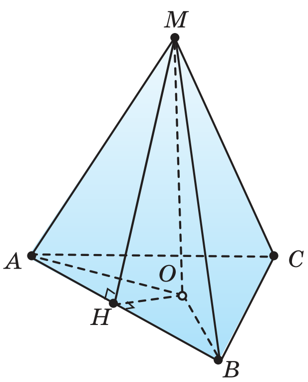


Рис. 30

$MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), так как $MO \perp OA$.

$MA = MB = MC = 10$ (см), так как $MABC$ — правильная треугольная пирамида.

б) Пусть MH — апофема. Тогда H — середина AB (в $\triangle\ AMB$ $MA = MB$ и $MH \perp AB$).

$OH \perp AB$ (медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника OAB), поэтому OH — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности и $OH = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$ (см), так как $MO \perp OH$.

$$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^2}{4} = 27\sqrt{3}$ (см^2), так как $\triangle ABC$ — правильный.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

в) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{ABC} = 9\sqrt{219} + 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3)$ (см^2).

О т в е т: а) $MA = MB = MC = 10$ см; б) $S_{\text{бок}} = 9\sqrt{219}$ см^2;

в) $S_{\text{полн}} = 9\sqrt{3}\left(\sqrt{73} + 3\right)$ см^2.

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.

1. Ответьте, какая — плоская или пространственная — ломаная изображена на рисунке:

а) 31; в) 33; д) 35;
б) 32; г) 34; е) 36.

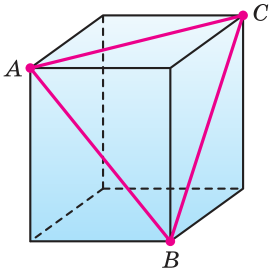


Рис. 31

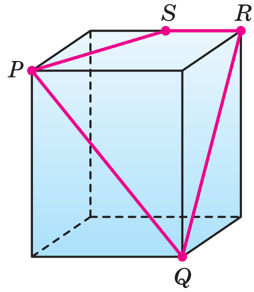


Рис. 32

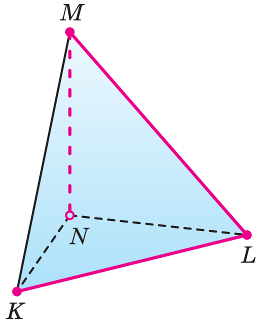


Рис. 33

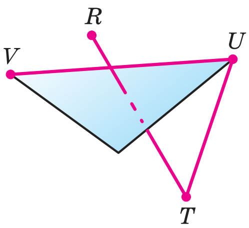


Рис. 34

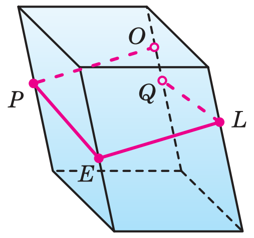


Рис. 35

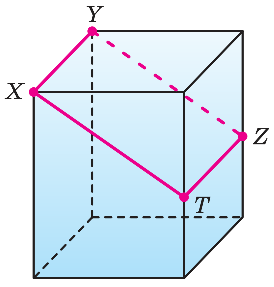


Рис. 36

2. Определите, является ли многогранником тело, изображённое на рисунке:
а) 37; б) 38; в) 39; г) 40; д) 41; е) 42.

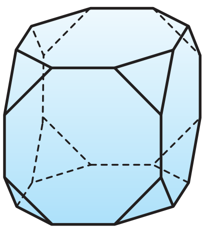


Рис. 37

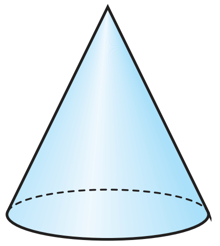


Рис. 38

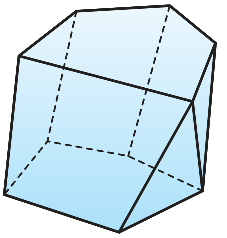


Рис. 39

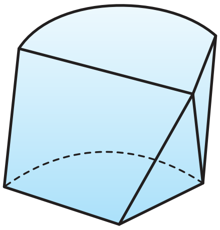


Рис. 40

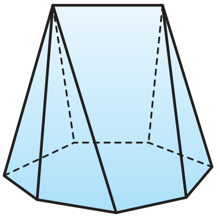


Рис. 41

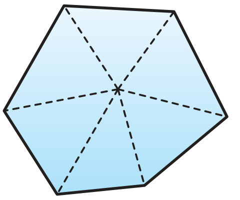


Рис. 42

3. На рисунке 43 изображён многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Назовите:

а) грани с общим ребром CD;
б) грани с общим ребром DD_1;
в) грани с общей вершиной E;
г) грани с общей вершиной C_1;
д) рёбра с общей вершиной A;
е) рёбра с общей вершиной F_1.

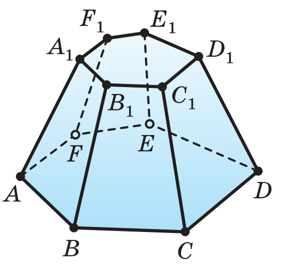


Рис. 43

4. На рисунке 44 изображена пятиугольная призма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ и её диагональ UX_1. Назовите другие диагонали этого многогранника.

5. На рисунке 45 изображена четырёхугольная призма. Назовите:
а) основания призмы;
б) боковые грани с ребром EE_1;
в) грани с ребром DE.

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите боковую и полную поверхности призмы.

7. Сторона основания правильной n-угольной призмы равна a, а её боковое ребро — h. Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что:
а) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$;
б) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$;
в) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$.

8. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 3 см и 5 см и углом между ними в $120°$, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите полную поверхность призмы.

9. Основанием прямого параллелепипеда с боковым ребром 8 м является ромб с диагоналями 10 м и 24 м. Найдите боковую и полную поверхности параллелепипеда.

10. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см, 15 см и высотой 12 см. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 20 см.

11. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $MABC$ равна $10\sqrt{3}$ см, а отрезок, соединяющий вершину M пирамиды с центром O основания, — 12 см (рис. 46). Найдите:
а) апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

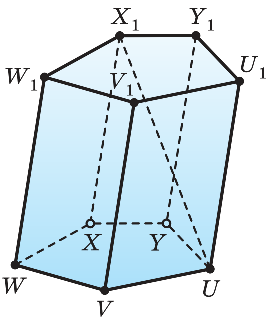


Рис. 44

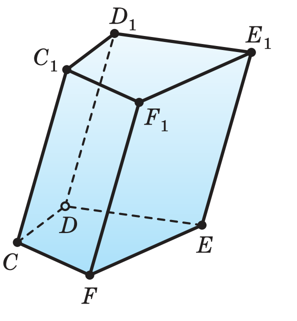


Рис. 45

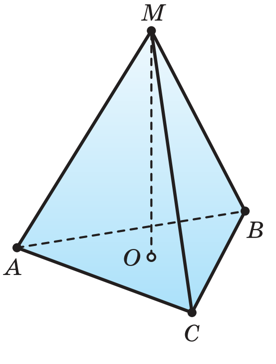


Рис. 46

12. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 15 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 12 см. Найдите:

а) боковое ребро;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

13. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды равна 150 см^2, а её апофема — 10 см. Найдите площадь основания пирамиды.

14. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — $\sqrt{69}$ см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

15. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна 26 см, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, — 10 см. Найдите:

а) боковое ребро и сторону основания пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

16. Основанием пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ со стороной, равной 10 см, одна из диагоналей которого равна 16 см. Отрезок, соединяющий вершину Q пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 14 см (рис. 47). Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды.

17. Основанием пирамиды $REFGH$ является параллелограмм $EFGH$ со сторонами 10 см, 18 см и площадью 90 см^2. Отрезок, соединяющий вершину R пирамиды с точкой O пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 6 см. Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

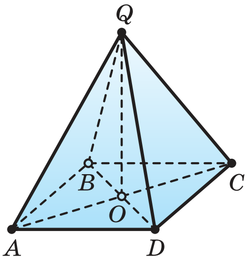


Рис. 47

18*. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 8 м, 10 м и меньшей диагональю 6 м. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей основания, перпендикулярен этим диагоналям и равен 4 м. Найдите:

а) боковые рёбра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

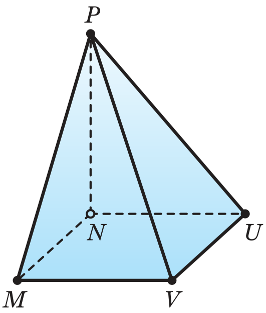


Рис. 48

19*. Основанием пирамиды $PMNUV$ является квадрат $MNUV$ (рис. 48). Боковое ребро PN перпендикулярно каждой прямой плоскости основания, проходящей через точку N, углы M и U граней PMV и PUV прямые, а углы M и U граней PMN и PUN равны 45° каждый. Наибольшее боковое ребро равно 24 см. Найдите:

а) другие боковые рёбра пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды;
в) полную поверхность пирамиды.

20*. Основанием пирамиды является ромб со стороной 15 см и меньшей диагональю 18 см. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой пересечения диагоналей, перпендикулярен им и равен 12 см. Найдите высоты граней пирамиды.

Пространственное моделирование

1. Сделайте выкройку поверхности куба с ребром 5 см, предусмотрев полоски для склеивания (рис. 49), и склейте сам куб.

2. Какие из фигур, показанных на рисунке 50, являются развёртками куба?

3. Сделайте выкройку поверхности прямой призмы с боковым ребром 5 см, в основании которой находится трапеция со сторонами 6 см, 3 см, 3 см, 3 см, и склейте саму призму.

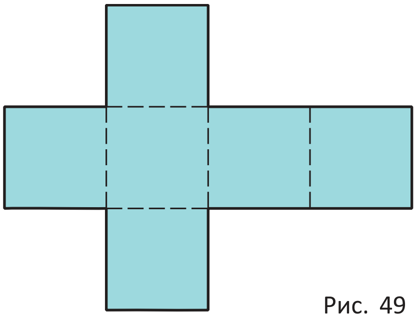


Рис. 49

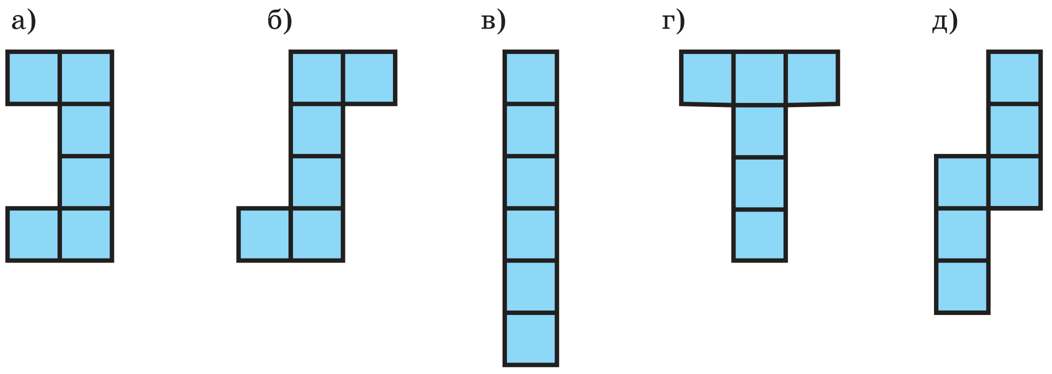


Рис. 50

4. Сделайте выкройку поверхности правильной четырёхугольной пирамиды (рис. 51), сторона основания которой равна 5 см, а боковое ребро — 7 см, и склейте саму пирамиду.

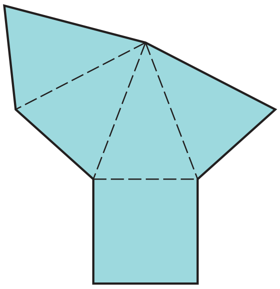


Рис. 51

Рис. 52

5. Сделайте выкройку поверхности пирамиды, стороны основания которой равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковые рёбра — 7 см каждое, и склейте саму пирамиду.

6. Знак нулевого километра Беларуси установлен на Октябрьской площади столицы (рис. 52). Его моделью является правильная четырёхугольная пирамида, у которой соседние боковые рёбра взаимно перпендикулярны, а сторона основания равна 1 м 40 см. Какое количество материала потребуется для облицовки боковой поверхности пирамиды?

7. Может ли быть развёрткой пирамиды:

а) шестиугольник; в) ромб;
б) прямоугольник; г) треугольник?

Изображение пространственных фигур

Чтобы получить изображение призмы, достаточно построить многоугольник — основание призмы. Из вершин основания провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них одинаковые отрезки. Соединив концы этих отрезков, получим многоугольник — изображение другого основания призмы.

Чтобы получить изображение пирамиды, достаточно построить изображение основания пирамиды, выбрать некоторую точку в качестве изображения вершины пирамиды и соединить её с вершинами многоугольника основания пирамиды.

Не каждый рисунок воспринимается нами как изображение реально существующей фигуры. Расхожее выражение «обман зрения» по сути является неверным. Глаза не могут обмануть нас, поскольку являются лишь промежуточным звеном между объектом и мозгом человека. Обман обычно возникает не из-за того, что мы видим, а из-за того, что неосознанно рассуждаем и непроизвольно ошибаемся.

Невозможные объекты представляют собой рисунки на двумерной плоскости, изображающие трёхмерные структуры, существование которых в реальном трёхмерном мире представляется невозможным. Классическим примером такой простой фигуры является невозможный треугольник Пенроуза (рис. 53). В этом треугольнике каждый угол сам по себе является возможным, но парадокс возникает тогда, когда мы рассматриваем его целиком. Стороны треугольника направлены одновременно и на зрителя, и от него, поэтому отдельные части треугольника не могут образовать реальный трёхмерный объект.

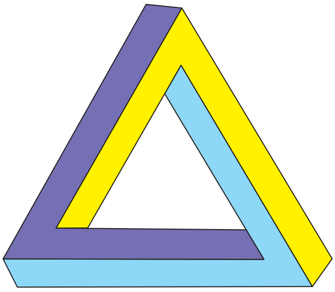


Рис. 53

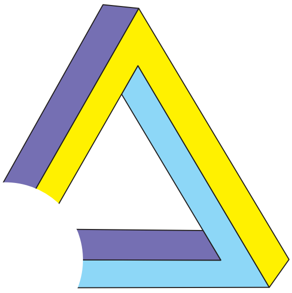


Рис. 54

Наш мозг интерпретирует рисунок на плоскости как трёхмерную модель. Сознание задаёт «глубину», на которой находится каждая точка рисунка. Наши представления о реальном мире сталкиваются с противоречием, с определённой непоследовательностью, и приходится делать некоторые допущения: прямые двумерные линии интерпретируются как прямые трёхмерные линии; двумерные параллельные линии интерпретируются как трёхмерные параллельные линии; острые и тупые углы интерпретируются как прямые углы в перспективе; внешние линии рассматриваются как граница формы, которая крайне важна для восприятия определённого изображения.

Человеческое сознание сначала создаёт общий рисунок предмета, а затем анализирует его отдельные части. Каждый угол совместим с пространственной перспективой, но, соединившись, они образуют пространственный парадокс. Если закрыть любой из углов треугольника (рис. 54), то невозможность существования исчезает.

Похожие фигуры явились источником вдохновения для многих творцов. График Маурицио Эшер создал ряд литографий (рис. 55), которые принесли ему известность художника-иллюзиониста.

Рис. 55

§ 2. Прямые и плоскости

А) Прямые и плоскости в пространстве могут располагаться по-разному.

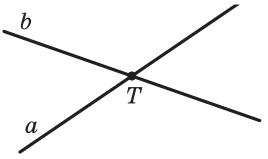


Рис. 56

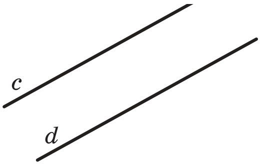


Рис. 57

Две прямые плоскости могут иметь только одну общую точку. Такие прямые называются *пересекающимися*. На рисунке 56 показаны пересекающиеся прямые a и b и их единственная общая точка T. Две прямые плоскости могут не иметь общих точек. Тогда их называют *параллельными*. На рисунке 57 показаны параллельные прямые c и d. В пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. нет такой плоскости, которой бы они обе принадлежали. Такие прямые называются *скрещивающимися*. Представление о таких прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 58). Такими являются прямые, которые проходят через рёбра MN и L_1M_1 параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 59).

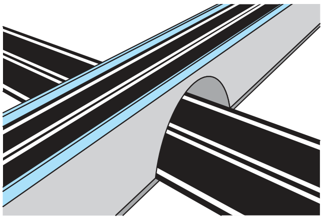


Рис. 58

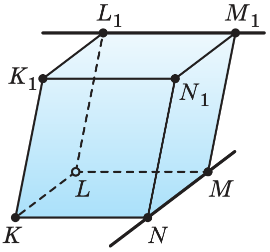


Рис. 59

Каким может быть взаимное расположение прямой и плоскости?

Прямая может лежать в плоскости (рис. 60). Если прямая не лежит в плоскости, то она может пересекать её в некоторой точке (рис. 61) или не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 62). В последнем случае прямая и плоскость называются *параллельными*.

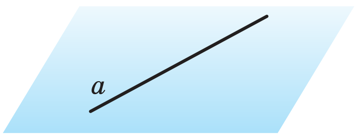


Рис. 60

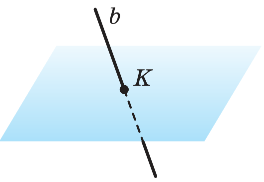


Рис. 61

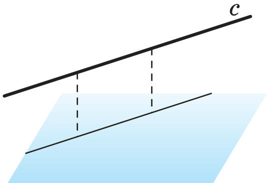


Рис. 62

Представление о прямой, лежащей в плоскости, даёт карандаш, который лежит на столе (рис. 63), о пересекающихся прямой и плоскости — стрела, выпущенная из лука и попавшая в плоскую мишень (рис. 64), о прямой, не пересекающей плоскость, — пол в спортивном зале и гимнастическое бревно (рис. 65).

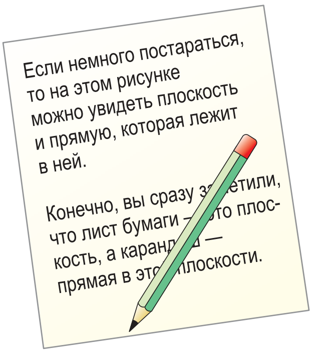


Рис. 63

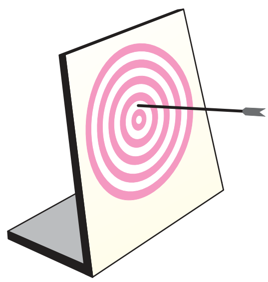


Рис. 64

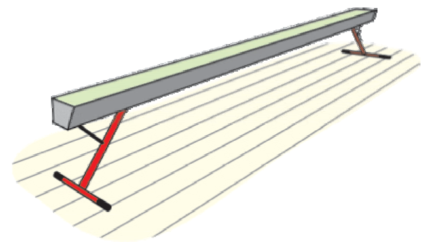


Рис. 65

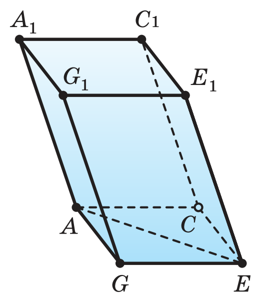


Рис. 66

Указанные виды взаимного расположения прямой и плоскости можно проследить и на изображении параллелепипеда (рис. 66). Прямая, которой принадлежит диагональ AE грани $ACEG$, лежит в плоскости этой грани. Прямая, проходящая через ребро AA_1, пересекает плоскость грани $ACEG$. Прямая, содержащая ребро A_1C_1, параллельна плоскости грани $ACEG$.

Как могут располагаться в пространстве две плоскости?

Плоскости могут пересекаться по прямой (рис. 67) или не иметь общих точек (рис. 68). В соответствии с этим их называют *пересекающимися* или *параллельными*.

Представление о пересекающихся плоскостях дают столешница и боковина стола (рис. 69), о параллельных плоскостях — пол и потолок в помещении (рис. 70). На изображении параллелепипеда на рисунке 66 пересекающимися являются плоскости граней AGG_1A_1 и $AGEC$, параллельными — плоскости граней AGG_1A_1 и CEE_1C_1.

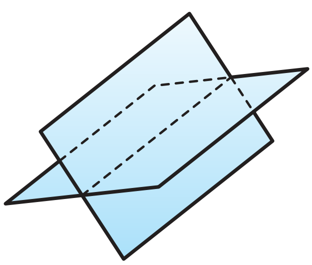


Рис. 67

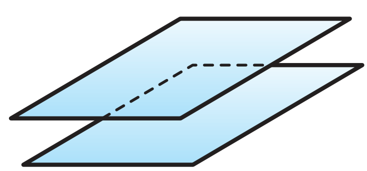


Рис. 68

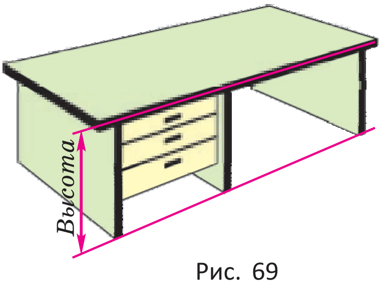


Рис. 69

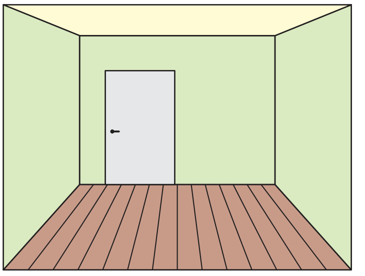


Рис. 70

Знак || используют не только для обозначения параллельности прямых, но и параллельности прямой и плоскости и двух плоскостей. Если учесть, что прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, ..., а плоскости — строчными греческими буквами α, β, γ, ..., то записи $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ означают, что параллельными являются прямые a и b, прямая c и плоскость α, плоскости α и β.

Б) Теория взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве основывается на следующих аксиомах.

Аксиома 1. Если три точки не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость.

Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.

В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости.

Аксиома 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку.

Свойство плоскости, которую фиксирует аксиома **1**, часто используется на практике. Острия ножек штатива фотоаппарата (рис. 71) принадлежат одной плоскости, и поэтому положение фотоаппарата устойчивое. Дверь, закреплённая на двух петлях, не занимает определённого положения (рис. 72), но если добавить третью точку крепления — замок, то положение двери фиксируется (рис. 73). Когда ножки табурета неправильно подрезаны, то табурет стоит на трёх ножках, а четвёртая ножка висит над полом (рис. 74).

Свойство плоскости, которое выражает аксиома **2**, используют для проверки прямолинейности чертёжной линейки. Линейку прикладывают

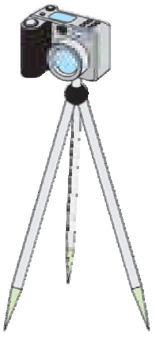


Рис. 71

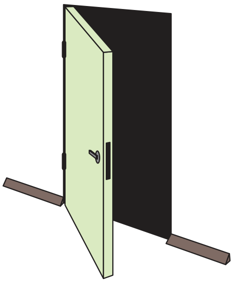


Рис. 72

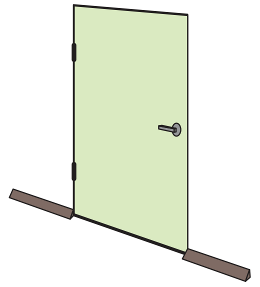


Рис. 73

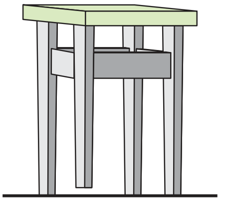


Рис. 74

краем к поверхности стола: если край прямолинейный, то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола (рис. 75), а если неровный, то между краем линейки и поверхностью стола есть щель (рис. 76 и 77).

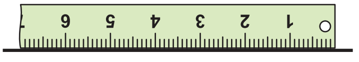


Рис. 75

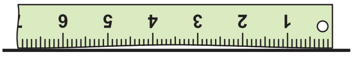


Рис. 76

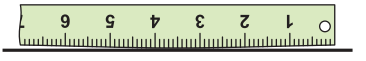


Рис. 77

Свойство плоскости, зафиксированное аксиомой **3**, проявляется при пересечении двух смежных стен комнаты (рис. 78).

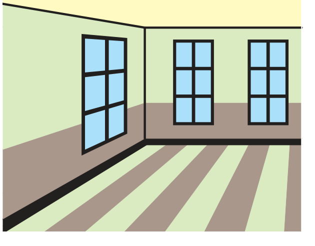


Рис. 78

Отметим, что в стереометрии выполняются все аксиомы планиметрии и все доказанные в ней утверждения. В частности, признаки равенства и признаки подобия треугольников остаются в силе и для треугольников, лежащих в разных плоскостях.

В соответствии с аксиомой **1** плоскость определяется тремя своими точками A, B, C, поэтому иногда плоскость обозначают тремя прописными латинскими буквами: плоскость, проходящую через точки A, B, C, обозначают (ABC).

Пример. На рёбрах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ выбраны точки A, B, C, причём прямая, определённая точками B и C, не параллельна ребру K_1N_1 (рис. 79). Плоскости ABC и KNN_1 имеют общую точку A. В соответствии с аксиомой **3** они имеют общую прямую. Построим её.

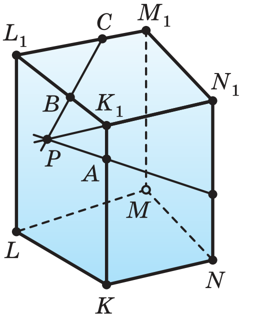


Рис. 79

Точка A принадлежит грани KK_1N_1N, а точки B, C — грани $K_1L_1M_1N_1$, и эти грани пересекаются по прямой K_1N_1. Эта прямая и прямая BC лежат в одной плоскости и не параллельны. Поэтому они пересекаются в некоторой точке. Найдём её, продлив отрезки BC и K_1N_1, и получим точку P.

Точка P принадлежит прямым BC и K_1N_1, значит, она принадлежит как плоскости ABC, так и плоскости KK_1N_1. Этим же плоскостям принадлежит и точка A. Значит, прямая, определённая точками P и A, принадлежит и плоскости ABC, и плоскости KK_1N_1. Иными словами, плоскости ABC и KK_1N_1 пересекаются по прямой PA.

Теорема 3. Через прямую и точку вне её проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть есть прямая l и точка A, которая не принадлежит прямой l (рис. 80).

Выберем на прямой l две точки B и C. Точки A, B, C не лежат на одной прямой, поэтому по аксиоме **1** через них проходит некоторая плоскость α (рис. 81). Плоскость α в соответствии с аксиомой **2** проходит и через прямую l, так как две её точки B и C принадлежат плоскости α.

Рис. 80

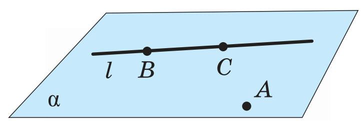


Рис. 81

Допустим, что через прямую l и точку A проходит ещё одна плоскость β. Тогда плоскость β проходит как через точку A, так и через точки B и C. Поскольку по аксиоме **1** через три различные точки проходит единственная плоскость, то плоскость β совпадает с плоскостью α. Значит, через прямую l и точку A вне её проходит единственная плоскость.

Теорема 4. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть имеются две пересекающиеся прямые p и q, и D — их общая точка (рис. 82).

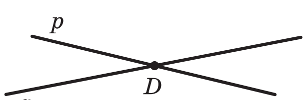


Рис. 82

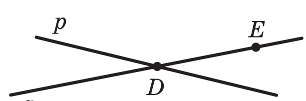


Рис. 83

Выберем на прямой q какую-либо точку E, отличную от точки D (рис. 83). В соответствии с теоремой **3** через прямую p и точку E проходит единственная плоскость γ. Плоскость γ проходит и через прямую q, так как две точки D и E прямой q принадлежат плоскости γ.

Допустим, что через прямые p и q проходит ещё одна плоскость δ. Тогда плоскость δ проходит через точку E. Но через эту точку и прямую p в соответствии с теоремой **3** проходит единственная плоскость. Значит, плоскость δ совпадает с плоскостью γ. Таким образом, через пересекающиеся прямые p и q проходит единственная плоскость.

Теорема 4 находит своё применение на практике. Если столяру нужно распилить брусок под определённым углом, он, чтобы наметить плоскость распила, проводит в двух смежных гранях бруска пересекающиеся прямые PQ и PS (рис. 84).

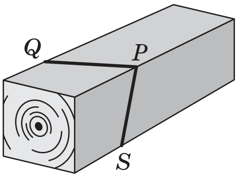


Рис. 84

1. Какие две прямые плоскости называются пересекающимися; параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Как могут располагаться две прямые в пространстве?
4. Какие прямая и плоскость называются пересекающимися; параллельными?
5. Как могут располагаться в пространстве прямая и плоскость?
6. Какие две плоскости называются пересекающимися; параллельными?
7. Как могут располагаться в пространстве две плоскости?
8. Сформулируйте свойство плоскости, проходящей через три точки, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
9. Сформулируйте свойство прямой, две точки которой принадлежат плоскости, и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
10. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей и приведите примеры моделей, иллюстрирующих это свойство.
11. Как обозначаются точки; прямые; плоскости?
12. Назовите способы задания плоскости.
13. Верно ли, что:
    а) через любые две точки проходит единственная прямая;
    б) через любые три точки проходит единственная плоскость;
    в) три попарно пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте.
14. На рисунке 85 изображена призма, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:
    а) прямые, пересекающие плоскость ABC;
    б) прямые, пересекающие плоскость UTF;
    в) прямые, лежащие в плоскости PTR;
    г) прямые, лежащие в плоскости CDR;
    д) прямые, параллельные плоскости FEC;
    е) прямые, параллельные плоскости AQB.

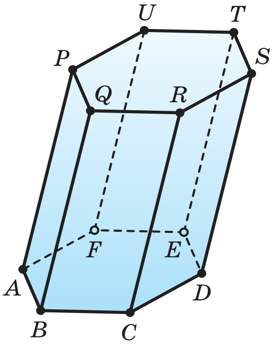


Рис. 85

15. На рисунке 86 изображён параллелепипед. Назовите:

а) плоскости, пересекающие прямую CQ;
б) плоскости, пересекающие прямую OP;
в) плоскости, в которых лежит прямая NO;
г) плоскости, которым принадлежит прямая DN;
д) плоскости, параллельные прямой CF;
е) плоскости, параллельные прямой EO.

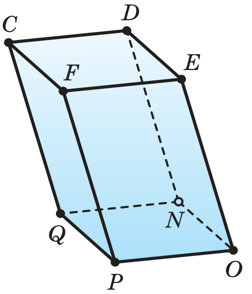


Рис. 86

16. Могут ли две плоскости иметь:

а) только одну общую точку;
б) только две общие точки;
в) только одну общую прямую;
г) только две общие прямые?

Задача 1. Докажите, что:

а) если некоторая точка A лежит на прямой k, принадлежащей плоскости α, то точка A принадлежит плоскости α;

б) если две точки A и B принадлежат как прямой l, так и плоскости α, то прямая l лежит в плоскости α;

в) если плоскости α и β пересекаются по прямой l и точка A принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, то точка A принадлежит прямой l;

г) прямая a, пересекающая в различных точках две пересекающиеся прямые k и l, принадлежит плоскости этих прямых.

Решение: а) $k \subset \alpha$ означает, что любая точка прямой k принадлежит также и плоскости α.

Любая точка прямой k принадлежит плоскости α, поэтому и некоторая точка A прямой k принадлежит плоскости α.

б) $A \in l$ и $B \in l$, поэтому прямые AB и l совпадают ($AB = l$) (аксиома прямой).

$A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, поэтому $AB \subset \alpha$ (аксиома 2).
$AB \subset \alpha$ и $AB = l$, поэтому $l \subset \alpha$.

в) $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, поэтому $A \in \alpha \cap \beta$.
$A \in \alpha \cap \beta$ и $\alpha \cap \beta = l$, поэтому $A \in l$.

г) $k \cap l = O$, поэтому существует такая плоскость α, что $k \subset \alpha$ и $l \subset \alpha$.
$a \cap k = A$, $k \subset \alpha$, поэтому $A \in \alpha$.
$a \cap l = B$ и $l \subset \alpha$, поэтому $B \in \alpha$.
$A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, поэтому $AB \subset \alpha$ (аксиома 2).
$a \cap k = A$, поэтому $A \in a$.
$a \cap l = B$, поэтому $B \in a$.
$A \in a$ и $B \in a$, поэтому $AB = a$.
$AB \subset \alpha$ и $AB = a$, поэтому $a \subset \alpha$.

Задача 2. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDHGFE$ является квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, а боковое ребро AH параллелепипеда равно 8 см (рис. 86). Найдите длину пространственной ломаной $HFDBH$.

Решение. $DB = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (см), $AC = 6\sqrt{2}$ (см), так как $ABCD$ — квадрат.

$FD = \sqrt{FC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), так как $DEFC$ — прямоугольник. $BH = FD = 10$ см, так как равные прямоугольники имеют равные диагонали.

$$l_{HFDBH} = HF + FD + DB + BH = 6\sqrt{2} + 10 + 6\sqrt{2} + 10 =$$
$$= \left(20 + 12\sqrt{2}\right) \text{ (см)} = 4\cdot\left(5 + 3\sqrt{2}\right) \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\cdot\left(5+3\sqrt{2}\right)$ см.

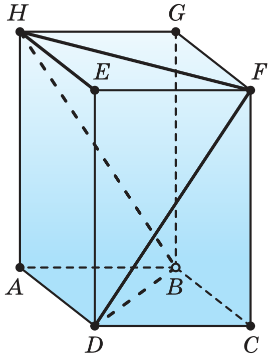


Рис. 86

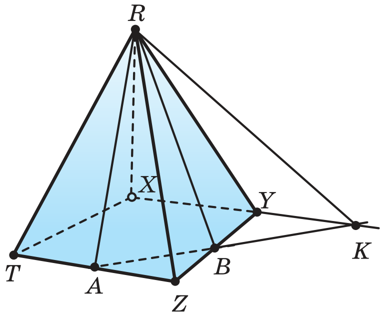


Рис. 87

Задача 3. Точки A и B — середины рёбер TZ и YZ пирамиды $RTXYZ$ (рис. 87). Постройте:

а) точку пересечения прямой AB и плоскости RXY;

б) прямую, по которой пересекаются плоскости RAB и RXY.

Решение. а) $A \in TZ$, $TZ \subset (TXY)$, поэтому $A \in (TXY)$;
$B \in YZ$, $YZ \subset (TXY)$, поэтому $B \in (TXY)$.
$AB \subset (TXY)$ (аксиома 2).
$XY \subset (TXY)$, поэтому $AB \cap XY = K$, $K \in XY$ и $K \in AB$.
$XY \subset (RXY)$, поэтому $K \in (RXY)$ и $K = AB \cap (RXY)$.

б) $K \in (RXY)$ и $R \in (RXY)$, поэтому $KR \subset (RXY)$.
$K \in AB$ и $AB \subset (RAB)$, поэтому $K \in (RAB)$.
$K \in (RAB)$ и $R \in (RAB)$, поэтому $KR \subset (RAB)$.
$KR \subset (RAB)$ и $KR \subset (RXY)$, поэтому $KR = (RAB) \cap (RXY)$.

Задача 4. Точки P, Q и R принадлежат соответственно рёбрам SA, SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 88). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость ABC.

Решение. $Q \in SC$ и $SC \subset (SBC)$, поэтому $Q \in (SBC)$.
$R \in BC$ и $BC \subset (SBC)$, поэтому $R \in (SBC)$.

По аксиоме **2** $QR \subset (SBC)$.
$QR \subset (SBC)$ и $SB \subset (SBC)$,
поэтому $QR \cap SB = K$, $K \in SB$,
$SB \subset (SAB)$ и $K \in (SAB)$.
$P \in SA$ и $SA \subset (SAB)$, поэтому $P \in (SAB)$.
$K \in (SAB)$ и $P \in (SAB)$, поэтому $KP \subset (SAB)$.
$KP \subset (SAB)$ и $AB \subset (SAB)$,
поэтому $KP \cap AB = M \in AB$.
$R \in BC$ и $BC \subset (ABC)$, поэтому $R \in (ABC)$;
$R \in (PQR)$; тогда $R \in (ABC) \cap (PQR)$.
$M \in AB$ и $AB \subset (ABC)$, поэтому $M \in (ABC)$;
$M \in KP$ и $KP \subset (PQR)$, поэтому $M \in (PQR)$;
тогда $M \in (ABC) \cap (PQR)$.
По аксиоме **3** $(PQR) \cap (ABC) = MR$.

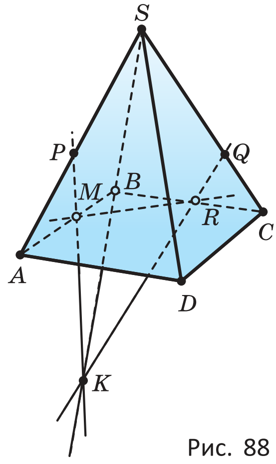


Рис. 88

21. Сколько общих точек могут иметь:
а) две прямые; б) прямая и плоскость; в) две плоскости?

22. Могут ли иметь единственную общую точку:
а) две прямые; в) две плоскости;
б) прямая и плоскость; г) три плоскости?

23. Сколько образуется линий при попарном пересечении трёх плоскостей?

24. Сколько разных прямых могут определять четыре разные точки?

25. Используя рисунок 89, назовите:
а) точки, лежащие в плоскостях LMQ и NME;
б) плоскости, в которых лежит прямая NR;
в) точку пересечения прямой BC с плоскостью KLN;
г) точки пересечения прямых PL и ND с плоскостью OPR;
д) прямую, по которой пересекаются плоскости KON и KLM;
е) прямую, по которой пересекаются плоскости RDQ и MNK;
ж) точку пересечения прямых AB и LM;
з) точку пересечения прямых RQ и BD;
и) точку пересечения прямых BQ и MC.

26. Четырёхугольная пирамида $PGHKL$ на рисунке 90 — правильная, а PA и PB — высоты её граней PGH и PHK. Докажите, что треугольники PGA и PHB равны.

27. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Могут ли:
а) какие-либо три из них лежать на одной прямой;
б) прямые AB и CD пересекаться?

28. Точки U и V являются точками треугольника ABC, а точка W принадлежит прямой UV (рис. 91). Принадлежит ли точка W плоскости ABC?

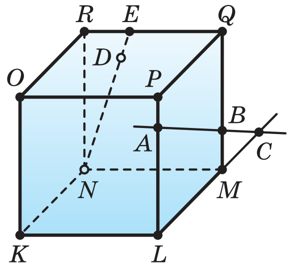


Рис. 89

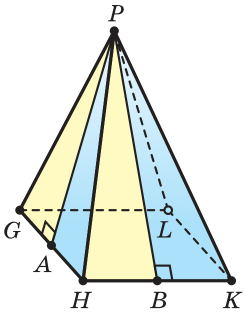


Рис. 90

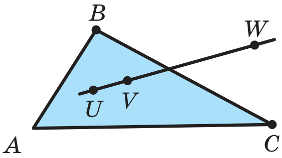


Рис. 91

29. Докажите, что через три данные точки, лежащие на одной прямой, проходит плоскость. Сколько имеется таких плоскостей?

30. Докажите, что если две смежные вершины четырёхугольника и точка пересечения его диагоналей принадлежат некоторой плоскости, то четырёхугольник целиком лежит в этой плоскости.

31. Истинно ли утверждение:

а) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны во внутренних точках;

б) прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она пересекает две его стороны?

32. Докажите, что любая прямая, которая:

а) проходит через вершину A треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямую CD, принадлежит плоскости ACD;

б) не проходит через вершину B треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает как прямую BC, так и прямую BD, принадлежит плоскости BCD.

33. Плоскость β проходит через две смежные вершины трапеции и точку пересечения её диагоналей. Докажите, что две другие вершины трапеции лежат в плоскости β.

34. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажите, что все прямые, которые:

а) проходят через точку A и пересекают прямую BC, лежат в одной плоскости;

б) не проходят через точку A и пересекают обе прямые AB и AC, лежат в одной плоскости.

35. Можно ли утверждать, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она:

а) проходит через вершину треугольника;

б) пересекает две стороны треугольника;

в) пересекает в различных точках две стороны треугольника;

г) пересекает две прямые, на которых лежат стороны треугольника;

д) пересекает три прямые, на которых лежат стороны треугольника?

36. Имеется прямая a и точка K, не принадлежащая ей. Докажите, что все прямые, проходящие через точку K и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

37. Точки M и N принадлежат рёбрам SS_1 и RR_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Докажите, что прямая MN принадлежит плоскости RSS_1.

38. Прямая a лежит в одной из пересекающихся плоскостей β и пересекает другую плоскость γ. Докажите, что прямая a пересекает линию пересечения плоскостей β и γ.

39. Используя рисунок 92, на котором точки B и C принадлежат рёбрам PK и PT треугольной пирамиды $KPTU$, а точка A лежит на прямой, проходящей через ребро KU:

а) назовите прямые, которым принадлежит точка U;

б) докажите, что прямая AB лежит в плоскости KPU;

в) установите, каким граням пирамиды принадлежит прямая BC;

г) установите, каким граням пирамиды принадлежит прямая KT;

д) назовите плоскость, которой принадлежит точка A;

е) назовите прямые, через которые проходит плоскость KPT.

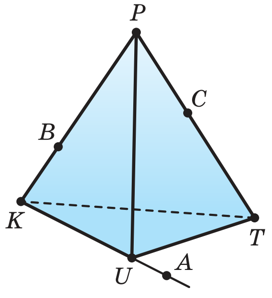


Рис. 92

40. Используя рисунок 93, на котором E — точка ребра AI четырёхугольной пирамиды $AIJKL$, точка F принадлежит ребру AK, а точка G лежит на луче AK за точкой K:

а) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости IAJ и JAK;

б) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости AJG и KAL;

в) докажите, что прямая EF лежит в плоскости IAK;

г) докажите, что прямые EF и FG лежат в одной плоскости;

д) назовите плоскости, которым принадлежит прямая JL.

41. На рисунке 94 изображена четырёхугольная призма $CDEFC_1D_1E_1F_1$, точка P выбрана на луче D_1E_1 за точкой E_1, а точка R — на ребре C_1F_1. Используя этот рисунок:

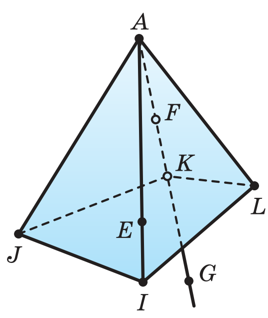


Рис. 93

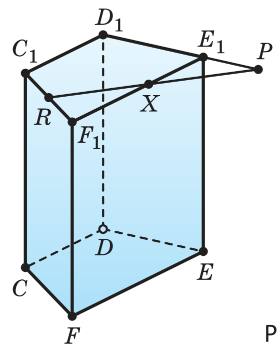


Рис. 94

а) докажите, что прямая PR принадлежит плоскости $C_1D_1F_1$;
б) докажите, что прямая PR пересекает прямую E_1F_1;
в) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость DD_1E;
г) назовите прямую, по которой плоскость $C_1D_1F_1$ пересекает плоскость PRF;
д) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость DEE_1;
е) назовите точку, в которой прямая PR пересекает плоскость FF_1E_1.

42. Имеется призма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На луче TT_1 за точкой T_1 выбрана точка H, через которую проведены прямые HU и HX (рис. 95). Используя это:
а) докажите, что прямые HU и T_1U_1 пересекаются в некоторой точке B;
б) назовите точку, в которой прямая HU пересекает плоскость $M_1T_1X_1$;
в) докажите, что прямые HX и T_1X_1 пересекаются в некоторой точке A;
г) докажите, что прямая HX и плоскость $M_1T_1U_1$ пересекаются в точке A;
д) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и T_1TU;
е) назовите прямую, по которой пересекаются плоскости XHU и MTX.

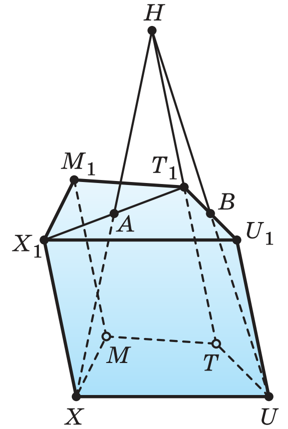


Рис. 95

43. Точки P, Q и R принадлежат соответственно рёбрам SA, SC и BC пирамиды $SABCD$ (рис. 96). Постройте прямую, по которой плоскость PQR пересекает плоскость:

а) SBC;
б) SAB;
в) SBD;
г) SDC.

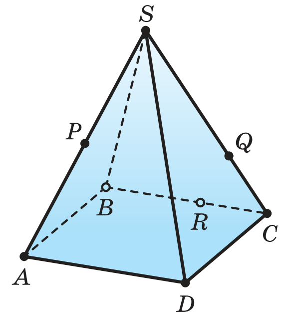


Рис. 96

44. Точка M — внутренняя точка ребра AJ треугольной пирамиды $AIJK$, точка N лежит на луче AK за точкой K. Постройте: точку пересечения прямой MN с плоскостью IJK;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости IMN и IJK.

45. На отрезке MN как на стороне в разных плоскостях построены два четырёхугольника $MNAB$ и $MNCD$, на отрезках NA и NC выбраны внутренние точки R и S соответственно (рис. 97). Сделайте такой рисунок в тетради и:

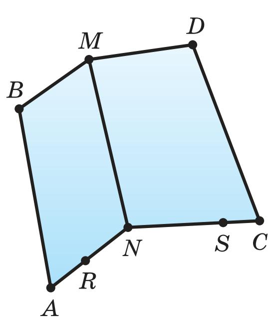


Рис. 97

а) постройте точку, в которой прямая MR пересекает плоскость ABC;
б) постройте точку пересечения прямой CD с плоскостью ARS;
в) докажите, что прямая RS принадлежит плоскости CAN.

46. Точки A и B — внутренние точки рёбер KM и KQ призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость M_1MO;
б) прямую, по которой плоскость ABO_1 пересекает плоскость MOO_1.

47. Точки A, B, C являются серединами рёбер T_1U_1, U_1V_1, V_1V параллелепипеда $TUVWT_1U_1V_1W_1$. Постройте:

а) точку, в которой прямая AB пересекает плоскость WW_1V_1;
б) прямую, по которой плоскость ABC пересекает плоскость WW_1V_1.

48. Диагонали KM и LN основания $KLMN$ пирамиды $AKLMN$ пересекаются в точке O, точка B — внутренняя точка отрезка KO, а точка C лежит на луче LN за точкой N. Постройте:

а) точку, в которой прямая BC пересекает плоскость ALM;
б) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ALM.

49. Имеется параллелепипед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Постройте:

а) точку пересечения прямой EE_1 с линией пересечения плоскостей BC_1D и C_1CE;
б) линию пересечения плоскостей BC_1D и EDD_1.

50. Точки A и B лежат в гранях PQS и PRS треугольной пирамиды $PQRS$ (рис. 98). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая AB пересекает:

а) плоскость QRS;
б) плоскость PQR.

51. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 12 см^2. Найдите диагональ боковой грани, учитывая, что диагональ основания равна $\sqrt{2}$ см.

52. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник, радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 4 см и 10 см. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что её боковое ребро равно 16 см.

53. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность. Боковая сторона трапеции равна 12 см и образует с основанием угол в 30°. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что её полная поверхность равна 336 см^2.

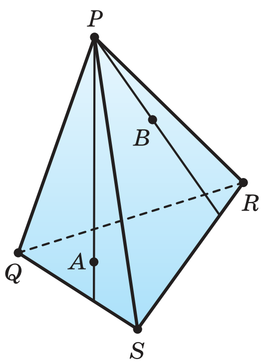


Рис. 98

54. Медианы BB_1 и NN_1 грани BKN четырёхугольной пирамиды $BKLMN$ пересекаются в точке G (рис. 99). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку, в которой прямая MG пересекает плоскость BLN.

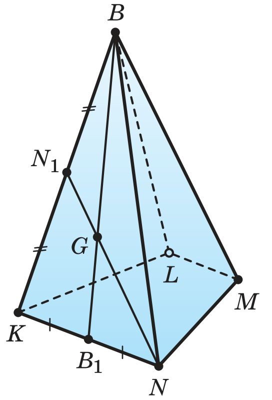


Рис. 99

55. Точку M выберите на диагонали DC_1 грани треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$, точку N — на отрезке E_1F, где F — внутренняя точка ребра DE, точку L — на луче DD_1 за точкой D_1 (рис. 100). Постройте прямую, по которой плоскость MNL пересекает плоскость ECC_1.

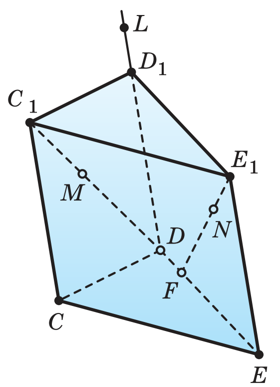


Рис. 100

56. Выберите точки A и B соответственно на рёбрах MX и MY четырёхугольной пирамиды $MXYZV$, а точку C — на луче YZ за точкой Z. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и XYZ.

57. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ (рис. 101) относится к боковому ребру как 2 : 3. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $16 + 4\sqrt{13}$ дм.

58. Точки A и B делят рёбра QD и QE правильной четырёхугольной пирамиды $QCDEF$ со всеми равными рёбрами в отношении 5 : 7, если считать от вершины Q. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что длина ломаной $ABQFA$ равна 70 см.

59*. Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с квадратным основанием равна 2640 мм^2. Найдите рёбра параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, вписанной в треугольник NKK_1, равен 5 мм.

60*. Диагональ боковой грани прямоугольного параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ с квадратным основанием равна 52 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник CC_1D, равен 8 см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

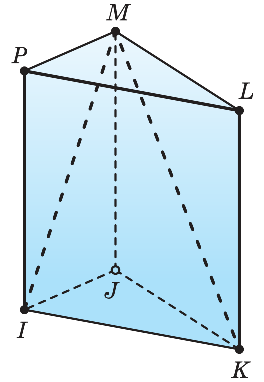


Рис. 101

61*. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 8 см, а её боковая поверхность — $16\sqrt{15}$ см^2. Найдите сторону основания пирамиды, учитывая, что радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен $2\sqrt{0,6}$ см.

Пространственное моделирование

Ответьте, какая — плоская или пространственная — фигура изображена на рисунке:

а) 102; б) 103; в) 104.

На рисунке 104 изображена поверхность, которую называют лентой Мёбиуса, или листом Мёбиуса. Её открыли независимо друг от друга в 1858 году немецкие математики Август Мёбиус и Иоганн Листинг. До этого считалось, что любая поверхность имеет две стороны, которые можно окрасить в разный цвет.

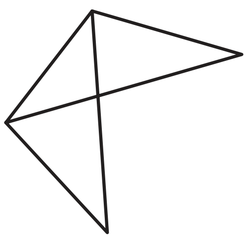


Рис. 102

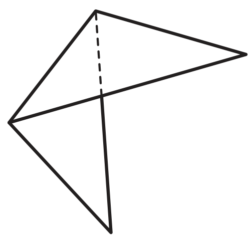


Рис. 103

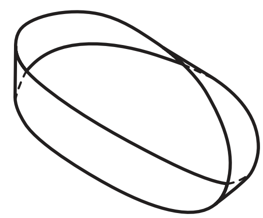


Рис. 104

Лента Мёбиуса имеет одну сторону и один край. В этом легко убедиться. Возьмём прямоугольную ленту $ABCD$ и склеим её так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D. Сделайте это сами и попробуйте покрасить полученную ленту, не переходя через её край. Какой результат у вас получился?

Какая поверхность получится, если лист Мёбиуса разрезать по его средней линии? Попробуйте окрасить эту поверхность. Что получилось? А что будет, если лист Мёбиуса разрезать, отступив от его края на третью часть ширины?

Памятный знак «Лист Мёбиуса» (рис. 105) был установлен 22 января 2009 года к 80-летию Национальной академии наук Беларуси.

Свойства ленты Мёбиуса нашли практическое применение и в промышленности. В виде ленты Мёбиуса изготавливают шлифовальные ленты, красящую ленту матричных принтеров, полосу ленточного конвейера, что позволяет увеличить срок службы, потому что вся поверхность ленты равномерно изнашивается. Ленту Мёбиуса применяют в системах записи на непрерывную плёнку, чтобы удвоить время записи.

