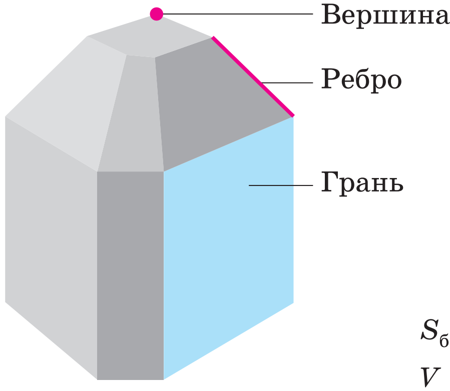
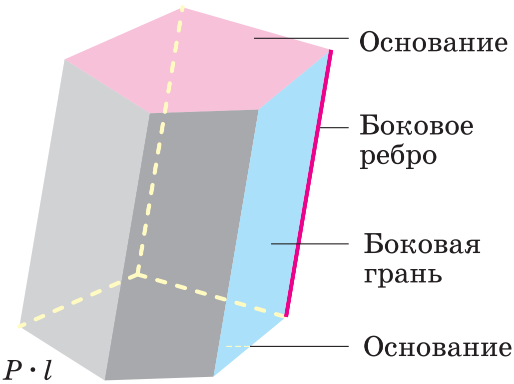
ГЕОМЕТРИЯ

11

МНОГОГРАННИК



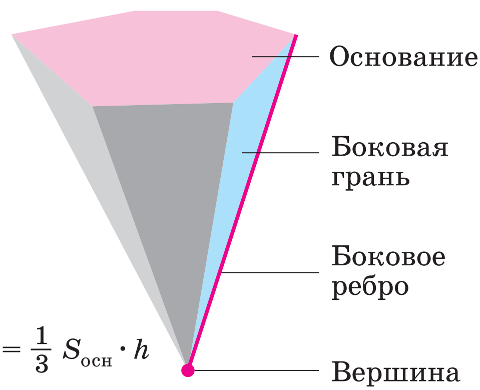
ПРИЗМА



$S_{\text{бок}} = P \cdot l$

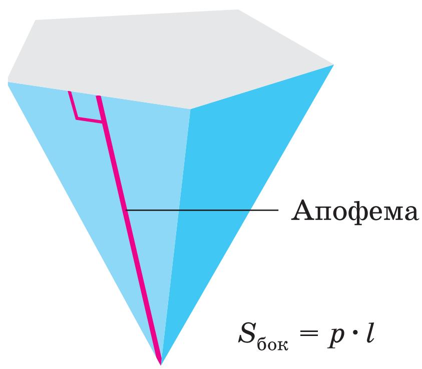
$V = S_{\text{осн}} \cdot h$

ПИРАМИДА



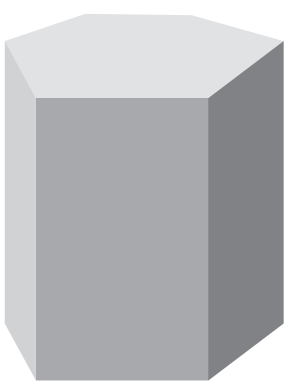
$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

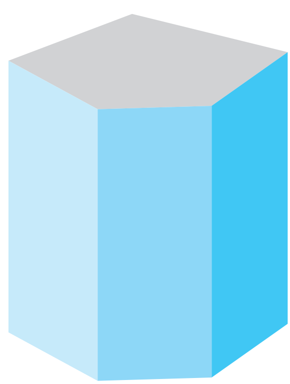


$S_{\text{бок}} = p \cdot l$

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА



ПРЯМАЯ ПРИЗМА

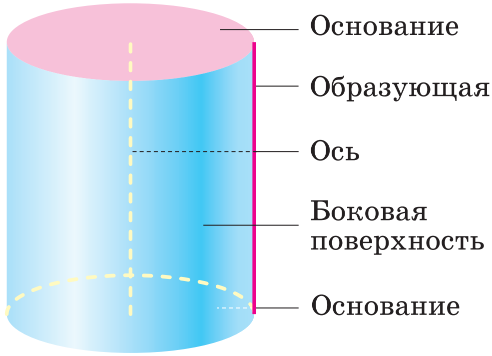


$S_{\text{бок}} = P \cdot l$

$V = S_{\text{осн}} \cdot l$

Основание — правильный многоугольник

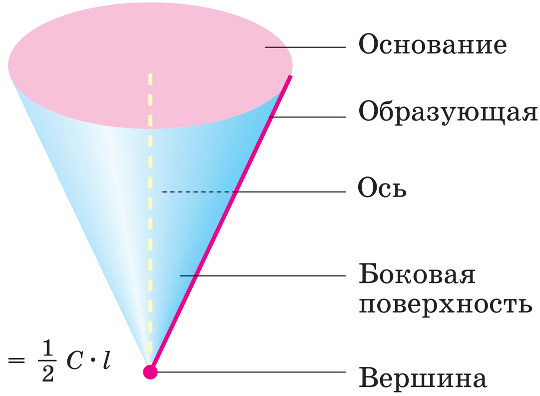
ЦИЛИНДР



$S_{\text{бок}} = C \cdot l$

$V = S_{\text{осн}} \cdot l$

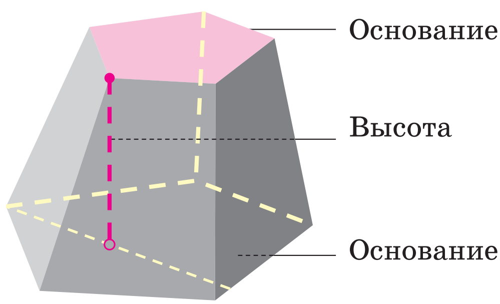
КОНУС

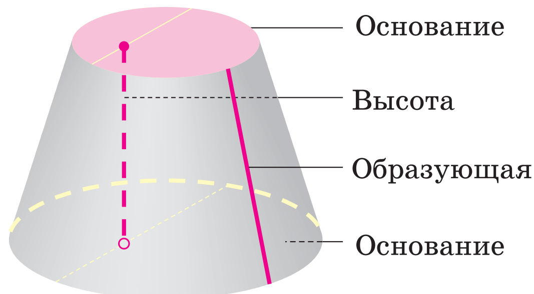


$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} C \cdot l$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА И УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

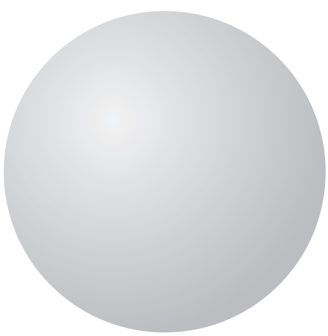




$$V = \frac{1}{3} h \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$$

S_1, S_2 — площади оснований

СФЕРА И ШАР



$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

* P — периметр перпендикулярного сечения;

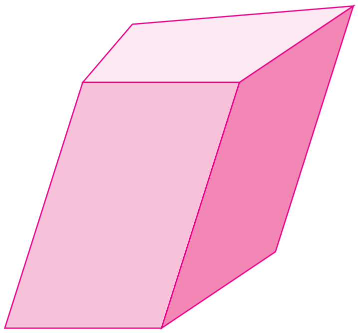
p — полупериметр основания;

C — длина окружности основания;

l — боковое ребро призмы, образующая цилиндра, апофема конуса