Рис. 105

§ 3. Построение сечений многогранников

А) При изучении стереометрии приходится пространственные фигуры показывать на плоских рисунках. Часто на рисунке нужно показать взаимное расположение двух фигур. Если одна из фигур — многогранник, а вторая — плоскость, то их взаимное расположение характеризует та часть многогранника, которая принадлежит рассматриваемой плоскости, или, иными словами, *сечение многогранника плоскостью*. Плоскость при этом называют *секущей плоскостью*.

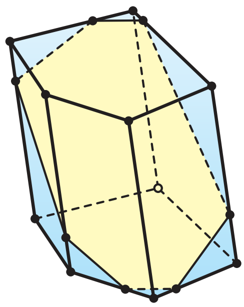


Рис. 106

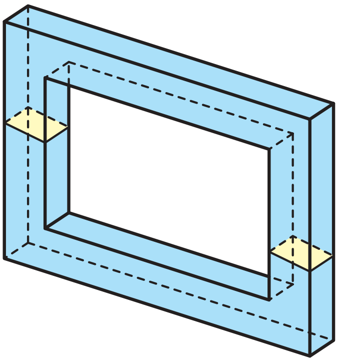


Рис. 107

Секущая плоскость пересекает поверхность многогранника по отрезкам, а сечением многогранника плоскостью является один или несколько многоугольников.

На рисунке 106 изображено сечение пятиугольной призмы, которое является семиугольником. Сечение «рамы» плоскостью на рисунке 107 состоит из двух четырёхугольников.

Для построения сечения многогранника достаточно построить общие точки его граней и секущей плоскости.

Пример 1. Построим сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки M, N и K на рёбрах SA, SB и SC.

Секущая плоскость MNK имеет с плоскостью SAB две общие точки M и N, поэтому прямая MN принадлежит как секущей плоскости, так и плоскости SAB. Значит, отрезок MN — линия пересечения грани SAB с плоскостью MNK.

Рассуждая аналогично, получаем, что плоскость MNK пересекает грани SAC и SBC по отрезкам MK и NK соответственно.

Треугольник MNK — искомое сечение (рис. 108).

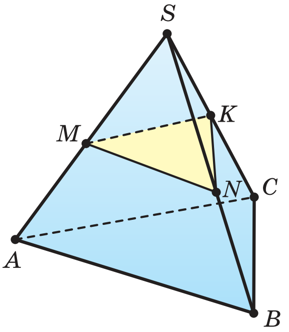


Рис. 108

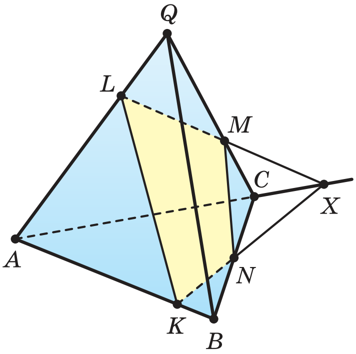


Рис. 109

Пример 2. Построим сечение треугольной пирамиды $QABC$ плоскостью α, проходящей через точки K, L, M рёбер AB, AQ, CQ.

Секущая плоскость α (рис. 109) имеет с гранью AQB две общие точки K и L, поэтому она пересекает эту грань по отрезку KL.

Поскольку точки L и M — общие точки секущей плоскости и грани AQC, то LM — линия пересечения этих плоскостей.

Грань ABC имеет с секущей плоскостью общую точку K. Найдём точку, в которой плоскость α пересекает ребро BC. Обратим внимание на то, что точка X пересечения прямых LM и AC принадлежит плоскости α, плоскости AQC и плоскости ABC. А поскольку точки K и X — общие точки плоскостей α и ABC, то KX — прямая, по которой плоскость α пересекает плоскость ABC. Точка N пересечения прямой KX с ребром BC принадлежит плоскости α. Значит, плоскость α пересекает грань ABC по отрезку KN, а грань BQC — по отрезку MN.

Четырёхугольник $KLMN$ — искомое сечение пирамиды плоскостью α.

Прямые KL и KN называют *следами* плоскости α на плоскостях ABQ и ABC соответственно.

Пример 3. Построим сечение пирамиды $OKLMN$ плоскостью β, проходящей через точку A на ребре OL и прямую k в плоскости основания $KLMN$.

Найдём точку X (рис. 110), в которой пересекаются прямые LM и k. Эта точка принадлежит и секущей плоскости β как точка прямой k, и плоскости грани LOM как точка прямой LM. Точка A также принадлежит этим обеим плоскостям. Поэтому плоскость β пересекает плоскость LOM по прямой AX, а грань LOM — по отрезку AB, где B — точка пересечения прямых AX и OM.

Аналогично найдём точки Y и D и отрезок AD, по которому плоскость β пересекает грань OLK, а затем точки Z и C и отрезки DC и BC. Четырёхугольник $ABCD$ — искомое сечение.

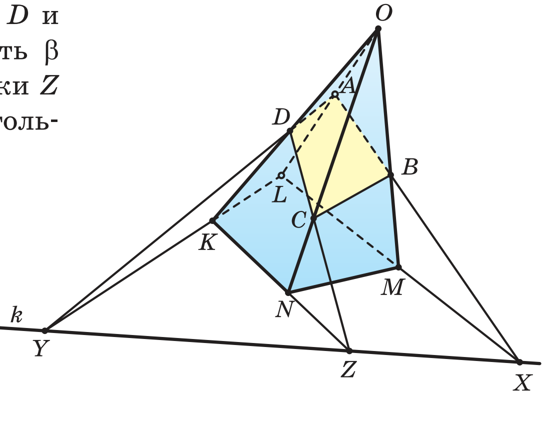


Рис. 110

Б) A, B, C — точки на разных рёбрах четырёхугольной призмы. Найдём сечение призмы плоскостью ABC.

Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах призмы лежат точки A, B, C. Наиболее просто строить сечение в том случае, когда точки A, B, C лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины. Искомое сечение в этом случае — треугольник ABC.

Пример 4. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 111. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

Вначале построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдём точки M и N пересечения прямых AB и BC, которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV, N — прямых BC и UV. Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A, получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S. Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD, а грань UU_1S_1S — по отрезку CD.

Искомым сечением является четырёхугольник $ABCD$.

Видим, что новым элементом в этом решении в сравнении с примером **2** является построение следа секущей плоскости на плоскости основания.

Пример 5. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 112. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

Вначале построим след секущей плоскости ABC на плоскости нижнего основания. Для этого найдём точки M и N пересечения прямых AB и BC, которые лежат в секущей плоскости, с плоскостью $RSUV$: M — точка пересечения прямых AB и RV, N — прямых BC и UV. Прямая MN — общая прямая секущей плоскости и плоскости нижнего основания.

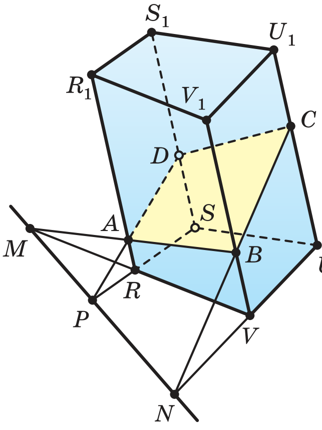


Рис. 111

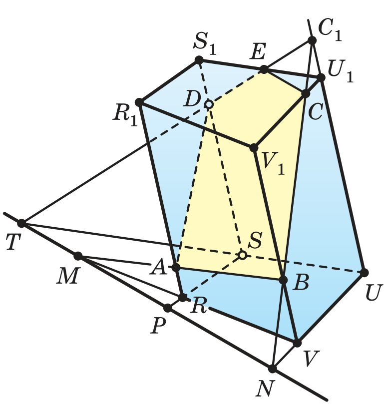


Рис. 112

Точка P пересечения прямой RS со следом MN принадлежит и секущей плоскости, и плоскости грани RR_1S_1S. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит и точка A, получаем, что прямая PA — след секущей плоскости на плоскости RR_1S_1S. Значит, плоскость ABC пересекает грань RR_1S_1S по отрезку AD.

Найдём точку C_1 пересечения прямой BC и плоскости грани S_1SUU_1. Прямая BC лежит с прямой UU_1 в плоскости UU_1V_1V. Точка C_1 пересечения этих прямых как точка прямой BC лежит в секущей плоскости, а как точка прямой UU_1 — в плоскости S_1SUU_1. Учитывая, что этим двум плоскостям принадлежит точка D, получаем, что прямая DC_1 — след секущей плоскости на плоскости S_1SUU_1. Значит, плоскость ABC пересекает грань S_1SUU_1 по отрезку ED.

Искомым сечением является пятиугольник $ABCED$.

Пример 6. Точки A, B, C расположены так, как показано на рисунке 113. Построим сечение призмы плоскостью ABC.

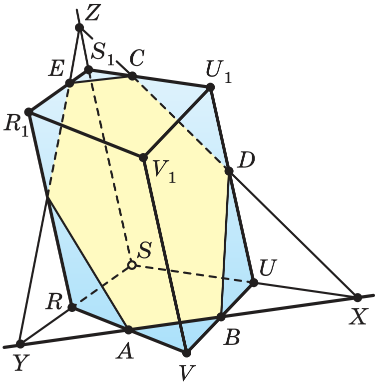


Рис. 113

След AB секущей плоскости на плоскости основания позволяет последовательно найти точки X и Y его пересечения с гранями SUU_1S_1 и RSS_1R_1, след XC секущей плоскости — на плоскости SUU_1S_1. Значит, плоскость ABC пересекает грань SUU_1S_1 по отрезку CD. Пусть точка Z — точка пересечения прямой XC и плоскости грани RSS_1R_1. Тогда Z — точка пересечения ребра SS_1 с секущей плоскостью и след ZY секущей плоскости на грани RSS_1R_1. Поэтому плоскость ABC пересекает грань RSS_1R_1 по отрезку EF.

Искомым сечением является шестиугольник $ABDCEF$.

?

1. Какая фигура называется сечением многогранника? Какой фигурой может быть это сечение?
2. Какая прямая называется следом одной плоскости на другой?
3. Каким может быть сечение плоскостью четырёхугольной призмы?
4. Правда ли, что сечением пятиугольной пирамиды может быть:
   а) точка;
   б) отрезок;
   в) четырёхугольник;
   г) шестиугольник;
   д) семиугольник?

5. Правда ли, что сечением пятиугольной призмы может быть:
а) отрезок;
б) четырёхугольник;
в) шестиугольник;
г) семиугольник;
д) восьмиугольник?

Задача 1. Постройте сечение куба $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью IKJ_1 (рис. 114). Найдите ребро куба, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

Решение. Плоскость IKJ_1 пересекает грани $IJKL$, IJJ_1I_1, JKK_1J_1 по отрезкам IK, IJ_1, J_1K соответственно. Следовательно, треугольник IKJ_1 — искомое сечение.

$\triangle IKJ_1$ — правильный, значит, $S_{IKJ_1} = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$, или $S = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$. Следовательно, $IK^2 = \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.

$\triangle IJK$ — равнобедренный прямоугольный с прямым углом J, следовательно, $2IJ^2 = IK^2$, или $IJ^2 = \dfrac{IK^2}{2}$, или $IJ^2 = \dfrac{2S}{\sqrt{3}}$, или $IJ = \sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.

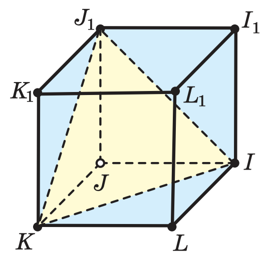


Рис. 114

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.

Задача 2. Постройте сечение правильной пирамиды $QABCD$ плоскостью, проходящей через боковое ребро и противоположную ему вершину основания. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все рёбра этой пирамиды равны a.

Решение. Пусть $QABCD$ — правильная пирамида; $AB = BC = CD = DA = QA = QB = QC = QD = a$.

Q, A, C — вершины пирамиды, следовательно, QAC — искомое сечение.

$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, так как $ABCD$ — квадрат.

В $\triangle AQC$ $AQ = QC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Следовательно, $\angle AQC = 90°$ и $S_{\text{сеч}} = S_{AQC} = \dfrac{a^2}{2}$.

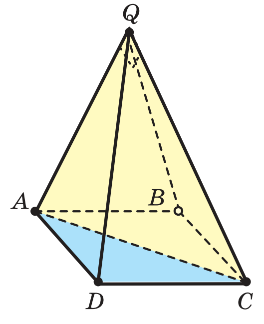


Рис. 115

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}$.

1. Количество диагональных сечений четырёхугольной пирамиды равно:

а) 1; в) 3;

б) 2; г) 4.

2. Определите вид фигуры, которая является сечением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1.

62. Изобразите куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ и отметьте точки B и C на рёбрах SU и RU. Постройте сечение куба плоскостью BCT_1.

63. Точки A, B, C лежат на рёбрах MM_1, M_1P_1, M_1T_1 призмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ (рис. 116). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

64. Изобразите куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и отметьте середины A, B и C рёбер NM, NO и NN_1. Используя полученный рисунок:

а) постройте сечение куба плоскостью ABC;

б) докажите, что треугольник ABC правильный;

в) найдите площадь треугольника ABC, приняв ребро куба равным 1 м.

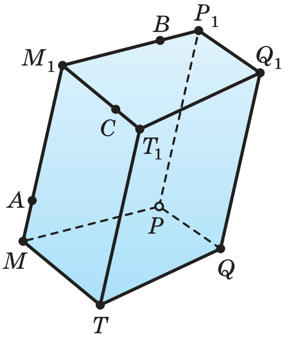


Рис. 116

65. Изобразите куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ и отметьте середины A и B его рёбер NQ и QR. Докажите, что сечение куба плоскостью ABQ_1 является равнобедренным треугольником. Найдите ребро куба, учитывая, что периметр этого треугольника равен a.

66. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, AD. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что все рёбра этой пирамиды равны a.

67. На рисунке 117 изображена правильная пирамида $RSXY$, у которой грань основания равна боковой грани. На её рёбрах RS и RY отмечены их середины A и B. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение

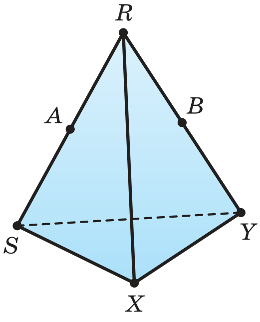


Рис. 117

пирамиды плоскостью ABX. Докажите, что треугольник ABX является равнобедренным, и найдите его периметр и площадь, учитывая, что ребро пирамиды равно a.

68. Рёбра UX, UZ, UU_1 прямоугольного параллелепипеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ равны 6 см, 6 см, 8 см соответственно. Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью XY_1Z является равнобедренным треугольником, и найдите высоты этого треугольника.

69. Изобразите прямоугольный параллелепипед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью, которая проходит через прямую T_1Q_1 и вершину R. Найдите площадь этого сечения, учитывая, что рёбра RT и RQ равны друг ивдругу и равны l, а радиус окружности, описанной около четырёхугольника RQQ_1R_1, равен a.

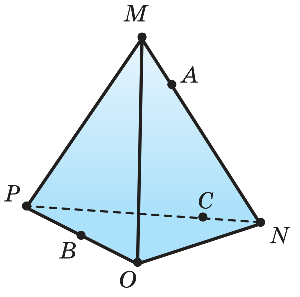


Рис. 118

70. На рисунке 118 изображена треугольная пирамида $MNOP$. Постройте сечение треугольной пирамиды $MNOP$ плоскостью ABC, учитывая, что точки A, B, C выбраны соответственно на рёбрах MN, OP, PN.

71. На рисунке 119 точки U, V, W выбраны на рёбрах AB, BC, AD пирамиды $ABCDE$. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью UVW.

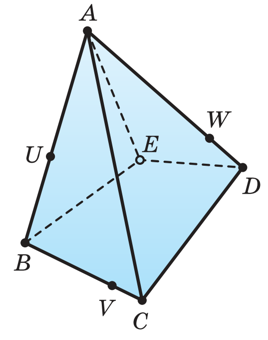


Рис. 119

72. Постройте сечение четырёхугольной призмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$ плоскостью ABC, учитывая, что точки A, B, C выбраны соответственно на рёбрах RS, RV, TT_1 (рис. 120).

73. Сторона основания правильной треугольной призмы $CDEC_1D_1E_1$ равна 12 см, а её боковое ребро — 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которой принадлежит сторона основания и противоположная вершина второго основания.

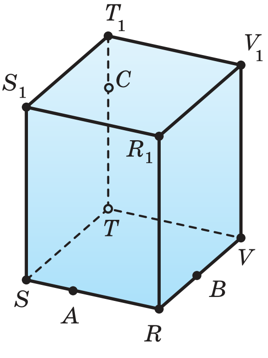


Рис. 120

74. Ребро основания правильной треугольной пирамиды и её боковое ребро соответственно равны k и l. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через две вершины основания и середину бокового ребра.

75*. Точка C — середина ребра JL длиной a правильной треугольной пирамиды $IJKL$, боковая грань которой равна грани основания.

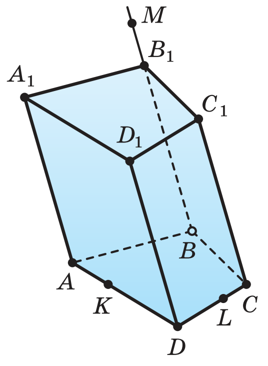


Рис. 121

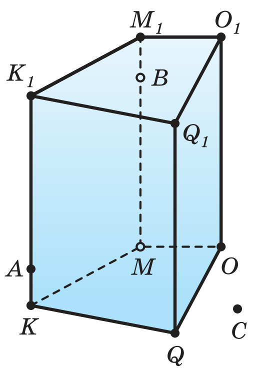


Рис. 122

Постройте сечение пирамиды плоскостью IKC и найдите радиусы окружностей, одна из которых вписана в это сечение, а вторая описана около него.

76*. Изобразите куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ и отметьте середину C его ребра SS_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую RT и точку C. Найдите медианы треугольника RTC, учитывая, что ребро куба равно 40 мм.

77. Точки K и L выбраны на рёбрах DA и DC призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а точка M — на луче BB_1 за точкой B_1 (рис. 121). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью KLM.

78. Точки A и B лежат соответственно на рёбрах KK_1 и MM_1 призмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а точка C — на плоскости грани $KMOQ$ (рис. 122). Постройте сечение призмы плоскостью ABC.

79. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскостью KLM, учитывая, что точки K, L, M лежат соответственно на лучах C_1A_1, EE_1, H_1H за точками A_1, E_1, H (рис. 123).

80. Точки A и B лежат на рёбрах KK_1 и LL_1 треугольной призмы $KLMK_1L_1M_1$, а точка C — на плоскости KLM (рис. 124). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

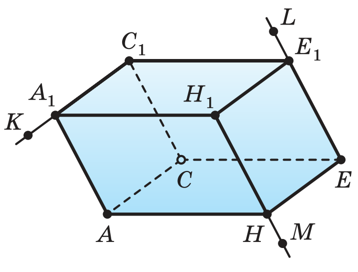


Рис. 123

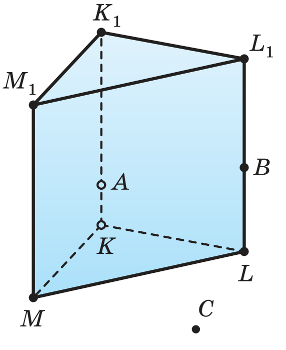


Рис. 124

81. На рисунке 125 изображена призма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на рёбрах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 выбраны точки A, B, C. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

82. Изобразите призму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ и на её рёбрах NN_1, MP, OP выберите точки C, D, E. Постройте сечение призмы плоскостью CDE.

83. Дана правильная призма $XYZX_1Y_1Z_1$, все рёбра которой равны друг другу. Найдите площадь сечения призмы плоскостью XY_1Z_1, учитывая, что полная поверхность призмы равна S.

84. В правильной треугольной призме плоскость, проходящая через сторону её основания и противоположную вершину другого основания, делит полную поверхность призмы в отношении 2 : 3. Найдите эту поверхность, учитывая, что ребро основания равно a.

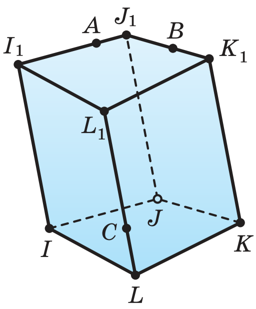


Рис. 125

85. На рисунке 126 изображена правильная пирамида $ABCDE$ и на ребре AE отмечена его середина M. Треугольник BMD — сечение этой пирамиды плоскостью, которой принадлежат прямая BD и точка M. Найдите высоты треугольника BMD, учитывая, что все рёбра пирамиды равны 20 мм.

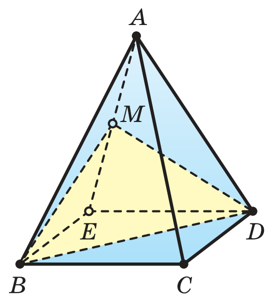


Рис. 126

86. Точка A — середина бокового ребра KE правильной четырёхугольной пирамиды $KCDEF$, все рёбра которой равны друг другу. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую DF и точку A. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что площадь этого сечения равна S.

87. Перенесите в тетрадь рисунок 127, на котором изображена четырёхугольная пирамида $MNOPQ$ и отмечены точки A, B, C на рёбрах PQ, PM, OM соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, B, C.

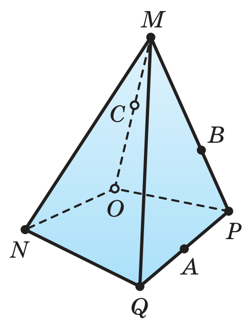


Рис. 127

88. Изобразите четырёхугольную пирамиду $STUVW$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через точки A, B, C на рёбрах ST, TW, VW.

89. Точка A лежит на ребре PQ треугольной пирамиды $PQRS$, точка B — на луче QR за точкой R, а точка C — на плоскости QRS (рис. 128). Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC.

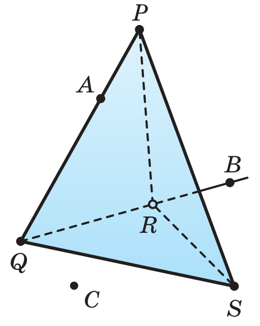


Рис. 128

90. Имеется пирамида $RMNOP$, все рёбра которой равны друг другу. Сечением этой пирамиды плоскостью, проходящей через вершину R и прямую NP, является треугольник RNP. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R.

91. Изобразите правильную пирамиду $TUVWX$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через вершину T и прямую UW. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, учитывая, что площадь построенного сечения равна площади основания, а ребро основания равно l.

92. Пирамида V_1P_1QW имеет своими вершинами вершины куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рис. 129). Найдите полную поверхность этой пирамиды, учитывая, что ребро куба равно 1 м.

93*. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABTVA_1B_1T_1V_1$ плоскостью AB_1T. Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а площадь построенного сечения равна S.

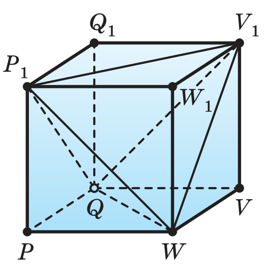


Рис. 129

94*. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскостью, проходящей через вершину I и прямую J_1L_1. Найдите полную поверхность параллелепипеда, учитывая, что его основанием является квадрат со стороной a, а угол J_1IL_1 равен γ.

95*. Четырёхугольник $RBCY$ — сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую RY и точку A на луче SS_1 за точкой S_1 (рис. 130). Докажите, что это сечение является равнобедренной трапецией, и найдите её площадь, учитывая, что основанием параллелепипеда является квадрат $RSYZ$ со стороной c, высота RR_1 параллелепипеда равна h, а вершина S_1 делит отрезок SA пополам.

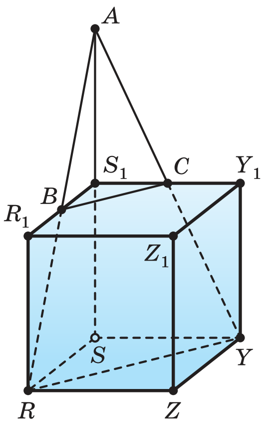


Рис. 130

96*. Изобразите куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через прямую K_1T и такую точку A луча V_1T_1, что вершина T_1 делит отрезок V_1A в соотношении $2 : 1$, если считать от точки V_1. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что ребро куба равно 2 м.

97. Изобразите треугольную пирамиду $CDEF$ и постройте её сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер FC, FD, FE. Найдите площадь грани пирамиды, учитывая, что все её грани — равные друг другу правильные треугольники, а площадь сечения равна 120 см^2.

98*. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы равно a, а площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через концы рёбер, выходящих из одной вершины, равна Q. Найдите боковую поверхность призмы.

Пространственное моделирование

При изготовлении балки из цилиндрического бревна поступают следующим образом:

1) на торце бревна проводят диаметр;

2) делят его на пять равных частей;

3) второй диаметр проводят так, чтобы его проекция на первый составила $\frac{3}{5}$ его;

4) концы построенных диаметров принимают за вершины четырёхугольного сечения и удаляют излишки древесины.

Сравните прочность такой балки с прочностью балки с квадратным сечением, полученной из такого же бревна, учитывая, что прочность балки с прямоугольным сечением пропорциональна ширине и квадрату высоты сечения.

Проверьте свои знания

1. Три точки расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Можно ли выбрать ещё одну точку, равноудалённую от всех остальных?

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести через различные пары из пяти точек:

а) 5; б) 6; в) 8; г) 10?

3. Какое наибольшее количество плоскостей можно провести через разные тройки из четырёх точек?

4. Сколько образуется линий при попарном пересечении трёх плоскостей?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 6.

5. Нарисуйте призму $ABCDEFPQRSTU$, основания которой — правильные шестиугольники. Назовите:

а) плоскости, пересекающиеся с плоскостью UQR;

б) плоскости, пересекающиеся с прямой FT.

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а боковое ребро — 11 см. Найдите полную поверхность призмы.

7. Ребро основания правильной треугольной призмы $IJKPML$ относится к боковому ребру как 2 : 3. Найдите боковую поверхность призмы, учитывая, что длина ломаной $IPLKMI$ равна $4 + \sqrt{13}$ см.

8. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды равна 30 420 мм^2, а её боковое ребро — 169 мм. Найдите площадь основания пирамиды.

9. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 см, а отрезок, соединяющий высоту пирамиды с центром основания, — 16 см. Найдите:

а) боковое ребро и апофему пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

10. Площадь сечения правильной четырёхугольной пирамиды $RUSVW$ с ребром основания a плоскостью RUV равна Q. Найдите боковую поверхность пирамиды.

«Знание только тогда является знанием,
когда оно приобретено усилиями
своей мысли, а не памятью»
(Л. Н. Толстой).

РАЗДЕЛ 2
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В этом разделе вы будете изучать:

- взаимное расположение прямых в пространстве;
- взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве;
- взаимное расположение двух плоскостей.

§ 4. Взаимное расположение прямых в пространстве

А) Две прямые пространства называются **параллельными прямыми**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На плоскости через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. Это утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 1. Через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.

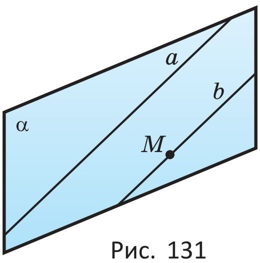


Рис. 131

Доказательство. Пусть имеется прямая a и точка M вне её (рис. 131). По теореме **3** из параграфа **2** через прямую a и точку M проходит единственная плоскость — плоскость α. Если прямая проходит через точку M параллельно прямой a, то она должна лежать в плоскости α. В плоскости α через точку M проходит единственная прямая b, параллельная прямой a. Прямая b — искомая прямая, и она единственная.

На плоскости, если одна из параллельных прямых пересекает некоторую прямую, то и другая также пересекает её. Аналогичное утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Доказательство. Пусть есть две параллельные прямые b и c, и одна из них — прямая b — пересекает плоскость β в точке M (рис. 132).

Поскольку прямые b и c параллельны, то они лежат в одной плоскости, пусть это будет плоскость γ. Плоскости β и γ имеют общую точку M, поэтому по аксиоме **3** они имеют общую прямую l. Эта прямая лежит в плоскости γ и пересекает прямую b в точке M, поэтому она пересекает параллельную ей прямую c в некоторой точке N.

Поскольку прямая l лежит и в плоскости β, то точка N принадлежит этой плоскости. Значит, точка N — общая точка плоскостей β и γ.

Остаётся доказать, что прямая c с плоскостью β не имеет других общих точек. Допустим, что это не так. Пусть прямая c имеет с плоскостью β ещё одну общую точку K. Тогда по аксиоме **2** прямая c лежит в плоскости β. Получается, что прямая c — общая прямая плоскостей β и γ. Но такой прямой является прямая l. Значит, прямая c совпадает с прямой l, что невозможно, так как прямая b параллельна прямой c и пересекает прямую l.

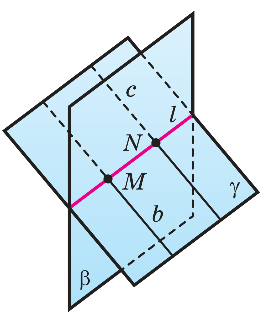


Рис. 132

Вы знаете, что если на плоскости две прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. Докажем, что такое утверждение истинно и в пространстве.

Теорема 3. Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны и друг другу.

Доказательство. Пусть прямые m и n параллельны прямой p (рис. 133). Докажем, что прямая m параллельна прямой n, т. е. прямые m и n лежат в одной плоскости и не пересекаются.

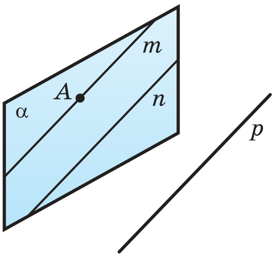


Рис. 133

На прямой m выберем произвольно точку A, через неё и прямую n проведём плоскость α. Докажем, что прямая m лежит в этой плоскости. Допустим, что это не так. Учитывая, что прямая m имеет с плоскостью α общую точку, нужно согласиться с тем, что прямая m пересекает плоскость α. Тогда по теореме **2** эту плоскость пересекает прямая p, так как она параллельна прямой m, и прямая n, которая параллельна прямой p. Но такое невозможно, так как прямая n лежит в плоскости α. Значит, прямая m вместе с прямой n лежат в плоскости α.

Прямые m и n не пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. прямые m и n пересекаются в некоторой точке B. Получается, что через точку B проходят две различные прямые m и n, параллельные прямой p, что противоречит теореме 1.

Используя теорему **3**, можно доказать важные утверждения о параллелепипеде.

Теорема 4. У параллелепипеда: а) противоположные грани равны; б) все его диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Доказательство. Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 134).

а) Докажем, например, равенство противоположных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

Отрезки AB и A_1B_1 а также BC и B_1C_1 равны как противоположные стороны параллелограммов ABB_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 параллельны и равны друг другу, так как каждый из них параллелен отрезку BB_1 и равен ему. Значит, четырёхугольник ACC_1A_1 — параллелограмм. А поэтому отрезки AC и A_1C_1 равны друг другу как противоположные стороны этого параллелограмма.

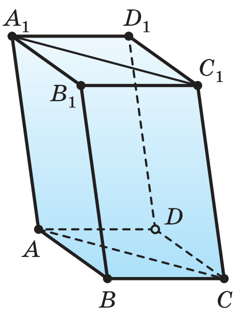


Рис. 134

Поскольку $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, поэтому равны и углы ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, равны друг другу и параллелограммы-грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

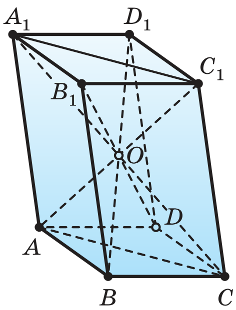


Рис. 135

б) Докажем, что все диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Четырёхугольник AA_1C_1C — параллелограмм, так как его противоположные стороны AA_1 и CC_1 равны и параллельны друг другу, потому что каждый из отрезков AA_1 и CC_1 равен отрезку DD_1 и параллелен ему (рис. 135). Поэтому диагонали AC_1 и CA_1 точкой пересечения O делятся пополам.

Четырёхугольник DCB_1A_1 — также параллелограмм, поэтому его диагональ DB_1 пересекает другую диагональ CA_1 в её середине, т. е. в точке O.

Наконец, четырёхугольник ABC_1D_1 — параллелограмм, поэтому его диагональ BD_1 пересекает другую диагональ AC_1 в её середине O.

Если две прямые пересекаются (рис. 136) или параллельны (рис. 137), то они лежат в одной плоскости. Две прямые, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися** (рис. 138).

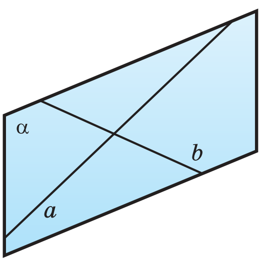


Рис. 136

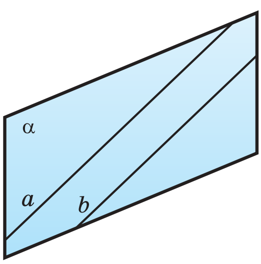


Рис. 137

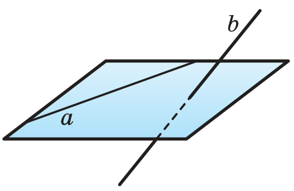


Рис. 138

Докажем признак скрещивающихся прямых.

Теорема 5. Если из двух прямых одна принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.

Доказательство. Пусть прямая p лежит в плоскости α, а прямая q пересекает эту плоскость в точке A, не принадлежащей прямой p (рис. 139). Докажем, что прямые p и q скрещиваются.

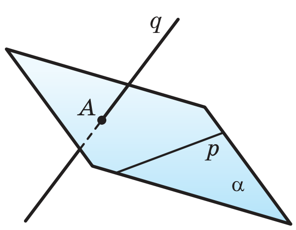


Рис. 139

Допустим, что прямые p и q лежат в некоторой плоскости β. Тогда плоскости β принадлежит прямая p и точка A, которая принадлежит прямой q, и, значит, плоскость β совпадает с плоскостью α. Получили, что плоскости α принадлежит прямая q, которая по условию ей не принадлежит. Это противоречие означает, что сделанное допущение ложно.

Б) Мы знаем, что *углом между пересекающимися прямыми* называется величина одного из четырёх образовавшихся при этом углов, который не больше 90° (рис. 140).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Докажем, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора точки, через которую проходят прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

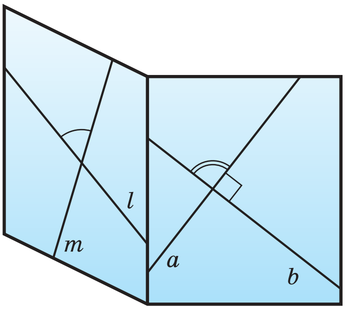


Рис. 140

Теорема 6. Угол между пересекающимися прямыми равен углу между параллельными им пересекающимися прямыми.

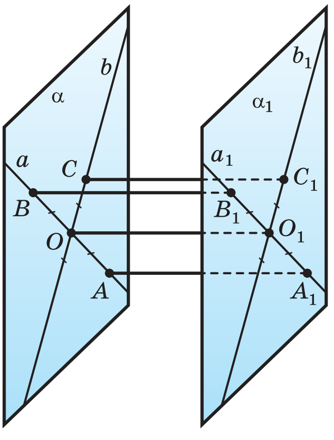


Рис. 141

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O, прямые a_1 и b_1 — в точке O_1 и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 141).

От точки O на прямой a отложим равные отрезки OA и OB, а на прямой b — отрезок OC, равный отрезку OA. Через точки A и B проведём прямые, параллельные прямой OO_1, они пересекут прямую a_1 в точках A_1 и B_1 соответственно. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой OO_1, она пересечёт прямую b_1 в точке C_1.

Четырёхугольник OO_1A_1A является параллелограммом, так как его противоположные стороны OA и O_1A_1 параллельны и равны. Поэтому $AA_1 = OO_1$ и $AA_1 \parallel OO_1$. Аналогично, поскольку четырёхугольник OO_1B_1B — параллелограмм, то $BB_1 = OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, а так как OO_1C_1C — параллелограмм, то $BB_1 = CC_1$ и $CC_1 \parallel OO_1$.

Поскольку каждый из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равен и параллелен отрезку OO_1, то они равны и параллельны друг другу. Поэтому четырёхугольники AA_1C_1C и BB_1C_1C оба являются параллелограммами и, значит, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$.

Теперь по признаку равенства треугольников по трём сторонам можно утверждать, что $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ и $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а потому $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ и $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Таким образом, мы доказали, что углы, образованные при пересечении прямых a и b, равны соответственным углам, образованным при пересечении прямых a_1 и b_1.

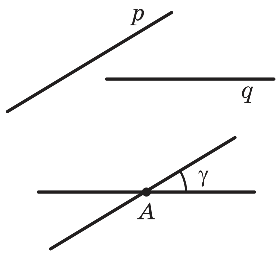


Рис. 142

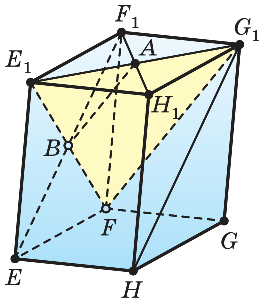


Рис. 143

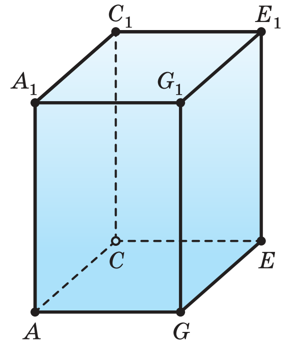


Рис. 144

На рисунке 142 показано, как можно найти угол между скрещивающимися прямыми: выбрать произвольно точку A пространства и через неё провести прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Понятно, что точка A может быть выбрана и на одной из скрещивающихся прямых.

Пример. На рисунке 143 точки A и B — точки пересечения диагоналей граней $E_1F_1G_1H_1$ и EE_1F_1F параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Построим угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1. Для этого в плоскости E_1FG_1, которой принадлежат точка G_1 и прямая AB, через точку G_1 параллельно прямой AB проведём прямую. Это прямая G_1F. Угол FG_1H — искомый угол между скрещивающимися прямыми AB и HG_1.

Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Прямые, угол между которыми равен 90°, называются **перпендикулярными прямыми**.

Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися, а могут быть и скрещивающимися. Например, перпендикулярные прямые AC и AG, которые проходят через соответствующие рёбра прямоугольного параллелепипеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рис. 144), пересекаются, а перпендикулярные прямые AC и EE_1 скрещиваются.

?

1. Сформулируйте утверждение о прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой.
2. Какие две прямые пространства называются параллельными; пересекающимися; скрещивающимися?
3. Сформулируйте утверждение о параллельных прямых, из которых одна пересекает данную плоскость.
4. Сформулируйте утверждение о прямых, параллельных некоторой прямой.
5. Сформулируйте свойство противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.
6. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
7. Какой угол называют углом между пересекающимися прямыми; скрещивающимися прямыми; параллельными прямыми?

8. Как построить угол между скрещивающимися прямыми?

9. Какие прямые называют перпендикулярными?

10. Точки M, N, P — соответственно середины рёбер HE, HF, HG треугольной пирамиды $EFGH$ (рис. 145), а точка K лежит на отрезке FN. Определите взаимное расположение прямых:
а) PK и FG; б) MP и EG; в) NH и EF.

11. Установите, пересекаются ли прямые, на которых лежат основания двух треугольников BAC и DFE (рис. 146), имеющих общую среднюю линию.

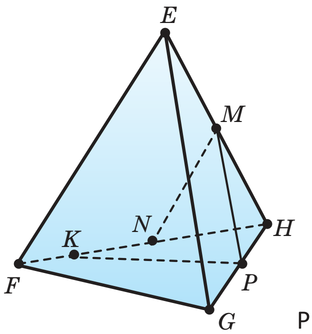


Рис. 145

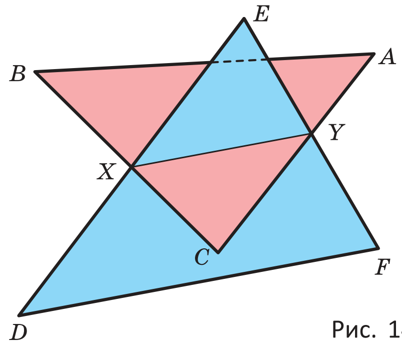


Рис. 146

12. Определите взаимное расположение линии реки и линии моста (рис. 147).


Рис. 147

13. Используя рисунок 148, на котором дан куб $LKMNL_1K_1M_1N_1$, назовите скрещивающиеся прямые.

14. В треугольной пирамиде $EFGH$ точки M, N, P — середины рёбер HE, HF, HG соответственно, а точка K лежит на отрезке FN (рис. 149). Определите взаимное расположение прямых:
а) KP и MN; б) MN и EG; в) MH и FG.

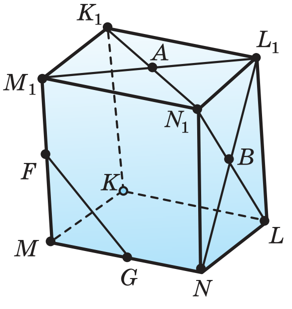


Рис. 148

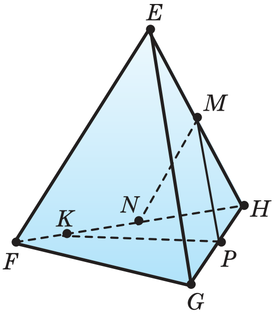


Рис. 149

Задача 1. Диагонали грани $L_1K_1M_1N_1$ куба $LKMNL_1K_1M_1N_1$ пересекаются в точке A, а диагонали грани LL_1N_1N — в точке B. Серединами рёбер MM_1 и MN являются точки F и G соответственно (рис. 150). Определите взаимное расположение прямых AB и FG.

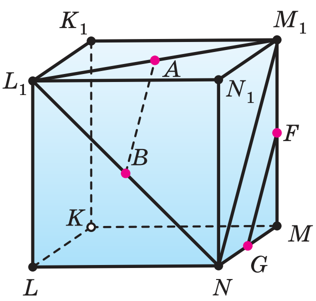


Рис. 150

Решение. $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — куб, следовательно, $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат и LL_1N_1N — квадрат.

$L_1K_1M_1N_1$ — квадрат и $L_1M_1 \cap K_1N_1 = A$, поэтому A — середина L_1M_1.

LL_1N_1N — квадрат и $L_1N \cap LN_1 = B$, поэтому B — середина L_1N.

Поскольку AB — средняя линия $\triangle NL_1M_1$ (A — середина L_1M_1 и B — середина L_1N), то $AB \parallel NM_1$.

Поскольку FG — средняя линия $\triangle NMM_1$ (F — середина MM_1 и G — середина NM), то $FG \parallel NM_1$.

$AB \parallel NM_1$ и $FG \parallel NM_1$, поэтому $AB \parallel FG$.

Ответ: $AB \parallel FG$.

Задача 2. Отрезок XY имеет с плоскостью β одну общую точку X. Через точку Y и середину Z отрезка XY проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость β в точках Y_1 и Z_1 соответственно (рис. 151). Найдите длину отрезка YY_1, учитывая, что $ZZ_1 = 10$ см.

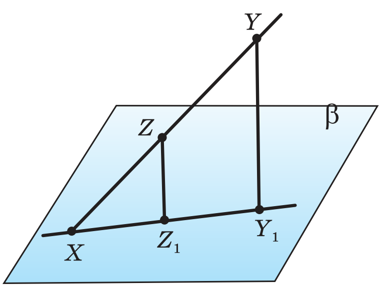


Рис. 151

Решение. Пересекающиеся прямые XY и YY_1 определяют плоскость XYY_1.

$XY_1 \subset (XYY_1)$ и $XY_1 \subset \beta$, следовательно,

$$(XYY_1) \cap \beta = XY_1.$$

$Y_1 \in \beta$, $Z_1 \in \beta$ и $YY_1 \parallel ZZ_1$, следовательно,

$$ZZ_1 \subset (XYY_1) \text{ и } Z_1 \in XY_1.$$

ZZ_1 — средняя линия $\triangle XYY_1$ (Z — середина XY и $YY_1 \parallel ZZ_1$), следовательно,

$$YY_1 = 2ZZ_1 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см)}.$$

Ответ: 20 см.

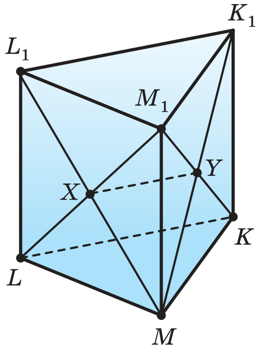


Рис. 152

Задача 3. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 1 м. Диагонали граней LL_1M_1M и MM_1K_1K пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 152). Найдите площадь четырёхугольника XL_1K_1Y.

Решение. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма и $LK = KM = LM = L_1K_1 = K_1M_1 = L_1M_1 = LL_1 = KK_1 = MM_1 = 1$ м, следовательно, LL_1M_1M и MM_1K_1K — квадраты со стороной 1 м.

Поэтому $ML_1 = MK_1 = \sqrt{2}$ м.

$X = ML_1 \cap LM_1$ и $Y = KM_1 \cap MK_1$, поэтому $MX = XL_1$ и $K_1Y = YM$.

$MX = XL_1$ и $K_1Y = YM$, поэтому XY — средняя линия $\triangle\, ML_1K_1$.

XY — средняя линия $\triangle\, ML_1K_1$, поэтому $XY = \frac{1}{2}\, L_1K_1 = \frac{1}{2}$ (м) и $XY \parallel L_1K_1$.

XY — средняя линия $\triangle\, ML_1K_1$, поэтому $S_{MXY} = \frac{1}{4} S_{ML_1K_1}$, $S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1}$.

$$p_{ML_1K_1} = \frac{ML_1 + L_1K_1 + MK_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ (м)}.$$

$$S_{ML_1K_1} = \sqrt{p_{ML_1K_1}\left(p_{ML_1K_1} - ML_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - L_1K_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - MK_1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ м^2.

Задача 4. На ребре HX треугольной пирамиды $HXYZ$ (рис. 153) выбрана такая точка S, что $HS : SX = 2 : 5$, и через неё проведена прямая q, параллельная медиане HP грани HYZ. Найдите медиану HP, учитывая, что длина отрезка прямой q, находящегося внутри пирамиды, равна 35 см.

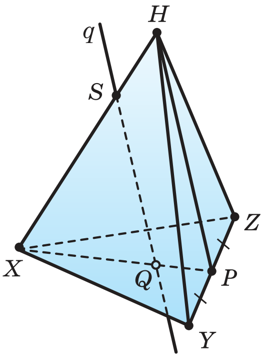


Рис. 153

Решение. Поскольку точки X и P лежат как в плоскости HXP, так и в плоскости XYZ, то $(HXP) \cap (XYZ) = XP$. Точка S прямой HX лежит в плоскости HXP, так как $HX \subset (HXP)$.

Прямая q проходит через точку S плоскости HXP параллельно прямой HP этой плоскости, поэтому $q \subset (HXP)$.

Поскольку прямые $q \parallel HP$, а прямые HP и XP пересекаются, то пересекаются и прямые q и XP. Пусть $q \cap XP = Q$.

$$\triangle\, HXP \sim \triangle\, SXQ\ (SQ \parallel HP), \text{ поэтому } HP : SQ = HX : SX,$$

$$HP = SQ \cdot HX : SX = SQ \cdot \frac{HS + SX}{SX} = SQ \cdot \left(\frac{HS}{SX} + 1\right) =$$

$$= 35 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right) = 49 \text{ (см)}.$$

Ответ: 49 см.

Задача 5. Прямая l параллельна диагонали AC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что прямые l и CD — скрещивающиеся, и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle BAC = 60°$.

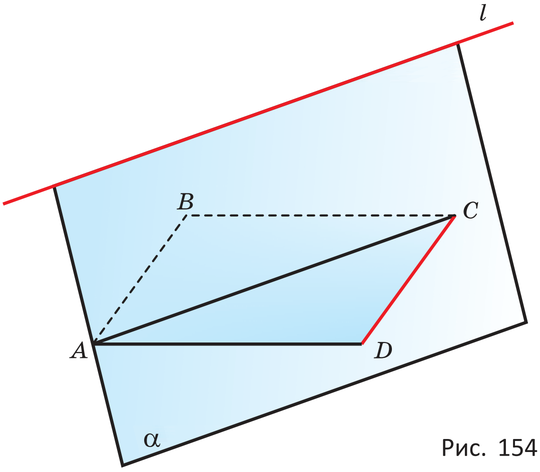


Рис. 154

Решение. Пусть α — плоскость, в которой лежат параллельные прямые l и AC. Тогда $\alpha \cap (ACD) = AC$ (рис. 154).

Поскольку $C \in \alpha$, а $D \notin \alpha$, то $C = \alpha \cap CD$.

Прямые l и CD — скрещивающиеся по теореме 5 ($l \subset \alpha$, $C = \alpha \cap CD$ и $C \notin l$).

$l \parallel AC$, поэтому угол между l и CD равен углу между AC и CD и равен углу DCA (теорема **6**).

$ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $\angle DCA = \angle BAC = 60°$.

Ответ: $60°$.

99. Точки M и N — середины рёбер PC и PD треугольной пирамиды $PCDF$, а точки U и V — середины отрезков EM и EN (рис. 155). Установите, являются ли параллельными прямые MN и UV.

100. Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника (рис. 156) являются вершинами параллелограмма.

101. Параллелограмм $MNKL$ и треугольник NAK не лежат в одной плоскости. Прямая a проходит через точку P прямой AK и параллельна прямой NK. Определите взаимное расположение прямых a и ML.

102. Есть правильная четырёхугольная пирамида $PMNKL$. На прямой PL выбрана точка D, через которую проведена прямая l, параллельная прямой LK. Определите взаимное расположение прямых MN и l.

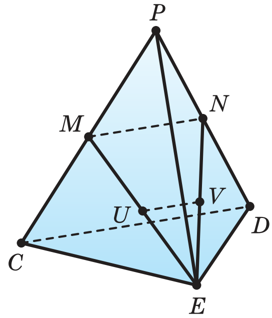


Рис. 155

Пространственный четырёхугольник — четырёхугольник, вершины которого не принадлежат одной плоскости.

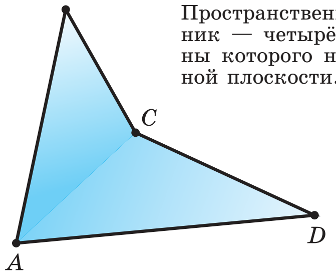


Рис. 156

103. Имеются параллелограмм $MNOP$ и трапеция $MNEK$ с основанием EK, причём эти четырёхугольники не лежат в одной плоскости.
а) Установите взаимное расположение прямых OP и EK.
б) Найдите периметр трапеции, учитывая, что в неё можно вписать окружность, а её основания MN и EK равны 45 см и 55 см соответственно.

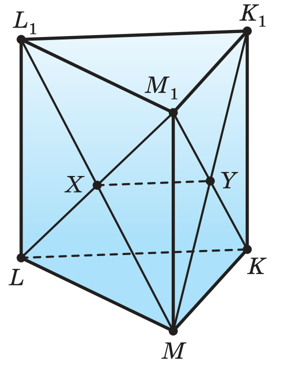


Рис. 157

104. $LKML_1K_1M_1$ — правильная треугольная призма, длина каждого ребра которой равна 2 м. Диагонали граней LL_1M_1M и MM_1K_1K пересекаются соответственно в точках X и Y (рис. 157). Найдите периметр четырёхугольника $XLKY$.

105. Точка P лежит на продолжении ребра NM параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N, учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

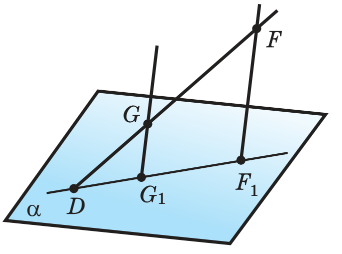


Рис. 158

106. Конец D отрезка DF принадлежит плоскости α, через другой его конец F и его точку G проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках F_1 и G_1 (рис. 158). Найдите длину отрезка GG_1, учитывая, что $FF_1 = 32$ см и $DG : GF = 3 : 5$.

107. Вершины M и N трапеции $MNLK$ с основаниями NL и KM принадлежат плоскости γ, а две другие вершины не принадлежат ей. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения прямой LK с плоскостью γ, учитывая, что $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

108. Точка E является точкой отрезка TR, который не пересекает плоскость γ. Параллельные прямые, проведённые через точки T, R, E, пересекают плоскость γ в точках T_1, R_1, E_1 соответственно. Докажите, что точки T_1, R_1, E_1 лежат на одной прямой, и найдите отрезок EE_1, учитывая, что $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

109. На отрезке AB, конец A которого принадлежит плоскости α, выбрана точка C, и через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1, учитывая, что:
а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 14$ см;
б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 50$ см.

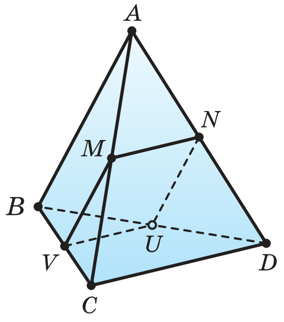


Рис. 159

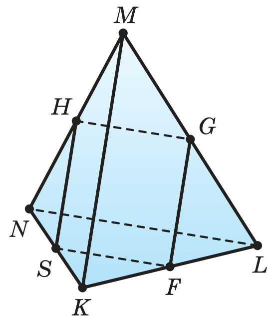


Рис. 160

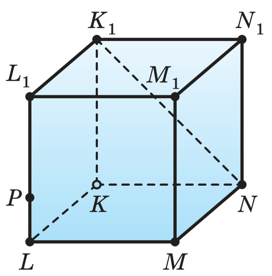


Рис. 161

110. Точки M, N, U, V — соответственно середины рёбер AC, AD, BD, BC треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 159). Найдите периметр четырёхугольника $MNUV$, учитывая, что $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

111. Точки H, G, F, S — середины рёбер MN, ML, LK, KN треугольной пирамиды $MKLN$ (рис. 160). Найдите периметр четырёхугольника $HGFS$, учитывая, что $LN = 18$ мм, $MK = 22$ мм.

112. Точка P выбрана на ребре LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 161). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с плоскостью M_1N_1M прямой q, проходящей через точку P и параллельной прямой NK_1.

113. Через вершины D и Q треугольника PDQ со стороной PQ, равной 20 см, проведена плоскость α, которой не принадлежит вершина P. Учитывая, что прямая x параллельна прямой PQ и пересекает сторону PD в такой точке C, что $PC : CD = 2 : 3$:

а) докажите, что прямая x пересекает плоскость α;

б) найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой x с плоскостью α.

114. На ребре GH треугольной пирамиды $FGHK$ с равными друг другу рёбрами выбрана такая точка T, что $HT : TG = 1 : 3$, и через неё проведена прямая h, параллельная медиане HM боковой грани KHF и пересекающая поверхность пирамиды в точке R. Найдите ребро пирамиды, учитывая, что $TR = 6$ см.

115. Через точку пересечения медиан грани MNK треугольной пирамиды $JMNK$ с равными друг другу рёбрами проведена прямая b, параллельная прямой MJ, а на ребре MJ отмечена его середина Z. Найдите площадь треугольника NZJ, учитывая, что отрезок прямой b, расположенный внутри пирамиды, равен m.

116. Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямых m и BC, учитывая, что:

а) прямая m лежит в плоскости ABC и не пересекает отрезок AC;

б) прямая m не лежит в плоскости ABC.

117. Точки M и N выбраны на скрещивающихся прямых a и b соответственно. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β. Определите:
а) лежит ли прямая b в плоскости α;
б) пересекаются ли плоскости α и β, и если они пересекаются, то по какой прямой.

118. Докажите, что если AB и CD — скрещивающиеся прямые, то AD и BC — также скрещивающиеся прямые.

119. Через точку M вне прямой a проведены две прямые, не имеющие с прямой a общих точек. Докажите, что хотя бы одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися.

120. Прямая m пересекает прямую k и не пересекает прямую l, параллельную прямой k. Докажите, что l и m — скрещивающиеся прямые.

121. Прямые XU и VT — параллельные, а прямые XY и VT — скрещивающиеся. Найдите угол между прямыми XY и VT, учитывая, что:
а) $\angle YXU = 40°$; б) $\angle YXU = 135°$; в) $\angle YXU = 90°$.

122. Прямая l параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в его плоскости. Докажите, что l и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, учитывая, что один из углов параллелограмма равен:
а) $58°$; б) $133°$.

123. Прямая m параллельна диагонали FH ромба $EFGH$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что скрещиваются прямые:
а) m и EG, и найдите угол между ними;
б) m и EH, и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle EFG = 128°$.

124. Через вершину P ромба $PQRS$ проведена прямая a, параллельная диагонали QS, а через вершину R — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что:
а) прямые a и RS пересекаются; б) a и b скрещиваются.

125. Стороны AB и CD пространственного четырёхугольника $ABCD$ равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середину отрезков BC и AD.

126*. Точки P, Q, R, S — середины рёбер AB, BB_1, AD и диагонали B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 1 м, а боковое ребро равно 7 м (рис. 162). Определите, во сколько раз сторона PQ четырёхугольника $PQSR$ больше его стороны QS.

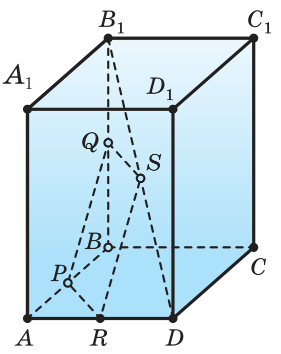


Рис. 162

§ 5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

А) В пространстве общих точек у прямой и плоскости может быть ни одной, одна или более одной.

Если у прямой и плоскости общих точек более одной, то, как утверждает аксиома **2**, сама прямая принадлежит плоскости (рис. 163).

Прямая и плоскость могут иметь единственную общую точку. Пусть α — некоторая плоскость (рис. 164). Выберем точку A на плоскости α и точку M вне плоскости α. Точки A и M определяют единственную прямую l, которая не имеет с плоскостью α иных общих точек, кроме точки A. Действительно, если допустить обратное, то по аксиоме **2** прямая l будет лежать в плоскости α, а значит, в этой плоскости будет лежать и точка M, что противоречит выбору этой точки.

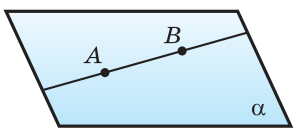


Рис. 163

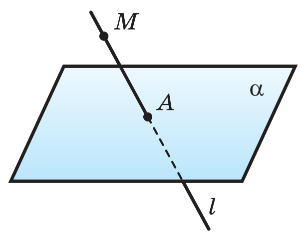
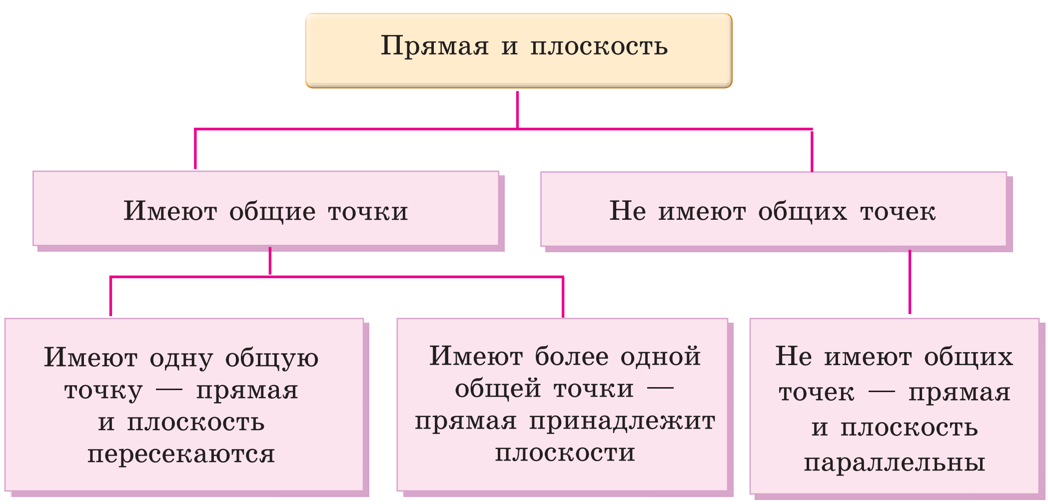


Рис. 164

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются *пересекающимися*.

Прямая и плоскость могут не иметь общих точек. В этом случае говорят, что прямая a **параллельна** плоскости α, и пишут $a \parallel \alpha$.



Докажем *признак параллельности прямой и плоскости.*

Теорема 7. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая l параллельна прямой k, принадлежащей плоскости β, и l не принадлежит плоскости β (рис. 165). Нужно доказать, что прямая l не имеет общих точек с плоскостью β. Допустим, что это не так, т. е. прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке U. Эта точка не может лежать на прямой k, так как $k \parallel l$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых получаем, что прямые k и l — скрещивающиеся.

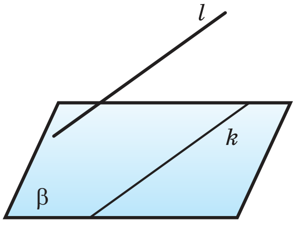


Рис. 165

А это противоречит тому, что прямые k и l параллельные. Значит, прямая l и плоскость β не могут иметь общих точек, т. е. $l \parallel \beta$.

Б) Докажем *свойство прямой, параллельной плоскости.*

Теорема 8. Линия пересечения плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой плоскости, параллельна этой прямой.

Доказательство. Пусть прямая a, параллельная плоскости α, принадлежит плоскости β, и прямая b — линия пересечения плоскостей α и β (рис. 166). Тогда прямые a и b обе лежат в плоскости β и не пересекаются, так как в противном случае прямая a пересекала бы плоскость β. Значит, прямые a и b параллельны.

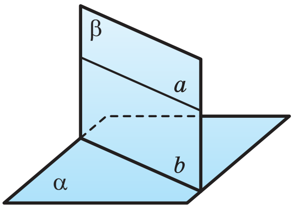


Рис. 166

Пример 1*. Докажем, что *через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.*

Пусть прямые a и b — скрещивающиеся (рис. 167). На прямой a выберем произвольно точку U и через неё проведём прямую c, параллельную прямой b. Прямые a и c пересекаются, поэтому через них проходит единственная плоскость α. Плоскость α параллельна прямой b, так как прямая b не лежит в плоскости α и параллельна прямой c, лежащей в плоскости α.

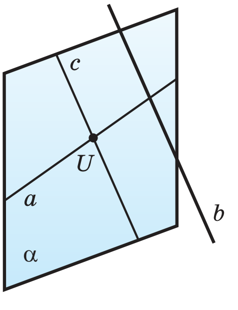


Рис. 167

1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте свойство прямой, параллельной плоскости.
3. Определите взаимное расположение натянутых троллейбусных или трамвайных проводов и плоскости земли (рис. 168). Приведите примеры взаимного расположения прямой и плоскости из окружающего мира.
4. Треугольники ABC и ABD лежат в разных плоскостях (рис. 169). Верно ли, что любая прямая, параллельная прямой CD, пересекает эти плоскости?

Рис. 168

5. Точки P и Q лежат в плоскости α, а точка R не принадлежит ей. Определите взаимное расположение прямой, проходящей через середины отрезков PR и QR (рис. 170), и плоскости α.
6. Вне плоскости прямоугольника $UVXY$ выбрана точка R (рис. 171). Определите взаимное расположение прямой UV и плоскости XYR.

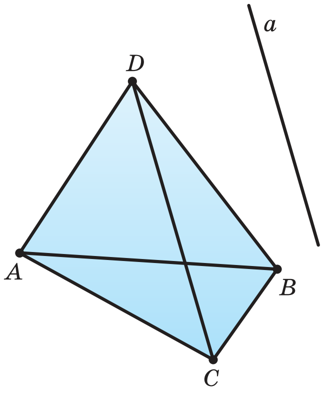


Рис. 169

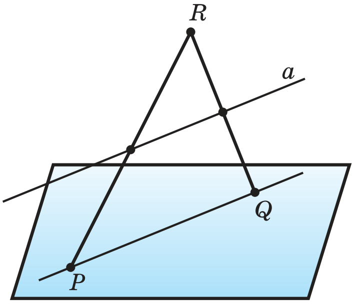


Рис. 170

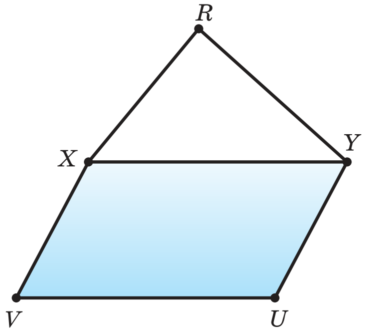


Рис. 171

Задача 1. Основание LM трапеции $KLMN$ равно 48 см. Вне плоскости трапеции выбрана точка O и отмечена середина P отрезка LO (рис. 172). Постройте точку H пересечения плоскости KNP и отрезка OM. Найдите длину отрезка PH.

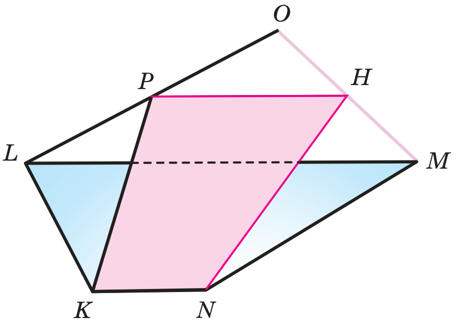


Рис. 172

Решение. $M \notin LO$, поэтому определена (LOM) (теорема **4**).

$KN \parallel LM$ и $LM \subset (LOM)$, поэтому $KN \parallel (LOM)$ (теорема **7**).

$P \in LO$ и $LO \subset (LOM)$, поэтому $P \in (LOM)$.

$P \in (LOM)$ и $P \in (KPN)$, поэтому $(LOM) \cap (KPN) = a$ и $P \in a$ (аксиома **3**).

$KN \subset (KPN)$, $KN \parallel (LOM)$, $(LOM) \cap (KPN) = a$, значит, $a \parallel KN$ (теорема **8**).

$a \parallel KN$ и $KN \parallel LM$, значит, $a \parallel LM$.

$(LOM) \cap (KPN) = a$, значит, $a \subset (LOM)$.

$a \parallel LM$ и $a \cap OM = H$, значит, $H \in OM$ и $H \in a$.

$P \in a$ и $H \in a$, значит, $a = PH$.

P — середина LO и $PH \parallel LM$, поэтому PH — средняя линия $\triangle LOM$.

$LM = 48$ см и PH — средняя линия $\triangle LOM$, поэтому $PH = \dfrac{1}{2}LM$.

$PH = \dfrac{1}{2}LM$ и $LM = 48$ см, поэтому $PH = \dfrac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Задача 2. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды $FABCD$ плоскостью α, проходящей через ребро AB и точку X на ребре FC.

Решение. Определим, по какой линии пересекает поверхность пирамиды плоскость α, которой принадлежат прямая AB и точка X.

$AB \subset \alpha$ и $AB \subset (FAB)$, поэтому $\alpha \cap (FAB) = AB$ (рис. 173).

$B \in \alpha$ и $B \in (FBC)$, $X \in \alpha$ и $X \in (FBC)$, поэтому $\alpha \cap (FBC) = BX$.

$X \in \alpha$ и $X \in (FCD)$, поэтому $\alpha \cap (FCD) = a$ и $X \in a$.

$FABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, поэтому $ABCD$ — квадрат и $AB \parallel CD$.

$AB \parallel CD$ и $CD \subset (FCD)$, поэтому $AB \parallel (FCD)$ (теорема **7**).

$AB \subset \alpha$, $AB \parallel (FCD)$ и $\alpha \cap (FCD) = a$, поэтому $a \parallel AB$ и $a \subset \alpha$ (теорема **8**).

$\alpha \cap (FCD) = a$ и $a \cap FD = Y$, поэтому $Y \in a$ и $Y \in FD$.

$X \in a$ и $Y \in a$, поэтому $a = XY$, $XY \parallel AB$, $|XY| < |AB|$.

$Y \in FD$ и $FD \subset (FCD)$, поэтому $Y \in (FCD)$.

$Y \in a$ и $a \subset \alpha$, поэтому $Y \in \alpha$.

$X \in \alpha$ и $X \in (FCD)$, $Y \in \alpha$ и $Y \in (FCD)$, поэтому $\alpha \cap (FCD) = XY$.

$A \in \alpha$ и $A \in (FAD)$, $Y \in \alpha$ и $Y \in (FAD)$, поэтому $\alpha \cap (FAD) = AY$.

Получили, что плоскость α пересекает пирамиду $FABCD$ по трапеции $ABXY$.

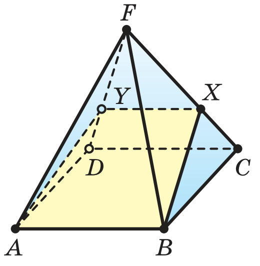


Рис. 173

Задача 3*. Точки E, F, G — середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $MNKL$ (рис. 174).

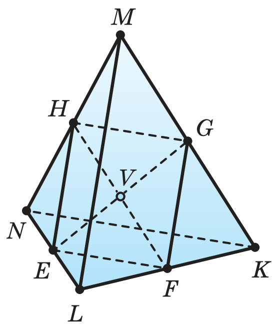


Рис. 174

а) Постройте точку H, в которой плоскость EFG пересекает ребро MN.

б) Докажите, что отрезки EG и FH пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Решение. а) Точки G и F — общие точки плоскостей EFG и MKL. Поэтому $(EFG) \cap (MKL) = GF$.

Плоскость EFG имеет с гранью NKL общие точки E и F. Поэтому $(EFG) \cap (NKL) = EF$.

E и F — середины рёбер LN и LK, значит, EF — средняя линия $\triangle LNK$, и поэтому $EF \parallel NK$ и $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$.

$EF \parallel NK$ и $NK \subset (MKN)$, следовательно, $EF \parallel (MKN)$ (теорема **7**).

$EF \subset (EFG)$ и $EF \parallel NK$ и $(EFG) \cap (MKN) = GH$, следовательно, $GH \parallel NK$.

Поскольку G — середина ребра MK и $GH \parallel NK$, то GH — средняя линия $\triangle MNK$, и поэтому $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$. Значит, H — середина ребра MN. Искомое сечение — четырёхугольник $HEFG$.

б) Поскольку $EF \parallel NK$ и $GH \parallel NK$, $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$ и $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$, то $HEFG$ — параллелограмм. Отрезки EG и FH — его диагонали. Поэтому $EG \cap FH = V$ и V — середина EG и FH.

127. Учитывая, что точки Q, H, G — середины диагоналей SE_1, S_1R_1, R_1T соответствующих граней куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рис. 175):
а) установите, параллельна ли прямая QH плоскости SS_1T_1;
б) докажите, что прямая HG параллельна плоскости E_1ER.

128. Учитывая, что плоскость α проходит через основание ST трапеции $SURT$ и не проходит через вершину R, а точка A лежит в плоскости α (рис. 176):

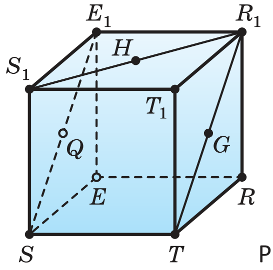


Рис. 175

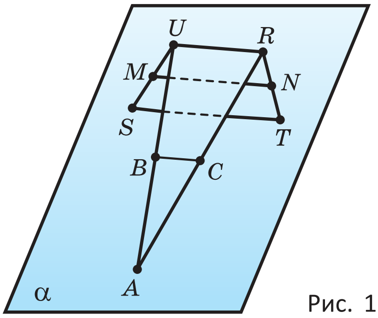


Рис. 176

а) докажите, что средняя линия MN трапеции параллельна плоскости α;

б) установите, параллельна ли плоскости α средняя линия BC треугольника UAR.

129. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $ABMN$. Определите взаимное расположение прямой AB и плоскости MDN.

130. Точка A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а точка B — середина отрезка NA (рис. 177). Докажите, что плоскость MBQ пересекает прямую AP.

131. На ребре DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбрана точка Q (рис. 178). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения с поверхностью куба прямой c, проходящей через точку Q и параллельной прямой D_1G.

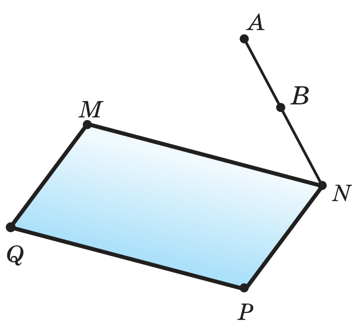


Рис. 177

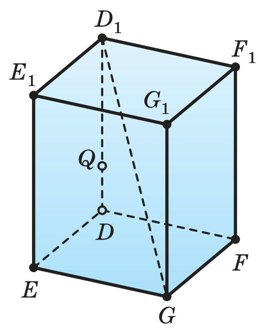


Рис. 178

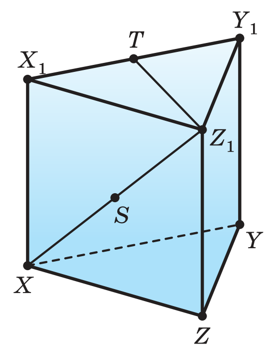


Рис. 179

132. Все рёбра правильной треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны друг другу, а точка S — середина диагонали XZ_1 грани XX_1Z_1Z (рис. 179). Сделайте такой рисунок в тетради и:

а) постройте точку пересечения с гранью XX_1Y_1Y прямой p, которая проходит через точку S и параллельна медиане Z_1T грани $X_1Y_1Z_1$;

б) найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что длина отрезка прямой p, расположенного внутри призмы, равна 10 см.

133. Все рёбра треугольной призмы $XYZX_1Y_1Z_1$ равны между собой, Q — точка пересечения медиан грани XYZ. Найдите длину расположенного внутри призмы отрезка прямой, проходящей через середину отрезка X_1Q и параллельной прямой ZQ, учитывая, что площадь боковой поверхности призмы равна S.

134. Учитывая, что точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, что отрезок MN параллелен плоскости, в которой лежит грань CDD_1C_1;

б) найдите длину отрезка MN, учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

135. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны $4\sqrt{3}$. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри пирамиды.

136. Через точку пересечения медиан грани MPQ треугольной пирамиды $MNPQ$ проведена прямая, параллельная медиане PA грани MNP. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка этой прямой, учитывая, что $PA = m$.

137. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $TPQUV$ равны между собой, точки B, C, D — середины рёбер TP, TV, TU. Через точку B проведена прямая p, параллельная прямой CD. Постройте точку A пересечения прямой p с плоскостью TQU и найдите площадь основания пирамиды, учитывая, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.

138. Дан параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на ребре SS_1 которого выбрана точка B (рис. 180). Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, Q, P_1.

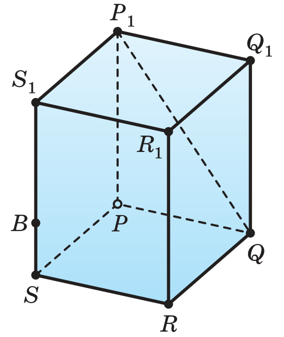


Рис. 180

139. На рисунке 181 изображена четырёхугольная пирамида, основанием которой является трапеция $MNKL$ с основаниями KL и MN. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку B ребра SL и прямую MN. Какой фигурой является сечение?

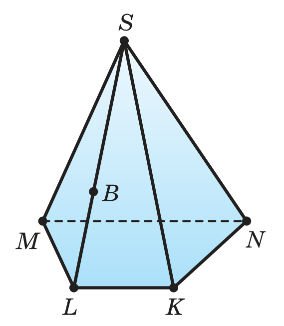


Рис. 181

140. Есть прямая a, параллельная плоскости α, и точка T, принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая проходит через точку T и параллельна прямой a, лежит в плоскости α.

141. Одно основание трапеции параллельно плоскости β, а вершина другого лежит в этой плоскости. Докажите, что:

а) другое основание трапеции лежит в плоскости β;

б) средняя линия трапеции параллельна плоскости β.

142. Докажите, что если данная прямая не лежит в пересекающихся плоскостях и параллельна линии их пересечения, то она параллельна и этим плоскостям.

143*. Постройте сечение параллелепипеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскостью, проходящей через ребро EE_1 и точку A, выбранную на ребре CC_1.

144. Точки A, B, C — соответственно середины рёбер FE, GH, GK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит параллелограмм $GHEK$. Постройте отрезок, по которому плоскость ABC пересекает диагональное сечение FHK пирамиды.

145. Сторона RT треугольника RST параллельна плоскости γ, а стороны RS и ST пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники RST и MSN подобны.

146. На отрезке AB выбрана такая точка C, что $AB : BC = 4 : 3$. Через конец B отрезка AB проведена плоскость α. Параллельно этой плоскости построен отрезок CD, равный 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

147. Точки D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны так, что $DE = 5$ см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость, проведённая через точки B и C, параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

148. Имеется правильная треугольная пирамида $MNPQ$, длина бокового ребра которой равна 6 см, а основанием является треугольник со стороной 4 см. Найдите периметр сечения пирамиды плоскостью, параллельной NP и проходящей через середину ребра PQ, и среднюю линию треугольника MNP.

149. Точки A, B, C — соответственно середины рёбер LN, LK, MK треугольной пирамиды $LMNK$, все рёбра которой равны друг другу, а площадь грани равна $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите периметр сечения этой пирамиды плоскостью ABC.

150. На рисунке 182 изображена правильная треугольная пирамида $IJKL$. Четырёхугольник $XYZT$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины X и Y рёбер JI и JL и параллельно медиане JE грани JKL. Найдите длину отрезков XY и ZT, учитывая, что $IK = 48$ см.

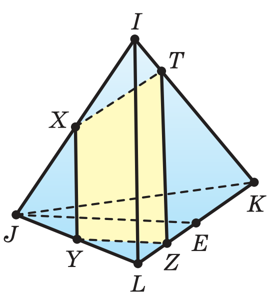


Рис. 182

151. Точка Q — середина ребра FA четырёхугольной пирамиды $FABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$ с параллельными сторонами BC и AD. Найдите отрезок, по которому плоскость QBC пересекает грань FAD, учитывая, что ребро BC и средняя линия трапеции соответственно равны 30 см и 40 см.

152. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 60 см, а боковое ребро — 78 см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух противоположных сторон основания и параллельной какому-либо боковому ребру, и найдите площадь сечения.

153*. Имеется правильная четырёхугольная пирамида $FMNKL$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, а площадь боковой поверхности равна S. Найдите длину расположенного внутри пирамиды отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей основания и параллельной медиане FR грани FLK.

154*. Точка A — середина ребра FK четырёхугольной пирамиды $FGHEK$, в основании которой лежит трапеция $GHEK$, $KG \parallel HE$. Постройте точку P, в которой плоскость AEH пересекает прямую FG. Докажите, что отрезки PE и HA пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, учитывая, что средняя линия трапеции $GHEK$ равна $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

А) Две плоскости или имеют общую точку, или не имеют её. В первом случае в соответствии с аксиомой **3** плоскости имеют общую прямую, т. е. пересекаются по этой прямой (рис. 183). Во втором случае плоскости не пересекаются (рис. 184).

Плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными плоскостями**.

Представление о параллельных плоскостях дают поверхности потолка и пола или поверхности противоположных стен комнаты (рис. 185). Следующая теорема выражает *признак параллельности плоскостей*.

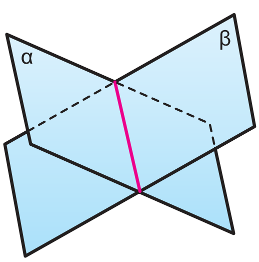


Рис. 183

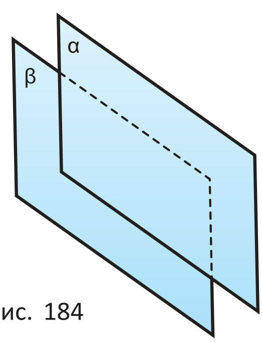


Рис. 184

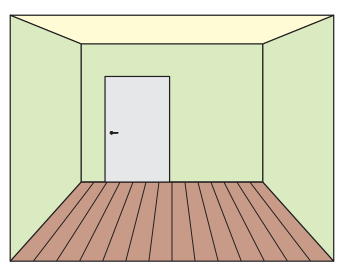


Рис. 185

Т е о р е м а 9. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости, параллельна этой плоскости.

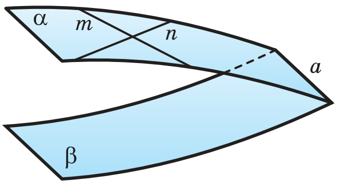


Рис. 186

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через пересекающиеся прямые m и n, которые параллельны плоскости β (рис. 186). Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β.

Допустим, что плоскость α пересекает плоскость β по некоторой прямой a. Тогда по теореме **8** прямая a параллельна и прямой m, и прямой n. Значит, по теореме **3** прямые m и n параллельны друг другу. Но это противоречит условию о том, что они пересекаются. Значит, плоскость α параллельна плоскости β.

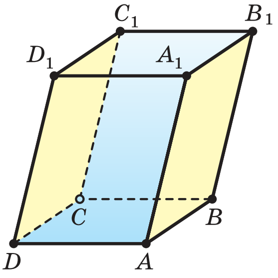


Рис. 187

Следствие 1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Это следствие получается из теоремы **9** с учётом признака параллельности прямой и плоскости.

Следствие 2. Противоположные грани параллелепипеда параллельны, т. е. лежат в параллельных плоскостях.

Например, грань AA_1B_1B параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 187) содержит прямые AB и AA_1, а грань DD_1C_1C — прямые DC и DD_1. Поскольку $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$, и, значит, плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны.

Б) Докажем *свойства параллельных плоскостей*.

Теорема 10. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Доказательство. Пусть плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по прямым a и b (рис. 188). Докажем, что прямые a и b параллельны.

Допустим, что это не так, т. е. прямые a и b имеют общую точку Q. Тогда точка Q принадлежит плоскости α, так как прямая a принадлежит плоскости α, точка Q принадлежит и плоскости β, так как прямая b принадлежит плоскости β. Получается, что плоскости α и β имеют общую точку Q, но это невозможно, так как по условию плоскости α и β параллельны.

Значит, прямые a и b не могут иметь общей точки. А поскольку они лежат в одной плоскости, именно в плоскости γ, то они параллельны.

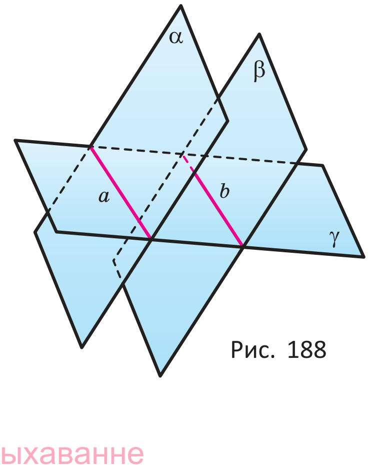


Рис. 188

Пример 1. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечён плоскостью, проходящей через середины M, N, O его рёбер DD_1, AA_1, A_1B_1 соответственно. Определим, какая фигура получится в сечении.

Плоскость MNO пересекает грани AA_1D_1D и AA_1B_1B по отрезкам MN и NO (рис. 189), при этом $MN \parallel A_1D_1$, так как MN — средняя линия прямоугольника AA_1D_1D ($AN = A_1N$ и $DM = D_1M$).

Поскольку плоскость MNO проходит через прямую MN, параллельную плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то линия пересечения этих плоскостей — прямая OP — параллельна MN. Четырёхугольник $MNOP$ — искомое сечение.

Учтём, что плоскости граней DD_1C_1C и AA_1B_1B параллельны. Из теоремы **10** следует, что прямые NO и MP, по которым плоскости DD_1C_1C и AA_1B_1B пересекает плоскость MNO, параллельны. А поскольку $MN \parallel OP$ и $NO \parallel MP$, то четырёхугольник $MNOP$ — параллелограмм.

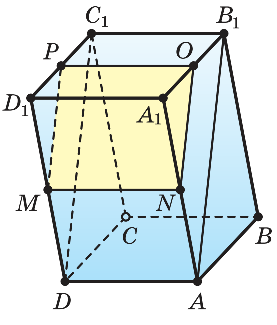


Рис. 189

Теорема 11. Через данную точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Доказательство. Пусть даны плоскость α и точка T вне её (рис. 190). В плоскости α проведём какие-либо пересекающиеся прямые k и l, а через точку T — прямые k_1 и l_1, параллельные прямым k и l соответственно. Плоскость β, определённая прямыми k_1 и l_1, с учётом признака параллельности плоскостей параллельна плоскости α и проходит через точку T.

Докажем единственность плоскости β. Допустим, что есть ещё одна плоскость γ, которая проходит через точку T и параллельна плоскости α (рис. 191). Прямые k_1 и l_1 обе не могут принадлежать плоскости γ, ибо тогда плоскости β и γ совпадали бы. Пусть k_1 не принадлежит плоскости γ. Через точку T и прямую k проведём плоскость δ. Она пересекает плоскость β по прямой k_1, а плоскость γ — по прямой k_2. Тогда по теореме **10** обе эти прямые параллельны прямой k.

Но такое невозможно, так как в плоскости через данную точку параллельно данной прямой проходит единственная прямая.

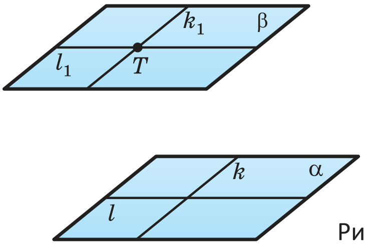


Рис. 190

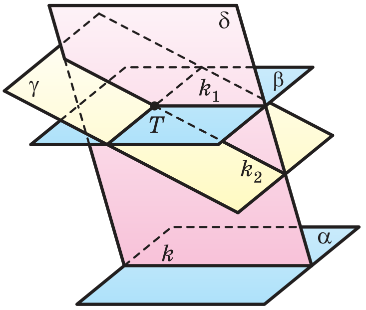


Рис. 191

Следствие 3. Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

Если прямая a пересекает плоскость β, то она пересекает и любую плоскость, параллельную плоскости β. Докажите самостоятельно.

Если плоскости α и β параллельны и прямая l, проходящая через точку A плоскости β, параллельна плоскости α, то прямая l лежит в плоскости β. Докажите самостоятельно.

Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник, подобный основанию. Докажите самостоятельно.

Теорема 12. Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β высекают из параллельных прямых k и l отрезки AB и CD (рис. 192). Докажем, что эти отрезки равны.

Плоскость γ, которой принадлежат параллельные прямые k и l, пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым AC и BD. В результате получается четырёхугольник $ABDC$, в котором противоположные стороны параллельны. Значит, этот четырёхугольник — параллелограмм, поэтому его противоположные стороны AB и CD равны.

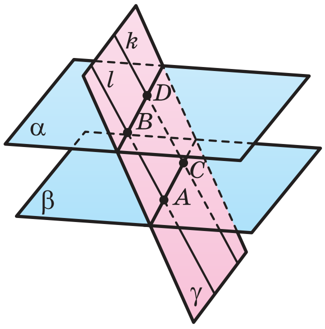


Рис. 192

Пример 2*. Докажем, что отрезки произвольных прямых, заключённые между тремя параллельными плоскостями, пропорциональны.

Пусть параллельные плоскости α, β, γ высекают из прямой m отрезки AB и BC, а из прямой n — отрезки DE и EF (рис. 193). Докажем, что $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Через точку A проведём прямую, параллельную прямой n, пусть она пересекается с плоскостями β и γ в точках G и H соответственно. В треугольнике ACH отрезок BG параллелен стороне CH. Поэтому $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GH}$.

Но $AG = DE$ и $GH = EF$ в соответствии с теоремой **12**. Значит, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

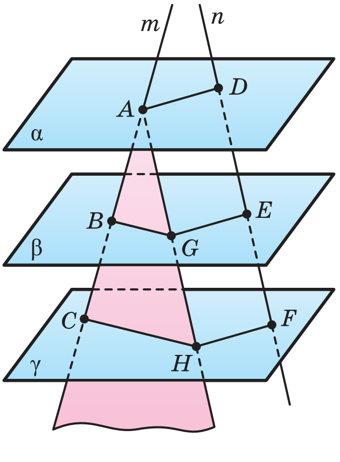


Рис. 193

Параллельные или пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость. Скрещивающиеся прямые определяют единственную пару параллельных плоскостей.

Пример 3*. Докажем, что через скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости, причём такая пара плоскостей единственная.

Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 194). Выберем произвольно на прямой a точку X, на прямой b — точку Y, и через точку X проведём прямую b_1, параллельную прямой b, а через точку Y — прямую a_1, параллельную прямой a. Пересекающиеся прямые a и b_1, а также b и a_1 определяют плоскости α и β, которые с учётом признака параллельности плоскостей являются параллельными.

Единственность искомой пары плоскостей доказывается методом от противного, подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы **11**. Проведите это рассуждение самостоятельно.

На рисунке 195 плоскости граней $STUV$ и $S_1T_1U_1V_1$ параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ проходят через скрещивающиеся прямые TU и U_1V_1.

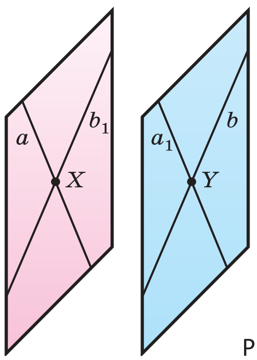


Рис. 194

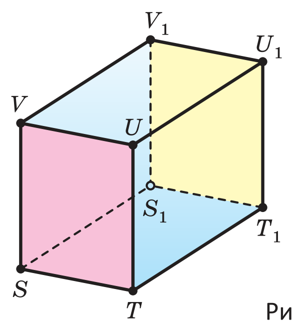


Рис. 195

1. Назовите возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей.
2. Какие плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Сформулируйте утверждение о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
5. Сформулируйте утверждение об отрезках, которые две параллельные плоскости отсекают на параллельных прямых.
6. Сформулируйте утверждение об отрезках, которые три параллельные плоскости отсекают на произвольных прямых.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.

8. Сформулируйте утверждение о плоскостях, которые параллельны другой плоскости.

9. Сформулируйте утверждение о параллельных плоскостях, определяемых парой скрещивающихся прямых.

10. Покажите параллельные плоскости на предметах вашего класса.

11. Прямая m пересекает плоскость α в точке A. Существует ли плоскость, которая проходит через прямую m и параллельна плоскости α?

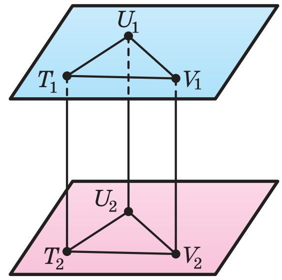


Рис. 196

12. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Определите, будет ли прямая m параллельна плоскости β.

13. Учитывая, что параллельные отрезки T_1T_2, U_1U_2 и V_1V_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 196):
а) определите вид четырёхугольников $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ и $T_1V_1V_2T_2$;
б) верно ли, что $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

Задача 1. Учитывая, что точка T не лежит в плоскости треугольника ABC с площадью, равной 48 см^2, а точки M, N, P — середины отрезков TA, TB, TC (рис. 197):
а) докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны;
б) найдите площадь треугольника MNP.

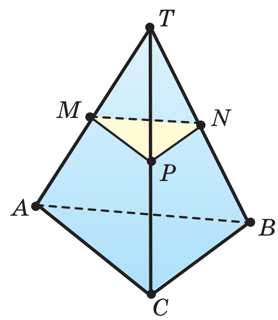


Рис. 197

Р е ш е н и е. а) Точки M и N — середины отрезков TA и TB, следовательно, $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$.

Точки M и P — середины отрезков TA и TC, следовательно, $MP \parallel AC$ и $MP = \frac{1}{2}AC$.

$MN \parallel AB$ и $AB \subset (ABC)$, следовательно, $MN \parallel (ABC)$.
$MP \parallel AC$ и $AC \subset (ABC)$, следовательно, $MP \parallel (ABC)$.
$MN \cap MP = M$, $MN \parallel (ABC)$ и $MP \parallel (ABC)$, следовательно, $(MNP) \parallel (ABC)$.

б) Поскольку MN и MP — средние линии $\triangle ATB$ и $\triangle ATC$ соответственно, то точки N и P — середины рёбер TB и TC. Следовательно, NP — средняя линия $\triangle BTC$.

$\triangle MNP$ и $\triangle ABC$ подобны по третьему признаку, так как $MN : AB = MP : AC = NP : BC = 1 : 2$. Следовательно,

$$S_{MNP} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12 \ \ (\text{см}^2).$$

О т в е т: 12 см^2.

Задача 2. Докажите, что в параллелепипеде $FGHIF_1G_1H_1I_1$ (рис. 198) плоскость F_1IG параллельна плоскости I_1HG_1.

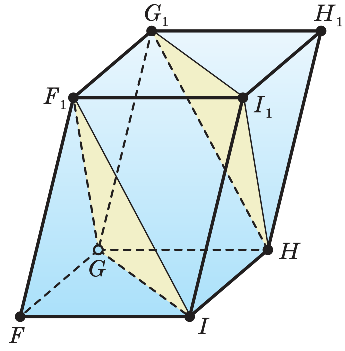


Рис. 198

Доказательство. В четырёхугольнике GII_1G_1 стороны GG_1 и II_1 параллельны и равны. Следовательно, GII_1G_1 — параллелограмм. Значит, $GI \parallel G_1I_1$ и $GI \parallel (G_1I_1H)$.

В четырёхугольнике HIF_1G_1 стороны HI и G_1F_1 параллельны и равны. Следовательно, HIF_1G_1 — параллелограмм. Значит, $IF_1 \parallel HG_1$ и $IF_1 \parallel (G_1I_1H)$.

Поскольку обе прямые GI и IF_1 параллельны плоскости G_1I_1H, лежат в плоскости GIF_1 и пересекаются, то $(F_1IG) \parallel (I_1HG_1)$ (теорема **9**).

Задача 3. В параллелепипеде $MNKLM_1N_1K_1L_1$ точка R — середина ребра KK_1 (рис. 199). Постройте сечения параллелепипеда плоскостями MM_1K_1 и MLR и отрезок, по которому пересекаются эти сечения.

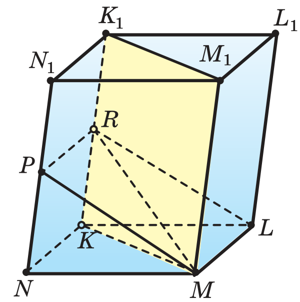


Рис. 199

Решение. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — параллелепипед, следовательно, $MM_1 \parallel KK_1$ и $MM_1 = KK_1$. А поскольку $MM_1 \subset (KMM_1)$ и $K \in (KMM_1)$, то $KK_1 \subset (KMM_1)$. Значит, (MM_1K_1) пересекает параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ по параллелограмму MM_1K_1K.

Грани LMM_1L_1 и NKK_1N_1 параллельны. А поскольку $NK \parallel ML$ и $NK \subset (NKK_1)$, то $(NKK_1) \cap (MLR) = RP$ и $RP \parallel NK$.

$NKRP$ и $NKLM$ — параллелограммы, следовательно, $RP = KN = ML$.

P — середина ребра NN_1, так как R — середина ребра KK_1 и $RP \parallel NK$.

(MLR) пересекает параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ по параллелограмму $MLRP$.

Точки M и R принадлежат как плоскости KMM_1, так и плоскости MLR. Следовательно, $(KMM_1) \cap (MLR) = MR$.

Ответ: $(MM_1K_1) \cap (MLR) = MR$.

155. Две стороны треугольника параллельны плоскости β. Определите, параллельна ли и третья сторона этого треугольника плоскости β.

156. Три отрезка P_1P_2, Q_1Q_2, и R_1R_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Определите, параллельны ли плоскости $P_1Q_1R_1$ и $P_2Q_2R_2$.

157. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — четырёхугольная призма. Определите, лежат ли в параллельных плоскостях основания $MNKL$ и $M_1N_1K_1L_1$ призмы.

159. Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых (рис. 200). Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

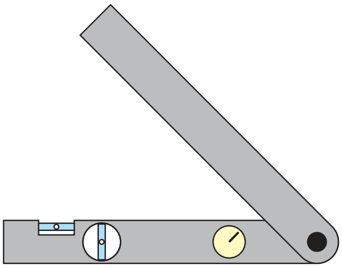


Рис. 200

160. Параллельные плоскости α и β пересекают сторону CB угла BCD в точках B_1 и B_2, а сторону CD — в точках D_1 и D_2 соответственно. Найдите:

а) CB_2 и CD_2, учитывая, что $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 и CB_2, учитывая, что $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

161. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках I_1, J_1 и K_1, а другую — в точках I_2, J_2 и K_2. Докажите, что треугольники $I_1J_1K_1$ и $I_2J_2K_2$ подобны.

162. Учитывая, что через точку пересечения медиан грани JKL треугольной пирамиды $IJKL$ проведена плоскость, параллельная грани IJK:

а) докажите, что сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник, подобный треугольнику IJK;

б) найдите отношение площади сечения к площади треугольника IJK.

163. Начертите треугольную пирамиду $KLMN$ и:

а) постройте её сечение плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN;

б) докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA;

в) найдите площадь треугольника EOF, учитывая, что площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

164. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение:

а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1.

Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

165. Начертите параллелепипед $IJKLI_1J_1K_1L_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани II_1J_1J. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно:

а) плоскости основания $IJKL$; б) грани JJ_1K_1K.

166. Начертите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:

а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D;

б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

167. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью, которое проходит через точки F_1, H_1 и середину ребра GH. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

168. Начертите параллелепипед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и постройте его сечение плоскостью FKL, где K — середина ребра EE_1, а L — середина ребра GG_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

169. Учитывая, что диагонали NL и MK грани $KLMN$ параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пересекаются в точке Q, серединой ребра NN_1 является точка R, а четырёхугольник N_1ALB является сечением параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку N_1 и параллельной плоскости MRK (рис. 201):

а) установите, является ли параллелограммом четырёхугольник N_1ALB;

б) докажите, что прямые RQ и N_1L параллельны.

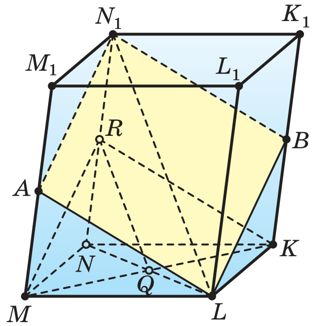


Рис. 201

170. Начертите параллелепипед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах:

а) PP_1, OO_1, OR; б) QQ_1, OR, PP_1.

171. Начертите треугольную пирамиду $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BDC.

172. Учитывая, что точки I, J, K и L не лежат в одной плоскости, а медианы треугольников IJK и KJL пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2:

а) докажите, что отрезки IL и M_1M_2 параллельны;

б) найдите M_1M_2, учитывая, что $IL = 12$ см.

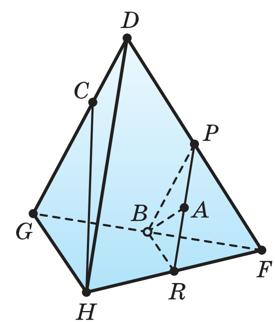


Рис. 202

173. На рёбрах QA, QB и QC треугольной пирамиды $QABC$ отмечены такие точки M, N, P, что $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, учитывая, что площадь треугольника ABC равна 18 см^2 и $QM : MA = 2 : 1$.

174. Учитывая, что точки B, P, R — середины рёбер FG, FD, FH пирамиды $DFGH$, отрезок AB — медиана треугольника BPR, а точка C принадлежит ребру DG (рис. 202):

а) докажите, что прямая AB параллельна плоскости DGH;

б) установите, пересекается ли прямая HC с плоскостью BPR.

175. Начертите параллелепипед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ и отметьте середины A и B рёбер NN_1 и LL_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку B и параллельной плоскости MAK. Постройте отрезок, по которому это сечение пересекает диагональное сечение NLL_1N_1.

176. На рёбрах N_1K_1, LK, MM_1 параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны точки Q, T, R соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QTR.

177. Точки Q, B и R — соответственно середины рёбер SY, XX_1 и S_1T_1 параллелепипеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью QBR.

178. Учитывая, что четырёхугольник $EFGH$ — сечение параллелепипеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскостью, проходящей через точку Q пересечения диагоналей грани UVV_1U_1 и параллельной плоскости TVV_1 (рис. 203):

а) объясните, почему прямые FE и GH параллельны;
б) определите, параллельны ли прямые GF и HE;
в) объясните, почему прямая SS_1 параллельна плоскости сечения.

179. Учитывая, что четырёхугольник $LNAB$ — сечение параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскостью, проходящей через прямую LN и середину A ребра N_1K_1 (рис. 204), установите, является ли трапецией четырёхугольник $LNAB$.

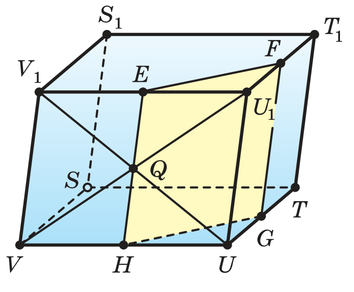


Рис. 203

180. Начертите параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $KLMN$ и параллельной плоскости MLK_1. Докажите, что прямая LN_1 параллельна плоскости сечения.

181. Сечение треугольной пирамиды $TXYZ$, параллельное плоскости XYZ, делит боковое ребро в отношении 1 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что площадь треугольника XYZ равна q.

182. Сечение пирамиды, параллельное основанию, делит боковое ребро в отношении 2 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что его площадь на 336 см^2 меньше площади основания.

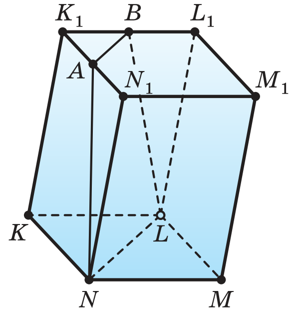


Рис. 204

183. Учитывая, что треугольник PRQ — сечение правильной треугольной пирамиды $HEFG$ плоскостью, проходящей через такую точку Q ребра FE, что $FQ : QE = 1 : 2$, и параллельной плоскости HFG (рис. 205):

а) докажите, что треугольники PRQ и GHF подобны;

б) найдите периметр треугольника PRQ, учитывая, что сторона основания пирамиды равна 30 см, а боковое ребро — 90 см.

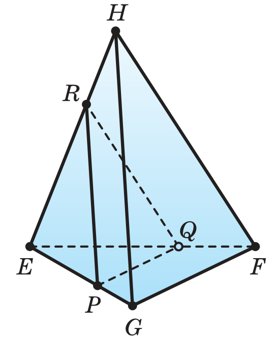


Рис. 205

184. В прямоугольном параллелепипеде $CDEFC_1D_1E_1F_1$ основание $CDEF$ — квадрат. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра CC_1 и параллельной плоскости CFE_1. Найдите периметр сечения, учитывая, что измерения параллелепипеда равны 10, 10 и 24 см.

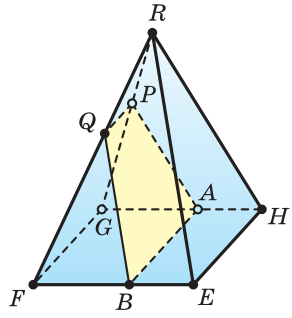


Рис. 206

185. Имеется прямая четырёхугольная призма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, основанием которой является ромб со стороной 18 см и острым углом 60°. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через меньшую диагональ J_1D_1 ромба и середину ребра AD. Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 40 см.

186. Все рёбра прямой призмы $BDFB_1D_1F_1$ равны друг другу. Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины B, D и середину ребра FF_1, равна S.

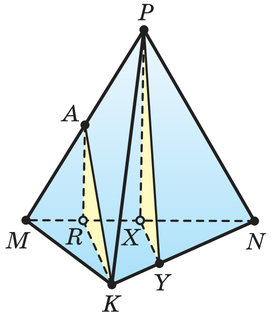


Рис. 207

187. Плоскость, которая параллельна плоскости RHE и проходит через такую точку Q ребра RF правильной четырёхугольной пирамиды $REFGH$, что $FQ : QR = 3 : 2$, пересекает пирамиду по четырёхугольнику $QPAB$ (рис. 206). Найдите периметр сечения, учитывая, что $EH = 30$ см, $ER = 25$ см.

188*. Точки X и A — соответственно середины рёбер MN и MP правильной треугольной пирамиды $PMNK$, а треугольники ARK и PXY — параллельные сечения, проходящие через прямые KA и PX соответственно (рис. 207). Найдите площадь треугольника PXY, учитывая, что площадь треугольника ARK равна S.

189*. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды разделено на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите площади полученных сечений, учитывая, что площадь основания равна S.

190*. Площадь сечения пирамиды плоскостью α, проходящей через точку на боковом ребре и параллельной основанию, равна 5 см^2. Определите, в каком отношении плоскость α делит боковое ребро пирамиды, учитывая, что площадь основания равна 80 см^2.

191*. Точка M делит боковое ребро CX треугольной пирамиды $CXYZ$ в отношении $2 : 3$, если считать от вершины. Треугольник MBP — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости XYZ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $CMBP$, учитывая, что площадь боковой поверхности пирамиды $CXYZ$ равна q.

192*. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды соответственно равны m и n. Через точку, делящую боковое ребро в отношении $1 : 3$, если считать от вершины пирамиды, проведено сечение, параллельное боковой грани. Найдите его площадь.

193*. На ребре M_1L_1 прямоугольного параллелепипеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбрана такая точка Q, что $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку Q и параллельной плоскости MN_1K, и найдите его площадь, учитывая, что площадь треугольника MN_1K равна 200 см^2.

Пространственное моделирование

При изображении на плоскости (на бумаге) фигур, размещённых в пространстве, используют параллельное проектирование.

Рассмотрим плоскость β и прямую b, которая пересекает эту плоскость.

Возьмём произвольную точку A, проведём через неё прямую b_1 так, что $b_1 \parallel b$ (рис. 208*а*). Прямая b_1 пересекает плоскость β в некоторой точке A_1. Точка A_1 называется проекцией на плоскость β точки A при проектировании параллельно прямой b. Плоскость β — плоскость проекций, прямая b задаёт направление проектирования.

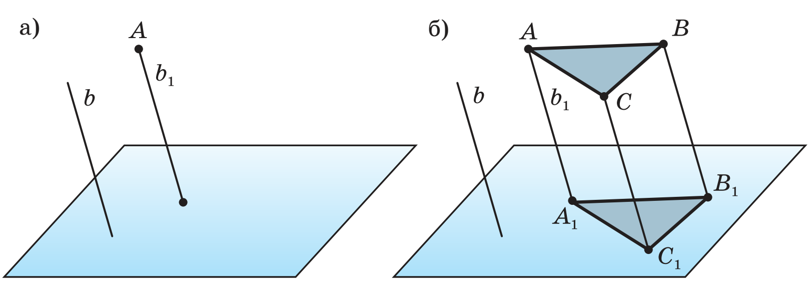


Рис. 208

Рис. 209

Параллельной проекцией фигуры F называют множество F_1 проекций всех её точек на заданную плоскость β (рис. 208*б*). Фигура F_1 называется параллельной проекцией фигуры F.

Параллельной проекцией реальной фигуры является её тень, которая падает на плоскую поверхность при солнечном свете, так как солнечные лучи можно считать параллельными (рис. 209).

Когда вы посмотрите на свою тень на земле или на стене, то увидите собственную параллельную проекцию.

Дополнительные задания к разделу 2

194. Параллелограммы $MNLK$ и $MNXY$ не лежат в одной плоскости. Докажите, что четырёхугольник $KLXY$ является параллелограммом.

195. Отрезок PE — общая медиана треугольников QPS и TPA, а точки K, L, M, N — середины отрезков PS, PA, ET, EQ. Докажите, что прямые KL и MN параллельны.

196. Определите, может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельной третьей прямой.

197. Докажите, что прямая c, пересекающая в разных точках прямые a и b одной плоскости, также лежит в этой плоскости.

198. Докажите, что если стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость, то прямые AD и DC также пересекают эту плоскость.

199. Средняя линия трапеции лежит в плоскости β. Определите, какие стороны трапеции пересекают плоскость β.

200. Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то линии их пересечения или параллельны, или имеют общую точку.

201. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также общий отрезок этих сечений.

202. Прямая a параллельна плоскости α. Определите, существуют ли плоскости, которые проходят через прямую a и параллельны плоскости α, и если существуют, то сколько таких плоскостей.

203. Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a или параллельна другой из этих плоскостей, или лежит в ней.

204. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC.

205. Точка D не лежит в плоскости параллелограмма $IJKL$. Докажите, что прямая KL параллельна плоскости IDJ.

206. Плоскость α проходит через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне BC. Докажите, что плоскости α принадлежит середина стороны AC.

207. Дана прямая a, параллельная плоскости α, и точка T, принадлежащая этой плоскости. Докажите, что прямая, которая проходит через точку T и параллельна прямой a, лежит в плоскости α.

208. Докажите, что если прямая a пересекает плоскость β, то она пересекает и любую плоскость, параллельную β.

209. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:
а) треугольной призмы;
б) параллелепипеда.

210. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны a. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, размещённого внутри пирамиды.

211. Дана правильная четырёхугольная пирамида $FGHIJ$ с углом грани HFI при вершине F, равным $60°$. Через некоторую точку Q ребра GJ проведено сечение плоскостью, параллельной грани FJI. Найдите периметр этого сечения, учитывая, что длина его диагонали равна 14 см, а $GQ = 6$ см.

Проверьте свои знания

1. Определите, какие многоугольники могут получиться при пересечении плоскости и:

а) треугольной пирамиды; б) четырёхугольной пирамиды.

2. Вне плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD выбрана точка T. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BTC.

3. Точка P лежит на продолжении ребра MN параллелепипеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Найдите расстояние от точки N до точки пересечения прямой M_1P с плоскостью LL_1N, учитывая, что $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

4. Точки N и M — середины диагоналей BC_1 и BD соответствующих граней прямоугольного параллелепипеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Найдите длину отрезка MN, учитывая, что $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

5. Точка A — середина ребра PY треугольной пирамиды $PXYZ$, все рёбра которой равны $12\sqrt{3}$. Постройте точку пересечения с поверхностью пирамиды прямой b, которая проходит через точку A и параллельна медиане YR грани XYZ. Найдите длину отрезка этой прямой, размещённого внутри пирамиды.

6. Вершины M и N трапеции $MNLK$ с основаниями NL и KM принадлежат плоскости γ, а две другие вершины не принадлежат ей. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения прямой KL с плоскостью γ, учитывая, что $MK = 8$ см, $MN = 5$ см, $NL = 6$ см.

7. Точка E является точкой отрезка TR, который не пересекает плоскость γ. Параллельные прямые, проведённые через точки T, R, E, пересекают плоскость γ в точках T_1, R_1, E_1 соответственно. Докажите, что точки T_1, R_1, E_1 лежат на одной прямой, и найдите отрезок EE_1, учитывая, что $TT_1 = 16$ см, $RR_1 = 10$ см, $TE : RE = 1 : 2$.

8. На отрезке AB выбрана такая точка C, что $AB : BC = 4 : 3$. Через конец B отрезка AB проведена плоскость α. Параллельно этой плоскости построен отрезок CD, равный 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

9. Дана прямая четырёхугольная призма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, основанием которой является ромб со стороной 16 см и острым углом 60°. Постройте сечение призмы плоскостью, которая проходит через меньшую диагональ J_1D_1 ромба и середину ребра AD. Найдите периметр сечения, учитывая, что длина бокового ребра призмы равна 20 см.

10. Точки X, Y, Z — соответственно середины рёбер OK, MK, MN правильной треугольной пирамиды $OMNK$. Площадь сечения плоскостью, проходящей через прямую MX и параллельно прямой NK, равна Q. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через точки Y и Z и параллельна прямой MX.

«Наш разум по природе своей наделён неутомимой жаждой познавать истину» (Цицерон).

РАЗДЕЛ 3 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В этом разделе вы узнаете:

- о перпендикулярности прямых и плоскостей;
- о расстояниях между прямыми и плоскостями;
- об углах между прямыми и плоскостями.

§ 7. Перпендикулярность прямой и плоскости

А) Напомним, что *перпендикулярными* называют прямые, угол между которыми равен 90°. Перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и могут быть скрещивающимися. На рисунке 210 перпендикулярные прямые a и p пересекаются, а перпендикулярные прямые a и q скрещиваются.

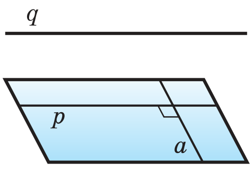


Рис. 210

Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a плоскости α записывают так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что и плоскость α перпендикулярна прямой a, и пишут $\alpha \perp a$.

Прямая l, перпендикулярная плоскости β, обязательно эту плоскость пересекает. Если допустить, что прямая l лежит в плоскости β или параллельна ей, то в плоскости β есть прямые, параллельные прямой l, и угол между l и такими прямыми не равен 90°.

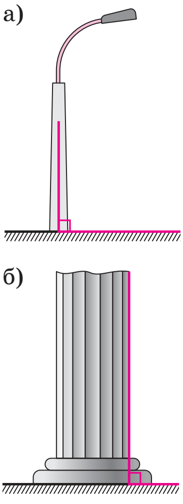


Рис. 211

Окружающее пространство даёт много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Столбы с осветительными лампами и колонны устанавливают перпендикулярно горизонтальной поверхности земли (рис. 211).

Из теоремы **6** параграфа **5** следует, что при определении угла между прямыми эти прямые можно заменять параллельными прямыми. Поэтому если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая также перпендикулярна этой плоскости. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны друг другу.

Доказательство. Пусть прямые x и y обе перпендикулярны плоскости α (рис. 212). Докажем, что прямые x и y параллельны друг другу.

Через какую-либо точку M прямой x проведём прямую x_1, параллельную прямой y. Тогда $x_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая x_1 совпадает с прямой x. Допустим, что это не так. Тогда получается, что в плоскости β, заданной прямыми x и x_1, через точку M проведены две прямые, перпендикулярные прямой a, по которой пересекаются плоскости α и β, что невозможно. Значит, прямые x и x_1 совпадают, тогда x и y параллельны.

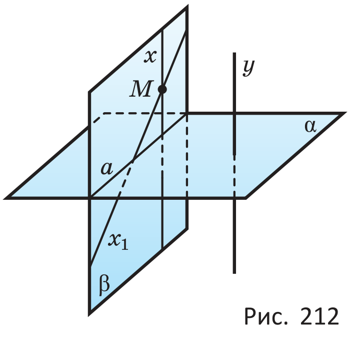


Рис. 212

Пусть имеются плоскость α и прямая l, которая её пересекает и не перпендикулярна α (рис. 213). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой l на плоскость α, образуют прямую l_1. Эта прямая называется *проекцией прямой* l *на плоскость* α.

Следующая теорема устанавливает *признак перпендикулярности прямой и плоскости*.

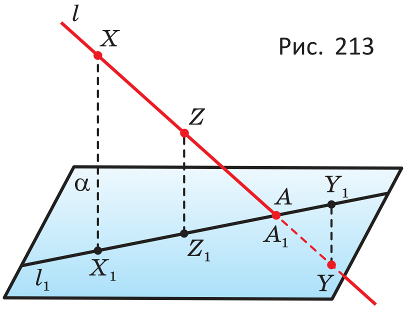


Рис. 213

Т е о р е м а 2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая p пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна пересекающимся прямым a и b, лежащим в плоскости α (рис. 214). Докажем, что прямая p перпендикулярна плоскости α, т. е. что прямая p перпендикулярна прямой m, произвольно выбранной в плоскости α.

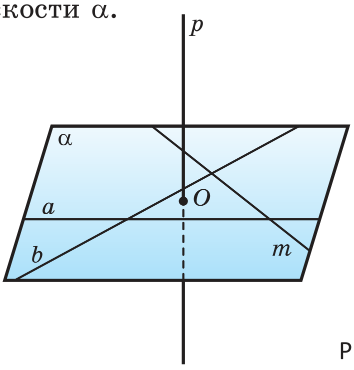


Рис. 214

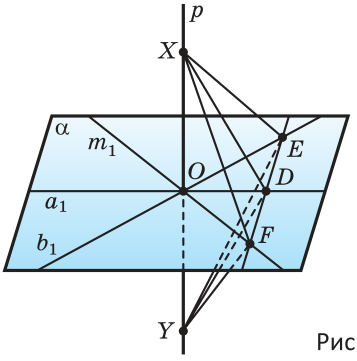


Рис. 215

Проведём через точку O прямые a_1, b_1 и m_1, соответственно параллельные прямым a, b и m. В плоскости α проведём какую-либо прямую так, чтобы она пересекала прямые a_1, b_1 и m_1 в точках D, E, F (рис. 215). На прямой p отметим точки X и Y на равных расстояниях от точки O. Прямые a_1 и b_1 — серединные перпендикуляры к отрезку XY, поэтому $DX = DY$ и $EX = EY$. Значит, треугольники XDE и YDE равны по трём сторонам, поэтому углы XEF и YEF равны. Учитывая это, получим, что треугольники XEF и YEF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $FX = FY$. Это означает, что треугольник XFY является равнобедренным, поэтому его медиана FO является и высотой, т. е. прямые p_1 и m_1, а также прямые p и m перпендикулярны.

Следствие 1. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Пусть плоскости α и β параллельны и прямая l перпендикулярна плоскости α (рис. 216). Докажем, что прямая l перпендикулярна

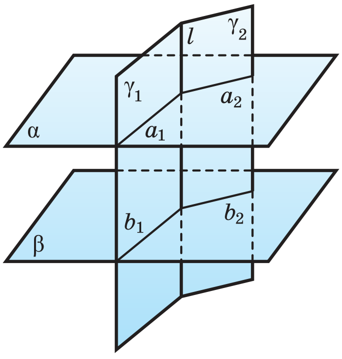


Рис. 216

плоскости β. Для доказательства проведём через прямую l две какие-либо плоскости γ_1 и γ_2. Пусть они пересекают плоскость α по прямым a_1 и a_2, а параллельную ей плоскость β — по прямым b_1 и b_2. Поскольку $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ и $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ и $l \perp b_2$. По теореме **2** получаем, что $l \perp \beta$.

Следствие 2. Если одной прямой перпендикулярны две плоскости, то они параллельны.

Проведите самостоятельно обоснование этого утверждения, используя рисунок 216.

Б) **Теорема 3. Через каждую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.**

Доказательство. Пусть даны прямая l и точка A. В случае, когда точка A не лежит на прямой l (рис. 217), в плоскости, которая определяется точкой A и прямой l, через точку A проведём прямую m, перпендикулярную прямой l, и через точку B пересечения прямых m и l — ещё одну прямую n, перпендикулярную прямой l.

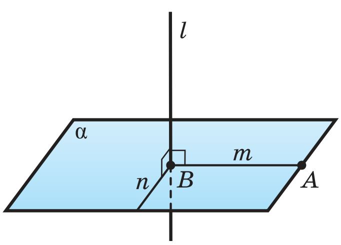


Рис. 217

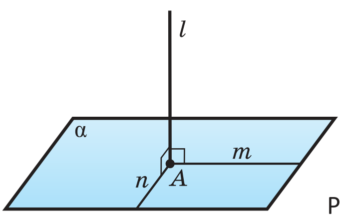


Рис. 218

В случае, когда точка A лежит на прямой l (рис. 218), через точку A проведём прямые m и n, перпендикулярные прямой l. Через прямые m и n проведём плоскость α. Эти плоскости и прямая l перпендикулярны по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

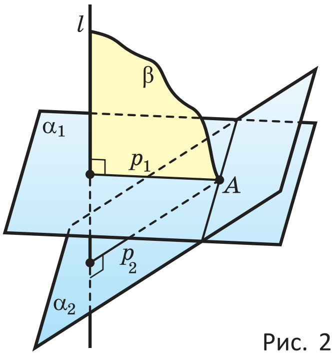


Рис. 219

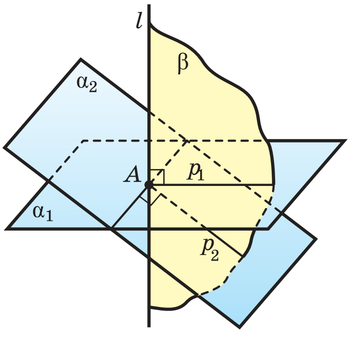


Рис. 220

Докажем теперь, что построенная плоскость α единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проведены две плоскости α_1 и α_2, перпендикулярные прямой l (рис. 219 и 220). Через прямую l и точку A проведём какую-либо плоскость β. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по некоторым прямым p_1 и p_2, так как плоскость β имеет с плоскостями α_1 и α_2 общую точку A. Поскольку $l \perp \alpha_1$ и $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ и $l \perp p_2$. Получается, что в плоскости β через точку A проведены две прямые p_1 и p_2, перпендикулярные прямой l, что невозможно.

Т е о р е м а 4. Через каждую точку пространства проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

Доказательство. Пусть даны точка A и плоскость α. Пусть a — прямая в плоскости α, а β — плоскость, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой a. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой b (рис. 221). В плоскости β через точку A проведём прямую l, перпендикулярную прямой b. Прямая l — искомая, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым a и b: $l \perp b$ по построению; $l \perp a$, так как $a \perp \beta$ и l принадлежит β.

Прямая l — единственная. Допустим, что это не так. Пусть через точку A проходит ещё одна прямая l_1, перпендикулярная плоскости α (рис. 222 и 223). Тогда по теореме **1** прямые l и l_1 параллельны друг другу. Но такое невозможно, так как прямые l и l_1 пересекаются в точке A.

Следствие 3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 224). Поскольку ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, то треугольник ACC_1 прямоугольный с прямым углом C. Поэтому $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А поскольку треугольник ABC также прямоугольный с прямым углом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Учитывая, что $CC_1 = AA_1$ и $BC = AD$, получаем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

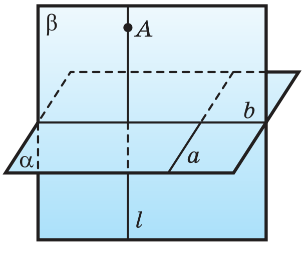


Рис. 221

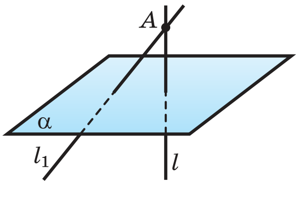


Рис. 222

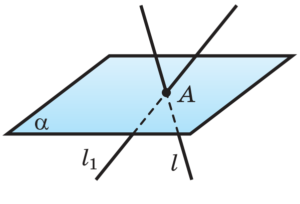


Рис. 223

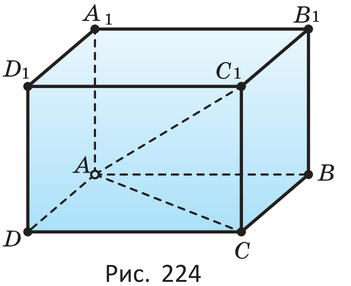


Рис. 224

1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными? Могут ли скрещивающиеся прямые быть перпендикулярными?
2. Какую прямую называют перпендикулярной плоскости?
3. Сформулируйте свойство прямых, перпендикулярных одной плоскости.
4. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Сформулируйте свойство прямой, перпендикулярной одной из параллельных плоскостей.
6. Сформулируйте свойство плоскостей, перпендикулярных одной прямой.
7. Сформулируйте утверждение о плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через данную точку.
8. Сформулируйте утверждение о прямой, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через данную точку.
9. Назовите в своём классе модели прямых, перпендикулярных плоскости.
10. В правильной треугольной призме выбирают грань. Сколько рёбер этой призмы перпендикулярны выбранной грани?
11. Прямая FA перпендикулярна плоскости BCF, и точка F — середина отрезка AD. Верно ли, что:
    а) $AB = DB$;
    б) если $BF = FC$, то $AB = AC$;
    в) если $AB = DC$, то $BF = FC$?
12. Есть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что:
    а) если $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$;
    б) если $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$?

Задача 1. Докажите, что если рёбра PQ и PS, а также PR и PT четырёхугольной пирамиды $PQRST$, основанием которой является параллелограмм, равны между собой (рис. 225), то отрезок, соединяющий вершину P с точкой O пересечения диагоналей этого параллелограмма, перпендикулярен основанию $QRST$.

Решение. $QRST$ — параллелограмм и $QS \cap RT = O$, поэтому $OQ = OS$ и $OR = OT$.

Поскольку $\triangle PQS$ равнобедренный и $OQ = OS$, то $PO \perp QS$.

Поскольку $\triangle PRT$ равнобедренный и $OR = OT$, то $PO \perp RT$.

$PO \perp QS$ и $QS \subset (QRS)$, $PO \perp RT$ и $RT \subset (QRS)$, поэтому $PO \perp (QRS)$ (теорема **2**).

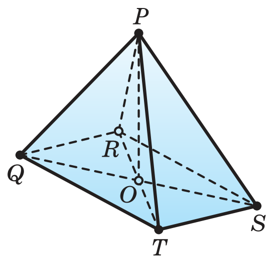


Рис. 225

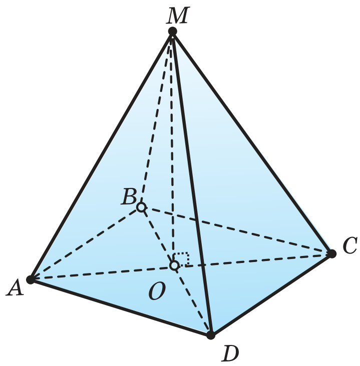


Рис. 226

Используя рисунок 226, докажите самостоятельно обратное утверждение: «Если отрезки MA и MC, а также MB и MD соединяют точку M перпендикуляра, проведённого из центра O параллелограмма $ABCD$, с противоположными его вершинами, то эти отрезки попарно равны».

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точка M — середина ребра BC (рис. 227). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ADM.

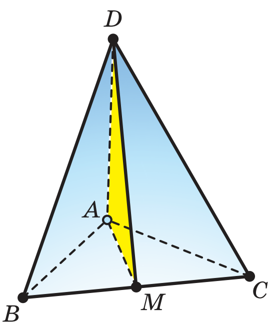


Рис. 227

Р е ш е н и е. $DABC$ — правильная треугольная пирамида, поэтому $\triangle ABC$ — равносторонний и $\triangle DBC$ — равнобедренный.

$\triangle ABC$ — равносторонний, и M — середина BC, поэтому $BC \perp AM$.

$\triangle DBC$ — равнобедренный, и M — середина BC, поэтому $BC \perp DM$.

$BC \perp AM$ и $BC \perp DM$, поэтому $BC \perp (ADM)$.

Задача 3*. Докажите, что диагональ BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости треугольника AB_1C (рис. 228).

Р е ш е н и е. $ABCD$ — квадрат, поэтому $AC \perp BD$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, поэтому $AC \perp BB_1$.

$AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, поэтому $AC \perp (BB_1D)$.

$AC \perp (BB_1D)$ и $BD_1 \subset (BB_1D)$, поэтому $AC \perp BD_1$.

BB_1C_1C — квадрат, поэтому $B_1C \perp BC_1$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, поэтому $AB \perp B_1C$.

$B_1C \perp BC_1$ и $AB \perp B_1C$, поэтому $B_1C \perp (ABC_1)$.

$B_1C \perp (ABC_1)$ и $BD_1 \subset (ABC_1)$, поэтому $B_1C \perp BD_1$.

$AC \perp BD_1$ и $B_1C \perp BD_1$, поэтому $BD_1 \perp (AB_1C)$.

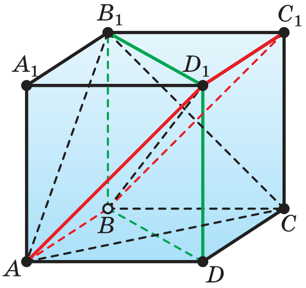


Рис. 228

Используя рисунок 228, установите, в какой точке прямая BD_1 пересекает плоскость AB_1C.

212. Определите, перпендикулярна ли прямая l плоскости α, учитывая, что на рисунке:

а) 229 параллельные прямые a и b лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

б) 230 пересекающиеся прямые c и d лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

в) 231 пересекающиеся прямые m и n лежат в плоскости α и прямая l перпендикулярна им обеим;

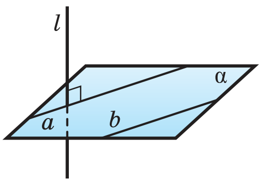


Рис. 229

г) 232 прямая r перпендикулярна пересекающимся прямым p и q плоскости α и прямая l параллельна прямой r.

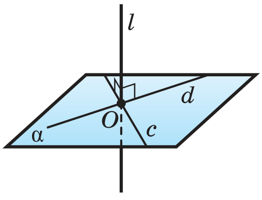


Рис. 230

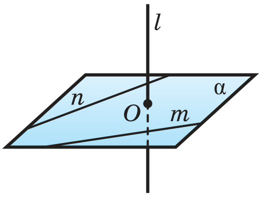


Рис. 231

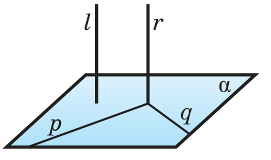


Рис. 232

213. На рёбрах F_1G_1 и FF_1 прямоугольного параллелепипеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны точки A и B (рис. 233). Определите, перпендикулярны ли:

а) прямая FG и плоскость EE_1F_1;

б) прямые AB и GH;

в) прямые F_1G и EF.

214. Точки L, M и O лежат на прямой, перпендикулярной плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в этой плоскости (рис. 234). Определите, является ли прямым угол:

а) LOB; б) MOC; в) DLM; г) DOL; д) BMO.

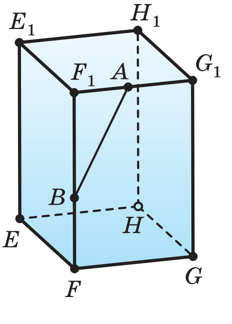


Рис. 233

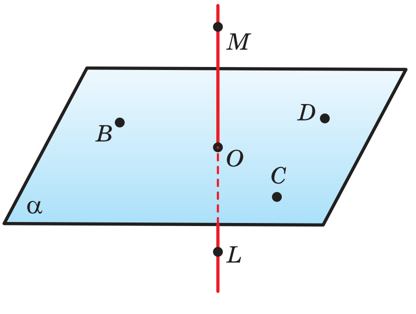


Рис. 234

215. Через концы P и Q отрезка PQ, параллельного плоскости γ, проведены прямые, перпендикулярные этой плоскости и пересекающие её в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

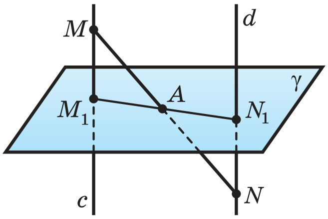


Рис. 235

216. На ребре HE четырёхугольной пирамиды $REFGH$, у которой боковое ребро FR перпендикулярно плоскости основания, выбрана точка A и на отрезках AF и AR отмечены их середины B и C. Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости основания $EFGH$, и найдите угол между прямыми BC и GH.

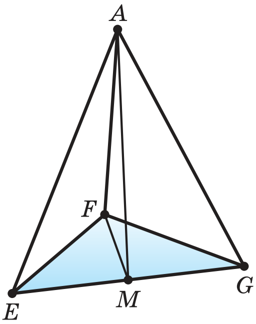


Рис. 236

217. Через концы M и N отрезка, пересекающего плоскость γ в точке A, проведены прямые c и d. Эти прямые перпендикулярны плоскости γ и пересекают её в точках M_1 и N_1 соответственно (рис. 235). Докажите, что точки M_1, N_1 и A лежат на одной прямой, и найдите отрезок MN, учитывая, что $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

218. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках C и D соответственно. Найдите расстояние между точками A и B, учитывая, что $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7{,}2$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

219. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие её в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите A_1B_1, учитывая, что $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

220*. Через вершину C правильного треугольника ABC со стороной $16\sqrt{3}$ см проведена прямая k, перпендикулярная плоскости ABC, а через ортоцентр O этого треугольника — прямая l, параллельная прямой k. На прямых k и l выбраны точки D и E, отстоящие от точек C и O на 16 см и 12 см соответственно. Найдите расстояние DE и расстояния от точек D и E до вершин треугольника.

221*. Через центр O симметрии квадрата со стороной a проведена прямая l, перпендикулярная плоскости квадрата. Найдите расстояние от вершин квадрата до точки K прямой l, учитывая, что $OK = d$.

222. Дан прямоугольный треугольник EFG с прямым углом F и катетами FE и FG, равными 6 см и 8 см соответственно. От вершины F на луче, перпендикулярном плоскости треугольника, отложен отрезок FA, равный 12 см, а на гипотенузе EG отмечена её середина M (рис. 236). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AFM.

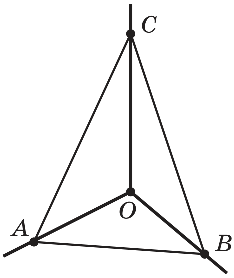


Рис. 237

223. На рисунке 237 прямые OA, OB и OC попарно перпендикулярны. Найдите отрезок BC, учитывая, что:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
в*) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
г*) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

224. Из вершины B треугольника ABC проведён отрезок BD, перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите длину этого отрезка, учитывая, что $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а сторона BC длиннее стороны BA на 4 см.

225. На прямой, перпендикулярной плоскости α и пересекающей её в точке O, выбраны две точки A и B, а на плоскости α — такая точка X, что $XA = 3$, $XB = 4$. Найдите XO, учитывая, что:

а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

226*. Боковое ребро OY треугольной пирамиды $OXYZ$ перпендикулярно плоскости её основания XYZ. Найдите это ребро, учитывая, что рёбра YX и YZ равны 27 см и 48 см соответственно и рёбра OZ и OX относятся как $4 : 3$.

227. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 9 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна $15\sqrt{2}$ см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

228. Углы A и B треугольника ABC вместе составляют $90°$, а прямая BD перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

229. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD перпендикулярна:

а) плоскости AMO; б) прямой MO.

230. Рёбра AB и AC, а также DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ равны, а точка M — середина ребра BC. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна прямой BC.

231. Есть прямоугольный параллелепипед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ которого является квадратом. Найдите площадь боковой поверхности четырёхугольной пирамиды C_1CDEF, учитывая, что $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

232. Рёбра прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 16 см и 28 см соответственно. Определите площадь сечения, проведённого через концы трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

233*. Измерения AB, AD и диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 6, 12 и 18 соответственно. Точки K и K_1 выбраны на рёбрах AD и A_1D_1 так, что $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 3$. Докажите, что плоскость BKK_1 перпендикулярна прямой AC, и найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью BKK_1.

234. Через центр O описанной около треугольника ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника (рис. 238). Докажите, что каждая точка X этой прямой равноудалена от вершин треугольника.

235. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a перпендикулярно ей, лежат в плоскости, которая перпендикулярна прямой a и проходит через точку M.

236. Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то он лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной прямой AB.

237. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые k и l, перпендикулярные его плоскости, а через медиану CD — плоскость, пересекающая прямые k и l в точках E и F соответственно (рис. 239). Установите:

а) чем является отрезок CD в треугольнике CEF;

б) что если $CA = CB$, то треугольник CEF является равнобедренным.

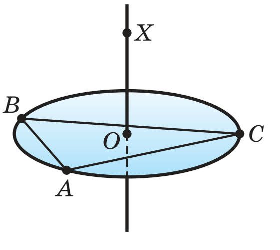


Рис. 238

238. На прямой, перпендикулярной плоскости треугольника PQR и проходящей через вершину P, выбрана точка A. На отрезке, соединяющем середину стороны QR с точкой A, отмечена такая точка T, что $AT : TP = 2 : 1$. Учитывая, что G — центр тяжести треугольника PQR, найдите угол между прямыми:

а) GT и QR; б) GT и PQ.

239. Точка Q является центром квадратного основания $ABCD$, а точка K — серединой ребра PA четырёхугольной пирамиды $PABCD$, все рёбра которой равны 100. Начертите сечение пирамиды и найдите его площадь, учитывая, что плоскость сечения проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) AC; в) PQ;

б) PA; г) BD.

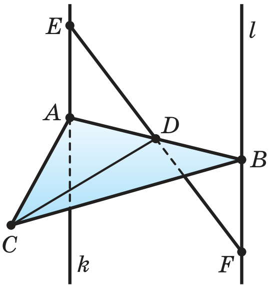


Рис. 239

240. Все грани треугольной пирамиды $IJKL$ — правильные треугольники со стороной 6 см. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра KL и перпендикулярной ему, и найдите площадь этого сечения.

241. Точка Q — середина ребра KK_1 прямоугольного параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, точка H ребра MM_1 такова, что $MH : HM_1 = 4 : 1$. Найдите длину отрезка HQ, учитывая, что диагональ параллелепипеда равна 41 см, а диагональ его основания — 9 см.

242*. Основанием треугольной пирамиды $SXYZ$ является правильный треугольник, а рёбра SZ, SX, SY взаимно перпендикулярны. Через точку Q, выбранную на ребре XZ, проведена плоскость, перпендикулярная прямой SZ. Найдите ребро SX пирамиды, учитывая, что площадь сечения равна 32 см^2, а $SQ = 17$ см.

243*. Есть треугольная пирамида $QABC$, основание которой — правильный треугольник ABC, а боковые рёбра QA, QB, QC равны друг другу. Из вершины C и из такой точки X ребра AC, что $AX = 45$ см и $XC = 30$ см, проведены перпендикуляры к грани QAB. Найдите длину этих перпендикуляров, учитывая, что расстояние между их основаниями равно 18 см.

244*. Есть правильная треугольная призма $MNKM_1N_1K_1$. Точки A и B — середины рёбер MK и KK_1 соответственно. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные грани MM_1N_1N и пересекающие её в точках P и Q соответственно. Найдите сторону основания и боковое ребро призмы, учитывая, что $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

245*. В треугольной пирамиде $QFGH$ основание FGH — правильный треугольник, а боковые рёбра QF, QG, QH равны друг другу. Одно сечение пирамиды перпендикулярно ребру QH и проходит через вершину F, другое — параллельно ребру QH и содержит вершину G и такую точку B ребра FH, что $FB = 8$ см и $BH = 7$ см. Найдите отрезок, по которому пересекаются эти сечения, учитывая, что $QF = 12$ см.

246*. Есть треугольная пирамида $PABC$, все рёбра которой равны друг другу. В ней отмечены центр Q её основания ABC и внутренняя точка K ребра PB. Сделайте соответствующий рисунок в тетради и начертите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой:

а) BC; б) BP; в) BQ.

247*. Точка K — середина ребра A_1B_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба и найдите его периметр и площадь, учитывая, что плоскость проходит через точку K и перпендикулярна прямой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

Пространственное моделирование

При выполнении задания на определение вертикальности столба для забора (рис. 240) ученик проверил вертикальность первого из столбов, а дальше, измерив высоту первого и второго столбов и расстояние между ними снизу и сверху, сделал вывод о том, что и второй столб тоже вертикальный. Определите, обеспечивают ли полученные учеником сведения правильность его вывода. Ответ обоснуйте.

Рис. 240

§ 8. Расстояния

А) Пусть даны плоскость α и точка M вне её (рис. 241). Через точку M проведём прямую l, перпендикулярную плоскости α, и пусть A — точка пересечения прямой l с плоскостью α. Отрезок MA называется *перпендикуляром к плоскости*, проведённым из точки M, а точка A — *основанием перпендикуляра*.

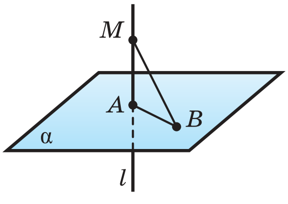


Рис. 241

Соединим точку M ещё с какой-либо точкой B плоскости α. Отрезок MB называется *наклонной к плоскости*, проведённой из точки M, а точка B — *основанием наклонной*. Отрезок AB называется *проекцией наклонной* на плоскость α.

Свойства перпендикуляра и наклонных

Если из одной точки вне плоскости проведены к этой плоскости две наклонные (рис. 242), то:

а) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

б) та наклонная больше, проекция которой больше;

в) равные наклонные имеют равные проекции;

г) бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.

Свойства перпендикуляров и наклонных докажите самостоятельно, используя рисунок.

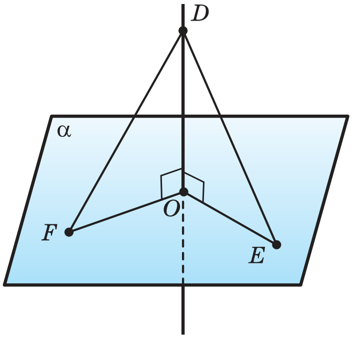


Рис. 242

Теорема 5. Перпендикуляр к плоскости, проведённый из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведённой из той же точки.

Доказательство. Пусть отрезок AB на рисунке 243 — перпендикуляр, а отрезок AC — наклонная к плоскости α. Эти перпендикуляр и наклонная в прямоугольном треугольнике ABC являются соответственно катетом и гипотенузой. Поэтому $AB < AC$.

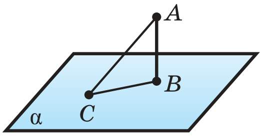


Рис. 243

В соответствии с утверждением теоремы **5**, из всех расстояний от данной точки до различных точек данной плоскости наименьшим является расстояние, измеренное по перпендикуляру.

Б) Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости.

Когда мы говорим, например, что уличный фонарь находится на высоте 8 м от земли, то подразумеваем, что расстояние от фонаря до поверхности земли, измеренное по перпендикуляру, проведённому от фонаря к плоскости земли, составляет 8 м (рис. 244).

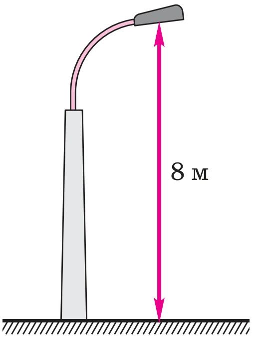


Рис. 244

Теорема 6. Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей к другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра.

Доказательство. Пусть даны параллельные плоскости α и β (рис. 245). Пусть A — какая-либо точка плоскости α, отрезок AA_1 — перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости β. Возьмём произвольную точку X плоскости α и проведём из неё перпендикуляр XX_1 к плоскости β. Тогда по теореме **1** прямые AA_1 и XX_1 параллельны, а по теореме **12** из параграфа **6** отрезки AA_1 и XX_1 равны друг другу. Это означает, что расстояние от любой точки X плоскости α до плоскости β равно отрезку AA_1. Поскольку отрезок AA_1 перпендикулярен плоскости β, то он является расстоянием от точки A_1 до плоскости α. Понятно, что расстояние от любой точки Y плоскости α до плоскости β равно отрезку AA_1.

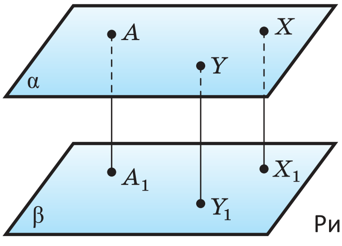


Рис. 245

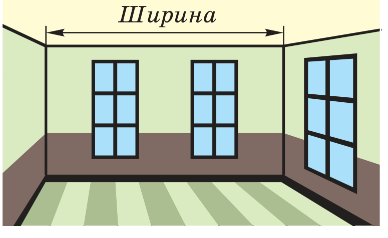


Рис. 246

Расстоянием между параллельными плоскостями называется длина перпендикуляра, проведённого из какой-либо точки одной плоскости к другой плоскости.

Все точки одной стены комнаты находятся на одинаковом расстоянии от противоположной стены (рис. 246). Это расстояние и есть ширина комнаты.

Теорема 7. Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно перпендикуляру, проведённому из какой-либо точки прямой к плоскости.

Используя рисунок 247, проведите доказательство теоремы самостоятельно.

Расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью называется длина перпендикуляра, проведённого из какой-либо точки прямой к плоскости.

Все точки края стола находятся на одном расстоянии от пола (рис. 248). Это расстояние и есть высота стола.

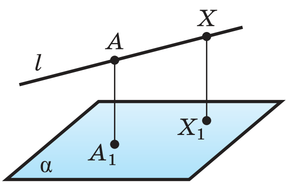


Рис. 247

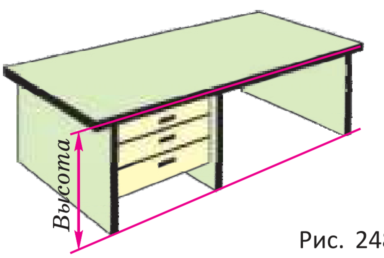


Рис. 248

Теорема 8. Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр.

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 249). Докажем, что на этих прямых можно выбрать такие точки A и B, что прямая AB перпендикулярна и прямой a, и прямой b.

Пусть α — плоскость, проходящая через прямую b параллельно прямой a. Возьмём на прямой a точку X и опустим перпендикуляр XY на плоскость α. Пусть β — плоскость, проходящая через пересекающиеся прямые a и XY. Обозначим a_1 — прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. Поскольку $a_1 \parallel a$, то прямые a_1 и b пересекаются в некоторой точке B. В плоскости β опустим перпендикуляр BA на прямую a. Прямые AB и XY лежат в одной плоскости β и перпендикулярны прямой a. Поэтому $AB \parallel XY$ и $AB \perp \alpha$, значит, $AB \perp a$ и $AB \perp b$.

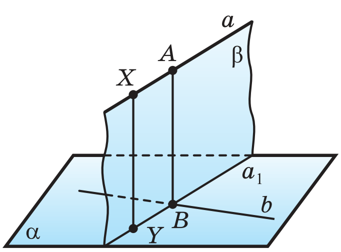


Рис. 249

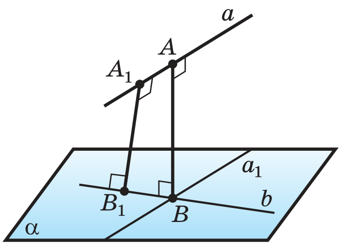


Рис. 250

Этим самым существование общего перпендикуляра скрещивающихся прямых обосновано. Докажем теперь его единственность.

Пусть скрещивающиеся прямые a и b имеют ещё один общий перпендикуляр A_1B_1, причём точка A_1 принадлежит прямой a, а точка B_1 — прямой b (рис. 250).

Точки A и A_1, B и B_1 совпадать не могут, так как из одной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр. Поскольку $A_1B_1 \perp a$ и $A_1B_1 \perp b$, то прямая A_1B_1, как и прямая AB, перпендикулярна плоскости α, проходящей через прямую b параллельно прямой a. Поэтому $A_1B_1 \parallel AB$ и точки A_1, B_1, A, B принадлежат одной плоскости. Значит, и прямые AA_1 и BB_1 принадлежат одной плоскости. Получили противоречие с тем, что эти прямые скрещиваются.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Из доказательства теоремы **8** следует, что *расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной из них до плоскости, содержащей другую прямую и параллельную первой.*

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, можно действовать по-разному.

а) Можно построить отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный им обеим, и найти его длину.

Пример 1. Найдём расстояние между прямыми, которые содержат ребро куба длиной a и диагональ грани, которая с этим ребром не имеет общих точек.

Решение. Пусть нужно найти расстояние между прямыми AB и A_1C_1 (рис. 251). Поскольку $AA_1 \perp AB$ и $AA_1 \perp A_1C_1$, то AA_1 — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AB и A_1C_1, а потому искомое расстояние равно ребру куба, т. е. a.

б) Можно построить плоскость, которая содержит одну из прямых и параллельна другой. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от этой плоскости до другой прямой.

Пример 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания $ABCD$ равны 4, а боковые рёбра — 6. Найдём расстояние между прямыми BD и AM, где M — середина ребра SC.

Решение. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Через прямую BD проведём плоскость BDN, параллельную прямой AM (рис. 252). Поскольку плоскость SAC перпендикулярна прямой BD и содержит прямую AM, то перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой AM на плоскость BDN, принадлежит плоскости SAC.

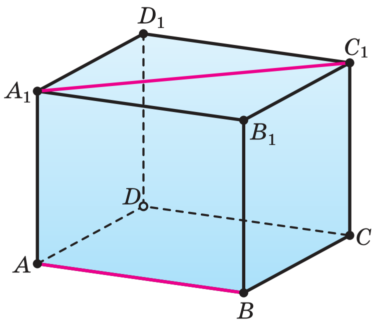


Рис. 251

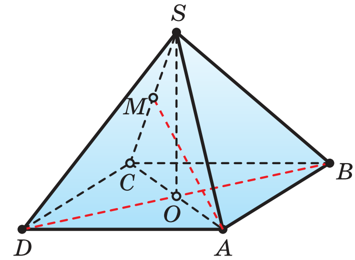


Рис. 252

Пусть K — такая точка на прямой AM, что $KO \perp AM$. Учитывая, что O — середина стороны AC треугольника ACM, получаем, что OK равно половине высоты треугольника ACM, проведённой к стороне AM. Поэтому $OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{ACM}}{AM} = \frac{S_{SAC}}{2AM}$. Найдём площадь треугольника SAC и его медиану AM:

$$AC = 4\sqrt{2},\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7},$$

$$S_{SAC} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{14},\ AM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(AS^2 + AC^2) - SC^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(36+32)-36} = 5.\ \text{Теперь}\ OK = \frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

в) Можно построить две параллельные плоскости, каждая из которых содержит одну из скрещивающихся прямых и параллельна другой. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию между этими плоскостями.

Пример 3. Найдём расстояние между прямыми, содержащими непересекающиеся диагонали двух смежных граней куба с ребром a.

Решение. Пусть нужно найти расстояние между прямыми AB_1 и A_1C_1 (рис. 253). Плоскость, которая содержит A_1C_1 и параллельна AB_1, пересекает грань CC_1D_1 по прямой, параллельной AB_1, т. е. по прямой C_1D, а грань DAA_1 — по прямой DA_1. Рассуждая так же, получаем, что плоскость, которая содержит AB_1 и параллельна A_1C_1, пересекает грань $ABCD$ по прямой AC, а грань BCC_1 — по прямой B_1C.

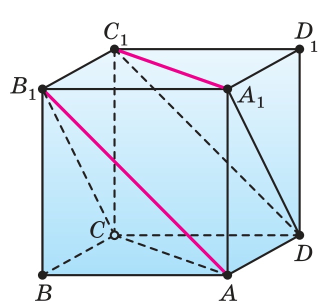


Рис. 253

Диагональ BD_1 куба как прямая плоскости BB_1D_1D образует прямой угол с прямыми AC и A_1C_1, которые перпендикулярны этой плоскости, а как прямая плоскости BAD_1C_1 образует прямой угол с прямыми B_1C и A_1D, которые перпендикулярны этой плоскости. Поэтому прямая BD_1 перпендикулярна как плоскости AB_1C, так и параллельной ей плоскости A_1C_1D.

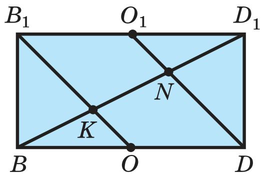


Рис. 254

Плоскость BDD_1 пересекается с плоскостями AB_1C и A_1C_1D по прямым B_1O и DO_1, где O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 254), прямая BD_1 пересекает плоскости AB_1C и A_1C_1D в точках K и N на прямых B_1O и DO_1. Поскольку $B_1O \parallel DO_1$, то по теореме Фалеса $BK = KN$ и $KN = ND_1$. Поэтому общий перпендикуляр KN плоскостей AB_1C и A_1C_1D имеет длину $\dfrac{BD_1}{3}$, т. е. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Диагональ куба делится плоскостью треугольника, сторонами которого служат диагонали граней куба, имеющие с рассматриваемой диагональю куба общую точку, в отношении 1 : 2.

г) Можно построить плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых, и построить проекцию на неё другой прямой. Тогда искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра, опущенного из точки, являющейся проекцией первой прямой на построенную плоскость, на проекцию другой прямой.

Пример 4. В четырёхугольной пирамиде $QABCD$ все рёбра равны a. Найдём расстояние между скрещивающимися рёбрами AB и QC (рис. 255).

Решение. Из теоремы **8** следует, что на прямых AB и QC есть такие точки X и Y, что прямая XY перпендикулярна как прямой AB, так и прямой QC, и, вместе с этим, плоскости, проходящей через одну из этих прямых параллельно другой.

Пусть α — плоскость, проходящая через точку Q перпендикулярно прямой AB. Она проходит через середины M и N рёбер AB и CD. Тогда $XY \parallel \alpha$, и проекцией отрезка XY на плоскость α будет отрезок, равный XY.

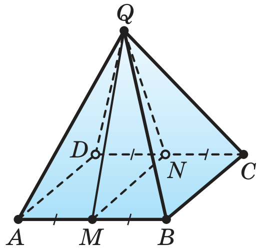


Рис. 255

Определим, в какие точки спроектируются точки X и Y. Поскольку $AB \perp \alpha$, то вся прямая AB проектируется в точку M. Значит, точка X проектируется в точку M.

Поскольку точки Q и C проектируются в точки Q и N соответственно, то прямая QC проектируется в прямую QN. Учтём также, что прямая QN принадлежит плоскости, параллельной прямой AB. Поэтому искомая проекция отрезка XY — перпендикуляр к прямой QN, проведённый из точки M.

Длину d этого перпендикуляра найдём, используя площадь равнобедренного треугольника QMN с основанием a и боковыми сторонами $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Получим $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, откуда $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

?

1. Какой отрезок называется перпендикуляром к плоскости? Какая точка называется основанием перпендикуляра?

2. Какой отрезок называется наклонной к плоскости? Какая точка называется основанием наклонной?

3. Сформулируйте утверждение о сравнении длин перпендикуляра и наклонной к плоскости, проведённых из одной точки.

4. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

5. Сформулируйте утверждение о расстоянии от любой точки одной из параллельных плоскостей к другой плоскости.

6. Что называется расстоянием между параллельными плоскостями?

7. Сформулируйте утверждение о расстоянии до плоскости от любой точки прямой, параллельной этой плоскости.

8. Что называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью?

9. Сформулируйте утверждение об общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых.

10. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

11. Укажите, в чём отличие:

а) перпендикуляра к плоскости и прямой, перпендикулярной плоскости;
б) наклонной к плоскости и прямой, пересекающей плоскость.

12. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 256). Назовите проекцию прямой:

а) AD на плоскость BB_1C;
б) AD на плоскость DD_1C_1;
в) AD_1 на плоскость ABC.

13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 256). Назовите отрезок, длина которого выражает расстояние между точкой A и прямой:

а) BC; в) CC_1;
б) A_1B_1; г) D_1C_1.

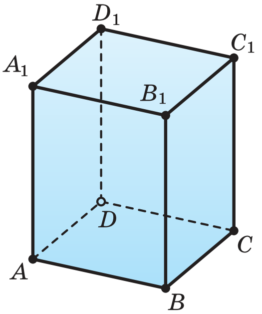


Рис. 256

Задача 1. Точка M отстоит на 40 см от каждой вершины правильного треугольника ABC со стороной 60 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC.

Решение. $MD \perp (ABC)$ и ABC — правильный треугольник, поэтому D — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и AD — её радиус (рис. 257).

$AD = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ (см).

$MD \perp (ABC)$, поэтому $\triangle ADM$ — прямоугольный.

Тогда

$$MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{40^2 - \left(20\sqrt{3}\right)^2} = 20 \text{ (см)}.$$

Ответ: 20 см.

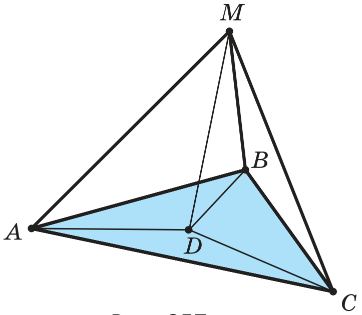


Рис. 257

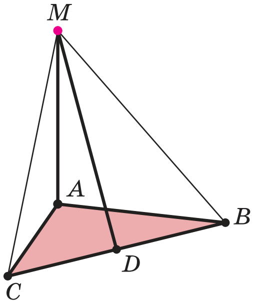


Рис. 258

Задача 2. Из вершины A равнобедренного треугольника ABC с основанием BC возведён перпендикуляр AM, и точка M соединена с серединой D этого основания (рис. 258). Докажите, что прямые MD и BC перпендикулярны.

Решение. AM — перпендикуляр к плоскости ABC, поэтому AB и AC — проекции наклонных MB и MC на (ABC).

ABC — равнобедренный треугольник с основой BC, поэтому $AB = AC$.

AB и AC — проекции наклонных MB и MC на (ABC) и $AB = AC$, поэтому $MB = MC$.

$MB = MC$ и D — середина BC, поэтому $MD \perp BC$.

248. Из точки A к плоскости α проведены четыре равные наклонные AX, AY, AZ, AT. Будут ли точки X, Y, Z, T принадлежать одной окружности, центром которой является проекция O точки A на плоскость α?

249. Из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен β. Найдите:

а) наклонную и её проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d;
б) перпендикуляр и проекцию наклонной, учитывая, что наклонная равна m.

250. Точка K принадлежит прямой p, проходящей через вершину A прямоугольника $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Учитывая, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, найдите расстояние:

а) от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$;
б*) между прямыми AK и CD.

251. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 2 м каждая. Найдите расстояние от точки до плоскости, учитывая, что наклонные образуют угол в 60°, а их проекции перпендикулярны.

252. Длина перпендикуляра PQ из точки P к плоскости равна 1, а длина наклонных PA и PB к этой же плоскости равна 2. Точка C — середина отрезка AB. Найдите QC, учитывая, что:

а) $\angle APB = 90°$; б) $\angle APB = \beta$.

253. Из точки к плоскости проведены две наклонные длиной 10 см и 17 см, проекции которых отличаются на 9 см. Найдите эти проекции.

254. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длину наклонных, учитывая, что:
а) одна из них на 14 см больше другой, а проекции наклонных равны 16 см и 40 см;
б) наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 10 см и 70 см.

255. Из вершины B тупого угла параллелограмма $ABCD$ к его плоскости возведён перпендикуляр BH. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ см.

256. Из вершины B квадрата $ABCD$ к его плоскости возведён перпендикуляр QB. Найдите площадь треугольника QAD, учитывая, что $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

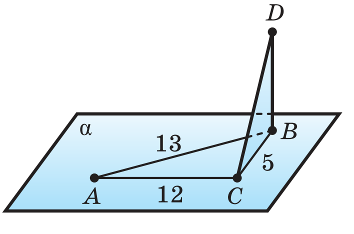


Рис. 259

257*. Стороны AB, AC, BC треугольника ABC соответственно равны 13, 12 и 5, а отрезок BD перпендикулярен плоскости этого треугольника (рис. 259). Докажите, что прямые CD и AC перпендикулярны.

258. Дан прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 260). Назовите отрезки, длина которых выражает расстояние между параллельными плоскостями:

а) $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$; в) PP_1S_1S и QQ_1R_1R.
б) PP_1Q_1Q и SS_1R_1R;

259. Дан прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 260). Назовите отрезки, длина которых выражает расстояние между параллельными прямой и плоскостью:

а) PQ и $P_1Q_1R_1S_1$; б) PQ_1 и SS_1R_1R; в) PR и $P_1Q_1R_1S_1$.

260*. Дан прямоугольный параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (см. рис. 260). Назовите отрезки, длина которых выражает расстояние между скрещивающимися прямыми:

а) PQ и SS_1; б) PQ_1 и SS_1; в) PR и P_1S_1.

261*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояния между прямой AB (рис. 261) и прямой:

а) B_1C_1; б) B_1D_1; в) A_1D_1; г) C_1D_1; д) F_1E_1; е) D_1F_1.

262. Концы отрезка длиной 100 см принадлежат параллельным плоскостям, расстояние между которыми равно 80 см. Найдите проекции отрезка на каждую плоскость.

263. Есть две параллельные плоскости. Из двух точек одной из них проведены наклонные к другой плоскости длиной 37 см и 125 см, причём проекция первой наклонной на одну из плоскостей равна 12 см. Найдите проекцию второй наклонной.

264. Отрезок AD длиной 12 см перпендикулярен плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием BC и боковой стороной, равными 6 см и 5 см соответственно. Определите, на каких расстояниях от прямой BC находятся концы отрезка AD.

265*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямой BC_1 (рис. 262) и прямой:

а) A_1D_1; б) F_1E_1; в) A_1F_1; г) A_1D; д) F_1E; е) A_1F.

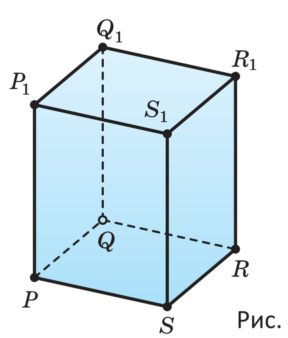


Рис. 260

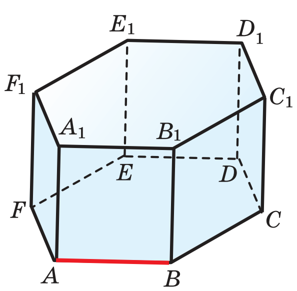


Рис. 261

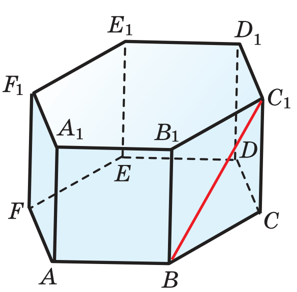


Рис. 262

266*. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми:

а) AB_1 и CD_1; б) AC и BB_1; в) A_1D и C_1A.

267. Через вершину A треугольника ABC параллельно прямой BC проведена плоскость γ, и из точек B и C на плоскость γ опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1. Найдите площадь треугольника ABC, учитывая, что $\angle B_1AC_1 = 90°$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 5\sqrt{2}$ см, а расстояние между прямой BC и плоскостью γ равно 5 см.

268. В плоскости δ проведены две параллельные прямые MN и KL, отстоящие на a, а вне плоскости δ выбрана точка C, отстоящая от MN на b и от KL на c. Найдите расстояние от точки C до плоскости δ, учитывая, что $a = 66$, $b = c = 65$.

269. Через одну из сторон ромба проведена плоскость, отстоящая от противоположной стороны ромба на 8 см. Найдите проекции сторон ромба на эту плоскость, учитывая, что проекции диагоналей на неё равны 16 см и 4 см.

270. Через основание AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость α, отстоящая от другого основания на m (рис. 263). Найдите расстояние от точки O пересечения диагоналей трапеции до плоскости α, учитывая, что основания трапеции относятся как $p : q$.

271. Дана треугольная пирамида $PABC$, у которой $PA = PB = PC = 2$, $AC = 3$ и $AB = 2$. Начертите её и найдите расстояние от вершины до основания пирамиды, учитывая, что ребро BC равно:

а) 2; б) 3; в) $\sqrt{5}$.

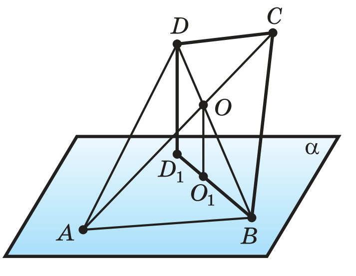


Рис. 263

272*. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней, которые эта диагональ не пересекает.

273*. Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояние между прямыми A_1M и B_1C, учитывая, что ребро куба равно a.

274*. В шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — $2a$ (рис. 264). Найдите расстояние между боковым ребром SA и рёбрами основания:

а) BF; б) CE; в) BE; г) BD.

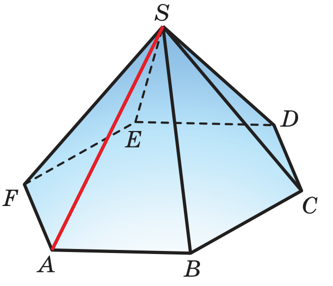


Рис. 264

275*. В треугольной пирамиде все рёбра равны a. Найдите расстояние между рёбрами, не принадлежащими одной грани.

276*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b (рис. 265). Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

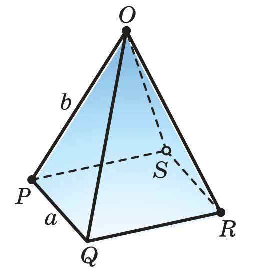


Рис. 265

277*. Стороны AB, AC, BC треугольника ABC соответственно равны 17, 8 и 15, а отрезок BD перпендикулярен плоскости этого треугольника. Найдите расстояние от концов BD до меньшей стороны треугольника, учитывая, что $BD = 36$.

278*. Точка M лежит на прямой, проходящей через вершину B ромба $ABCD$ и перпендикулярной его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, учитывая, что $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

§ 9. Угол между прямой и плоскостью

А) С помощью чисел, выражающих расстояние между двумя прямыми и величину угла между ними, можно описать взаимное расположение этих прямых в пространстве. Если прямые a и b пересекаются, то их взаимное расположение характеризует угол α между ними, расстояние между такими прямыми считается равным нулю (рис. 266). Если прямые a и b параллельны, то их взаимное расположение характеризует расстояние d между ними, угол между такими прямыми равен нулю (рис. 267). Если прямые a и b скрещиваются, то их взаимное расположение характеризует угол α и расстояние d между ними (рис. 268).

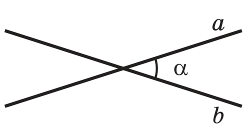


Рис. 266

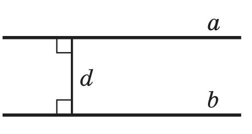


Рис. 267

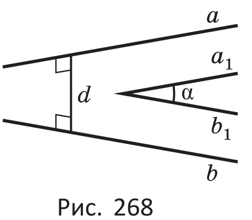


Рис. 268

Теорема 9. Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.

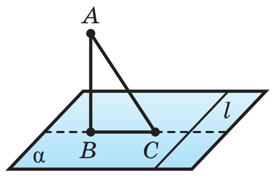


Рис. 269

Доказательство. Пусть отрезки AB и AC — соответственно перпендикуляр и наклонная к плоскости α, тогда отрезок BC — проекция наклонной AC на эту плоскость (рис. 269).

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна проекции BC. Докажем, что прямая l перпендикулярна самой наклонной AC.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым BC и AB плоскости ABC — первой прямой по условию, а второй — так как она лежит в плоскости α, которой перпендикулярна прямая AB. Поэтому прямая l перпендикулярна и прямой AC плоскости ABC.

Пусть прямая l плоскости α перпендикулярна наклонной AC. Докажем, что прямая l перпендикулярна проекции BC этой наклонной.

Прямая l перпендикулярна пересекающимся прямым AC и AB плоскости ABC. Поэтому она перпендикулярна и прямой BC плоскости ABC.

Теорема **9** называется *теоремой о трёх перпендикулярах*, потому что в ней идёт речь об отношении перпендикулярности между тремя прямыми. Приведём примеры использования этой теоремы.

Пример 1. Из вершины A к плоскости треугольника ABC, стороны которого AB, BC, CA равны 13, 20, 11 соответственно, возведён перпендикуляр AD длиной 36 (рис. 270). Найдём расстояние от точки D до прямой BC.

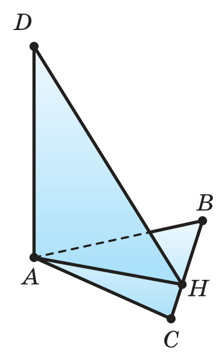


Рис. 270

Решение. Искомое расстояние — длина перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую BC. Проведение этого перпендикуляра потребует найти его основание на прямой BC. Для этого в плоскости треугольника ABC построим высоту AH этого треугольника. Поскольку прямая BC перпендикулярна высоте AH, которая является проекцией наклонной DH, то по теореме о трёх перпендикулярах прямая BC перпендикулярна наклонной DH, т. е. отрезок DH выражает искомое расстояние.

Найдём сначала высоту AH треугольника ABC. По формуле Герона определим площадь S этого треугольника, что позволит найти и его высоту AH:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6{,}6.$$

Треугольник DAH — прямоугольный с прямым углом A, по теореме Пифагора найдём DH: $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6$.

Ответ: 36,6.

Пример 2. Докажем, что если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Доказательство. Пусть точка S равноудалена от сторон A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ и SO — перпендикуляр из точки S на плоскость этого многоугольника. Тогда перпендикуляры SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, опущенные из точки S на стороны многоугольника, равны друг другу (рис. 271).

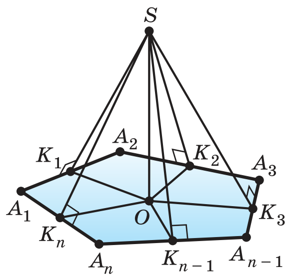


Рис. 271

Соединим точку O с точками K_1, K_2, ... K_{n-1}, K_n. Поскольку отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n — проекции отрезков SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n на плоскость многоугольника, стороны которого A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 перпендикулярны наклонным SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, то эти стороны и, соответственно, отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n перпендикулярны.

Треугольники SOK_1, SOK_2, ... SOK_{n-1}, SOK_n прямоугольные, и все они имеют общий катет SO и равные гипотенузы. Значит, эти треугольники равны, соответственно, равны и отрезки OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n, что означает равноудалённость точки O от сторон многоугольника. Значит, в этот многоугольник можно вписать окружность с центром O.

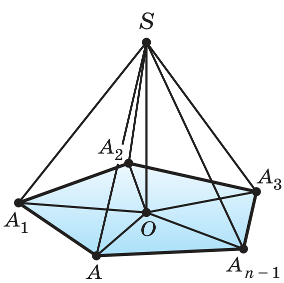


Рис. 272

Пример 3*. Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника.

Используя рисунок 272, проведите доказательство этого утверждения самостоятельно.

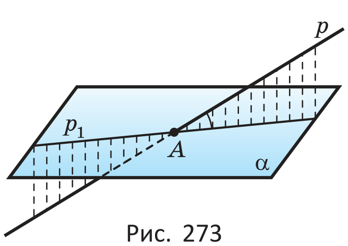


Рис. 273

Б) Теперь введём понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть дана плоскость α и прямая p, которая её пересекает и не перпендикулярна α (рис. 273). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой p на плоскость α, образуют прямую p_1. Эта прямая называется *проекцией прямой p* на плоскость α.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Угол между прямой и плоскостью — наименьший из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости. Докажите утверждение самостоятельно.

Если прямая l перпендикулярна плоскости α, то её проекцией на эту плоскость является точка A пересечения прямой с плоскостью (рис. 274). В этом случае прямая l образует со всеми прямыми плоскости углы, равные 90°. Этот угол и принимается в качестве угла между прямой и перпендикулярной ей плоскостью.

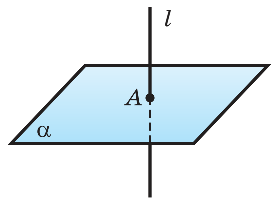


Рис. 274

Если прямая l параллельна плоскости α, то её проекцией на плоскость является прямая l_1, параллельная l. Угол между параллельными прямыми считается равным 0°. Поэтому угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным 0°.

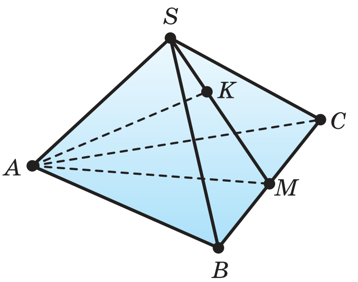


Рис. 275

Пример 4. В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны 6, а боковые рёбра — 5. Найдём угол между медианой AM основания и плоскостью SBC.

Решение. Пусть AK — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SBC. Поскольку наклонная AM перпендикулярна прямой BC, то и её проекция KM перпендикулярна прямой BC. Значит, точка K находится на серединном перпендикуляре к отрезку BC (рис. 275).

Искомый угол между медианой AM основания и плоскостью SBC — это угол AMK. Его можно найти через теорему косинусов, если знать стороны треугольника SAM. Находим: $AM = 3\sqrt{3}$, $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = 4$, тогда

$$\cos SMA = \frac{SM^2 + AM^2 - SA^2}{2SM \cdot AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Значит, $\angle SMA = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

При вычислении угла между скрещивающимися прямыми бывает полезной следующая *теорема о трёх косинусах*.

Угол α между прямой l и плоскостью λ, угол β между другой прямой m этой плоскости и проекцией на неё прямой l и угол γ между прямыми l и m связаны равенством $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma$.

Доказательство. Пусть точка A принадлежит прямой l, B — точка пересечения прямой l с плоскостью λ, прямая m лежит в плоскости λ и проходит через точку B, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую m, O — проекция точки A на плоскость λ (рис. 276).

Пусть $AB = a$ и $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Поскольку OC — проекция AC и $AC \perp m$, то $OC \perp m$. Тогда из прямоугольных треугольников AOB, OCB и ACB имеем:

$$BO = a\cos\alpha,$$
$$BC = BO\cos\beta = a\cos\alpha\cos\beta \text{ и}$$
$$\cos\gamma = BC : AB = \cos\alpha\cos\beta.$$

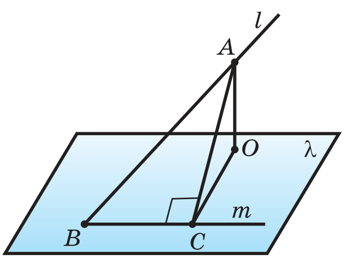


Рис. 276

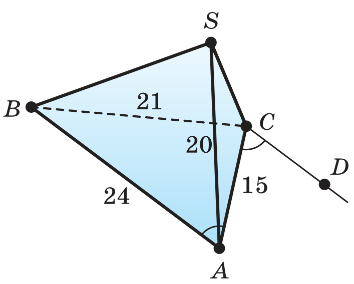


Рис. 277

Пример 5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC и равно 20. Найдём угол между прямыми SC и AB, учитывая, что $AB = 24$, $BC = 21$ и $AC = 15$.

Решение. Используем теорему о трёх косинусах, учитывая, что угол γ между прямыми SC и AB равен углу между прямой SC и прямой CD, которая проходит через точку C параллельно AB (рис. 277), поэтому $\cos\gamma = \cos\angle SCA \cos\angle ACD = \cos\angle SCA \cos\angle BAC$.

Поскольку $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 25$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \dfrac{1}{2}$, то $\cos\angle SCA = \dfrac{3}{5}$ и $\cos\gamma = 0{,}3$. Значит, $\gamma = \arccos 0{,}3$.

Ответ: $\arccos 0{,}3$.

1. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

2. Какое свойство имеет многоугольник, все стороны которого равноудалены от данной точки пространства?

3. Какое свойство имеет многоугольник, все вершины которого равноудалены от данной точки пространства?

4. Что называется проекцией прямой на плоскость?

5. Что называется углом между прямой и плоскостью?

6. Связь между какими углами выражает теорема о трёх косинусах?

7. Углы BAC и ACB треугольника ABC соответственно равны 41° и 49°, а отрезок AD перпендикулярен плоскости этого треугольника. Верно ли утверждение, что прямые BC и BD перпендикулярны?

8. Точка X принадлежит прямой, проходящей через центр O правильного треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Верно ли, что:

а) расстояния от точки X до вершин треугольника равны;
б) расстояния от точки X до сторон треугольника равны;
в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;
г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$?

9. Дан прямоугольный параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 278). Назовите угол между прямой:

а) KL и плоскостью NN_1M;
б) KM_1 и плоскостью KL_1L;
в) KL и плоскостью LL_1M_1;
г) KM_1 и плоскостью LMN;
д) KL_1 и плоскостью KLM;
е) KM_1 и плоскостью LMM_1.

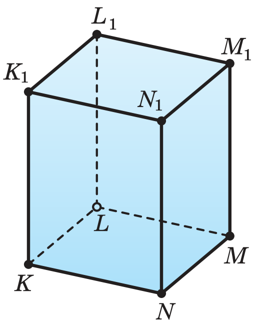


Рис. 278

Задача 1. Основанием треугольной пирамиды $DFGH$ является прямоугольный треугольник FHG с гипотенузой FG и углом HFG в 30° (рис. 279). Найдите высоту DK грани FDG, проведённую из вершины D, учитывая, что боковое ребро DH перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см, а катет FH равен 6 см.

Решение. $DH \perp (FGH)$, поэтому KH — проекция наклонной DK на (FGH).

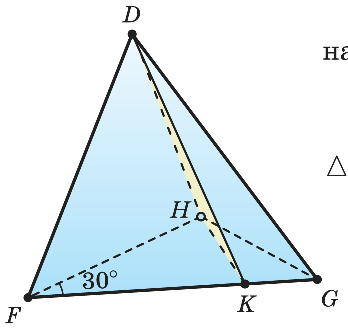


Рис. 279

DK — высота грани FDG, KH — проекция наклонной DK на (FGH), поэтому $KH \perp FG$.

$KH \perp FG$, $FH = 6$ см и $\angle HFK = 30°$, поэтому $\triangle FHK$ прямоугольный, $KH = \dfrac{1}{2}FH = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

$\triangle DHK$ — прямоугольный, поэтому

$$DK = \sqrt{DH^2 + KH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Ответ: 5 см.

Задача 2. Докажите, что если луч KA не лежит в плоскости неразвёрнутого угла LKM и острые углы AKL и AKM равны, то проекция луча KA на плоскость LKM является биссектрисой угла LKM (рис. 280).

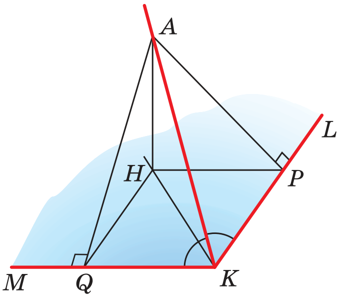


Рис. 280

Решение. Пусть $AH \perp (LKM)$, $AQ \perp KM$, $AP \perp KL$ и $\angle AKM = \angle AKL$.

$\triangle AQK = \triangle APK$ (по гипотенузе и острому углу), поэтому $AQ = AP$.

$HQ \perp KM$ (HQ — проекция AQ на (LKM) и $AQ \perp KM$).

$HP \perp KL$ (HP — проекция AL на (LKM) и $AP \perp KL$).

$HQ = HP$ (проекции равных наклонных).

KH — биссектриса угла LKM (точка H равноудалена от сторон угла LKM).

279. Укажите взаимное расположение прямых a и b на рисунке:

а) 281, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BF \perp ABC$;

б) 282, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BG \perp ABC$;

в) 283, учитывая, что $ABCD$ — ромб и $AE \perp ABC$;

г) 284, учитывая, что $ABCD$ — квадрат и $BK \perp ABC$.

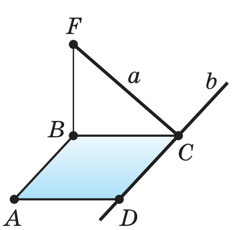


Рис. 281

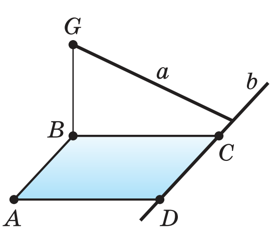


Рис. 282

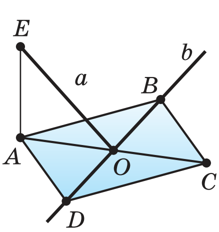


Рис. 283

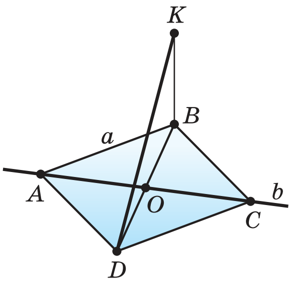


Рис. 284

280. Точка F лежит на прямой, проходящей через вершину B квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости. Учитывая, что $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм, найдите расстояние от точки F до прямых, которым принадлежат:
а) стороны квадрата;
б) диагонали квадрата.

281. Учитывая, что точка K лежит на прямой, проходящей через центр O симметрии ромба $ABCD$ перпендикулярно его плоскости:
а) докажите равенство расстояний от точки K до всех прямых, которым принадлежат стороны ромба;
б) найдите это расстояние, учитывая, что $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;
*в) найдите это расстояние, учитывая, что $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

282. В равнобедренном треугольнике XYZ с основанием XY боковая сторона равна 20, а угол при основании составляет 30°. Из его вершины Y к плоскости XYZ возведён перпендикуляр QY. Учитывая, что $QY = 10$, найдите расстояния:
а) от точки Q до прямой XZ;
б) от точки Y до плоскости XQZ.

283. Есть прямоугольный треугольник XYZ с гипотенузой YZ и катетом XY, соответственно равными 13 см и 12 см. К плоскости треугольника из центра Q вписанного в него круга возведён перпендикуляр QG длиной 1,5 см. Найдите расстояния от точки G до сторон треугольника и от его вершин.

284. Основанием четырёхугольной пирамиды $QABCD$ является ромб $ABCD$ с углом ABC и стороной AB, соответственно равными 60° и a. Её боковое ребро AQ перпендикулярно плоскости основания. Найдите это ребро и расстояние от точки A до плоскости QDC, учитывая, что площадь грани QDC равна a^2.

285. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q, прямая HQ перпендикулярна плоскости данного параллелограмма. Найдите высоты параллелограмма, учитывая, что его стороны равны 20 см и 50 см, а расстояния от точки H до сторон параллелограмма равны 17 см и 25 см.

286. Точка A, лежащая вне плоскости прямого угла UVW, отстоит от его вершины V на x, а от каждой из сторон — на y (рис. 285). Найдите расстояние AO от точки A до плоскости прямого угла.

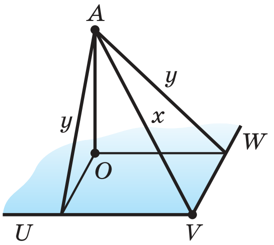


Рис. 285

287. Вершина пирамиды, в основании которой лежит прямоугольная трапеция с периметром 32, находится на расстоянии $\sqrt{17}$ от рёбер основания. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что её наибольшее и наименьшее боковые рёбра равны $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

288*. Из вершины M треугольника MNK вне его плоскости проведена прямая ML, образующая со сторонами MN и MK равные острые углы. Определите, на какие части проекция прямой ML на плоскость треугольника разделяет сторону NK, учитывая, что $MN = 51$ м, $MK = 34$ м и $NK = 30$ м.

289. Имеется куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми:
а) AC и BB_1; б) AB_1 и CD_1; в) A_1D и C_1A.

290. Из вершины B прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 6$ см и $AD = 6\sqrt{2}$ см, к его плоскости возведён перпендикуляр BQ. Найдите расстояние от точки Q до плоскости прямоугольника, учитывая, что угол между прямой QD и плоскостью ABC равен $30°$.

291. Найдите проекцию на плоскость наклонной длиной m, учитывая, что наклонная образует с плоскостью угол, равный:
а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$.

292. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость: концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

293. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна расстоянию от вершины до плоскости основания, то боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

294. Вершина правильной четырёхугольной пирамиды отстоит от плоскости основания на h, а её боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в $60°$. Найдите боковую поверхность пирамиды.

295. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, которые образуют между собой угол φ, а с плоскостью — углы α и β. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:
а) $\alpha = \beta = 45°$, $\varphi = 60°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

296. Из точки, отстоящей от плоскости на d, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы α и β, а угол между их проекциями равен φ. Найдите расстояние между их концами, учитывая, что:
а) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 150°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

297. Из точки A, отстоящей на d от плоскости α, проведены наклонные AB и AC под углом $30°$ к плоскости. Их проекции на плоскость α образуют угол в $120°$. Найдите длину отрезка BC.

298. Точка P отстоит на a от каждой вершины квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите угол, который образует с плоскостью квадрата прямая AP.

299. Боковое ребро RA четырёхугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, перпендикулярно плоскости основания (рис. 286). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника RAC, учитывая, что ребро RB равно 20 мм, боковые рёбра RB и RD наклонены к плоскости основания под углами 30° и 45° соответственно.

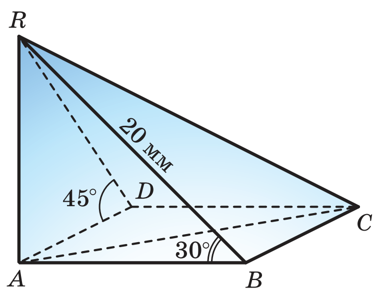


Рис. 286

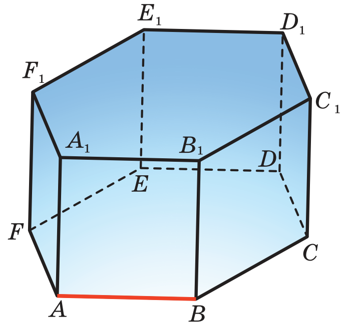


Рис. 287

300. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой AB (рис. 287) и прямой:

а) FF_1; б) CD; в) DE; г) A_1B_1; д) B_1E_1; е) A_1C_1.

301. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой BC_1 и прямой:

а) B_1E; б) F_1C; в) B_1D; г) AC_1; д) A_1E; е) F_1D.

302. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ боковое ребро в $\sqrt{3}$ раз больше ребра основания. Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.

303. Через середину K ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$ проведена плоскость, параллельная рёбрам AB и CD. Она пересекает ребро BC в точке M. Учитывая, что $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, найдите угол между прямыми AB и CD.

304. В треугольной пирамиде расстояние между серединами двух скрещивающихся рёбер равно 13. Найдите угол между второй парой скрещивающихся рёбер, учитывая, что их длины 10 и 24.

305*. Докажите, что:

а) если один катет равнобедренного прямоугольного треугольника принадлежит плоскости, а второй образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с плоскостью угол в 30°;

б) если наклонная a образует с плоскостью α угол в 45°, а прямая b плоскости — угол в 45° с проекцией наклонной, то угол между прямыми a и b равен 60°.

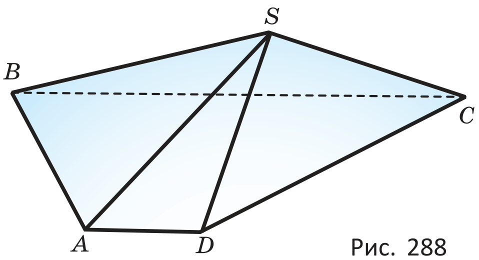


Рис. 288

306*. Есть треугольная пирамида, все рёбра которой равны друг другу. Найдите угол между ребром пирамиды и гранью, которой оно не принадлежит.

307*. Из точки Q к плоскости α проведены такие равные наклонные QA и QB, что угол между ними равен $60°$, а угол между их проекциями на плоскость α составляет $90°$. Найдите угол, который образует наклонная QA с плоскостью α.

308*. В основании пирамиды $SABCD$ (рис. 288) лежит трапеция с основаниями AD и BC, $AD = 0{,}5\,AB$, $BC = 2\,AB$, $SA = \sqrt{3}\,AB$. Все плоские углы при вершине A прямые. Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AD и середину M ребра SC, — прямоугольник, и найдите угол между прямыми AM и CD.

Пространственное моделирование

Определим, как при движении на эскалаторе можно оценить глубину расположения станции метро, длину эскалатора (рис. 289).

Обратим внимание на то, что при спуске или подъёме на эскалаторе мы проезжаем вдоль ряда ламп, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Нормативами задаётся освещённость тоннеля, исходя из которой устанавливается и расстояние между соседними лампами. Также учтём, что оптимальный угол наклона линии эскалатора к плоскости земли равен $30°$.

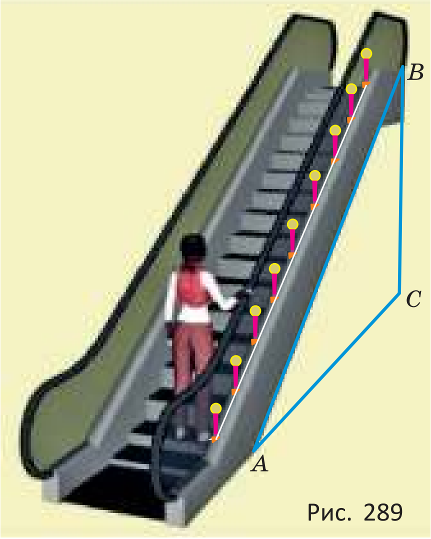


Рис. 289

Будем рассматривать эскалатор как наклонную к плоскости земли. Тогда глубину расположения станции можно интерпретировать как длину перпендикуляра к плоскости земли.

Для ответа на вопрос достаточно рассмотреть прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза AB представляет эскалатор, а катет BC — глубину расположения той станции метро, на которую ведёт данный эскалатор.

а) Подсчитайте длину эскалатора, учитывая, что расстояние между лампами равно a.

б) Составьте формулу для нахождения глубины закладки станции метро.

§ 10. Перпендикулярность плоскостей

А) Два луча на плоскости с общим началом разделяют эту плоскость на две части, каждая из которых называется *углом*.

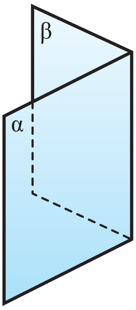


Рис. 290

Аналогично две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части (рис. 290). Каждую из этих частей вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом**. Полуплоскости, ограничивающие двугранный угол, называют **гранями** угла, а общую прямую — **ребром** двугранного угла (рис. 291).

Обычно рассматривают меньший из двугранных углов с данными гранями (рис. 292). Точки угла, не лежащие на его гранях, составляют *внутреннюю область* двугранного угла (рис. 293).

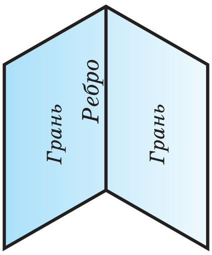


Рис. 291

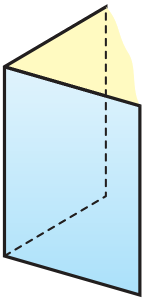


Рис. 292

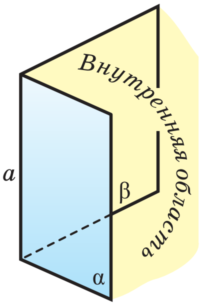


Рис. 293

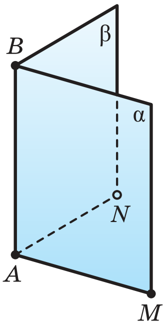


Рис. 294

Двугранный угол обычно обозначают по ребру: $\angle\ a$ (см. рис. 293) или $\angle\ AB$ (рис. 294). При необходимости можно присоединить названия граней или названия точек на гранях: $\angle\ \alpha a \beta$ (см. рис. 293), или $\angle\ \alpha AB\beta$ (см. рис. 294), или $\angle\ MABN$ (см. рис. 294).

Моделью двугранного угла может служить двускатная крыша (рис. 295), стена вместе с открытой дверью (рис. 296), полураскрытая книга (рис. 297).

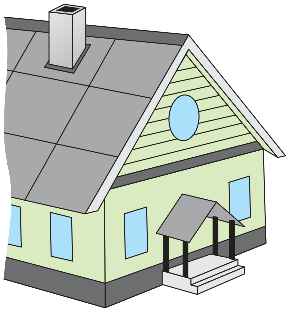


Рис. 295

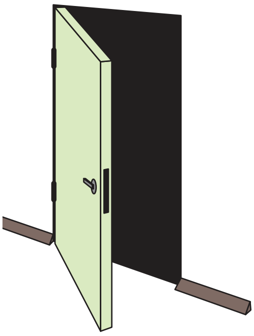


Рис. 296

Рис. 297

Для измерения двугранных углов вводится понятие линейного угла. Выберем на ребре AB двугранного угла $\alpha AB\beta$ точку P, и в его гранях α и β из этой точки проведём лучи PQ и PR, перпендикулярные ребру AB (рис. 298). Полученный угол QPR, стороны которого PQ и PR ограничивают часть плоскости PQR, принадлежащую двугранному углу $\alpha AB\beta$, называют **линейным углом** двугранного угла. Плоскость линейного угла перпендикулярна ребру двугранного угла, так как по построению лучи PQ и PR перпендикулярны ребру AB.

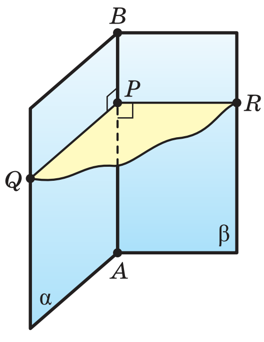


Рис. 298

Понятно, что двугранный угол имеет бесконечно много линейных углов (рис. 299).

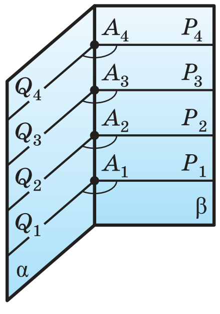


Рис. 299

Т е о р е м а 10. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Доказательство. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — линейные углы двугранного угла MN (рис. 300). Докажем, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

Отложим на сторонах углов $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равные отрезки B_1P, B_2Q, B_1S, B_2R. Тогда получатся четырёхугольники PQB_2B_1 и SRB_2B_1, у которых противоположные стороны PB_1 и QB_2, а также SB_1 и RB_2 равны по построению и параллельны как перпендикуляры к одной прямой, проведённые в соответствующей плоскости. Поэтому $PQ = B_2B_1 = SR$ и $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А это означает, что четырёхугольник $PQRS$ является параллелограммом, что позволяет сделать вывод о равенстве отрезков PS и QR. Получили, что у треугольников PSB_1 и QRB_2 равны соответственные стороны, поэтому треугольники равны, а значит, равны и их углы $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

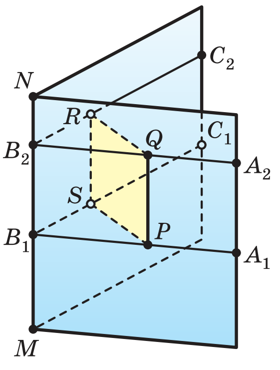


Рис. 300

Измерение двугранных углов связывается с измерением их линейных углов. В зависимости от того, каким — острым, прямым, тупым, развёрнутым — является линейный угол двугранного угла, отличают *острые*, *прямые*, *тупые*, *развёрнутые двугранные углы*. Двугранный угол, изображённый на рисунке 301, — острый, на рисунке 302 — прямой, на рисунке 303 — тупой.

Две пересекающиеся плоскости разделяют пространство на четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 304). Если один из них равен α, то ещё один из них также равен α, а два остальных — $180° - \alpha$. Среди этих углов есть не превосходящий $90°$,

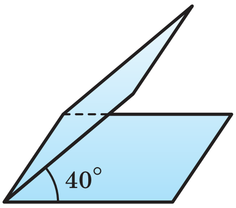


Рис. 301

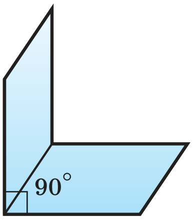


Рис. 302

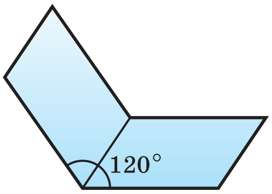


Рис. 303

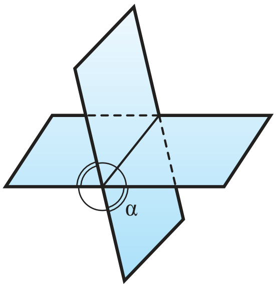


Рис. 304

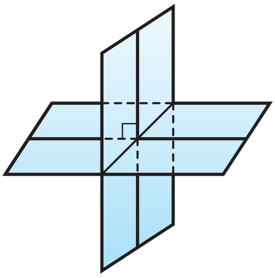


Рис. 305

его величину и принимают за величину угла между пересекающимися плоскостями.

Если один из двугранных углов, образовавшихся при пересечении двух плоскостей, прямой, то три остальных также прямые (рис. 305).

Б) Плоскости, при пересечении которых образуются прямые двугранные углы, называются **перпендикулярными плоскостями**.

Для обозначения перпендикулярности плоскостей, как и для обозначения перпендикулярности прямых, используют знак $\perp$.

Моделями перпендикулярных плоскостей могут служить столешница и боковина стола (рис. 306), пол в комнате и дверь в неё (рис. 307).

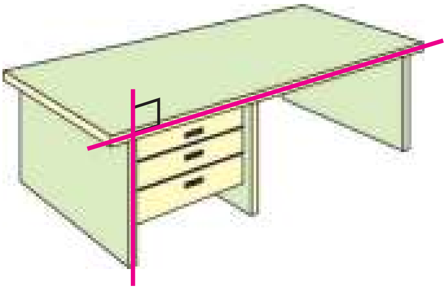


Рис. 306

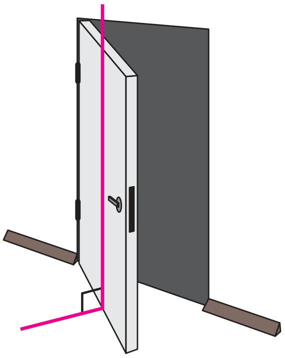


Рис. 307

Теорема 11. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть через прямую a, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает её в точке M, проходит плоскость β (рис. 308). Докажем, что $\alpha \perp \beta$.

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой MP, перпендикулярной прямой a, так как по условию прямая a и плоскость α перпендикулярны.

В плоскости α проведём прямую MN, перпендикулярную прямой MP. Полученный угол NMQ, где Q — точка прямой a, является линейным углом двугранного угла $\alpha MP\beta$. Поскольку по условию $a \perp \alpha$, то угол NMQ — прямой, и, значит, плоскости α и β перпендикулярны.

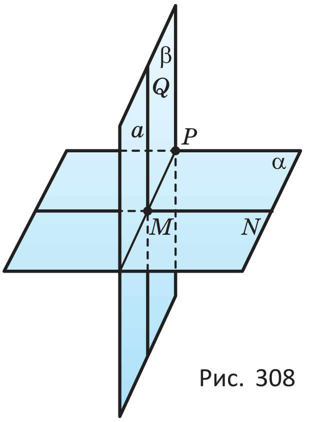


Рис. 308

Теорема **11** выражает *признак перпендикулярности плоскостей*.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них (рис. 309).

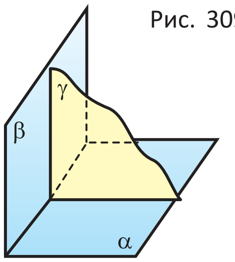


Рис. 309

Докажем теперь утверждение, обратное утверждению теоремы **11**.

Теорема 12. Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости.

Доказательство. Пусть две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN, и через точку K плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная плоскости β. Докажем, что эта прямая принадлежит плоскости α.

Через точку K в плоскости α проведём прямую b, перпендикулярную MN, и через точку L их пересечения в плоскости β — прямую c, также перпендикулярную MN (рис. 310). Угол между прямыми b и c прямой как линейный угол прямого двугранного угла. Получили, что прямая b проходит через точку K и перпендикулярна плоскости β, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым MN и c этой плоскости. А поскольку через эту точку к данной плоскости можно провести только одну перпендикулярную прямую, то прямые b и a совпадают. Значит, прямая a принадлежит плоскости α.

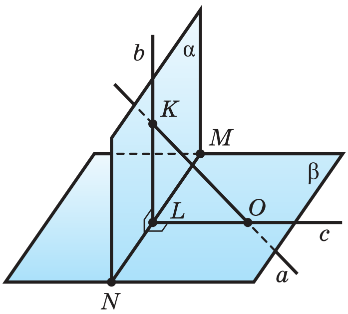


Рис. 310

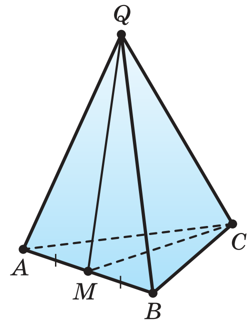


Рис. 311

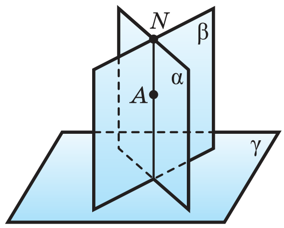


Рис. 312

Пример 1. Точка M — середина ребра AB при основании правильной пирамиды $QABC$ (рис. 311). Докажем, что плоскость QCM перпендикулярна плоскости основания ABC.

Решение. Прямая AB является основанием равнобедренных треугольников AQB и ACB. Поэтому она перпендикулярна медианам QM и CM этих треугольников и вместе с этим плоскости QCM. Из теоремы **12** следует, что плоскость ABC, проходящая через перпендикуляр AB к плоскости QCM, ей перпендикулярна.

Следствие. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то их линия пересечения перпендикулярна той же плоскости (рис. 312).

Пример 2. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен α. Найдём величину двугранного угла при боковом ребре.

Решение. Пусть N — середина ребра AC, AK — перпендикуляр к ребру BQ, проведённый из точки A (рис. 313).

Из равенства треугольников ABQ и CBQ следует, что $CK \perp BQ$. Поэтому угол AKC — линейный угол двугранного угла BQ.

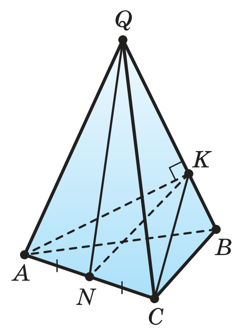


Рис. 313

Из прямоугольных треугольников AKQ и ANQ получаем: $AK = AQ\sin\alpha$, $AN = AQ \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKN находим, что

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому $\angle AKC = 2\arcsin\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $2\arcsin\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

В) При вычислениях бывает полезной *теорема о трёх синусах*.

Теорема 13. Линейный угол α двугранного угла, угол β между ребром этого двугранного угла и прямой, лежащей в одной из его граней, и угол γ между этой прямой и плоскостью другой грани связаны равенством $\sin\alpha\,\sin\beta = \sin\gamma$.

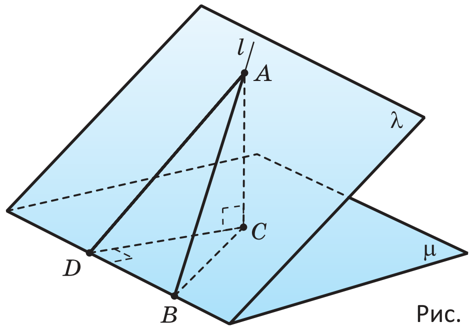


Рис. 314

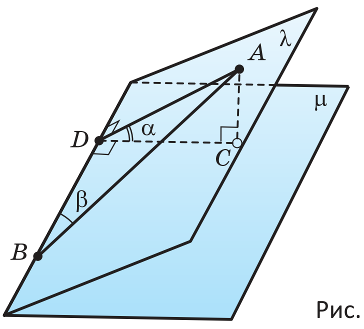


Рис. 315

Доказательство. Пусть прямая l лежит в плоскости λ, точка A принадлежит прямой l, B — точка пересечения прямой l с ребром двугранного угла $\lambda\mu$, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на грань μ, D — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ребро угла (рис. 314). Пусть $AB = a$ и $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Поскольку DC — проекция AD и $AD \perp BD$, то $DC \perp BD$. Тогда из прямоугольных треугольников ADB, ACD и ACB будем иметь: $AD = a\sin\beta$, $AC = AD\sin\alpha = a\sin\beta\sin\alpha$ и $\sin\gamma = AC : AB = \sin\alpha\sin\beta$.

Следствие 1. Если точка A лежит в грани λ двугранного угла величиной α, то расстояние от неё до плоскости другой грани μ угла равно $AB\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$, где B — точка на ребре двугранного угла, а β — угол между прямой AB и ребром двугранного угла (рис. 315).

Пример 3. Стороны AB и AC правильного треугольника ABC лежат соответственно в гранях λ и μ острого двугранного угла величиной α. Сторона AB образует угол β с ребром двугранного угла. Найдём величину угла между плоскостью ABC и плоскостью μ.

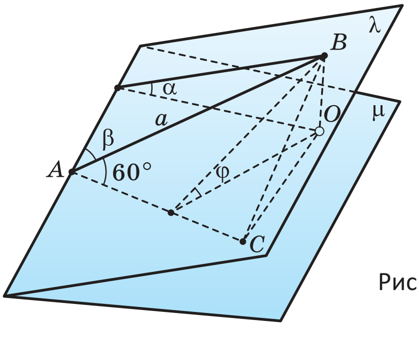


Рис. 316

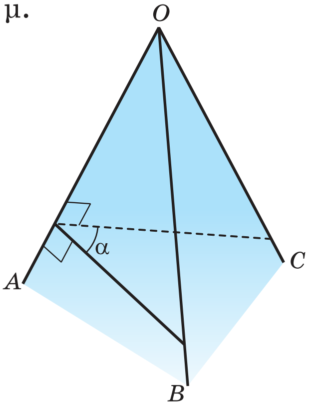


Рис. 317

Р е ш е н и е. Пусть искомый угол равен φ, сторона треугольника имеет длину a. Тогда расстояние BO от точки A до плоскости μ можно найти двумя способами (рис. 316): $BO = a\sin\alpha\sin\beta$ и $BO = a\sin\varphi\sin 60°$.

Поэтому
$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\beta \text{ и } \varphi = \arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right).$$

О т в е т: $\arcsin\left(\dfrac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right)$.

Следствие 2. Пусть рёбра OA, OB и OC — грани двугранных углов величиной α, β и γ соответственно. Тогда $\dfrac{\sin\alpha}{\sin BOC} = \dfrac{\sin\beta}{\sin AOC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin AOB}$ (рис. 317).

?

1. Что называют углом? Что называют двугранным углом?

2. Что называют гранью двугранного угла; ребром двугранного угла? Как обозначают двугранный угол?

3. Как построить линейный угол двугранного угла? Какое свойство имеют линейные углы двугранного угла?

4. Какой двугранный угол называют острым; прямым; тупым; развёрнутым?

5. Какие плоскости называются перпендикулярными?

6. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.

7. Сформулируйте свойство плоскости, перпендикулярной линии пересечения двух плоскостей.

8. Сформулируйте свойство прямой, проведённой через точку одной из перпендикулярных плоскостей перпендикулярно другой плоскости.

9. Сформулируйте свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей.

10*. Сформулируйте теорему о трёх синусах.

11*. Следствие 2 называют ещё теоремой синусов для трёхгранного угла. Объясните почему.

12. Сколько двугранных углов имеет:

а) треугольная пирамида; б) параллелепипед?

13. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите линейный угол двугранного угла:

а) DD_1; б) A_1B_1.

14. Учитывая, что $STUVS_1T_1U_1V_1$ — куб (рис. 318), определите:

а) является ли угол TVT_1 линейным углом двугранного угла T_1SVT;

б) является ли угол T_1ST линейным углом двугранного угла T_1SVT;

в) величину двугранного угла V_1UTS.

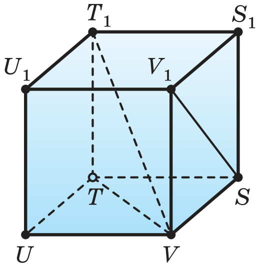


Рис. 318

Задача 1. Плоскости правильных треугольника KMD и четырёхугольника $KMNP$ перпендикулярны (рис. 319). Найдите DN, учитывая, что $KM = a$.

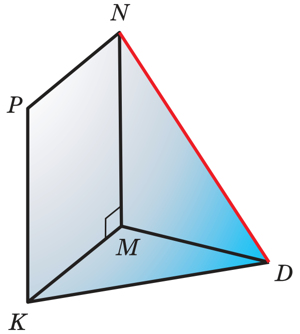


Рис. 319

Решение. $(KDM) \perp (KMN)$ и $MN \perp MK$, тогда по теореме **12** $MN \perp (KDM)$.

$MN \perp MD$, поэтому $\triangle DMN$ — прямоугольный.

$MD = a$, так как $\triangle KDM$ правильный и $KM = a$.

$MN = a$, так как четырёхугольник $KMNP$ правильный и $KM = a$.

Тогда по теореме Пифагора

$$DN = \sqrt{MD^2 + MN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Ответ: $a\sqrt{2}$.

Задача 2. Из точек M и N ребра двугранного угла в разных его гранях возведены перпендикуляры MK и NL (рис. 320). Определите величину двугранного угла, учитывая, что $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см и расстояние между точками K и L равно 50 см.

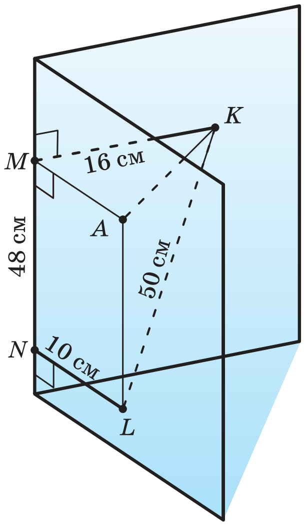


Рис. 320

Решение. Пусть $NL \parallel MA$ и $NM \parallel LA$. Тогда $MNLA$ — параллелограмм и $MA = NL = 10$ см, $AL = MN = 48$ см.

$MA \parallel NL$ и $NL \perp MN$, поэтому $MA \perp MN$.

$\angle KMA$ — линейный угол двугранного угла $KMNL$ ($MK \perp MN$ и $MA \perp MN$).

$MN \perp MK$ и $MN \perp MA$, тогда $MN \perp (KMA)$.

$AL \parallel MN$ и $MN \perp (KMA)$, тогда $AL \perp (KMA)$.

$AL \perp (KMA)$ и $AK \subset (KMA)$, тогда $AL \perp AK$.

$AL \perp AK$, поэтому $\triangle KAL$ — прямоугольный.

Тогда по теореме Пифагора

$$AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14 \text{ (см)}.$$

Из треугольника MKA:

$$\cos \angle KMA = \frac{MK^2 + MA^2 - AK^2}{2MK \cdot MA} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\angle KMA = 60°$.

Ответ: $60°$.

309. Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 321). Назовите его:
а) прямые двугранные углы;
б) перпендикулярные грани.

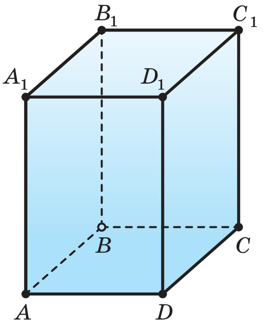


Рис. 321

310. Учитывая, что точка T — середина ребра QR треугольной пирамиды $OPQR$, у которой основанием является правильный треугольник PQR, а боковые рёбра равны друг другу, определите, является ли угол:
а) PRO линейным углом двугранного угла $PRQO$;
б) PTO линейным углом двугранного угла $PRQO$.

311. Верно ли, что если двугранный угол $\alpha AB\beta$ разбить на два двугранных угла $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$ (рис. 322), то линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$ равен сумме линейных углов двугранных углов $\alpha AB\gamma$ и $\gamma AB\beta$?

312. Из вершины X треугольника XYZ, сторона YZ которого лежит в плоскости β, проведена высота XA и перпендикуляр XP к плоскости β (рис. 323). Докажите, что угол XAP — линейный угол двугранного угла $XYZP$.

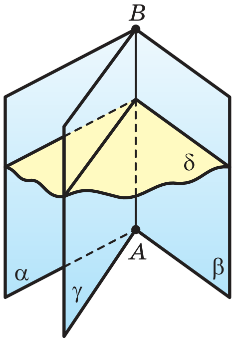


Рис. 322

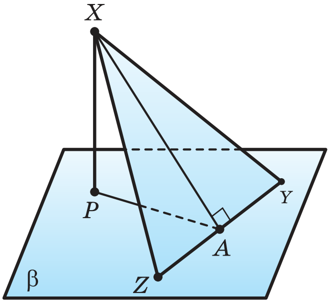


Рис. 323

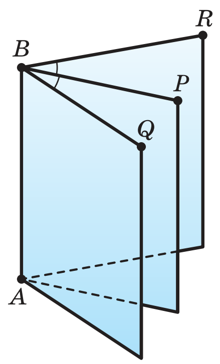


Рис. 324

313. На рисунке 324 двугранные углы $RABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABR и ABQ.

314. Есть два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани вместе составляют плоскость. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна $180°$.

315. Все рёбра треугольной пирамиды $ABCD$ равны друг другу, а точка M — середина ребра AC. Докажите, что угол DMB является линейным углом двугранного угла $BACD$.

316. Две точки одной грани двугранного угла отстоят от его ребра на 51 см и 34 см, а первая из них отстоит от второй грани на 15 см. Найдите расстояние до этой грани от другой точки.

317. На одной грани двугранного угла выбрана точка X, отстоящая на 36 см от ребра угла и на 24 см от другой его грани. На второй грани этого угла выбрана точка Y, отстоящая от первой грани на 18 см. Найдите расстояние от точки Y до ребра угла.

318. Плоскость прямоугольного треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом в $45°$ (рис. 325). Найдите расстояние вершины прямого угла C от плоскости α, учитывая, что $\angle ABC = 60°$, $BC = a$.

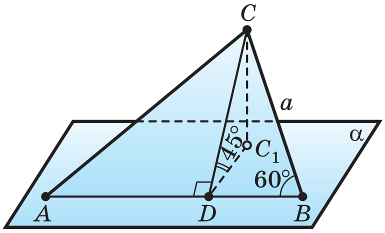


Рис. 325

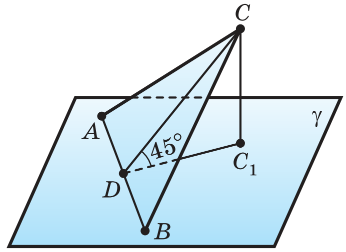


Рис. 326

319. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC под углом в $45°$ к его плоскости проведена плоскость γ, отстоящая от вершины прямого угла C на l (рис. 326). Найдите площадь треугольника ABC.

320. Больший катет прямоугольного треугольника с острым углом и гипотенузой, соответственно равными $30°$ и c, лежит в плоскости γ, составляющей с плоскостью треугольника угол в $60°$. Найдите:

а) расстояние от вершины большего острого угла треугольника до плоскости γ;

б) угол между гипотенузой и плоскостью γ.

321. Найдите расстояние от вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами, равными 7 см и 24 см, до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет с плоскостью треугольника угол в $30°$.

322. Основанием прямой призмы является треугольник MNK, в котором $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Через сторону MK проведена плоскость под углом $30°$ к плоскости основания, пересекающая противоположное боковое ребро в точке L. Найдите:

а) отрезок NL бокового ребра;

б) площадь полученного сечения.

323. Через сторону CE треугольника CDE, у которого $CD = 9$ м, $DE = 6$ м и $CE = 5$ м, проходит плоскость ρ, составляющая с плоскостью треугольника угол, равный $45°$. Найдите расстояние до плоскости ρ от вершины D.

324. Ребро CD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$ и $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

325. Найдите двугранный угол $ABCD$ треугольной пирамиды $ABCD$, учитывая, что углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$ и $DB = 5\sqrt{5}$.

326*. Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость ω является квадрат ABC_1D_1. Найдите угол между плоскостью ω и плоскостью прямоугольника $ABCD$, учитывая, что $AB : BC = 1 : 2$.

327*. Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного $60°$, а их точки A и D отстоят от ребра этого угла соответственно на 16 см и 13 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

328. Из точек A и B ребра двугранного угла, равного $120°$, в разных его гранях возведены перпендикуляры AC и BD к ребру. Найдите отрезок CD, учитывая, что $AB = AC = BD = a$.

329. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их длина равна l. Найдите косинус угла, образованного плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

330. Из точек C и D ребра двугранного угла, равного $120°$, в разных его гранях возведены перпендикуляры CK и DL. Найдите длину отрезка KL, учитывая, что $CK = 3$ см, $DL = 5$ см, $CD = 24$ см.

331. В разных гранях двугранного угла из точек M и N его ребра к этому ребру возведены перпендикуляры MA и NB. Определите расстояние AB, учитывая, что:

а) двугранный угол прямой, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см и $NB = 12$ см;
б) двугранный угол равен $120°$, $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
в) двугранный угол равен $120°$, $MN = MA = NB = x$.

332. Сторона IJ треугольника IJK, у которого $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, лежит в плоскости ρ, а проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость относятся как $1 : 2$. Определите величину двугранного угла, образованного плоскостями ρ и IJK.

333. Найдите двугранный угол, образованный двумя боковыми гранями четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной $20\sqrt{3}$ см, а боковые рёбра равны 30 см каждое.

334*. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Найдите угол между плоскостями этих треугольников.

335*. Отрезок EL, соединяющий вершину E треугольника CDE с вершиной L треугольника CDL, перпендикулярен плоскости этого треугольника. Докажите, что площадь треугольника CDE равна $S \cdot \cos \varphi$, где S — площадь треугольника CDL, φ — угол между плоскостями CDL и CDE.

336*. В треугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

337*. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

338*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

339*. В четырёхугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите двугранные углы этой пирамиды.

340. Верно ли утверждение, что через данную точку можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько существует таких плоскостей?

341. Верно ли утверждение, что плоскость линейного угла двугранного угла перпендикулярна каждой его грани?

342. Прямая a не перпендикулярна плоскости α. Докажите, что существует плоскость, которая содержит прямую a и перпендикулярна плоскости α.

343. Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, учитывая, что треугольники:

а) равносторонние;

б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

344. Отрезок длиной a с концами на двух перпендикулярных плоскостях образует с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30° (рис. 327). Найдите часть линии пересечения плоскостей, заключённую между перпендикулярами, опущенными на неё из концов отрезка.

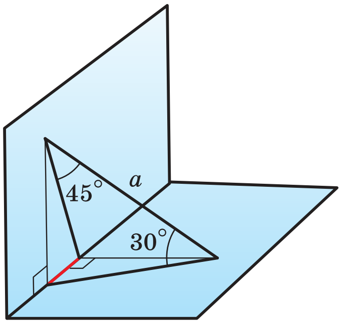


Рис. 327

345. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 12 дм, а все боковые рёбра равны 24 дм. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.

Пространственное моделирование

Отдельным видом параллельного проектирования, применяемого в геометрии для изображения пространственных фигур, является ортогональное проектирование.

Ортогональной проекцией точки на плоскость α называется точка пересечения с этой плоскостью прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно α.

Ортогональной проекцией фигуры на плоскость называется множество ортогональных проекций всех точек этой фигуры на плоскость.

а) Найдите площадь ортогональной проекции треугольника с площадью S на плоскость α, учитывая, что одна из его сторон лежит в плоскости α, а угол наклона плоскости треугольника к плоскости α равен β $(0° < \beta < 90°)$ (рис. 328).

б) Решите предыдущую задачу, учитывая, что треугольник не имеет с плоскостью α общих точек и одна из сторон треугольника параллельна плоскости α (рис. 329).

в*) Найдите площадь ортогональной проекции многоугольника с площадью S на плоскость α, учитывая, что угол наклона плоскости многоугольника к плоскости α равен β $(0° < \beta < 90°)$.

г*) Используя результаты решения задач *а*–*в*, докажите *пространственную теорему Пифагора*: «Если все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые, то квадрат площади грани, противоположной этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней» (рис. 330).

Если $AJIK$ — треугольная пирамида, $AJ \perp IJ$, $AJ \perp JK$ и $JI \perp KJ$, то

$$S_{AIK}^2 = S_{AIJ}^2 + S_{AKJ}^2 + S_{IJK}^2.$$

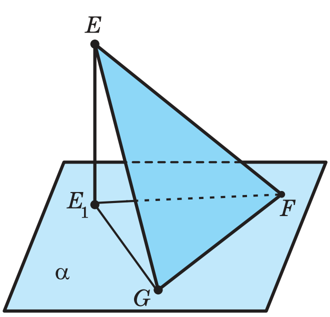


Рис. 328

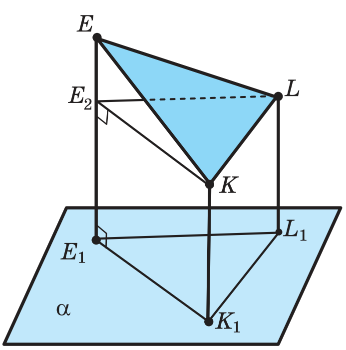


Рис. 329

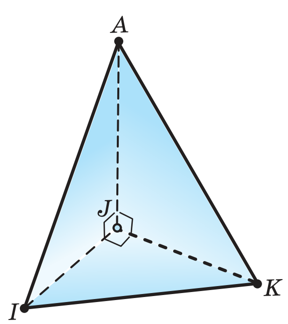


Рис. 330

Дополнительные задания к разделу 3

346. Есть треугольная пирамида $SABC$, все рёбра которой равны друг другу. На рёбрах SC, SB, CB отмечены середины U, V, Y соответственно, а на ребре SA — произвольная точка X. Определите:

а) перпендикулярны ли прямые UV и YX;

б) угол между прямыми UV и AY.

347. Отрезки AE и CF — высоты треугольника ABC, а отрезок DK — перпендикуляр к плоскости ABC. Докажите, что прямые KD и AC перпендикулярны.

348. Рёбра BC и AD треугольной пирамиды $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что ребро AD перпендикулярно одной из средних линий грани ABC.

349. Два равных круга имеют единственную общую точку A, через которую проходят диаметры AB и AC этих кругов, причём эти диаметры не лежат на одной прямой. Определите, перпендикулярна ли плоскости ABC линия пересечения плоскостей, в которых лежат данные круги. Изменится ли вывод, если круги не будут равными?

350. В каком случае через одну из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой?

351. Точки A, B, C, D являются серединами рёбер TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прямоугольного параллелепипеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, в основании которого лежит квадрат. Определите:

а) перпендикулярна ли прямая YA плоскости сечения XX_1DC;

б) перпендикулярна ли прямая TB плоскости XX_1D;

в) угол между прямыми AY и XD.

352. Есть прямоугольный треугольник ABC, один катет которого и прилежащий к нему острый угол равны m и β. Из вершины прямого угла C возведён перпендикуляр CD, равный n. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

353. Концы A и B отрезков AA_1 и BB_1 принадлежат плоскости α, а сами отрезки ей перпендикулярны и расположены по одну сторону от плоскости. Найдите углы четырёхугольника AA_1B_1B, учитывая, что:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) $A_1B_1 = 2\ AB$;

в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

354. Измерения AB, BC и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a, b и c соответственно. Найдите угол между прямыми:

а) AC и BB_1; б) A_1D и C_1A.

355. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой AB и прямой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

356. Из вершины A треугольника ABC возведён перпендикуляр AM, и точка M соединена с серединой D стороны BC. Докажите, что:

а) прямые MD и BC перпендикулярны, если стороны AB и AC равны;

б) стороны AB и AC равны, если прямые MD и BC перпендикулярны.

357. Катет AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости γ. Докажите, что плоскость, которая проходит через другой катет и его проекцию на плоскость γ, перпендикулярна прямой AB.

358. Докажите, что угол между прямой и плоскостью является наименьшим из углов, которые образует эта прямая со всеми прямыми плоскости, проходящими через точку пересечения прямой с плоскостью.

359. Прямоугольные треугольники ABC и ACD, лежащие в перпендикулярных плоскостях, имеют общий катет AC, равный $2\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка BD, учитывая, что углы ACB и CAD равны $30°$.

360. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямой AB и прямой:

а) CD; в) A_1B_1; д) FC;
б) DE; г) D_1E_1; е) F_1C_1.

361. Основанием прямоугольного параллелепипеда является прямоугольник с измерениями 5 см и 12 см, а диагональ параллелепипеда равна 13 см. Найдите третье измерение параллелепипеда.

362. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите расстояние между прямой AB и прямой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

363. В правильной треугольной пирамиде $QABC$ плоский угол AQB при вершине равен $30°$. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

364. Плоскости квадрата $KMNP$ и ромба $KMDF$ перпендикулярны. Найдите FN, учитывая, что сторона ромба и угол KMD соответственно равны a и $60°$.

365. Есть пирамида, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 6 см, а все боковые рёбра равны 12 см. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найдите площадь сечения.

Проверьте свои знания

1. Проекцией прямой на плоскость может быть:

а) точка; б) прямая; в) отрезок.

2. Есть треугольная пирамида $SABC$, все рёбра которой равны друг другу. На рёбрах SC, SB, CB отмечены середины U, V, Y соответственно, а на ребре SA — произвольная точка X. Определите, перпендикулярны ли прямые SA и UV.

3. Есть треугольная пирамида $SABC$, все рёбра которой равны друг другу. На рёбрах SC, SB, CB отмечены середины U, V, Y соответственно, а на ребре SA — произвольная точка X. Определите угол между прямыми UV и AY.

4. Измерения AB, BC и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a, b и c соответственно. Найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1.

5. Из центра O окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и боковой стороной AB, соответственно равными 18 см и 15 см, возведён перпендикуляр OX, равный 6 см. Найдите расстояния от точки X до сторон треугольника.

6. В плоскости δ проведены две параллельные прямые MN и KL, отстоящие друг от друга на a, а вне плоскости δ выбрана точка C, отстоящая от MN на b и от KL на c. Найдите расстояние от точки C до плоскости δ, учитывая, что $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

7. Из вершины большего угла треугольника со сторонами 20 см, 34 см и 42 см возведён перпендикуляр к плоскости этого треугольника длиной 30 см. Найдите расстояние от его концов до большей стороны треугольника.

8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Боковое ребро напротив средней по величине стороны основания перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите величины двугранных углов при основании этой пирамиды.

9. В треугольной пирамиде все рёбра основания равны a, а все боковые рёбра — b. Найдите расстояние между боковым ребром и ребром основания, не лежащим с ним в одной плоскости.

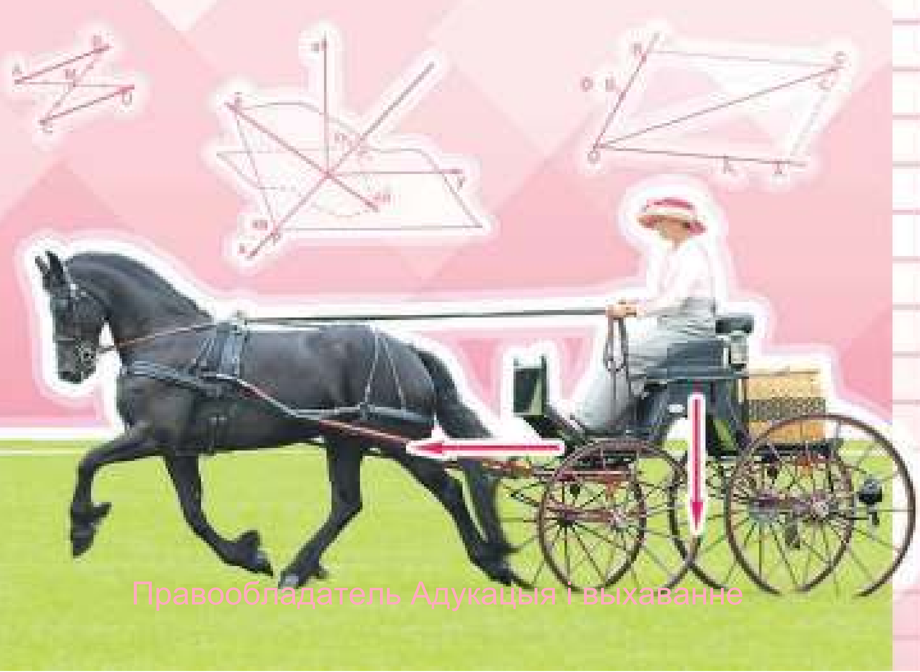
10. Перпендикуляры, опущенные из точек C и D, взятых в разных перпендикулярных плоскостях, на линию их пересечения, соответственно равны c и d, а расстояние между их основаниями равно l. Найдите отрезок CD и его проекции на каждую из плоскостей.

«...Разум заключается не только в знаниях,
но и в умении применять знания на деле...»
(Аристотель).

РАЗДЕЛ 4 КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе вы узнаете:

- о координатах в пространстве;
- о векторах и действиях над ними;
- об использовании векторов и координат.



§ 11. Координаты в пространстве

А) Система координат на плоскости позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел (рис. 331). Координаты вы широко использовали для графического представления зависимостей, при решении систем уравнений, а также в геометрии, чтобы геометрическую задачу свести к задаче алгебраической.

Чтобы ввести декартову систему координат в пространстве, выберем точку O, которая будет считаться началом системы координат, и три попарно перпендикулярные прямые. Каждую из этих прямых сделаем осью, т. е. на них отметим равные единичные отрезки OA, OB, OC. Одну ось называют осью *абсцисс* и обозначают Ox, другую ось — осью *ординат* и обозначают Oy, а третью ось называют осью *аппликат* и обозначают Oz (рис. 332). Теперь каждой точке M пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел $(x;\ y;\ z)$ — координаты этой точки. Здесь x — координата на оси Ox точки пересечения с этой осью плоскости, которая проходит через точку M перпендикулярно оси Ox; y — координата на оси Oy точки пересечения с этой осью плоскости, которая проходит через точку M перпендикулярно оси Oy; и z — координата точки пересечения с осью Oz плоскости, которая проходит через точку M перпендикулярно оси Oz. Запись $M(a;\ b;\ c)$ означает, что точка M имеет координаты $(a;\ b;\ c)$. Понятно, что каждой упорядоченной тройке чисел $(a;\ b;\ c)$ в пространстве соответствует определённая точка (рис. 333).

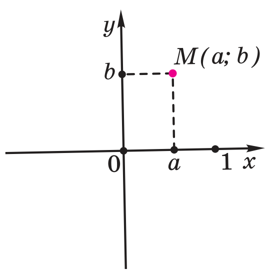


Рис. 331

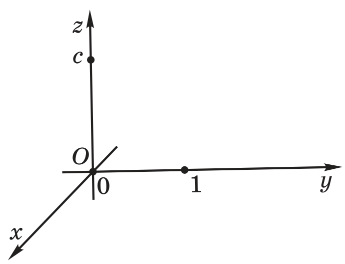


Рис. 332

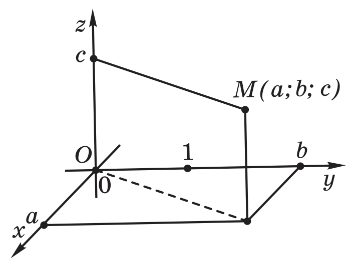


Рис. 333

Б) Вы знаете, что по координатам концов $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$ отрезка AB на плоскости можно определить его длину:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Аналогичная формула выражает длину отрезка AB в пространстве через координаты его концов $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Чтобы доказать эту формулу, рассмотрим плоскости, которые проходят через точки A и B перпендикулярно координатным осям. Получаем, что отрезок AB по сути является диагональю прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого параллельны координатным осям и имеют длины $|x_B - x_A|$, $|y_B - y_A|$ и $|z_B - z_A|$ (рис. 334) (если же какие-либо из проведённых плоскостей совпадут, то параллелепипед превратится в прямоугольник или отрезок).

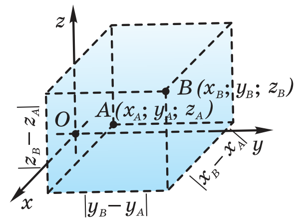


Рис. 334

Ранее вы доказывали, что координаты середины отрезка равны средним арифметическим соответствующих координат его концов. Это утверждение остаётся истинным и в случае пространства (см. пример 2 в § 6): если $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ и точка $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ — середина отрезка AB, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ \ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ \ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Пример 1. На оси ординат найдём точку, равноудалённую от точек $P(7;\ -1;\ 5)$ и $K(-1;\ 4;\ -3)$.

Решение. Пусть M — искомая точка. Тогда $M(0;\ y;\ 0)$ и, поскольку $MP = MK$, то

$$\sqrt{(7-0)^2 + (-1-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-y)^2 + (-3-0)^2},$$

или $74 + (1 + y)^2 = 10 + (4 - y)^2$. Отсюда $y = -4{,}9$.

Ответ: $M(0;\ -4{,}9;\ 0)$.

Пример 2. Найдём условие, задающее геометрическое место точек, равноудалённых от начала координат и от точки $A(a;\ b;\ c)$.

Решение. Согласно геометрическим соображениям искомое множество состоит из всех тех точек, размещённых на серединных перпендикулярах к отрезку OA. Такие точки заполняют плоскость, проходящую через середину отрезка OA перпендикулярно ему. Найдём условие, которому удовлетворяют координаты $(x;\ y;\ z)$ произвольной точки M этой плоскости. Условие $OM = AM$ означает, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \text{ или}$$

$$2(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ответ: Искомое геометрическое место точек есть плоскость, которая задаётся уравнением $ax + by + cz = 0{,}5(a^2 + b^2 + c^2)$.

Пример 3. Найдём условие, которому удовлетворяют координаты точек плоскости α, проходящей через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ перпендикулярно прямой AB, где $B(2;\ 3;\ 4)$.

Решение. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости α. Тогда из прямоугольного треугольника ABM по теореме Пифагора имеем: $BM^2 = AB^2 + AM^2$.

Поскольку
$$BM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2,$$

$AB^2 = (2-3)^2 + (3-1)^2 + (4+2)^2 = 41$, $AM^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$, то

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 + 41, \text{ или}$$

$$x - 2y - 6z - 13 = 0.$$

Ответ: $x - 2y - 6z - 13 = 0$.

1. Как задают прямоугольную декартову систему координат на плоскости; в пространстве?

2. Как обозначают координатные оси декартовой системы координат в пространстве? Как их называют?

3. Как в выбранной декартовой системе координат найти абсциссу определённой точки пространства; ординату; аппликату?

4. Как найти точку пространства, которая в выбранной декартовой системе координат имеет координаты $(a;\ b;\ c)$?

5. Где располагается точка $M(a;\ 0;\ 0)$, точка $K(0;\ b;\ 0)$, точка $P(0;\ 0;\ c)$?

6. Где располагается точка $A(a;\ b;\ 0)$, точка $B(0;\ b;\ c)$, точка $C(a;\ 0;\ c)$?

7. Как найти расстояние между точками, если известны их координаты?

8. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

366. Куб с ребром a расположен так, что три его ребра находятся на осях координат. Найдите координаты его вершин, учитывая, что:

а) они все неотрицательны;

б) они все неположительны;

в) абсциссы и ординаты неотрицательны, а аппликаты неположительны;

г) абсциссы и ординаты неположительны, а аппликаты неотрицательны;

д) абсциссы и аппликаты неотрицательны, а ординаты неположительны;

е) абсциссы и аппликаты неположительны, а ординаты неотрицательны;

ж) ординаты и аппликаты неотрицательны, а абсциссы неположительны;

з) ординаты и аппликаты неположительны, а абсциссы неотрицательны.

367. На рисунке 335 изображена декартова система координат в пространстве и показана точка $K(1;\ 3;\ 4)$. В тетради сделайте подобное изображение декартовой системы координат в пространстве и покажите точку:

а) $A(3;\ 1;\ 2)$;   в) $C(1;\ -1;\ 2)$;
б) $B(-1;\ 2;\ 1)$;   г) $M(-1;\ 3;\ -2)$.

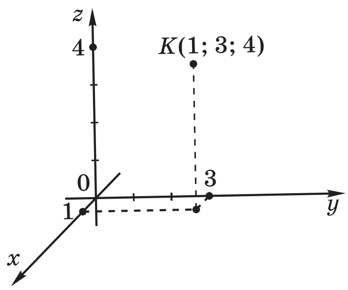


Рис. 335

368. В пространстве отмечены точки $A(-2;\ 4;\ 3)$ и $B(a;\ b;\ c)$. Найдите координаты проекции этих точек:

а) на ось абсцисс;   г) на плоскость xOy;
б) на ось ординат;   д) на плоскость yOz.
в) на ось аппликат;   е) на плоскость xOz.

369. В пространстве отмечены точки $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ -5)$ и $C(4;\ 3;\ 1)$. Найдите координаты такой точки D, что параллелограммом является четырёхугольник:

а) $ABCD$;   б) $ABDC$;   в) $ADBC$.

370. Определите, является ли параллелограммом четырёхугольник $ABCD$, если:

а) $A(-1;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 3;\ 4)$, $C(-5;\ 3;\ -2)$, $D(-4;\ 3;\ -10)$;
б) $A(1;\ -2;\ -3)$, $B(-3;\ 2;\ 1)$, $C(-5;\ 4;\ 3)$, $D(-1;\ 3;\ -1)$;
в) $A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(-2;\ 3;\ -4)$, $C(5;\ -2;\ -2)$, $D(4;\ -1;\ -3)$.

371. Определите, является ли прямоугольником четырёхугольник $ABCD$, если:

а) $A(-3;\ -1;\ 10)$, $B(-10;\ -8;\ -2)$, $C(7;\ -1;\ -14)$, $D(2;\ 6;\ 14)$;
б) $A(-3;\ -1;\ 10)$, $B(2;\ 6;\ 14)$, $C(7;\ -1;\ -14)$, $D(2;\ -8;\ -16)$;
в) $A(7;\ -1;\ 14)$, $B(-10;\ -3;\ -10)$, $C(-3;\ -1;\ 10)$, $D(14;\ -5;\ 6)$.

372. Определите, является ли ромбом четырёхугольник $ABCD$, если:

а) $A(4;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ 6;\ 7)$, $C(0;\ 2;\ 5)$, $D(5;\ 6;\ 4)$;
б) $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 5)$, $C(5;\ 6;\ 4)$ $D(4;\ 2;\ 1)$;
в) $A(6;\ 5;\ 4)$, $B(-2;\ 3;\ -4)$, $C(4;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 0)$.

373. Определите, является ли квадратом четырёхугольник $ABCD$, если:

а) $A(4;\ 1;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(6;\ 5;\ 5)$, $D(7;\ 4;\ 3)$;
б) $A(6;\ -1;\ 4)$, $B(5;\ 1;\ 5)$, $C(-2;\ -1;\ -2)$, $D(-1;\ -11;\ 7)$;
в) $A(-50;\ -1;\ 40)$, $B(-13;\ -11;\ -19)$, $C(54;\ -1;\ -38)$, $D(17;\ 9;\ 21)$.

374. В пространстве отмечены точки $A(2;\ -1;\ 3)$ и $B(a;\ b;\ c)$. Найдите координаты точек, симметричных данным относительно:

а) начала системы координат;   д) оси аппликат;
б) точки $M(-1;\ 3;\ -2)$;   е) плоскости xOy;
в) оси абсцисс;   ж) плоскости xOz;
г) оси ординат;   з) плоскости yOz.

375. Найдите расстояние от точки $A(3; -1; 4)$:

а) до начала системы координат;
б) до точки $M(-1; -4; -8)$;
в) до оси абсцисс;
г) до оси ординат;
д) до оси аппликат;
е) до плоскости xOy;
ж) до плоскости xOz;
з) до плоскости yOz.

376. Найдите точку, равноудалённую от точек $A(3; -2; 5)$ и $B(-1; 4; -3)$ и расположенную на:

а) оси абсцисс; б) оси аппликат.

377. Найдите точку, равноудалённую от точек $A(2; -3; 3)$ и $B(-2; 3; 3)$ и расположенную на:

а) оси абсцисс; б) оси аппликат.

378. Найдите точку, расстояние от которой до точки $M(-2; 3; 5)$ вдвое меньше расстояния до точки $K(4; -10; -4)$, учитывая, что она расположена на оси:

а) абсцисс; б) ординат; в) аппликат.

379. Прямая проходит через начало системы координат и точку $C(4; -3; 12)$. Найдите углы, которые образует эта прямая:

а) с осью абсцисс;
б) с осью ординат;
в) с осью аппликат;
г) с плоскостью xOy;
д) с плоскостью xOz.
е) с плоскостью yOz.

380. Прямая проходит через точки $B(8; -3; 7)$ и $C(5; 1; 7)$. Найдите углы, которые эта прямая образует:

а) с осью абсцисс;
б) с осью ординат;
в) с осью аппликат;
г) с плоскостью xOy;
д) с плоскостью xOz.
е) с плоскостью yOz.

381. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты точек плоскости, проходящей через точку $B(2; 3; -2)$ перпендикулярно:

а) оси абсцисс;
б) оси ординат;
в) оси аппликат;
г) прямой AB, где $A(4; 1; -2)$.

§ 12. Вектор. Действия над векторами

А) С векторами вы встречались в курсе физики девятого класса, когда знакомились с векторными величинами. Физическая величина является векторной, если она характеризуется не только числовым значением, но и направлением. Такие величины, как сила, скорость и другие, обозначают направленными отрезками. Длина направленного отрезка (стрелки) характеризует числовое значение векторной величины (её модуль).

Особенностью понятия *вектор* является то, что все основные определения и свойства, связанные с этим понятием, формулируются почти одинаково как в планиметрии, так и в стереометрии.

Вектор в геометрии представляется направленным отрезком (рис. 336), начало которого считается началом вектора, а конец — концом вектора. Расстояние между началом направленного отрезка и его концом считается **длиной вектора**.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ представляют один вектор, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину (рис. 337). В таком случае говорят, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, и пишут $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда совпадают середины отрезков AD и BC (рис. 338).

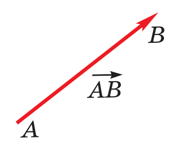


Рис. 336

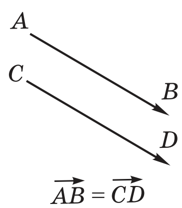


Рис. 337

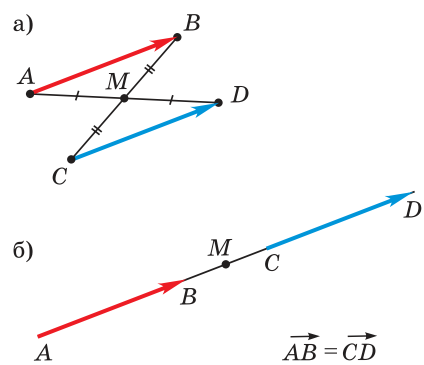


Рис. 338

Это напоминает ситуацию с дробями: определённое число может представляться разными дробями, например, дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{29}{58}$ представляют одно и то же число. Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Если вектор $\vec{a}$ изображается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то говорят, что этот вектор *отложен от точки A*. Вектор можно, и при этом однозначно, отложить от любой точки.

Вектор, представленный направленным отрезком $\overrightarrow{AA}$, называют *нулевым*: $\overrightarrow{AA} = 0$. Векторы, представленные направленными отрезками $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, называют *противоположными* и пишут $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от одной точки: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, = $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, то угол BAC называется **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называют **коллинеарными**, если прямые AB и CD параллельны или совпадают. Нулевой вектор считают коллинеарным с любым вектором.

Векторы можно складывать и умножать на число. Чтобы сложить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, можно один из них заменить таким равным ему вектором, чтобы конец первого направленного отрезка совпадал с началом второго:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK},$$

и тогда *сумма векторов* представляется направленным отрезком $\overrightarrow{AK}$ (рис. 339).

Сложение векторов имеет переместительное свойство, т. е. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, сочетательное свойство, т. е. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$, кроме того, уравнение $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ всегда имеет единственное решение, которое называют *разностью векторов* $\vec{b}$ и $\vec{a}$: $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ (рис. 340).

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* k является такой вектор $k\vec{a}$, что, во-первых, векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$, и, во-вторых, длины векторов $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ связаны равенством $\left|k\vec{a}\right|=|k|\cdot\left|\vec{a}\right|$ (рис. 341). Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ являются коллинеарными. При этом верно равенство $(m\cdot n)\vec{a}=m\left(n\vec{a}\right)$. Если $k=0$, то произведением $k\vec{a}$ является нулевой вектор.

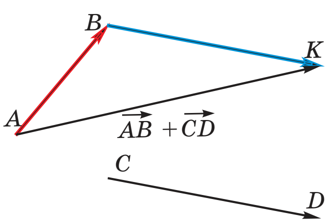


Рис. 339

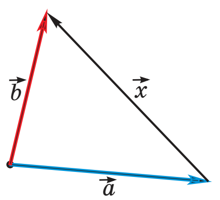


Рис. 340

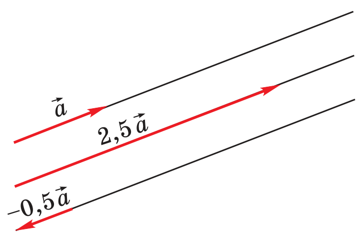


Рис. 341

С действием умножения вектора на число связываются два распределительных свойства — $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ и $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.

Б) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них можно выразить через другой: либо $\vec{a}=n\vec{b}$, либо $\vec{b}=m\vec{a}$ при определённых числах m и n.

Для любых двух векторов существует плоскость, которой они параллельны. Векторы, параллельные одной плоскости, называют **компланарными**. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с ними, можно однозначно выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (рис. 342).

Истинно и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны равенством $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, то они компланарны.

Действительно, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ представить направленными отрезками с общим началом $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ (рис. 343), то $m\vec{a}+n\vec{b}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$, поэтому точки O, A, A_1, B, B_1 и C находятся в плоскости OAB.

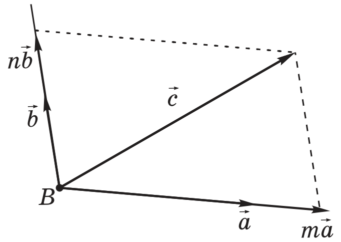


Рис. 342

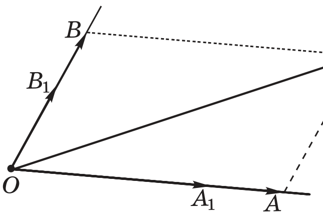


Рис. 343

Т е о р е м а 1. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то для любого вектора $\vec{d}$ существует такая единственная упорядоченная тройка действительных чисел (m, n, k), что $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$.

Доказательство. Сначала докажем существование нужных чисел. Представим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ направленными отрезками с общим началом $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Через точку D проведём прямую l параллельно OC, и пусть D_1 — точка пересечения прямой l с плоскостью OAB (рис. 344). Тогда $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D}$. Поскольку вектор $\overrightarrow{OC}$ ненулевой и векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{D_1D}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{OC}$. А поскольку векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны, то существуют такие числа m и n, что $\overrightarrow{OD_1} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$. Поэтому

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}.$$

Теперь докажем единственность представления. Допустим, что существуют две разные упорядоченные тройки чисел (m, n, k) и (m_1, n_1, k_1), при которых $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC}$. Тогда

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC} \quad \text{и}$$
$$(m_1 - m)\overrightarrow{OA} + (n_1 - n)\overrightarrow{OB} + (k_1 - k)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Поскольку тройки чисел (m, n, k) и (m_1, n_1, k_1) различны, то числа на соответствующих местах не могут все совпадать. Пусть, например, $k \neq k_1$. В этом случае из последнего равенства можно выразить вектор $\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OC} = \dfrac{m - m_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OA} + \dfrac{n - n_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OB}$. Последнее равенство означает, что векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ компланарны. Полученное противоречие с условием означает, что сделанное допущение о существовании двух разных троек чисел неверно.

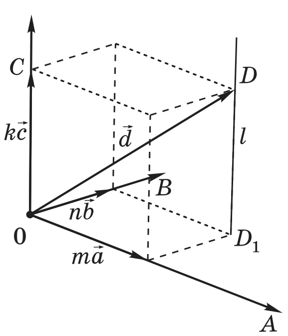


Рис. 344

Следствие 1. Из четырёх любых векторов пространства один может быть выражен через три других.

Действительно, если среди данных четырёх векторов пространства есть три некомпланарных, то четвёртый вектор можно через эти три выразить. Далее, если среди данных четырёх векторов пространства любые три компланарны, то может найтись среди них два неколлинеарных, или любых два вектора коллинеарны. В первом случае через эти два неколлинеарных вектора можно выразить третий и к полученному выражению прибавить четвёртый, умноженный на ноль. Во втором случае один из векторов можно выразить через другой и потом прибавить к этому выражению два оставшихся вектора, умноженных на ноль.

Таким образом, теперь вы знаете, что из двух коллинеарных векторов один может быть выражен через другой, из трёх компланарных векторов один может быть выражен через два других, а из четырёх любых векторов один может быть выражен через три других.

Пример 1. На кронштейне, состоящем из подкоса CB и растяжки AB, подвешен груз. Кронштейн прикреплён к вертикальной стене AC, растяжка занимает горизонтальное положение (рис. 345). Найдём силы, действующие на подкос и растяжку, если угол между ними равен α, а масса груза равна P.

Р е ш е н и е. Сила тяжести выражается вектором $\overrightarrow{BF}$, направленным вниз по вертикали. Выразим его суммой векторов, которые коллинеарны векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$. Для этого построим параллелограмм $BQFG$ с диагональю BF, стороны которого расположены на прямых AB и CB (рис. 346).

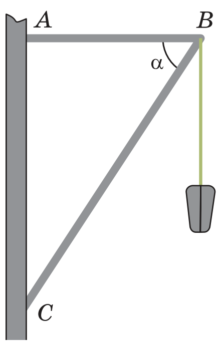


Рис. 345

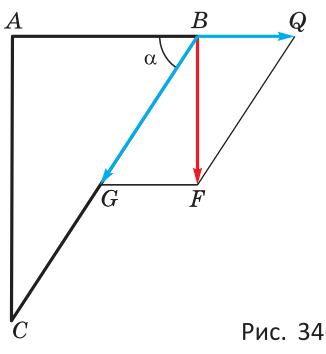


Рис. 346

Поскольку углы BGF и ABC являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых GF и AB и секущей BG, то в прямоугольном треугольнике BFG угол BGF равен α и катет BF равен P. Поэтому

$$FG = BF \operatorname{ctg} \alpha \text{ и } BG = \frac{BF}{\sin \alpha}.$$

О т в е т. Под воздействием груза подкос сжимается с силой $\dfrac{P}{\sin \alpha}$, а растяжка растягивается с силой $P \operatorname{ctg} \alpha$.

Пример 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки K и M — середины рёбер SD и SC соответственно. Плоскость, проходящая через точки D и M параллельно прямой AK, пересекает прямую SB в точке P (рис. 347). Найдём отношение $SP : PB$.

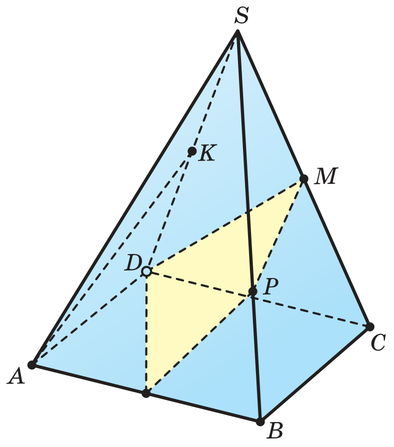


Рис. 347

Р е ш е н и е. Поскольку $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$, то векторы $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$ полностью определяют пирамиду. Поскольку векторы $\overrightarrow{SP}$ и $\overrightarrow{SB}$ коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{SP}$ можно выразить через $\overrightarrow{SB}$: $\overrightarrow{SP} = a\overrightarrow{SB}$ при определённом числе a. Вектор $\overrightarrow{SP}$ можно выразить через векторы $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$, используя то, что точка P находится в плоскости, проходящей через точки D и M параллельно прямой AK. Вектор $\overrightarrow{MP}$ компланарен с векторами $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AK}$, поэтому $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{DM} + y\overrightarrow{AK}$ при определённых множителях x и y. Выразим векторы $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$.

Имеем:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC},\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD},$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} - \left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}\right) = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\right)+y\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}\right)=$$

$$=-y\overrightarrow{SB}+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+y\right)\overrightarrow{SC}-\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{SD}.$$

Учтём теперь то, что через некомпланарные векторы $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$ каждый вектор пространства, в том числе и вектор $\overrightarrow{SP}$, выражается единственным образом. Поэтому должны одновременно выполняться условия: $a = -y$, $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + y = 0$, $x + \frac{y}{2} = 0$. Отсюда получаем, что $a = \frac{2}{3}$. А поскольку $SP : SB = 2 : 3$, то $SP : PB = 2 : 1$.

О т в е т: 2 : 1.

В) Пусть в пространстве выбрана декартова система координат $Oxyz$. С каждой точкой M пространства можно связать вектор $\overrightarrow{OM}$. Это соответствие между точками пространства и векторами является взаимно однозначным: различным точкам соответствуют различные векторы с началом O и концами в этих точках, и различным векторам соответствуют различные точки пространства.

Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты (m, n, k) в декартовой системе координат $Oxyz$, если $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и точка A имеет координаты (m, n, k). Это будем записывать: $\vec{a}(m, n, k)$.

Теорема 2. Если $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, то $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Доказательство. Пусть задана декартова система координат $Oxyz$ и $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Пусть также $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ и $M(x_M; y_M; z_M)$. Нужно доказать, что $x_M = x_B - x_A$, $y_M = y_B - y_A$ и $z_M = z_B - z_A$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то середины отрезков AM и BO совпадают. Середина отрезка AM имеет координаты $\left(\frac{x_A+x_M}{2}; \frac{y_A+y_M}{2}; \frac{z_A+z_M}{2}\right)$, а середина отрезка BO — координаты $\left(\frac{x_B+0}{2}; \frac{y_B+0}{2}; \frac{z_B+0}{2}\right)$. Получаем:

$$x_A + x_M = x_B,\ y_A + y_M = y_B,\ z_A + z_M = z_B.$$

Отсюда:

$$x_M = x_B - x_A,\ y_M = y_B - y_A \text{ и } z_M = z_B - z_A.$$

Теорема 3. Если $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$, то $\vec{a} + \vec{b}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$, $k\vec{a}(kx_a; ky_a; kz_a)$.

Доказательство. Пусть задана декартова система координат $Oxyz$ и $\vec{a} = \overrightarrow{OA}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{OC}(x_c; y_c; z_c)$ (рис. 348). Поскольку $\vec{b} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, то $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

По теореме **2** получаем:

$$x_b = x_c - x_a,\ y_b = y_c - y_a \text{ и } z_b = z_c - z_a.$$

Поэтому

$$x_c = x_a + x_b,\ y_c = y_a + y_b \text{ и } z_c = z_a + z_b.$$

Значит, вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$.

Докажем второе утверждение теоремы **3**. Пусть сначала $k > 0$ и $k\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}(x_1; y_1; z_1)$. Сравним одноимённые, например первые, координаты векторов $\vec{a}$ и $k\vec{a}$. Для этого через точки A и A_1 проведём плоскости, параллельные плоскости yOz (рис. 349), которые пересекают ось Ox в точках P и P_1. Из подобия треугольников OAP и OA_1P_1 следует, что $x_1 = kx_a$. Аналогично получается, что $y_1 = ky_a$ и $z_1 = kz_a$.

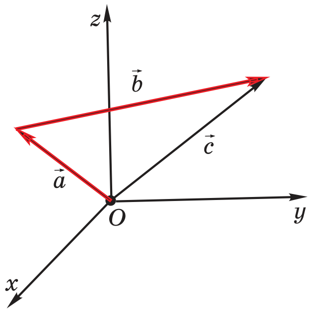


Рис. 348

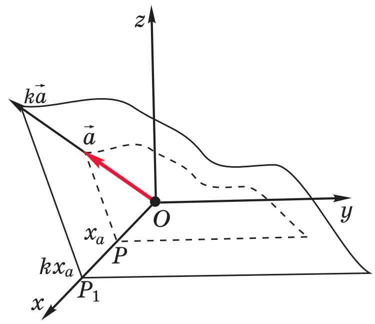


Рис. 349

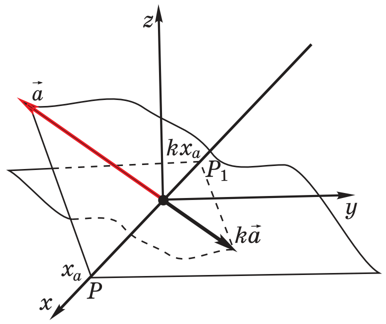


Рис. 350

Если же $k < 0$, то аналогичные рассуждения проводятся для рисунка 350.

Векторы $\vec{i}\,(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}\,(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{k}\,(0;\ 0;\ 1)$ называют *единичными координатными векторами*.

Следствие 2. Если $\vec{a}\ (x_a;\ y_a;\ z_a)$, то $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$.

Пример 3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и N — середины отрезков CC_1 и A_1C_1 соответственно (рис. 351). Выразим:

а) векторы $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;

б) векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ через векторы $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.

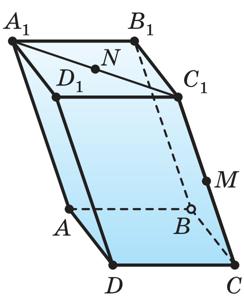


Рис. 351

Решение. а) Имеем:

$$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1N} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A_1C_1} =$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

б) Будем рассматривать полученные равенства $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AM}$, $-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}$ как систему условий, из которой нужно найти $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Из первого условия выразим $\overrightarrow{AA_1}$ и исключим $\overrightarrow{AA_1}$ из двух других:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1},\ \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM},\ \ \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}.$$

Теперь из последнего равенства выразим $\overrightarrow{AD}$ и исключим $\overrightarrow{AD}$ из предыдущего:

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD_1},\ \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} - \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM}.$$

Далее можно последовательно выразить $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ через векторы

$$\overrightarrow{CD_1},\ \overrightarrow{AM} \text{ и } \overrightarrow{BN}: \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CD_1},\ \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AM} +$$

$$+ 6\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{CD_1},\ \overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{CD_1}.$$

Пример 4. Через диагональ BC_1 грани треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость так, что она пересекает диагонали AB_1 и CA_1 граней в точках P и Q соответственно (рис. 352). Найдём отношение $PQ : BC_1$, учитывая, что $PQ \parallel BC_1$.

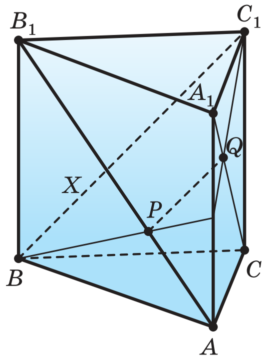


Рис. 352

Р е ш е н и е. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ некомпланарны, поэтому через них можно выразить векторы $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{BC_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Учтём, что $\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ коллинеарны. Значит, существует такое число p, что $\overrightarrow{QC} = p\cdot\overrightarrow{CA_1}$. Аналогично, существует такое число q, что $\overrightarrow{PA} = q\cdot\overrightarrow{AB_1}$. Кроме того,

$$\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \text{ и } \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{QC} = q\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right) + \overrightarrow{AC} - p\cdot\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) =$$

$$= q\cdot\overrightarrow{AB} + (p+1)\cdot\overrightarrow{AC} + (q-p)\cdot\overrightarrow{AA_1}.$$

Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ коллинеарны. Поэтому

$$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{BC_1} = k\cdot\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) \text{ при определённом } k.$$

А поскольку $q\cdot\overrightarrow{AB} + (p+1)\cdot\overrightarrow{AC} + (q-p)\cdot\overrightarrow{AA_1} = k\cdot\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right)$ и учитывая однозначность разложения вектора по трём некомпланарным векторам, получаем, что $q = -k$, $p + 1 = k$, $q - p = k$. Отсюда находим $k = \dfrac{1}{3}$.

О т в е т: $PQ : BC_1 = 1 : 3$.

1. Что собой представляет вектор? Какие векторы считаются равными?
2. Какие векторы считаются противоположными? Какой вектор называют нулевым?
3. Как определяется сложение векторов?
4. Какие свойства имеет действие сложения векторов?
5. Что называется разностью векторов?
6. Как определяется действие умножения вектора на число?
7. Какие свойства имеет действие умножения вектора на число?
8. Какие векторы называются коллинеарными?
9. Какое свойство имеют коллинеарные векторы?
10. Какие векторы называются компланарными?
11. Какое свойство имеют компланарные векторы?
12. Какое свойство имеют некомпланарные векторы?
13. Как определяются координаты вектора?
14. Как найти координаты вектора, представленного направленным отрезком?
15. Как найти координаты суммы векторов?
16. Как найти координаты произведения вектора на число?
17. Какая имеется связь между координатами вектора и единичными координатными векторами?

382. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 353). Укажите векторы с концами в вершинах параллелепипеда, которые равны векторам:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{D_1C}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$,
$\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{BA_1}$;

в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{CC_1}$,
$\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{D_1C} - \overrightarrow{AD}$.

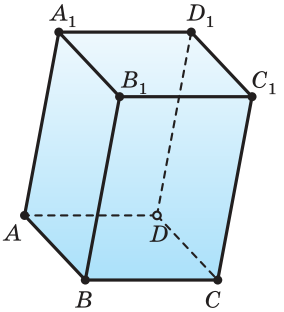


Рис. 353

383. Перенесите рисунок 354 в тетрадь.

а) Отложите от точки M векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найдите длину этих векторов и угол между ними;

б) от точки K отложите векторы $\vec{c}$ и $-\vec{d}$, найдите длину этих векторов и угол между ними;

в) постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}$, найдите его длину и угол между суммой и каждым слагаемым;

г) постройте вектор $\vec{c}-\vec{d}$ и найдите его длину.

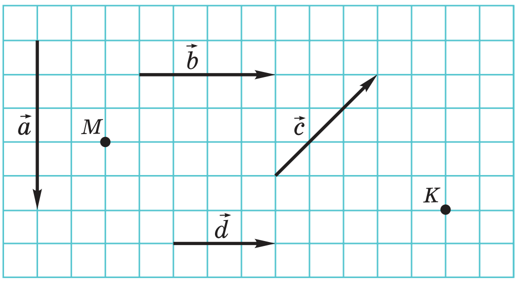


Рис. 354

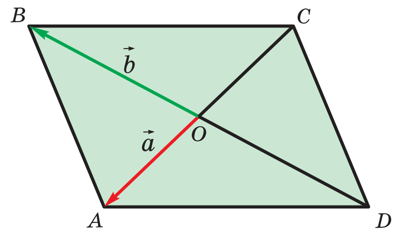


Рис. 355

384. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Учитывая, что $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1A}=\vec{b}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{c}$, покажите на рисунке вектор:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; д) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

б) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$;

385. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 355). Через векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ выразите вектор: =

а) $\overrightarrow{CO}$; в) $\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{CD}$.

386. В треугольнике ABC точки M и K — середины отрезков AB и BC (рис. 356). Выразите векторы:

а) $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BK}$;

б) $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AC}$.

387. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 357). Укажите вектор с концами в вершинах призмы, который равен вектору $\vec{x}$, если:

а) $\overrightarrow{AA_1}-\vec{x}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{BC_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA}-\vec{x}+\overrightarrow{CA_1}$.

б) $\overrightarrow{BC_1}+\vec{x}+\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA}$;

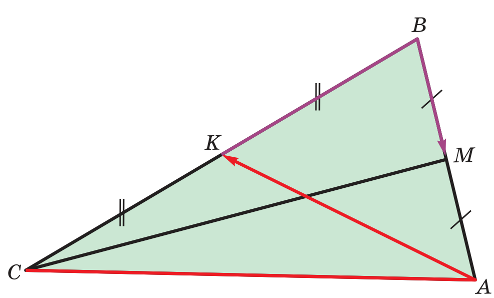


Рис. 356

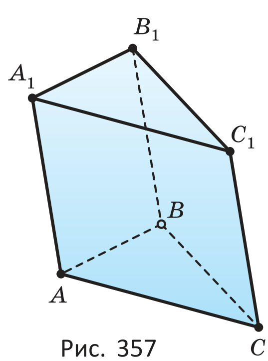


Рис. 357

388. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм. Верно ли, что:

а) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{DA}$?

389. Докажите, что для любых четырёх точек A, B, C, D пространства истинно равенство $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

390. Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция, точка O — середина её средней линии. Докажите, что $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\cdot\overrightarrow{SO}$.

391. Точки M, N, P, Q — середины рёбер при основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SQ}.$$

392. В пространстве выбраны точки A, B, C, D, точки M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{MN}$.

393. Начертите два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Постройте вектор:

а) $-2\overrightarrow{AB}$; в) $\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CD}$; д) $\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\cdot k\cdot\overrightarrow{CD}$.

б) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}$; г) $\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}$;

394. Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 358) пересекаются в точке O. Найдите число k, учитывая, что истинно равенство:

а) $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{D_1B}=k\cdot\overrightarrow{BO}$.

б) $\overrightarrow{C_1O}=k\cdot\overrightarrow{AC_1}$;

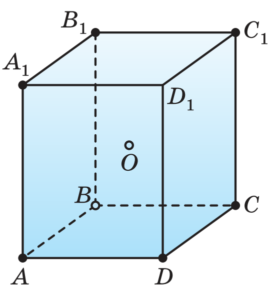


Рис. 358

395. Докажите, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

396. Упростите выражение:

а) $\vec{a}-2(\vec{b}-\vec{a})+3(2\vec{b}-\vec{a})$; б) $-\left(\vec{p}+\vec{q}\right)+5\left(\vec{r}-2\vec{p}+3\vec{q}\right)-7\left(-\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}\right)$.

397. Известно, что точки A, B, C и D не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися? При каком значении k прямые AC и BD:

а) параллельны; б) пересекаются?

398. В пространстве выбраны точки A и B. Докажите, что для любых точек P и Q векторы $k\cdot\overrightarrow{PA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PQ}+k\cdot\overrightarrow{QA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{QB}$ совпадают.

399. В пространстве выбраны точки A, B и C. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то для любой точки P пространства истинно равенство $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$.

400. На кронштейне, который состоит из подкоса AB и растяжки CB, подвешен груз. Кронштейн прикреплён к вертикальной стене AC, подкос занимает горизонтальное положение (рис. 359). Найдите силы, действующие на подкос и растяжку, если угол между ними равен β, а масса груза равна P.

401. Электрический фонарь подвешен на шнуре AB и удерживается горизонтальной растяжкой BC (рис. 360). Найдите силы, которые действуют на шнур и растяжку, если угол между ними равен γ, масса фонаря равна P.

402. Найдите силы, которые действуют на подкос и растяжку, прикреплённые к вертикальной стене (рис. 361), если подвешенный в точке C груз имеет массу P, AB = 1,5 м, AC = 3 м, BC = 4 м.

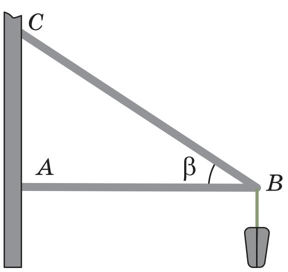


Рис. 359

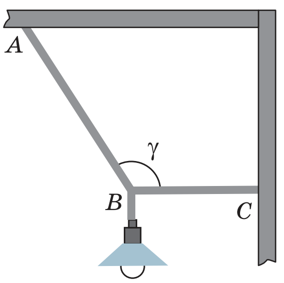


Рис. 360

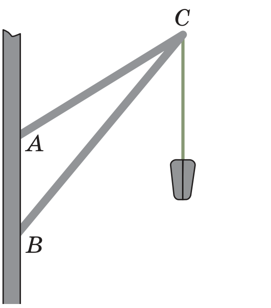


Рис. 361

403. К горизонтальной поверхности прикреплён шнур длиной 5 м, который выдерживает нагрузку в 0,2 т. Определите, выдержит ли шнур груз массой 0,05 т, который прикреплён к его середине (рис. 362), если расстояние AB между точками крепления равно 4,8 м.

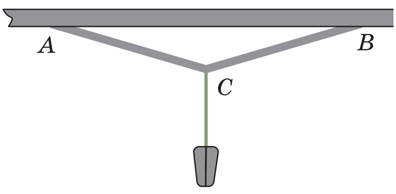


Рис. 362

404. Среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ есть неколлинеарные. Докажите, что если $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то $|\vec{m}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

405. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 363). Укажите вектор, коллинеарный с вектором:

а) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$;

б) $\overrightarrow{A_1A}$; д) $\overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{A_1D_1}$; е) $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BE}$.

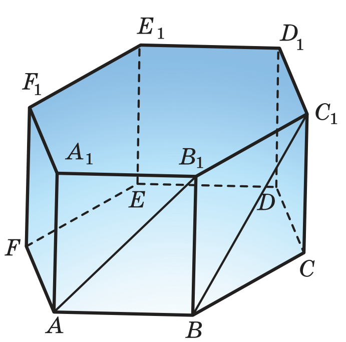


Рис. 363

406. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Можно ли утверждать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны? Докажите, что коллинеарны векторы:

а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}+\overrightarrow{2b}$ и $\vec{c}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a}+\overrightarrow{2b}$ и $\vec{c}$.

407. Известно, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также коллинеарны.

408. Известно, что векторы $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также коллинеарны.

409. В треугольной пирамиде каждая вершина соединена с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что эти четыре отрезка проходят через одну точку и делятся ею в отношении 3 : 1, если считать от вершины.

410. Есть треугольная пирамида $ABCD$. Найдите все такие точки M пространства, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

411. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 364). Установите, компланарна ли тройка векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$.

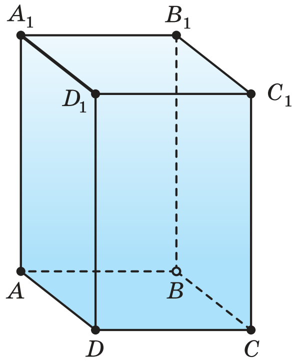


Рис. 364

412. Середины рёбер AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ — точки P и Q соответственно. Докажите, что $2\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{PQ}$?

413. В грани ABC треугольной пирамиды $ABCD$ проведена медиана AM. Выразите вектор $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$, учитывая, что K — такая точка медианы AM, что $AK : KM = 3 : 2$.

414. В грани ABC треугольной пирамиды $ABCD$ медианы пересекаются в точке M. Докажите, что длина отрезка DM меньше третьей доли суммы длин рёбер AD, BD и CD.

415. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 365):

а) проходит через точки пересечения медиан треугольников A_1BD и B_1CD_1;

б) плоскости A_1BD и B_1CD_1 разделяют отрезок AC_1 на три доли.

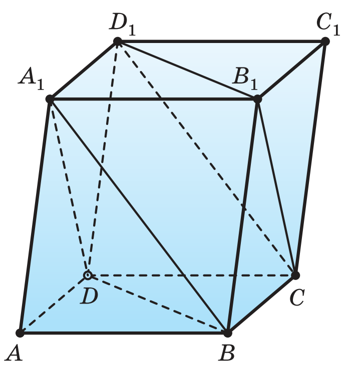


Рис. 365

416. На боковых рёбрах треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны точки P, Q, R. Медианы треугольника PQR пересекаются в точке M, а медианы треугольника ABC — в точке N (рис. 366). Докажите, что $MN \parallel AA_1$.

417. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка K на ребре SC выбрана так, что $SK : SC = 1 : 3$. Плоскость, проходящая через точки K и D параллельно прямой AS, пересекает прямую AB в точке P. Найдите отношение $AP : PB$.

418. В пространстве выбраны точки A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, K. Известно, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB_1}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC_1}$. Докажите, что стороны треугольника ABC параллельны и равны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

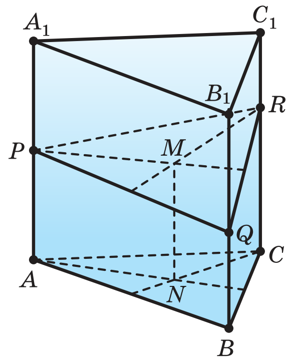


Рис. 366

419. В пространстве выбраны точки A, B, C, D. Докажите, что:

а) отрезки, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, проходят через одну точку M и делятся ею пополам;

б) для любой точки K пространства истинно равенство $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4} \cdot \left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}\right)$.

420. Центр куба с ребром a расположен в начале системы координат, а его ребра параллельны координатным осям (рис. 367). Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DA}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.

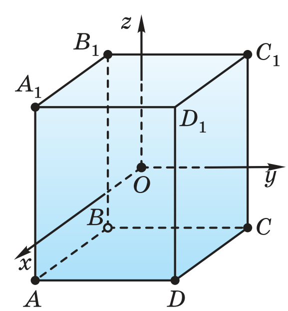


Рис. 367

421. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет измерения $AB = a$, $AC = b$ и $AA_1 = c$. Точка A является началом системы координат, рёбра расположены на координатных осях (рис. 368). Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.

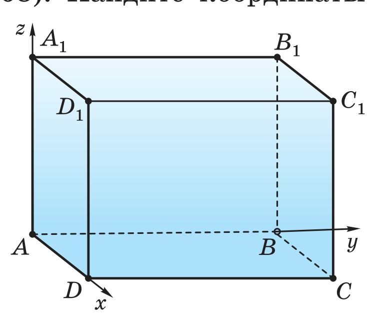


Рис. 368

422. Три точки в пространстве, заданные своими координатами $M(2; -3; -1)$, $P(0; 1; 3)$, $K(4; 3; -3)$, являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты его четвёртой вершины.

423. Четыре точки в пространстве заданы своими координатами: $A(2; 3; 1)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-1; 3; 0)$, $D(3; 1; 2)$. Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{BC}+3\cdot\overrightarrow{CD}+4\cdot\overrightarrow{DA}$.

424. Четыре точки в пространстве заданы своими координатами: $A(-2; 1; -1)$, $B(2; 0; -3)$, $C(1; -3; 0)$, $D(2; 3; -1)$. Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $2\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{BC}+2\cdot\overrightarrow{CD}+3\cdot\overrightarrow{DA}$.

425. Четыре вершины призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены в точках $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Найдите координаты точек C и B_1.

426. У параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты четырёх вершин. Найдите координаты остальных четырёх вершин, учитывая, что:

а) $A(1; 3; -1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(3; 1; 2)$, $B_1(3; 2; 5)$;
б) $A(-2; 3; -1)$, $C(4; 1; 5)$, $B_1(4; 3; 2)$, $D_1(2; 5; 6)$.

427. Четыре вершины призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены в точках $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Найдите координаты точек C и B_1.

428. При каких значениях x и y будут коллинеарны векторы:

а) $\vec{a}(2; 6; x)$ и $\vec{b}(y; 3; -1)$;

б) $\vec{c}(1; 0; x)$ и $\vec{d}(y; 3; -1)$;

в) $\vec{m}(1; 3; x)$ и $\vec{n}(2; 6; y)$?

429. Определите, лежат ли на одной прямой точки:

а) $A(1; -2; 2)$, $B(4; 1; 2)$, $C(3; 0; 4)$;
б) $M(1; 2; -3)$, $K(3; 3; -1)$, $P(5; 4; 1)$.

430. Дан вектор $\vec{a}(1; -1; 2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ ему коллинеарен. Найдите координаты точки:

а) B, лежащей в плоскости xOy, учитывая, что $A(3; 1; 2)$;
б) A, лежащей в плоскости xOy, учитывая, что $B(2; -1; 1)$.

431. Установите, компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}(2; 6; 3)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$ и $\vec{c}(0; 0; 2)$;

б) $\vec{m}(1; 3; 0)$, $\vec{n}(2; 6; 5)$ и $\vec{k}(2; 3; -1)$.

432. Определите, при каком значении m векторы $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -1)$ и $\vec{c}(2; m; -1)$ будут компланарными.

433. Зная векторы $\vec{a}(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$ и $\vec{c}(2;\ 0;\ -1)$, найдите координаты вектора:

а) $2\vec{a}+\vec{b}$; в) $-\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$;

б) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$; г) $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

434. Прямые A_1A_2 и B_1B_2 скрещиваются. Точки A_3 и B_3 выбраны так, что $\overrightarrow{A_1A_3}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_3}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_2}$. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 параллельны одной плоскости.

435. Все медианы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ проходят через точку K. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 параллельны одной плоскости.

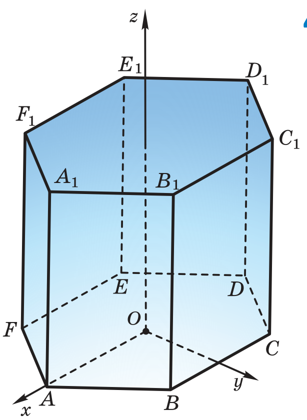


Рис. 369

436. Центр основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ находится в начале декартовой системы координат $Oxyz$, боковые рёбра параллельны оси аппликат, а вершина A располагается на оси абсцисс (рис. 369). Учитывая, что все рёбра призмы равны a, найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AA_1}$, а потом и координаты векторов:

а) $\overrightarrow{B_1E}$; г) $\overrightarrow{AD_1}$;

б) $\overrightarrow{F_1C}$; д) $\overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{AC_1}$; е) $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BE}$.

§ 13. Скалярное произведение векторов

А) Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

Скалярное произведение векторов имеет переместительное свойство $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, распределительное свойство $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, кроме того, множитель можно выносить за знак скалярного произведения $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

С помощью скалярного произведения можно находить длины векторов и косинусы углов между ними: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

У нулевого вектора направление не определено, поэтому удобно считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому другому вектору.

С учётом этого получается следующее полезное утверждение:

два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Теорема 1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b;\ y_b;\ z_b)$ выражается через их координаты в декартовой системе равенством $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Доказательство. Поскольку $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\cdot(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{i} + x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{j} + x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{k} + y_a x_b\vec{j}\cdot\vec{i} + y_a y_b\vec{j}\cdot\vec{j} + y_a z_b\vec{j}\cdot\vec{k} +$$

$$+ z_a x_b\vec{k}\cdot\vec{i} + z_a y_b\vec{k}\cdot\vec{j} + z_a z_b\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Находим далее:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Аналогично,

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Пример 1. Найдём длину вектора $\vec{a}\,(2;\ 1;\ -2)$.

Имеем: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) = 9$. Поэтому $|\vec{a}| = 3$.

Пример 2. Найдём угол α между векторами $\vec{a}\,(4;\ 1;\ -3)$ и $\vec{b}\,(2;\ -5;\ 1)$.

Имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 2 + 1\cdot(-5) + (-3)\cdot 1 = 0$. Поэтому:

$$\cos\alpha = 0 \text{ и } \alpha = \frac{\overset{\pi}{\neq}}{2}.$$

Пример 3. Найдём длину вектора $\vec{a}$, равного $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$, учитывая, что векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны вектору $\vec{p}$, а между собой образуют угол $60°$ и $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $|\vec{p}| = 3$.

Имеем:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p})\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) =$$

$$= \vec{m}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) + 2\vec{n}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) - 3\vec{p}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) =$$

$$= \vec{m}\cdot\vec{m} + 2\cdot\vec{m}\cdot\vec{n} - 3\cdot\vec{m}\cdot\vec{p} + 2\vec{n}\cdot\vec{m} + 2\cdot 2\vec{n}\cdot\vec{n} - 3\cdot 2\vec{n}\cdot\vec{p} - 3\vec{p}\cdot\vec{m} -$$

$$- 3\cdot 2\vec{p}\cdot\vec{n} + 3\cdot 3\vec{p}\cdot\vec{p}.$$

Поскольку

$$\vec{m}\cdot\vec{m} = |\vec{m}|^2 = 4,\quad \vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot 1\cos 60° = 1,\quad \vec{m}\cdot\vec{p} = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 1,\quad \vec{n}\cdot\vec{p} = 0,\quad \vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2 = 9, \text{ то } |\vec{a}|^2 = 93.$$

Поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{93}$.

Б) Вы знаете, что плоскость в пространстве можно задать тремя точками, не лежащими на одной прямой. Поскольку существует единственная плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно данной прямой, то плоскость можно задавать указанием одной из её точек и вектора, ей перпендикулярного.

Теорема 2. Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{N}(a;\ b;\ c)$, то координаты $(x;\ y;\ z)$ любой точки M этой плоскости удовлетворяют уравнению $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Доказательство. Если $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(a;\ b;\ c)$, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны, а потому их скалярное произведение равно нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Истинно и обратное утверждение.

Теорема 3. Уравнению $ax + by + cz + d = 0$, в котором коэффициенты a, b, c не равны нулю одновременно, удовлетворяет любая точка некоторой плоскости. Этой плоскости перпендикулярен вектор $\vec{N}(a;\ b;\ c)$.

Доказательство. Если есть уравнение $ax + by + cz + d = 0$ и числа a, b, c не равны нулю одновременно, то можно найти упорядоченную тройку чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, удовлетворяющую этому уравнению. Например, если $a \neq 0$, то можно, взяв $y = y_0$ и $z = z_0$, найти значение переменной x так, чтобы тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ удовлетворяла уравнению $ax + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Поскольку $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, то условия $ax + by + cz + d = 0$ и $ax + by + cz + d - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$ равносильны. Получили, что исходное уравнение равносильно уравнению $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, которому удовлетворяют координаты $(x;\ y;\ z)$ любой точки M, расположенной на прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(a;\ b;\ c)$, т. е. любой точки плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(a;\ b;\ c)$.

Пример 4. Найдём уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(4;\ 1,\ 2)$ и $C(5;\ 2;\ 1)$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(4 - 2;\ 1 - 1;\ 2 - 3)$, $\overrightarrow{AC}(5 - 2;\ 2 - 1;\ 1 - 3)$. Поскольку координаты $(2;\ 0;\ -1)$ и $(3;\ 1;\ -2)$ этих векторов не пропорциональны, то сами векторы не коллинеарны, и, значит, точки A, B и C не лежат на одной прямой, они задают единственную плоскость.

Чтобы записать уравнение плоскости ABC, используя теорему **2**, найдём вектор $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$, перпендикулярный этой плоскости. Поскольку $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{AC}$, то $2a + 0b + (-1)c = 0$ и $3a + b + (-2)c = 0$. Из этих условий получаем: $c = 2a$, $b = a$. Таким образом, в качестве искомого вектора можно взять вектор с координатами $(1;\ 1;\ 2)$.

Теперь можно записать уравнение плоскости, которая проходит через точку A перпендикулярно найденному вектору $\overrightarrow{N}$:

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 3) = 0, \text{ или } x + y + 2z = 9.$$

В) **Т е о р е м а 4. Если плоскость имеет уравнение $ax + by + cz + d = 0$, то расстояние до неё от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.**

Доказательство. Пусть из точки M_0 на данную плоскость опущен перпендикуляр M_0M_1, основание которого — точка M_1 — имеет координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0)$ коллинеарен с вектором $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$. Поскольку угол между этими векторами равен 0° или 180°, то $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{N} = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot |\overrightarrow{N}| \cdot (\pm 1)$, откуда

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = (\pm 1) \cdot \frac{\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{N}|}{|\overrightarrow{N}|}.$$

Находим

$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{N} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) =$$

$$= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = -(d + ax_0 + by_0 + cz_0),$$

поскольку координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению плоскости. Далее: $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. А поскольку искомое расстояние равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, то требуемое утверждение обосновано.

Пример 5. Найдём расстояние от точки $A(2;\ -1;\ -3)$ до плоскости, заданной уравнением $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Используя теорему **4**, получаем:

$$l = \frac{|2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} = 5.$$

О т в е т: 5.

1. Как определяется скалярное произведение векторов?
2. Какие свойства имеет скалярное умножение векторов?
3. Как найти скалярное произведение векторов, используя их декартовы координаты?
4. Для решения каких задач удобно использовать скалярное умножение векторов?
5. Какому условию удовлетворяют координаты любой точки некоторой плоскости?
6. Каким уравнением задаётся плоскость, проходящая через данную точку пространства перпендикулярно указанному вектору?
7. Как можно найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки пространства?
8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
9. Как найти расстояние от точки с известными координатами до плоскости, заданной своим уравнением?

437. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a}\,(4;\ -1;\ -2)$ и $\vec{b}\,(0;\ 3;\ -1)$; в) $\vec{m}\,(2;\ 1;\ 2)$ и $\vec{n}\,(-1;\ 2;\ 0)$;
б) $\vec{c}\,(3;\ 0;\ -1)$ и $\vec{d}\,(2;\ 3;\ 1)$; г) $\vec{p}\,(-3;\ -1;\ 2)$ и $\vec{q}\,(3;\ 1;\ -2)$.

438. Найдите длину вектора:

а) $\vec{a}\,(4;\ -1;\ -2)$; г) $\vec{d}\,(2;\ 3;\ 1)$; ж) $\vec{p}\,(-3;\ -1;\ 2)$;
б) $\vec{b}\,(0;\ 3;\ -1)$; д) $\vec{m}\,(2;\ 1;\ 2)$; з) $\vec{q}\,(3;\ 1;\ -2)$.
в) $\vec{c}\,(3;\ 0;\ -1)$; е) $\vec{n}\,(-1;\ 2;\ 0)$;

439. Найдите угол между векторами:

а) $\vec{a}\,(4;\ -1;\ -2)$ и $\vec{b}\,(0;\ 3;\ -1)$; в) $\vec{m}\,(2;\ 1;\ 2)$ и $\vec{n}\,(-1;\ 2;\ 0)$;
б) $\vec{c}\,(3;\ 0;\ -1)$ и $\vec{d}\,(2;\ 3;\ 1)$; г) $\vec{p}\,(-3;\ -1;\ 2)$ и $\vec{q}\,(3;\ 1;\ -2)$.

440. Есть векторы $\vec{a}\,(4;\ -1;\ -2)$, $\vec{b}\,(0;\ 3;\ -1)$ и $\vec{c}\,(3;\ 0;\ -1)$. Сравните значения:

а) $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ и $2\left|\vec{c}\right|$;

б) $\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; г) $\left|\vec{c}+\vec{b}\right| + \left|\vec{c}-\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{c}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

441. Определите, какой угол — острый, прямой или тупой — образует с координатными осями вектор:

а) $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{k}$.

442. Найдите периметр и больший угол пространственного треугольника ABC, учитывая, что:

а) $A(3;\ 9;\ -5)$, $B(10;\ 2;\ -5)$, $C(3;\ 2;\ 2)$;
б) $A(-1;\ 5;\ -5)$, $B(-1;\ 5;\ -3)$, $C(0;\ 4;\ -3)$;
в) $A(6;\ 2;\ -4)$, $B(4;\ 4;\ -6)$, $C(4;\ 0;\ -2)$;
г) $A(7;\ -4;\ 3)$, $B(-3;\ 2;\ 5)$, $C(2;\ 0;\ -5)$.

443. Докажите, что площадь пространственного треугольника можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)}$. Как использовать этот факт для того, чтобы найти расстояние от точки C до прямой AB?

444. Вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ лежат на координатных осях, а вершина D имеет координаты $(3;\ 2;\ 1)$. Найдите координаты вершин A, B и C, учитывая, что плоские углы пирамиды при вершине D все прямые.

445. Определите, при каких значениях a треугольник ABC является равнобедренным, учитывая, что:

а) $A(3;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ 0;\ 1)$;
б) $A(2;\ 1;\ a)$, $B(3;\ a;\ 5)$, $C(-1;\ a;\ 3)$.

446. Определите, при каких значениях a четырёхугольник $ABCD$ является трапецией, учитывая, что:

а) $A(4;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ 4;\ 0)$, $D\ (4;\ 4;\ -1)$;
б) $A(2;\ 3;\ a)$, $B(3;\ a;\ 5)$, $C(1;\ a;\ -2)$, $D\ (-2;\ 1;\ -5)$.

447. Найдите угол между прямыми AB и CD, учитывая, что:

а) $A(-2;\ 3;\ 4)$, $B(-1;\ 4;\ 2)$, $C(-3;\ 6;\ 2)$, $D(-3;\ 7;\ 1)$;
б) $A(-1;\ 5;\ 8)$, $B(-2;\ 6;\ 8)$, $C(-11;\ 7;\ -5)$, $D(-9;\ 7;\ -7)$;
в) $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(2;\ 0;\ 1)$, $C(-4;\ -2;\ 0)$, $D(0;\ -4;\ -2)$;
г) $A(15;\ -8;\ 7)$, $B(15;\ -7;\ 6)$, $C(12;\ -7;\ -11)$, $D(10;\ -9;\ -13)$.

448. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB, AD и AA_1 равны соответственно 10, 16 и 21, $\angle BAD = \angle A_1AB = 60°$, $\angle DAA_1 = 90°$. Найдите:

а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{C_1D_1}$; е) A_1B;
б) $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AD_1}$; ж) A_1C;
в) $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1C}$; з) AC_1;
г) $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$; и) BD_1;
д) BD; к) B_1D.

449. В треугольной пирамиде $SABC$ боковые рёбра равны, $\angle ASB = 60°$, $\angle ASC = 30°$, $\angle BSC = 45°$. Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{SB}$; в) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AS}$.

450. Докажите, что для любых четырёх точек A, B, C, D пространства истинно равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

451. Вершины A, D и A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ имеют координаты (1; 0; 0), (−1; 0; 0) и (1; 0; 2) соответственно. Учитывая, что ордината точки B положительна, найдите:

а) координаты точек B, C, E_1, F_1;
б) уравнение плоскости ADA_1;
в) уравнение плоскости ABA_1;
г) уравнение плоскости ACE_1;
д) уравнение плоскости ACD_1;
е) уравнение плоскости ACF_1;
ж) расстояние от B до плоскости ADA_1;
з) расстояние от C до плоскости ABA_1;
и) расстояние от B_1 до плоскости ADA_1;
к) расстояние от B_1 до плоскости ACE_1;
л) расстояние от B_1 до плоскости ACD_1;
м) расстояние от E_1 до плоскости ACF_1.

§ 14. Применение векторов и координат

А) В ряде задач условие содержит сведения о параллельности некоторых прямых или об их точках пересечения, об отношениях длин параллельных отрезков. Для решения таких задач может быть полезным применение векторов, как это было при решении примера 3 из параграфа 12. При решении таких задач достаточно использовать действия сложения векторов и умножения вектора на число. Рассмотрим ещё один пример.

Пример 1. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — параллелограммы в пространстве, K, L, M, N — середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 соответственно. Докажем, что середины отрезков KM и LN совпадают.

Р е ш е н и е. Выберем в пространстве точку O. Тогда положение каждой точки полностью характеризуется соответствующим вектором. Из условия следует, что $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$. Точки K, L, M, N определяются векторами $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$: $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right)$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}\right)$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}\right)$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OD_1}+\overrightarrow{OD_2}\right)$.

Чтобы доказать, что середины отрезков KM и LN совпадают, докажем, что $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. Находим:

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right),$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OD_2}\right).$$

А поскольку

$$\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1} \text{ и } \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OD_2},$$

то выражения в двух последних скобках принимают одинаковые значения. Требуемое утверждение доказано.

Б) При решении других задач целесообразно пользоваться скалярным умножением векторов. Такими являются задачи, в которых нужно использовать или определять некоторые расстояния или углы.

Пример 2. Найдём угол между скрещивающимися диагоналями соседних боковых граней правильной шестиугольной призмы, у которой боковые грани — квадраты.

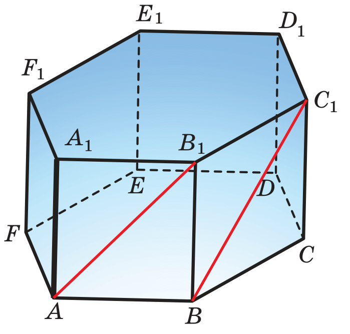


Рис. 370

Р е ш е н и е. Пусть нужно найти угол между прямыми AB_1 и BC_1 (рис. 370). Искомый угол может совпадать с углом между векторами, параллельными данным прямым, или дополнять его до 180°. Поэтому косинус искомого угла совпадает с модулем косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right|}$. Выразим векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ через некомпланарные векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$. Примем длину ребра призмы за a и найдём скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right) = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} =$$

$$= a^2 \cos 90° + a^2 \cos 0° - a^2 \cos 120° - a^2 \cos 90° = 1{,}5\ a^2.$$

А поскольку $\left|\overrightarrow{AB_1}\right| = AB_1 = BC_1 = \left|\overrightarrow{BC_1}\right| = a\sqrt{2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \text{ и } \alpha = \arccos\frac{3}{4}.$$

О т в е т: $\arccos\dfrac{3}{4}$.

Скалярное произведение векторов можно использовать и для нахождения угла между плоскостями. Как и при определении угла между прямыми, так и при определении угла α между плоскостями можно использовать векторы $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$, только перпендикулярные рассматриваемым плоскостям:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

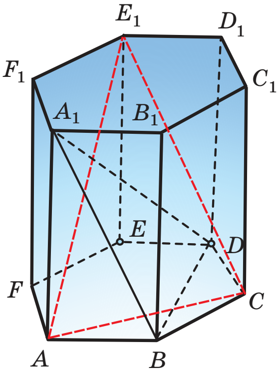


Рис. 371

Пример 3. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра имеют длину 1 (рис. 371). Найдём угол между плоскостями ACE_1 и A_1BD.

Р е ш е н и е. Для получения ответа нужно определить векторы $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$, перпендикулярные плоскостям ACE_1 и A_1BD соответственно. Они должны удовлетворять условиям $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{AE_1}=0$ и $\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$.

Используем прямоугольную декартову систему координат, начало которой находится в центре O основания $ABCDEF$, и точки A, A_1 и B имеют координаты (1; 0; 0), (1; 0; 1) и $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ соответственно. Тогда точки C, D и E_1 будут иметь координаты $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, (−1; 0; 0) и $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ соответственно. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE_1}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DA_1}$ по координатам их концевых точек:

$$\overrightarrow{AC}\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ \overrightarrow{AE_1}\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right),\ \overrightarrow{BD}\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ \overrightarrow{DA_1}\,(2;\ 0;\ 1).$$

Поскольку $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{AE_1}=0$, то координаты $(a_1;\ b_1;\ c_1)$ вектора $\overrightarrow{N_1}$ удовлетворяют условиям

$$a_1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+b_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+c_1\cdot 0=0 \text{ и } a_1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+b_1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_1\cdot 1=0.$$

Этим условиям удовлетворяют числа $a_1=1$, $b_1=\sqrt{3}$, $c_1=3$. Поэтому в качестве вектора, перпендикулярного плоскости ACE_1, можно взять вектор $\overrightarrow{N_1}\,(1;\ \sqrt{3};\ 3)$.

Для нахождения вектора $\overrightarrow{N_2}$ действовать будем аналогично. Координаты $(a_2;\ b_2;\ c_2)$ вектора $\overrightarrow{N_2}$, перпендикулярного плоскости A_1BD, удовлетворяют условиям $a_2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+b_2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_2\cdot 0=0$ и $2a_2+0b_2+c_2=0$, которым удовлетворяют числа $a_2=-1$, $b_2=\sqrt{3}$, $c_2=2$. Поэтому $\overrightarrow{N_2}\,(-1;\ \sqrt{3};\ 2)$.

Используем равенство $\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|\cdot\cos\alpha$. Поскольку угол α между векторами $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ или совпадает с углом φ между плоскостями ACE_1 и A_1BD, или дополняет его до 180°, то $\cos\varphi=|\cos\alpha|=\frac{|N_1\cdot N_2|}{|N_1|\cdot|N_2|}$. Находим:

$$\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=1\cdot(-1)+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3\cdot 2=8,\ \left|\overrightarrow{N_1}\right|=\sqrt{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_1}}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{13},$$

$$\left|\overrightarrow{N_2}\right| = \sqrt{\overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{N_2}} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \ \cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

Ответ: $\arccos \frac{4}{\sqrt{26}}$.

Для нахождения угла между прямой и плоскостью также можно использовать векторы, из которых один параллелен прямой, а другой перпендикулярен плоскости. Угол β между этими векторами связан с углом α между прямой и плоскостью равенством $\sin\alpha = |\cos\beta|$ (рис. 372).

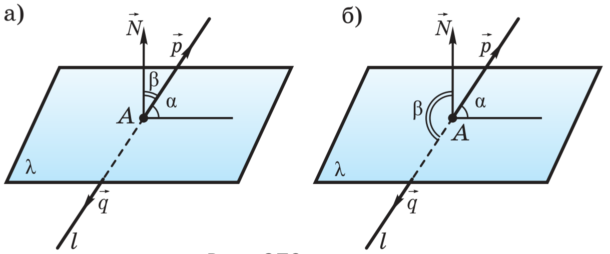


Рис. 372

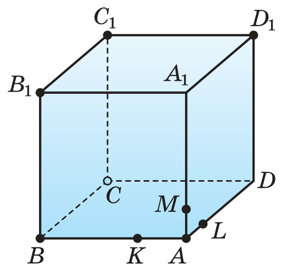


Рис. 373

Пример 4. На рёбрах AB, AD и AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки K, L и M так, что $AK : KB = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 3$, $AM : MA_1 = 1 : 4$ (рис. 373). Найдём угол α между прямой AC_1 и плоскостью KLM.

Решение. Примем точку A за начало системы координат, координатные оси направим по рёбрам куба, взяв рёбра за единичные отрезки. Тогда определятся координаты нужных точек: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 1;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $K\left(\frac{1}{3};\ 0;\ 0\right)$, $L\left(0;\ \frac{1}{4};\ 0\right)$ и $M\left(0;\ 0;\ \frac{1}{5}\right)$.

По теореме **3** из параграфа **13** уравнение плоскости KLM имеет вид $ax + by + cz + d = 0$, а поскольку координаты точек K, L и M удовлетворяют уравнению $3x + 4y + 5z - 1 = 0$, то это уравнение и есть уравнение плоскости KLM, а вектор $\vec{N}\,(3;\ 4;\ 5)$ этой плоскости перпендикулярен.

Прямой AC_1 параллелен вектор $\overrightarrow{AC_1}\,(1;\ 1;\ 1)$. Находим:

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 3\cdot1 + 4\cdot1 + 5\cdot1 = 12, \ \left|\vec{N}\right| = \sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \ \sin\alpha = \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \ \text{и} \ \alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

В) В предыдущем параграфе обсуждалось использование координат для вычисления расстояния от точки до прямой. Рассмотрим решение ещё двух задач на нахождение расстояний: от точки до прямой и расстояния между скрещивающимися прямыми.

Пример 5. В правильной шестиугольной пирамиде $QABCDEF$ все рёбра основания имеют длину 3, они вдвое короче боковых рёбер. На рёбрах QA и QC отмечены точки K и L так, что $QK : KA = 1 : 2$, $QL : LC = 2 : 1$. Найдём расстояние d от точки E до прямой KL.

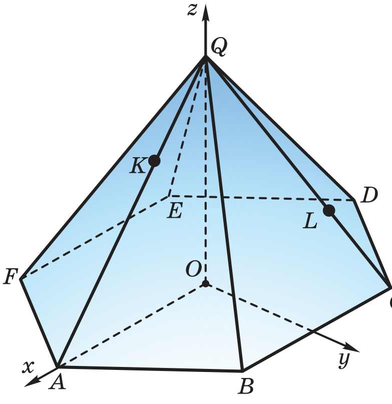


Рис. 374

Решение. Пусть O — центр основания $ABCDEF$. Поскольку $OA = OB = AB = 3$, $AQ = 6$ и $OQ \perp OA$, то из прямоугольного треугольника AOQ находим:

$$OQ = \sqrt{AQ^2 - AO^2} = 3\sqrt{3}.$$

Используем прямоугольную декартову систему координат, начало которой находится в центре O основания $ABCDEF$, оси абсцисс и аппликат проходят через точки A и Q соответственно и точка B имеет неотрицательные координаты (рис. 374). Точки A, Q и B имеют координаты $(3;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 3\sqrt{3})$ и $\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ соответственно. Тогда точки E, K и L будут иметь координаты $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $\left(1; 0; 2\sqrt{3}\right)$ и $\left(-1; \sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ соответственно. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KE}$ по координатам их концевых точек:

$$\overrightarrow{KL}\left(-2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{KE}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3}\right).$$

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую KL и равна высоте треугольника KLE, проведённой из точки E. Для её нахождения можно использовать формулу $d = \frac{2S_{KLE}}{KL}$.

Поскольку $2S_{KLE} = KL \cdot KE \cdot \sin LKE$, $KL = \left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KL}}$,

$$KE = \left|\overrightarrow{KE}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KE}} \text{ и } \sin LKE = \sqrt{1 - \cos^2 LKE} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE}}{\left|\overrightarrow{KL}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KE}\right|}\right)^2},$$

то

$$2S_{KLE} = \sqrt{\overrightarrow{KL}^2 \cdot \overrightarrow{KE}^2 - \left(\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE}\right)^2}.$$

Теперь находим:

$$\overrightarrow{KL}^2 = (-2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 10,$$

$$\overrightarrow{KE}^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 25,$$

$$\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KE}=(-2)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)=\frac{13}{2},$$

$$2S_{KLE}=\sqrt{10\cdot 25-\left(\frac{13}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{831}}{2},\ d=\frac{2S_{KLE}}{KL}=\frac{\sqrt{831}}{2\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{8310}}{20}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{8310}}{20}$.

Пример 6. Измерения AB, BC и AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 5, 4 и 4. Точки K и P на рёбрах AB и AA_1 выбраны так, что $AK : KB = 4 : 1$, $AP : PA_1 = 3 : 1$ (рис. 375). Найдём расстояние d между прямыми BP и KD_1.

Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми BP и KD_1 можно найти как расстояние от какой-либо точки прямой KD_1 до плоскости β, проходящей через прямую BP параллельно KD_1.

Примем точку A за начало системы координат, координатные оси направим по рёбрам параллелепипеда так, чтобы точки A, B и D имели координаты (0; 0; 0), (0; 5; 0), (4; 0; 0) соответственно. Тогда $D_1(4; 0; 4)$, $K(0; 4; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Чтобы записать уравнение плоскости β, найдём координаты вектора $\overrightarrow{N}$, перпендикулярного как вектору $\overrightarrow{BP}$, так и вектору $\overrightarrow{KD_1}$. Поскольку $\overrightarrow{BP}(0; 5; -3)$, $\overrightarrow{KD_1}(4; -4; 4)$, то координаты $(a; b; c)$ вектора $\overrightarrow{N}$ должны удовлетворять равенствам $5b-3c=0$ и $4a-4b+4c=0$, например $\overrightarrow{N}(-2; 3; 5)$.

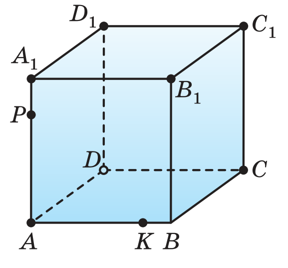


Рис. 375

Теперь запишем уравнение плоскости β, используя координаты точки P: $-2(x-0)+3(y-0)+5(z-3)=0$. Для нахождения расстояния d используем теорему **4** из параграфа **13**:

$$d=\frac{|-2\cdot 0+3\cdot 4+5\cdot 0-15|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+5^2}}=\frac{3}{\sqrt{38}}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{38}}$.

?

1. Объясните, при решении каких задач можно использовать действия сложения векторов и умножения вектора на число.

2. Объясните, как можно находить угол между двумя прямыми.

3. Объясните, как можно находить угол между двумя плоскостями.

4. Объясните, как можно находить угол между прямой и плоскостью.

5. Объясните, как можно находить расстояние от точки до прямой.

6. Объясните, как можно находить расстояние между двумя параллельными прямыми.

7. Объясните, как можно находить расстояние от точки до плоскости.

8. Объясните, как можно находить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

452. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований пересекаются в точках M и M_1. Определите, в каком отношении отрезок MM_1 разделяется плоскостью ABC_1.

453. В треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M, точка Q на ребре SC такова, что $SQ : QC = k$. Определите, в каком отношении отрезок SM разделяется плоскостью ABQ, учитывая, что:

а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 0{,}5$.

454. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, точки P и Q — середины рёбер AB и SC соответственно (рис. 376). Определите, в каком отношении отрезок PQ разделяется плоскостью SBD.

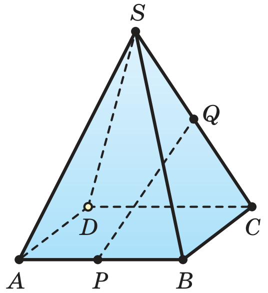


Рис. 376

455. Плоскость проходит через диагональ BF основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельно диагонали AD_1. Найдите отношения, в которых эта плоскость разделяет боковые рёбра призмы.

456. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых BA_1 и CB_1 отмечены точки M и P так, что прямая MP параллельна AC_1. Найдите отношение $MP : AC_1$.

457. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На прямых BA_1 и CB_1 отмечены точки M и P так, что $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CP} = k \cdot \overrightarrow{CB_1}$. Докажите, что прямая MP параллельна одной из граней параллелепипеда.

458. Точки M и K — середины сторон AB и CD пространственного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

459. На рёбрах AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ выбраны такие точки P и Q, что $AP : PB = CQ : QD = 2$. Докажите, что прямые AC, BD и PQ параллельны одной плоскости.

460. На рёбрах AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ выбраны такие точки P и Q, что $AP : PB = CQ : QD = k$. Выразите вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

461. Докажите, что три прямые, проходящие через середины противоположных рёбер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

462. Для точек A, B, C, D и M пространства истинно равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Докажите, что три прямые, проходящие через середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, проходят через точку M.

463. В треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке M, на рёбрах SA, SB, SC выбраны точки A_1, B_1, C_1. Плоскость $A_1B_1C_1$ пересекает отрезок SM в точке M_1. Докажите, что $\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=3\cdot\frac{SM}{SM_1}$.

464. Точки M и K — середины сторон AB и CD пространственного четырёхугольника $ABCD$. Плоскость, которая проходит через точки M и K, пересекает отрезки BC и AD в точках N и L соответственно. Докажите, что:

а) $BN : ND = AL : LD$;

б) отрезок NL разделяется прямой MK пополам.

465. В пространстве заданы точки A, B, C, D, точки K, L, M, N выбраны так, что $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KB}=a$, $\overrightarrow{BL}:\overrightarrow{LC}=b$, $\overrightarrow{CM}:\overrightarrow{MD}=c$, $\overrightarrow{DN}:\overrightarrow{NA}=d$. Докажите, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $abcd = 1$.

466. Прямая l пересекает плоскости граней ABC, ABD, ACD и BCD треугольной пирамиды $ABCD$ в точках D_1, C_1, B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 лежат в одной плоскости.

467. Через середину высоты правильной треугольной пирамиды проходит плоскость, параллельная боковой грани. В каком отношении она разделяет другие рёбра?

468. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом C. Точка M — середина ребра AB, $AM = AA_1$. Найдите угол между прямыми:

а) A_1C и MB_1; б) AC_1 и MB_1.

469. Через середину K ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$ проведена плоскость, параллельная рёбрам AB и CD. Она пересекает ребро BC в точке M. Учитывая, что $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, найдите угол между прямыми AB и CD.

470. В правильной треугольной призме боковое ребро вдвое меньше ребра основания. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней.

471. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Известно, что $AC = BD$ и ребро BD перпендикулярно плоскости основания (рис. 377). Найдите угол между прямой BD и прямой, проходящей через середины рёбер AD и BC.

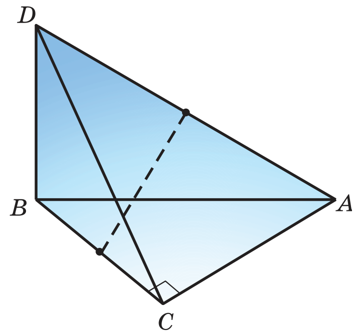


Рис. 377

472. В правильной треугольной призме боковое ребро вдвое больше ребра основания. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней.

473. Точка M — середина ребра SA пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$. Ребро SB перпендикулярно плоскости основания, $SB : BC = \sqrt{11}$. Найдите угол между прямыми CM и AD.

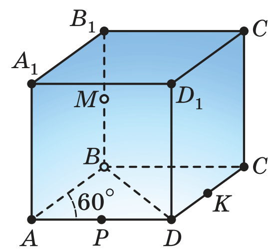


Рис. 378

474. Точки M, K и P на рёбрах AA_1, BC и C_1D_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны так, что $AM = MA_1 = AD$, $BK = KC$, $C_1P = PD_1$. Найдите косинус угла между прямыми:

а) BM и C_1K; в) CM и PK;
б) AP и MC_1; г) D_1K и MC_1.

475. Диагонали основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются под углом 60°, его высота AA_1 равна меньшему ребру BC основания $ABCD$. Точки M, P и K — середины рёбер AA_1, C_1D_1 и BC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми:

а) A_1K и MC_1; в) CP и MK;
б) DM и A_1K; г) BP и MC_1.

476. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом A в 60°, меньшая диагональ ромба равна боковому ребру. Точки K, M и P — середины рёбер CD, BB_1 и AD соответственно (рис. 378). Найдите косинус угла между прямыми:

а) AC_1 и MK; в) MP и A_1C;
б) PC_1 и A_1K; г) DM и AK.

477. Равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 0{,}5AD$, является основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Учитывая,

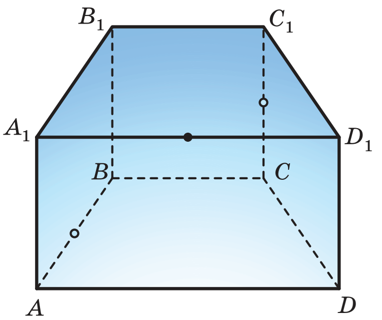


Рис. 379

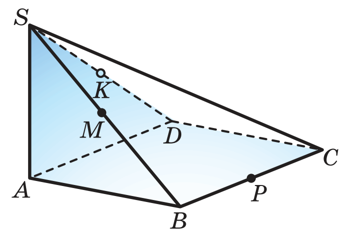


Рис. 380

что точки M, P и K — середины рёбер AB, CC_1 и A_1D_1 соответственно и $BC = CC_1$ (рис. 379), найдите косинус угла между прямыми:

а) CK и MP; б) PK и MD; в) AP и BK; г) DP и MK.

478. Боковое ребро SA пирамиды $SABCD$ перпендикулярно её основанию и равно стороне квадрата $ABCD$. Точки M, P и K — середины рёбер SB, BC и SD соответственно (рис. 380). Найдите угол между прямыми:

а) PM и BK; в) SP и CK;
б) CM и KP; г) DP и BK.

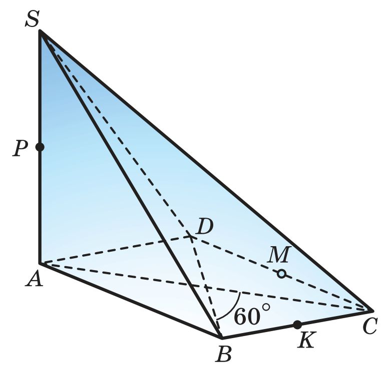


Рис. 381

479. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом $60°$, высота SA пирамиды равна большему ребру AB основания $ABCD$. Точки P, K и M — середины рёбер SA, BC и CD соответственно (рис. 381). Найдите угол между прямыми:

а) AB и KP; в) CP и AD;
б) PM и SK; г) MK и BP.

480. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб с углом C в $120°$, ребро SC перпендикулярно плоскости основания, $SC = CD$. Точка M — середина ребра SA, точка K на ребре SD делит его в отношении $2 : 1$, если считать от вершины S (рис. 382). Найдите угол между прямыми:

а) MD и CK; в) KB и MC;
б) CM и SK; г) CP и AD.

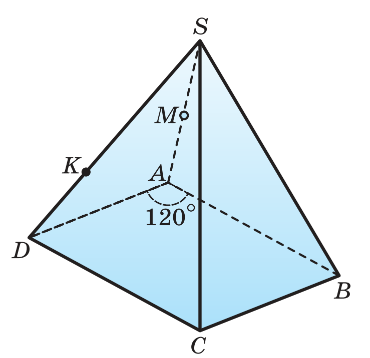


Рис. 382

481. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, $AD = 2BC = 2AB = AA_1$. Найдите угол между прямыми:

а) AB и DB_1; б) CD_1 и DB_1.

482. Две правильные треугольные пирамиды $KABC$ и $MABC$ лежат по разные стороны от их общего основания ABC. Все плоские углы при вершинах K и M прямые (рис. 383).

а) Докажите, что угол между плоскостями AKB и AMB равен углу между прямыми CK и CM.

б) Найдите угол между прямыми AK и BM.

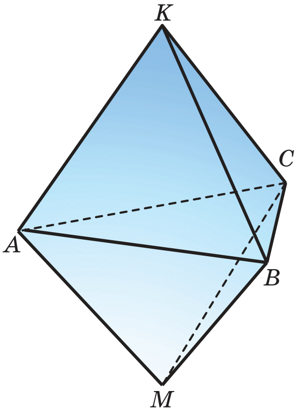


Рис. 383

483. В треугольной пирамиде $SABC$ углы BSC, ASC и ASB равны α, β и γ соответственно. Выразите:

а) косинус угла между прямой SA и биссектрисой угла BSC;

б) косинус угла между биссектрисами углов BSC и ASC.

484. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны a. Найдите угол между прямой BC_1 (рис. 384) и прямой:

а) E_1C; в) A_1F; д) BF_1;

б) F_1E; г) A_1C; е) A_1D.

485. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра основания равны 1, боковые рёбра — 2. Найдите угол между прямой AE_1 (рис. 385) и прямой:

а) B_1D; в) A_1C; д) F_1C;

б) A_1D_1; г) A_1D; е) DB_1.

486. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра основания равны 1, боковые рёбра — 2. Найдите расстояние между прямой BC_1 (рис. 386) и прямой:

а) B_1E; в) B_1D; д) A_1E;

б) F_1C; г) A_1C; е) F_1D.

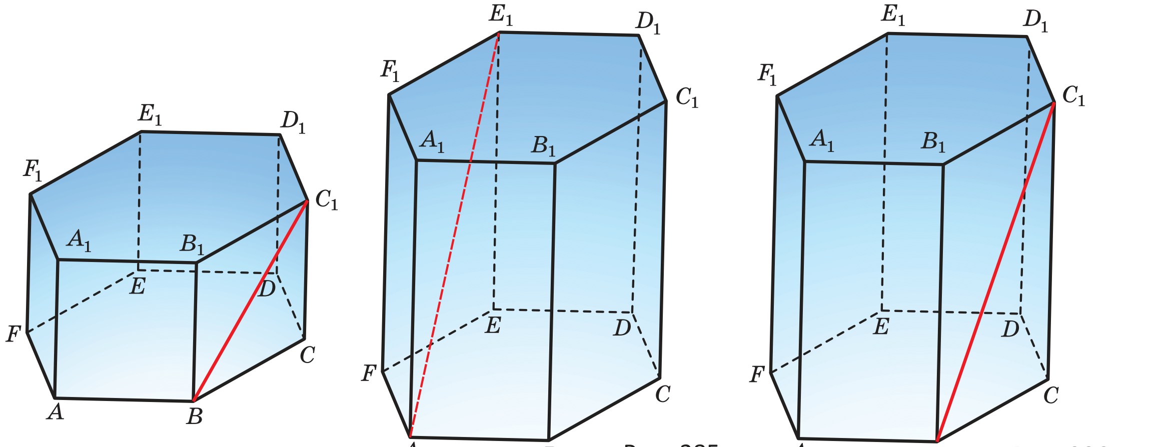


Рис. 384 Рис. 385 Рис. 386

487. В правильной шестиугольной призме все рёбра основания равны 1, боковые рёбра — 2. Найдите расстояние между прямой AE_1 (см. рис. 385) и прямой:

а) B_1D; в) A_1C; д) F_1C;
б) A_1D_1; г) A_1D; е) F_1B.

488. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания составляет $\frac{2}{3}$ бокового ребра. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1BC_1.

489. Через диагональ AC_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит плоскость α, параллельная прямой BD. Учитывая, что $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$ (рис. 387), найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

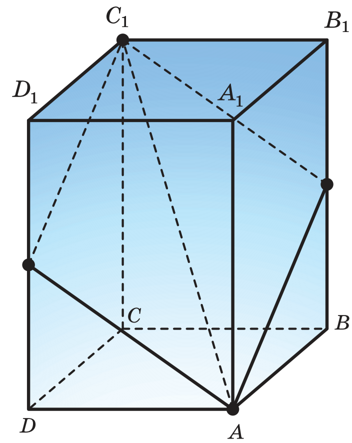


Рис. 387

490. Все рёбра пирамиды $ABCD$ равны, K и M — середины рёбер BD и CD соответственно. Найдите угол между плоскостями:

а) AKC и ABD;
б) ABC и ABD;
в) ABC и AKM.

491. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны, M — середина бокового ребра SA. Найдите угол между плоскостями:

а) ABS и CDS; г) ABS и ADS;
б) ABC и ADS; д) ABC и BCM;
в) ABC и BDM; е) ABS и BDM.

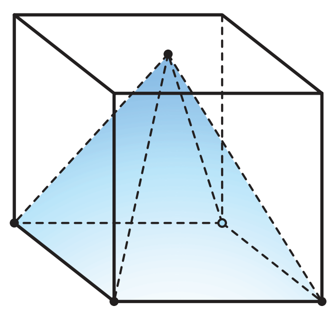


Рис. 388

492. Основание пирамиды совпадает с одной гранью куба, а её вершина — с центром противоположной грани (рис. 388). Найдите угол между плоскостями:

а) противоположных боковых граней пирамиды;
б) основания и боковой грани пирамиды;
в) соседних боковых граней пирамиды.

493. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ на середине ребра SA отмечена точка M. Учитывая, что треугольник SBD является правильным, найдите угол между плоскостями:

а) ABS и CDS; в) SAB и BDM;
б) ABC и BDM; г) SBC и BDM.

494. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро основания равно 2, боковое ребро равно 3, точка K на ребре AA_1 отмечена так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями:

а) ABC и BKC_1; б) AA_1C и BKC_1; в) ABC и BKD_1.

495. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ диагональ AC основания втрое больше бокового ребра. Найдите угол между плоскостями:

а) ACA_1 и B_1CE_1; б) ABC и B_1CE_1; в) ADE_1 и A_1FD.

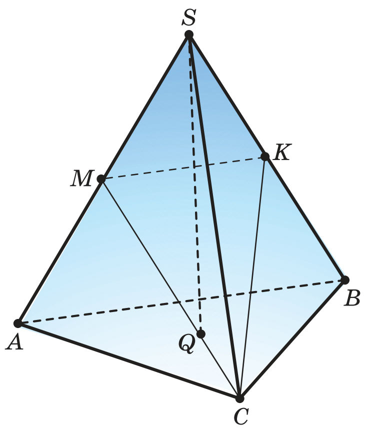


Рис. 389

496. В треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB, Q — точка пересечения медиан основания ABC.

а) Найдите отношение, в котором плоскость MKC разделяет отрезок SQ (рис. 389).

б) Учитывая, что пирамида правильная и $AB : SA = 2 : 3$, найдите угол между плоскостями MKC и ABC.

497. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой:

а) AA_1 и плоскостью BC_1D;
б) AC_1 и плоскостью BDD_1;
в) AB и плоскостью BC_1A_1;
г) AA_1 и плоскостью BC_1D.

498. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра BC, $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{2}$. Найдите угол между прямой:

а) MC_1 и плоскостью ABB_1;
б) AB и плоскостью A_1MC_1.

499. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, P, M — середины рёбер AD, AB и A_1B_1 соответственно. Зная, что $AA_1 : AB = \sqrt{6} : 1$, найдите угол между прямой:

а) DD_1 и плоскостью KPM;
б) AC_1 и плоскостью KPM.

500. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точка M — середина ребра SA, $MA = AB$. Найдите угол между прямой:

а) BM и плоскостью SDM;
б) AC и плоскостью BDM.

501. Все рёбра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны, точка M — середина ребра BB_1. Найдите угол между прямой:

а) AA_1 и плоскостью BCE_1;

б) BC_1 и плоскостью AFF_1;
в) BD_1 и плоскостью ABB_1;
г) BE_1 и плоскостью ABB_1;
д) AM и плоскостью AE_1D;
е) DM и плоскостью CEF_1;
ж) EM и плоскостью CDF_1;
з) DM и плоскостью AFC_1.

502. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны, точка K — середина ребра SD. Найдите угол между прямой:
а) AK и плоскостью ABC;
б) BK и плоскостью BSC;
в) BK и плоскостью ASD;
г) SA и плоскостью SCD.

503. На рёбрах BC, AD и диагонали грани CD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки K, L и M так, что $BK : KC = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 1$, $CM : MD_1 = 2 : 1$. Ребро куба равно 3 (рис. 390). Найдите расстояние d от точки:
а) A_1 до прямой KM;
б) M до прямой A_1K;
в) L до прямой BM;
г) K до прямой AM;
д) L до прямой AM;
е) K до прямой LM.

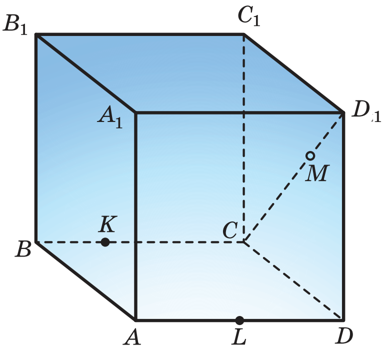


Рис. 390

504. В основании прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, точки K, P, M — середины рёбер AD, AB и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояние d от точки:

а) A до прямой PC_1;
б) A до прямой KB_1;
в) C до прямой KM;
г) D до прямой MP;
д) M до прямой D_1P;
е) K до прямой B_1P;
ж) P до прямой MD_1;
з) K до прямой A_1C.

505. Все рёбра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны a, точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки:

а) A до прямой BC_1;
б) A_1 до прямой BF_1;
в) D_1 до прямой AE_1;
г) D до прямой AE_1;
д) M до прямой BE_1;
е) M до прямой BF_1;
ж) M до прямой FD_1;
з) M до прямой F_1C.

506. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны a, точки K и M — середины рёбер CD и SD соответственно. Найдите расстояние от точки:

а) A до прямой BM;
б) A до прямой CM;
в) K до прямой BM;
г) A до прямой MK.

507. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точка M — середина ребра SA, $MA = AB = a$. Найдите расстояние от точки:

а) M до прямой BC;
б) M до прямой BD;
в) M до прямой CD;
г) C до прямой ME;
д) F до прямой BM;
е) F до прямой CM;
ж) E до прямой BM;
з) E до прямой CM.

508. Все рёбра основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равны a, боковые рёбра равны $2a$, точки K и M — середины рёбер BC и SD соответственно. Найдите расстояние от точки:

а) A до плоскости SCD;
б) A до плоскости BCM;
в) K до плоскости BMA;
г) C до плоскости AMK.

509. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, рёбра SA, SB и SC равны a, b и c соответственно. Найдите:

а) высоту пирамиды, проведённую из вершины S;
б) длину отрезка SK, где K — точка плоскости ABC, равноудалённая от трёх других граней пирамиды.

510. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, рёбра SA, SB и SC равны a, b и c соответственно. Найдите:

а) радиус описанного около пирамиды шара;
б) радиус вписанного в пирамиду шара.

511. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины рёбер SA и SC соответственно, $MA = AB = a$. Найдите расстояние от точки:

а) M до плоскости BEK;
б) M до плоскости ACK;
в) E до плоскости BMK;
г) B до плоскости KMD;
д) M до плоскости BDK;
е) A до плоскости BKF;
ж) F до плоскости BMK;
з) M до плоскости ABK.

512. В основании прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, точки K, P, M — середины рёбер AD, AB и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояние d от точки:

а) A до прямой PC_1;
б) A до прямой KB_1;
в) C до прямой KM;
г) D до прямой MP;
д) M до прямой D_1P;
е) K до прямой B_1P;
ж) P до прямой MD_1;
з) K до прямой A_1C.

513. Все рёбра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны a, точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки:

а) A до плоскости BCE_1;
б) A_1 до плоскости BCF_1;
в) D_1 до плоскости ACE_1;
г) F до плоскости ACE_1;
д) M до плоскости BCE_1;
е) M до плоскости BCF_1;
ж) M до плоскости ACE_1;
з) M до плоскости AFC_1.

514. В пирамиде $ABCD$ все рёбра равны a, точки M, K и P — середины рёбер AB, AC и BD соответственно. Найдите расстояние между прямыми:

а) AC и BD;
б) MP и AC;
в) AB и KP;
г) BC и MD;
д) AK и CM;
е) AP и CM.

515. В правильной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны a, точки K и M — середины рёбер AB и SD соответственно. Найдите расстояние между прямыми:

а) AC и SB;
б) BC и SA;
в) AD и KM;
г) SB и MC;
д) MK и CB;
е) AM и CK.

516. В основании прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, точки K, P, M — середины рёбер AD, AB и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояние между прямыми:

а) AC и MB_1;
б) BC и PC_1;
в) KM и CD;
г) KP и MC;
д) MD_1 и C_1K;
е) C_1P и DM.

517. Все рёбра правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны a, точки K, P, M — середины рёбер AF, DE и BB_1 соответственно. Найдите расстояние между прямыми:

а) AC и MP;
б) BC и PC_1;
в) KM и CD;
г) KP и MC;
д) MD_1 и KP;
е) C_1P и DM.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Две прямые

Две прямые a и b могут быть параллельными (рис. 382) или пересекающимися (рис. 383).

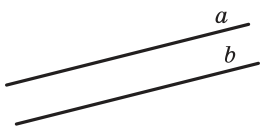
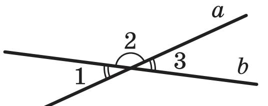


Рис. 382



$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 = \angle 3$

Рис. 383

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла, пары которых имеют специальные названия. Углы 1 и 2, имеющие общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180°, а вертикальные углы равны друг другу.

Три прямые

Среди трёх прямых a, b, c может не быть параллельных прямых (рис. 384) или такие прямые могут быть. Если параллельные прямые a и b есть, то третья прямая c может быть параллельной им (рис. 385) или пересекать их (рис. 386).

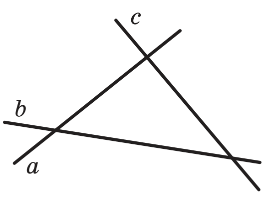
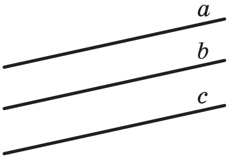


Рис. 384



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Рис. 385

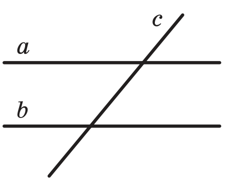


Рис. 386

Если две прямые a и b пересечены третьей прямой, то образуются 8 углов (рис. 387). Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*, углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренними накрест лежащими*, углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренними односторонними*.

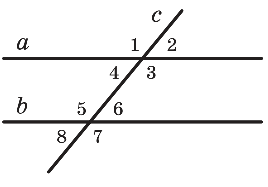


Рис. 387

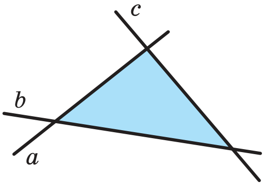


Рис. 388

Свойства параллельных прямых: если прямые a и b параллельны, то при пересечении их третьей прямой соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние вместе составляют 180°.

Признаки параллельных прямых: прямые a и b параллельны, если при пересечении их третьей прямой соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние вместе составляют 180°.

Три попарно пересекающиеся прямые ограничивают на плоскости треугольник (рис. 388).

Треугольник

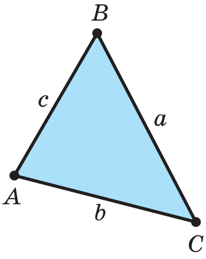


Рис. 389

Свойства треугольника (рис. 389):

• сумма внутренних углов равна 180°:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°;$$

• каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности:

$$b - c < a < b + c;$$
$$a - c < b < a + c;$$
$$a - b < c < a + b;$$

• большему углу соответствует большая противоположная сторона: если

$$\angle A > \angle C, \text{ то } a > c;$$

• большей стороне соответствует больший противоположный угол:

$$\text{если } a > c, \text{ то } \angle A > \angle C;$$

• *теорема косинусов*: квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

• *теорема синусов*: стороны пропорциональны синусам противоположных углов;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Кроме сторон и углов, треугольник имеет другие элементы.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом (рис. 390).

Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним:

$$\angle BAD = \angle B + \angle C.$$

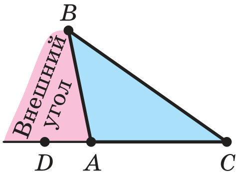


Рис. 390

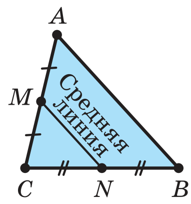


Рис. 391

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 391).

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне (основе) и равна её половине:

$$MN \parallel AB,\ MN = \frac{1}{2}AB.$$

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 392).

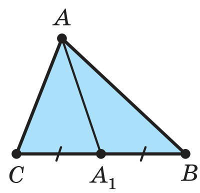


Рис. 392

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отсекает от каждой из них третью долю, если считать от стороны (рис. 393):

$$A_1G = \frac{1}{3}\ AA_1,\ B_1G = \frac{1}{3}BB_1,\ C_1G = \frac{1}{3}\ CC_1.$$

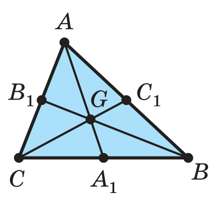


Рис. 393

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключённый между его вершиной и противоположной стороной (рис. 394).

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 395).

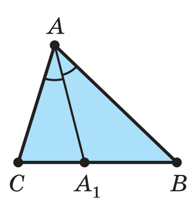


Рис. 394

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через противоположную его сторону (рис. 396).

Прямые, проходящие через высоты треугольника, пересекаются в одной точке (рис. 397).

Площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведённой к ней высоты, или произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей

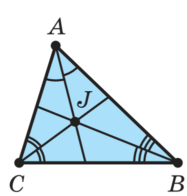


Рис. 395

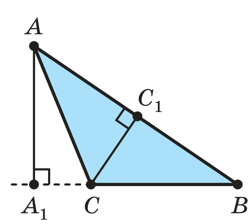


Рис. 396

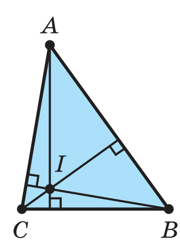


Рис. 397

средней линии, или половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними, или квадратному корню из произведения полупериметра и трёх разностей полупериметра с каждой стороной, или произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности, или произведению трёх сторон треугольника, разделённому на учетверённый радиус описанной окружности (рис. 398):

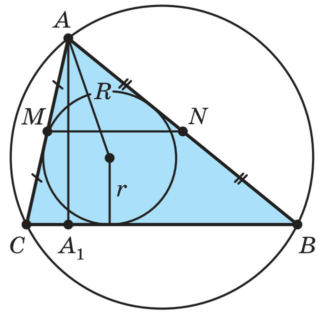


Рис. 398

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA);$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AA_1 = AA_1 \cdot MN = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC =$$
$$= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = pr = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}.$$

Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший — его угол может быть и острым (рис. 399), и прямым (рис. 400), и тупым (рис. 401). В соответствии с этим треугольники разделяют на *остроугольные*, *прямоугольные*, *тупоугольные*.

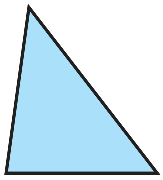


Рис. 399

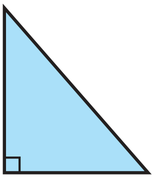


Рис. 400

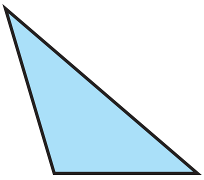


Рис. 401

Свойства прямоугольного треугольника (рис. 402).

• Острые углы вместе составляют 90°:

$$\angle A + \angle B = 90°;$$

• *теорема Пифагора*: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

• если катет лежит против угла в 30°, то он равен половине гипотенузы;

• если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°;

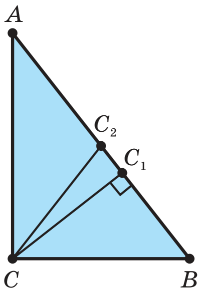


Рис. 402

• медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности:

$$CC_2 = AC_2 = BC_2 = R;$$

• высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет является средним геометрическим гипотенузы и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1},$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AC_1},$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BC_1};$$

• синус острого угла равен отношению противоположного катета к гипотенузе; косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе; тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему; котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \ \cos A = \frac{AC}{AB};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \ \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

• сумма двух каких-нибудь его углов равна 90°;

• квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;

• одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

Равнобедренный треугольник

Если треугольник имеет две равные стороны, его называют *равнобедренным* (рис. 403). Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним* (рис. 404).

Свойства равнобедренного треугольника (рис. 405):

• углы при основании равны:

$$\angle A = \angle C;$$

• медиана, биссектриса, высота, проведённые к основанию, совпадают:

если BB_1 — медиана, то BB_1 — биссектриса и высота;
если BB_1 — биссектриса, то BB_1 — медиана и высота;
если BB_1 — высота, то BB_1 — биссектриса и медиана.

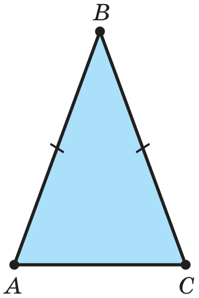


Рис. 403

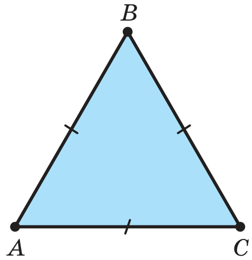


Рис. 404

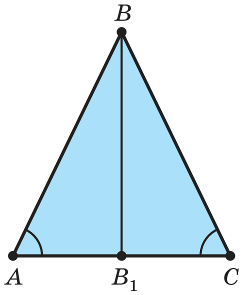


Рис. 405

Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

• две его стороны равны;

• два его угла равны;

• медиана и высота, или медиана и биссектриса, или высота и биссектриса, проведённые из одной вершины, совпадают.

Равенство фигур

Равные фигуры — фигуры, совпадающие при наложении.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если они имеют равные:

• угол и прилежащие к нему стороны;

• сторону и прилежащие к ней углы;

• три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

• катеты;

• катет и прилежащий к нему острый угол;

• гипотенуза и острый угол;

• гипотенуза и катет.

Подобие фигур

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне высекают также равные отрезки.

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответственные стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если у них:

- имеется по равному углу, а прилежащие к нему стороны пропорциональны;
- имеется по два равных угла;
- все три стороны пропорциональны.

Отношение любых соответственных линейных элементов подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объёмов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.

Окружность и круг

Отношение длины C окружности к её диаметру d является одним и тем же для любой окружности (рис. 406). Это отношение выражает число, которое обозначается π.

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141592...$$

Длина C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами:

$$C = 2\pi r; \; S = \pi r^2; \; S = \frac{C}{2} r.$$

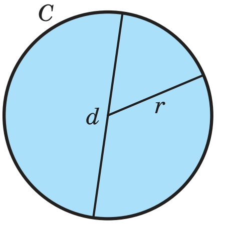


Рис. 406

Окружность и угол

Угол, вершина которого находится в центре круга, называется *центральным углом*.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны имеют с окружностью общие точки, называется *вписанным углом* (рис. 407).

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол, который опирается на диаметр, является прямым.

Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному.

Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол высекает из окружности.

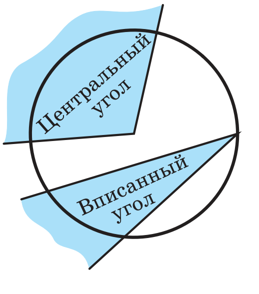


Рис. 407

Окружность и прямая

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку (рис. 408).

Свойство касательной: касательная перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Признак касательной. Прямая является касательной, если она проходит через точку окружности и перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку.

Угол между касательной и секущей, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, которую этот угол заключает.

Отрезки двух касательных, проведённых через одну точку, заключённые между этой точкой и точками касания, равны друг другу.

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны (и равны $r^2 - a^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до точки пересечения).

Если секущая и касательная проходят через данную точку вне круга, то произведение отрезков секущей, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, равно квадрату отрезка касательной с концами в данной точке и точке касания.

Если секущая проходит через точку вне круга, то произведение отрезков, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, есть величина постоянная (равная $a^2 - r^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки).

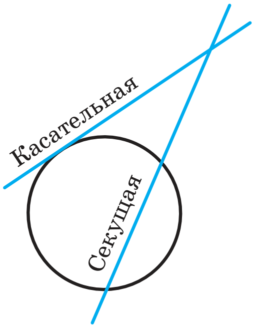


Рис. 408

Окружность и треугольник

Окружность, вписанная в многоугольник, — окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

Окружность, описанная около многоугольника, — окружность, проходящая через все вершины многоугольника.

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 409).

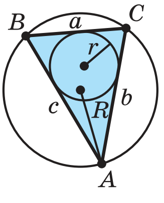


Рис. 409

Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с другими элементами треугольника формулами:

$$r = \frac{S}{p}; \; R = \frac{abc}{4S}; \; \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Четырёхугольник

Плоская замкнутая четырёхзвённая ломаная выделяет из плоскости *четырёхугольник*. Четырёхугольник на рисунке 410 — *выпуклый*, а на рисунке 411 — *невыпуклый*. Обычно рассматривают выпуклые четырёхугольники.

Свойства четырёхугольника:

• сумма внутренних углов равна 360°;

• середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 412);

• площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

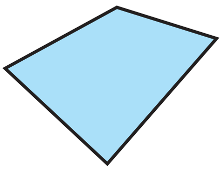


Рис. 410

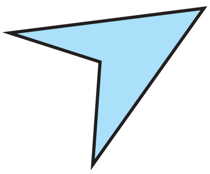


Рис. 411

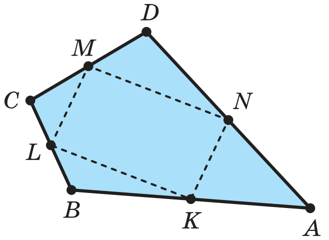


Рис. 412

Трапеция

Трапеция — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны — не параллельны (рис. 413).

Свойства трапеции (рис. 414):

• сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°:

$$\angle A + \angle B = 180°;\ \angle C + \angle D = 180°;$$

• средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме:

$$MN \parallel AD,\ MN \parallel BC,\ MN = \frac{1}{2}(AD + BC);$$

• площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты:

$$S_{ABCD} = BB_1 \cdot MN;$$

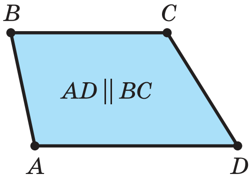


Рис. 413

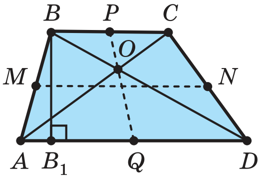


Рис. 414

• из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к её основаниям, — подобные, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, — равновеликие:

$$\Delta\, AOD \sim \Delta\, BOC;\ S_{AOB} = S_{DOC}.$$

Параллелограмм

Параллелограмм — четырёхугольник, у которого две пары параллельных сторон (рис. 415).

Свойства параллелограмма (рис. 416):

• сумма углов, прилежащих к любой его стороне, равна 180°:

$$\angle A + \angle B = 180° \text{ и } \angle B + \angle C = 180°$$
$$\text{и } \angle C + \angle D = 180° \text{ и } \angle D + \angle A = 180°;$$

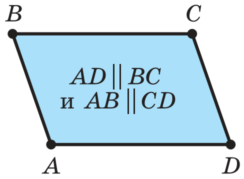


Рис. 415

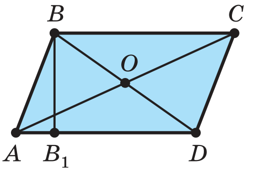


Рис. 416

• его противоположные стороны параллельны и равны:

$$AD \parallel BC \text{ и } AB \parallel CD;\ AD = BC \text{ и } AB = CD;$$

• его противоположные углы равны:

$$\angle A = \angle C \text{ и } \angle B = \angle D;$$

• точка пересечения диагоналей делит их пополам:

$$AO = CO;\ BO = DO;$$

• точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма;

• площадь равна произведению стороны и проведённой к ней высоты:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BB_1.$$

Признаки параллелограмма. Четырёхугольник является параллелограммом, если:

• суммы углов, прилежащих к каким-нибудь двум смежным сторонам, равны 180° каждая:

$$\angle A + \angle B = 180° \text{ и } \angle B + \angle C = 180°, \text{ или } \angle B + \angle C = 180° \text{ и}$$
$$\angle C + \angle D = 180°, \text{ или } \angle C + \angle D = 180° \text{ и } \angle D + \angle A = 180°, \text{ или}$$
$$\angle D + \angle A = 180° \text{ и } \angle A + \angle B = 180°;$$

• его противоположные стороны равны:

$$AD = BC \text{ и } AB = CD;$$

• он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон:

$$AD \parallel BC \text{ и } AD = BC \text{ или } AB = CD \text{ и } AB \parallel CD;$$

• его противоположные углы равны:

$$\angle A = \angle C \text{ и } \angle B = \angle D;$$

• его диагонали точкой пересечения делятся пополам:

$$AO = CO;\ BO = DO.$$

Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого имеется прямой угол (рис. 417).

Свойства прямоугольника (рис. 418):

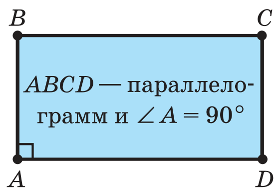


Рис. 417

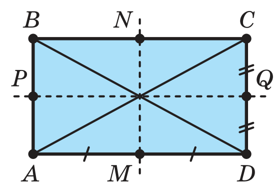


Рис. 418

• все его углы равны друг другу и прямые:

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°;$$

• его диагонали равны:

$$AC = BD;$$

• серединные перпендикуляры к его сторонам являются осями симметрии;

• его площадь равна произведению смежных сторон:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD.$$

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

• его диагонали равны:

$$AC = BD;$$

• серединный перпендикуляр к какой-нибудь стороне параллелограмма является его осью симметрии; MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.

Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого имеется равные смежные стороны (рис. 419).

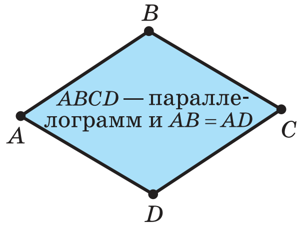


Рис. 419

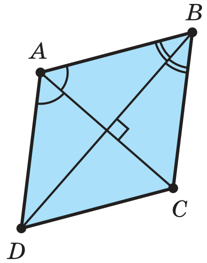


Рис. 420

Свойства ромба (рис. 420):

• все его стороны равны друг другу:

$$AB = BC = CD = DA;$$

• его диагонали перпендикулярны:

$$AC \perp BD;$$

• его диагонали делят углы пополам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ и } \angle BCA = \angle DCA;$$

• прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии;

• его площадь равна половине произведения диагоналей:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

• он имеет пару равных смежных сторон:

$$AB = BC, \text{ или } BC = CD, \text{ или } CD = DA, \text{ или } DA = AB;$$

• его диагонали перпендикулярны:

$$AC \perp BD;$$

• его диагонали делят углы пополам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ и } \angle BCA = \angle DCA;$$

• прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии.

Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого имеются равные смежные стороны, или ромб, у которого имеется прямой угол (рис. 421).

Поскольку квадрат является и прямоугольником и ромбом, то он обладает всеми свойствами прямоугольника и всеми свойствами ромба.

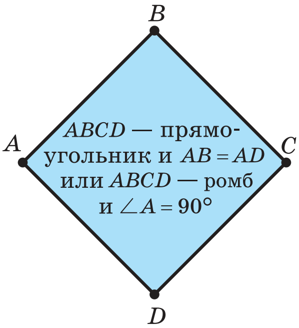


Рис. 421

Окружность и четырёхугольник

Свойство описанного четырёхугольника (рис. 422): суммы противоположных сторон равны.

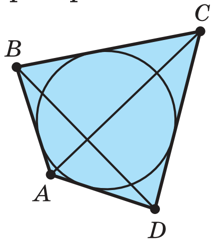


Рис. 422

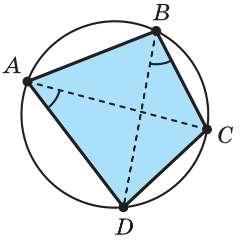


Рис. 423

Признак описанного четырёхугольника. Четырёхугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон.

Свойство вписанного четырёхугольника (рис. 423):

а) сумма противоположных углов равна 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°;$$

б) произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Признаки вписанного четырёхугольника. Четырёхугольник является вписанным в окружность, если:

а) сумма противоположных углов равна 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°;$$

б) углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну сторону, равны:

$$\angle ACB = \angle ADB, \text{ или } \angle BAC = \angle BDC, \text{ или}$$
$$\angle CAD = \angle CBD, \text{ или } \angle ACD = \angle ABD.$$

Обозначения геометрических фигур, геометрических величин, соотношений между ними и операций над фигурами

Ф, $Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$, ... — геометрическая фигура;

$\varnothing$ — пустое множество;

$A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, A_n \ldots$ — точки пространства;

$a, b, c, d, \ldots, x, y, z, a_1, a_2, a_3, \ldots, an \ldots z_1, z_2, z_3, \ldots, a_n \ldots$ — прямые пространства;

$\omega\ (A, r)$ — окружность с центром в точке A и радиусом r;

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[AB)$ — луч с началом в точке A, проходящий через точку B;

$[AB]$ — отрезок с концами в точках A и B;

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B, C;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \chi, \psi, \omega$ — плоскости пространства;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \chi, \psi, \omega$ — величина плоского угла;

$\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B;
$\triangle ABC$ — треугольник ABC;
$\cup AB$ — дуга AB;
$|AB|$ — расстояние от точки A до точки B; длина отрезка AB;
$|Aa|$ — расстояние от точки A до прямой a;
$|A\alpha|$ — расстояние от точки A до плоскости α;
$|ab|$ — расстояние между прямыми a и b;
$|\alpha\beta|$ — расстояние между плоскостями α и β;
$^\circ$ — градус;
$'$ — минута;
$''$ — секунда ($\angle ABC = 45^\circ\ 15'\ 30''$);
∞ — бесконечность;
P_{ABCD} — периметр четырёхугольника $ABCD$;
p_{ABC} — полупериметр треугольника ABC;
S_{ABC} — площадь треугольника ABC;
$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности фигуры;
$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности фигуры;
$A = B$ — точка A совпадает с точкой B;
$a = b$ — прямая a совпадает с прямой b;
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;
$|AB| = |AC|$ — расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки A до точки C;
$\alpha \cap \beta = a$ — плоскости α и β пересекаются по прямой a;
$a \cap b = \varnothing$ — прямые a и b не пересекаются;
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$;
$a \parallel b$ — прямая a параллельна прямой b;
$a \nparallel b$ — прямая a не параллельна прямой b;
$\alpha \parallel b$ — плоскость α параллельна прямой b;
$\alpha \parallel \beta$ — плоскость α параллельна плоскости β;
$a \perp b$ — прямая a перпендикулярна прямой b;
$a \not\perp b$ — прямая a не перпендикулярна прямой b;
$\alpha \perp b$ — плоскость α перпендикулярна прямой b;
$\alpha \perp \beta$ — плоскость α перпендикулярна плоскости β;
$a \dot{-} b$ — прямая a скрещивается с прямой b;
$C \in b$ — точка C принадлежит прямой b;
$C \notin b$ — точка C не принадлежит прямой b;
$C \in \alpha$ — точка C принадлежит плоскости α;
$a \subset \alpha$ — прямая a лежит в плоскости α;
$a \not\subset \alpha$ — прямая a не лежит в плоскости α;
$\triangle ABC \subset \alpha$ — треугольник ABC лежит в плоскости α;
$\text{Пр}_\alpha\, AB$ — проекция прямой AB на плоскость α;
$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение (общая часть) фигур Φ_1 и Φ_2;
$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — объединение фигур Φ_1 и Φ_2.

Ответы

Раздел 1

6. 198 см^2; $18\left(11+\sqrt{3}\right)$ см^2. **7.** а) 150; $12{,}5\left(12+\sqrt{3}\right)$; б) 1200; 1400; в) 3456; $108\left(32+9\sqrt{3}\right)$ **8.** $7{,}5(10+\sqrt{3})$ см^2; **9.** 416 м^2; 656 м^2. **10.** 1320 см^2. **11.** а) 13 см; б) $195\sqrt{3}$ см^2; в) $270\sqrt{3}$ см^2. **12.** а) $3\sqrt{34}$ см; б) 540 см^2; в) 864 см^2. **13.** $37{,}5\sqrt{3}$ см^2. **14.** а) 13 см; 12 см; б) 360 см^2; в) $30\left(12+5\sqrt{3}\right)$ см^2. **15.** а) $2\sqrt{217}$ см; $16\sqrt{3}$ см; б) $1248\sqrt{3}$ см^2; в) $2400\sqrt{3}$ см^2. **16.** а) $2\sqrt{58}$ см; $2\sqrt{65}$ см; б) 296 см^2; в) 392 см^2. **17.** а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ см; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ см; б) 192 см^2; в) 282 см^2. **18.** а) 5 м; $\sqrt{89}$ м; б) $8\left(5+\sqrt{34}\right)$ м^2; в) $8\left(11+\sqrt{34}\right)$ м^2. **19.** а) $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{6}$ см; $8\sqrt{6}$ см; б) $192\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2; в) $192\left(2+\sqrt{2}\right)$ см^2. **20.** $2{,}4\sqrt{34}$ см, $3\sqrt{17}$ см. **23.** 1 или 3. **51.** $\sqrt{10}$ см. **52.** 960 см^2. **53.** 4 см. **57.** 72 дм^2. **58.** $576\left(1+\sqrt{3}\right)$ см^2. **59.** 11 мм и 60 мм. **60.** 4640 см^2 или 8448 см^2. **61.** 4 см. **64.** в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м^2. **65.** $\frac{a}{9}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$. **66.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **67.** $\frac{a}{2}\left(2\sqrt{3}+1\right)$, $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. **69.** $l\sqrt{2a^2-\frac{l^2}{4}}$. **73.** 72 см^2. **74.** $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. **75.** $\frac{a}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. **76.** $20\sqrt{3}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм. **83.** $\frac{S\sqrt{7}}{2(\sqrt{3}+6)}$. **84.** $1{,}25a^2\sqrt{3}$. **85.** 10 мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм. **86.** $2S(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$. **90.** $2R^2\sqrt{3}$. **91.** $3l^2$. **92.** $2\sqrt{3}$ м^2. **93.** $\frac{1}{2a\sqrt{2}}\sqrt{a^4+4S^2}$. **94.** $2a^2\left(2\sqrt{\frac{\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}+1\right)$. **95.** $\frac{3c}{8}\sqrt{8h^2+c^2}$. **96.** $\frac{4}{3}\left(\sqrt{13}+\sqrt{10}\right)$ м. **97.** 480 см^2. **98.** $2\sqrt{2\left(4Q^2-a^4\right)}$.

Раздел 2

103. б) 200 см. **104.** $3+2\sqrt{2}$ м. **105.** 40 м или 8 м. **106.** 12 см. **107.** 36 см. **108.** 24 см. **109.** а) 7 см; б) 30 см. **110.** 50 см. **111.** 40 мм. **113.** б) 12 см. **114.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **115.** $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$. **121.** а) 40°; б) 45°; в) 90°.

122. а) 58°; б) 47°. **123.** а) 90°; б) 64°. **126.** В 5 раз. **132.** б) 1600 см^2. **133.** $\frac{\sqrt{S}}{4}$. **134.** б) 5 см. **135.** 3. **136.** $\frac{1}{3}m$. **137.** $4S$. **146.** 96 см. **147.** $8\frac{1}{3}$ см. **148.** 10 см. **149.** 16 см. **150.** 24 см; 36 см. **151.** 25 см. **152.** 1620 см^2. **153.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$. **160.** а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. **162.** б) 4 : 9. **163.** в) 6 см^2. **172.** б) 4 см. **173.** 8 см^2. **181.** $\frac{q}{16}$. **182.** 64 см^2. **183.** б) 140 см. **184.** 46 см. **185.** 109 см. **186.** 6 S. **187.** 72 см. **188.** $\frac{4}{3}S$. **189.** $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. **190.** 1 : 3. **191.** 0,16 q. **192.** $\frac{9m}{64}\sqrt{4n^2-m^2}$. **193.** 32 см^2. **210.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **211.** 38 см.

Раздел 3

217. 40 см. **218.** 7,8 м. **219.** 18 см. **220.** $4\sqrt{65}$ см или $4\sqrt{17}$ см; 32 см; 20 см. **221.** $\sqrt{d^2+\frac{a^2}{2}}$. **222.** 6,5 см. **223.** а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2-p^2+r^2}$; г) $\sqrt{l^2-k^2+2m^2}$. **224.** 12 см. **225.** а) 2,4; б) $\frac{\sqrt{455}}{12}$; в) 0. **226.** 36 см. **227.** 15 см. **231.** 400 $(2+\sqrt{5})$ мм^2. **232.** 296 см^2. **233.** $36\sqrt{5}$. **239.** а) 1250; б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000. **240.** $9\sqrt{2}$ см^2. **241.** 15 см. **242.** 23 см. **243.** 60 см, 36 см. **244.** 20 см, 24 см. **245.** 12 см. **247.** а) 4; 1; б) 4; 1; в) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **249.** а) $\frac{d}{\cos\beta}$, d tg β; б) $m\cos\beta$, $m\sin\beta$. **250.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **251.** $\sqrt{2}$ м. **252.** а) 1; б) $\sqrt{1+2\cos\beta}$. **253.** 6 см, 15 см. **254.** а) 41 см, 55 см; б) 40 см, 80 см. **255.** 3 см; 7,5 см. **256.** 270 см^2. **261.** а) a; б) a; в) a; г) a; д) a; е) a. **262.** 60 см. **263.** 120 см. **264.** 4 см, $4\sqrt{10}$ см. **265.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; д) $a\sqrt{3}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. **266.** а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **267.** $12{,}5\sqrt{337}$ см^2. **268.** 56. **269.** 10 см, 6 см. **270.** $\frac{mp}{p+q}$ или $\frac{mq}{p+q}$. **271.** а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **272.** $\frac{abc}{\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)+4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2\left(a^2+c^2\right)+4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)+4a^2b^2}}$.

273. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **274.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **275.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **276.** $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2-a^2}$. **278.** 12,5 см, 25 см. **280.** а) 17 дм; б) $\sqrt{176{,}5}$ дм. **281.** б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+h^2}$. **282.** а) 20; б) $5\sqrt{3}$. **283.** 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, $2{,}5\sqrt{17}$ см. **284.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. **285.** 40 см, 16 см. **286.** $\sqrt{2y^2-x^2}$. **287.** $16\left(3+\sqrt{17}\right)$. **288.** 18 м и 12 м. **290.** 6 см. **291.** а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **292.** 30°. **294.** $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. **295.** а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$. **296.** а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. **297.** $3d$. **298.** 45°. **299.** $5\sqrt{5}$ мм. **300.** а) $\arccos\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; б) $\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; в) $\arccos\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **301.** а) 90°; б) 90°; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; г) $\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$. **306.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **307.** 45°. **316.** 10 см. **317.** 27 см. **318.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **319.** $2l^2$. **320.** а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$. **321.** 3,36 см. **322.** а) $8\sqrt{3}$ см; б) $112\sqrt{3}$ см^2. **323.** 4 м. **324.** 90°, 45°, 60°. **325.** 60°. **326.** 60°. **327.** $\sqrt{217}$ см. **328.** $2a$. **329.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **330.** 25 см. **331.** а) 42 см; б) 16; в) $2x$. **332.** 60°. **333.** 120°. **334.** $\arccos\frac{1}{3}$. **336.** $\arccos\frac{1}{3}$. **337.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3\left(4b^2-a^2\right)}}$; $\arccos\frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$. **338.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **339.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; $\arccos\frac{a^2}{a^2-4b^2}$. **343.** а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. **344.** $\frac{a}{2}$. **345.** 27 дм^2. **352.** $\sqrt{m^2\sin^2\beta+n^2}$. **354.** а) 90°. **355.** а) 60°; б) 90°; в) 60°; г) 60°; д) 60°; е) 30°. **360.** а) 0; б) $a\sqrt{3}$; в) a; г) $2a$; д) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **361.** 13 см. **364.** $10\sqrt{2}$.

Раздел 4

366. а) (0; 0; 0), (a; 0; 0), (0; a; 0), (a; a; 0), (0; 0; a), (a; 0; a), (0; a; a), (a; a; a); в) (0; 0; 0), (a; 0; 0), (0; a; 0), (a; a; 0), (0; 0; $-a$), (a; 0; $-a$), (0; a; $-a$), (a; a; $-a$). **368.** а) (−2; 0; 0), (a; 0; 0); г) (−2; 4; 0), (a; b; 0). **369.** а) D(3; 1; 10); б) D(5; 5; −6); в) D(1; −3; −4). **374.** а) (−2; 1; −3), ($-a$; $-b$; c); б) (−4; 7; −7), ($-a-4$; $-b+6$; $c-4$); в) (2; 1; −3), (a; $-b$; $-c$); е) (2; −1; −3), (a; b; c). **375.** а) $\sqrt{26}$; б) 13; в) $4\sqrt{5}$; г) $\sqrt{65}$; д) 5; е) 4; ж) 1; з) 3. **376.** а) (1,5; 0; 0); б) (0; 0; 0,75). **377.** а) (0; 0; 0); б) любая точка оси аппликат. **378.** а) $\left(-4\pm\sqrt{30}; 0; 0\right)$; б) $\left(0; 1\pm\sqrt{22}; 0\right)$; в) $\left(0; 0; \dfrac{5\pm4\sqrt{10}}{3}\right)$.

379. а) $\arccos\dfrac{4}{13}$; б) $\arccos\dfrac{3}{13}$; в) $\arccos\dfrac{12}{13}$; г) $\arcsin\dfrac{12}{13}$; д) $\arcsin\dfrac{3}{13}$; е) $\arcsin\dfrac{4}{13}$. **380.** а) $\arccos\dfrac{3}{5}$; б) $\arccos\dfrac{4}{5}$; в) 90°; г) 0°; д) $\arcsin\dfrac{4}{5}$; е) $\arcsin\dfrac{3}{5}$. **381.** а) $x = 2$; б) $y = 3$; в) $z = -2$; г) $x - y + 1 = 0$. **398.** а) $k = -1$; б) $k = -0{,}5$; в) $k = -2$. **400.** а) $4\vec{b}$; б) $-4\vec{p}-2\vec{r}$. **401.** а) При $k = 1$; б) при $k \neq 1$. **413.** $\overrightarrow{DK} = 0{,}4\cdot\overrightarrow{DA} + 0{,}3\cdot\overrightarrow{DB} + 0{,}3\cdot\overrightarrow{DC}$. **422.** (6; −1; −7), или (−2; −5; 5), или (6; −1; 7). **423.** а) (−2; −2; 2), (4; −2; 2), (2; −4; 4); б) (−2; 2; −3), (1; −2; 1), (0; 0; −2). **425.** C(1; −1; 8), B_1(2; 4; 8). **426.** а) D(0; 1; −1), A_1(0; 2; 2), C_1(2; 0; 5), D_1(−1; 0; 2); б) A_1(0; 5; 1), C_1(6; 3; 7), B(2; 1; 0), D(0; 3; 4). **428.** а) При $x = -2$, $y = 1$; б) ни при каких; в) при $y = 2x$. **429.** а) Нет; б) да. **430.** а) B(2; 2; 0); б) A(1,5; −0,5; 0). **431.** а) Да; б) нет. **432.** $m = 13$. **433.** а) (2; 1; 3); б) (−1; 8; 0); в) (5; −8; −3); г) (−3; 2; 3). **436.** а) $\left(-a; -a\sqrt{3}; -a\right)$; б) $\left(-a; a\sqrt{3}; -a\right)$; в) $\left(-\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$; г) $\left(-2a; 0; a\right)$; д) $\left(-\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; е) $\left(-\dfrac{3a}{2}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -a\right)$. **437.** а) −1; б) 5; в) 0; г) −14. **438.** а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{14}$; д) 3; е) $\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{14}$; з) $\sqrt{14}$. **439.** а) $\arccos\dfrac{-1}{\sqrt{210}}$; б) $\arccos\dfrac{\sqrt{35}}{14}$; в) 90°; г) $\arccos\dfrac{-1}{\sqrt{70}}$. **442.** а) $21\sqrt{2}$;

60°; б) $\sqrt{6}+2+\sqrt{2}$; 90°; в) $4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $\arccos\frac{-1}{3}$; г) $\sqrt{140}+\sqrt{129}+\sqrt{105}$; $\arccos\frac{47}{3\sqrt{1505}}$. **444.** $A\left(\frac{7}{3};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{7}{2};0\right)$; $C(0;\ 0;\ 7)$. **445.** а) -5; $1\pm2\sqrt{2}$; б) 2; $\frac{6\pm\sqrt{22}}{3}$; $\frac{4\pm3\sqrt{2}}{2}$. **446.** а) При $a = 3$; б) при $a = 4$. **447.** а) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$; б) 60°; в) 0°; г) 45°. **448.** а) 100; б) 697; в) 75; г) -245; д) 16; е) $\sqrt{331}$; ж) $\sqrt{747}$; з) $\sqrt{1167}$; и) $\sqrt{427}$; к) $\sqrt{847}$. **449.** а) $\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **451.** а) $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $E_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$, $F_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$; б) $y = 0$; в) $y=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$; г) $2x+2\sqrt{3}y+3z-2=0$; д) $x+\sqrt{3}y+z-1=0$; е) $2x+2\sqrt{3}y+3z-2=0$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; и) 0; к) 1,4; л) $0{,}6\sqrt{5}$; м) 0,4. **452.** 1 : 2. **453.** а) 3 : 1; б) 6 : 1; в) 3 : 2. **454.** 1 : 1. **455.** 2 : 1. **456.** 1 : 2. **460.** $\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BD}$. **467.** 1 : 5. **468.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **469.** 90°. **470.** $\arccos\frac{1}{5}$. **471.** 45°. **472.** $\arccos\frac{7}{5}$. **473.** 60°. **474.** а) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **475.** а) $\frac{16}{17}$; б) $\frac{3}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$; г) $\frac{4}{\sqrt{187}}$. **476.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{13}{14}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{\sqrt{35}}$. **477.** а) $\frac{\sqrt{74}}{37}$; б) $\frac{\sqrt{65}}{26}$; в) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **478.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\arccos\frac{7\sqrt{6}}{18}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{6}$. **479.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$; в) $\arccos\frac{2}{\sqrt{19}}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. **480.** а) 90°; б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$; в) $\arccos\frac{2\sqrt{14}}{35}$; г) $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **481.** а) 90°; б) $\arccos\frac{-\sqrt{35}}{70}$. **482.** б) $\arccos\frac{2}{3}$. **483.** а) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\left(\cos\alpha+1\right)}$; б) $\frac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4\left(\cos\alpha+1\right)\left(\cos\beta+1\right)}$. **484.** а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 90°;

в) $\arccos\frac{1}{4}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; е) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **485.** а) $60°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\arccos\frac{1}{8}$; г) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$; е) $60°$. **486.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{93}}{31}$; д) $\frac{4\sqrt{93}}{31}$; е) $\frac{\sqrt{93}}{31}$. **487.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{3\sqrt{57}}{19}$; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **488.** $60°$. **489.** $45°$. **490.** а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\arccos\frac{5}{\sqrt{33}}$. **491.** а) $\arccos\frac{2}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $45°$; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{11}}{4}$; е) $90°$. **492.** а) $\arccos\frac{3}{5}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos\frac{1}{5}$. **493.** а) $\arccos\frac{21}{23}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $90°$; г) $\arccos\frac{5}{\sqrt{69}}$. **494.** а) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{7}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $\arccos\frac{2}{3}$. **495.** а) $90°$; б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\arccos\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **496.** а) $3:2$; б) $\arccos\frac{5}{4\sqrt{3}}$. **497.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **498.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}$. **499.** а) $0°$; б) $60°$. **500.** а) $45°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$. **501.** а) $60°$; б) $\arcsin\frac{2}{3}$; в) $60°$; г) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$; д) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{35}}$; е) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{13}}$; ж) $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{51}}$; з) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{13}}$. **502.** а) $\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$; б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$; в) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{15}}$; г) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. **503.** а) $\frac{\sqrt{438}}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{38}}{19}$; в) $\frac{9}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{\sqrt{91}}{7}$; д) $\frac{3\sqrt{42}}{7}$; е) $\frac{2\sqrt{1798}}{29}$. **504.** а) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; б) 1; в) $\sqrt{\frac{323}{54}}$; г) 2; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{1339}}{26}$; ж) $2\sqrt{3}$; з) $\frac{\sqrt{1342}}{22}$. **505.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; б) 0,5; в) 0,5; г) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; д) $0{,}8\sqrt{5}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 0,5; з) $0{,}8\sqrt{5}$. **506.** а) $\frac{a\sqrt{55}}{10}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{95}}{20}$; г) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. **507.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{39}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{210}}{10}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; ж) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$; з) $\frac{a\sqrt{210}}{5}$.

508. а) $a\sqrt{\frac{14}{15}}$; б) $a\sqrt{\frac{14}{23}}$; в) $a\sqrt{\frac{7}{46}}$; г) $a\sqrt{\frac{14}{25}}$. **509.** а) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$; б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc}$. **510.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$. **511.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{3a\sqrt{21}}{28}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; г) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$; д) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{7}}$; ж) $\frac{4a}{\sqrt{7}}$; з) $\frac{5a\sqrt{159}}{53}$. **512.** а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $4\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{58}}{2}$; д) $\frac{11\sqrt{39}}{13}$; е) $0,8\sqrt{15}$; ж) $\frac{\sqrt{663}}{13}$; з) $\frac{2\sqrt{6783}}{19}$. **513.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; г) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; д) 0; е) 0; ж) $\frac{a\sqrt{13}}{26}$; з) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **514.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{13a\sqrt{6}}{72}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; д) 0; е) $\frac{a\sqrt{70}}{35}$. **515.** а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{a}{2}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; е) $\frac{3a\sqrt{22}}{22}$. **516.** а) $2\sqrt{3}$; б) $\frac{6\sqrt{17}}{17}$; в) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$; г) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. **517.** а) $\frac{5a\sqrt{53}}{106}$; б) $\frac{3a\sqrt{55}}{110}$; в) $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$; г) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{5a\sqrt{3}}{8}$; е) $\frac{a\sqrt{23}}{92}$.

Содержание

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич
Горбунова Ирина Владимировна

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Редакторы *Е. В. Бельская, Л. В. Саламаха*
Художники *Е. В. Максимова, Е. Ю. Сорока*
Художественные редакторы *И. М. Кузьменкова, Е. В. Максимова*
Технический редактор *И. М. Кузьменкова*
Компьютерный набор *Е. В. Бельской, И. М. Кузьменковой*
Компьютерная вёрстка *И. М. Кузьменковой*
Корректор *Е. В. Бельская*

Подписано в печать 16.03.2020. Формат $70 \times 100\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,25. Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 121 420 экз. Заказ .

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство “Адукацыя і выхаванне”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/19 от 02.08.2013.
Ул. Будённого, 21, 220070, г. Минск.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, г. Минск.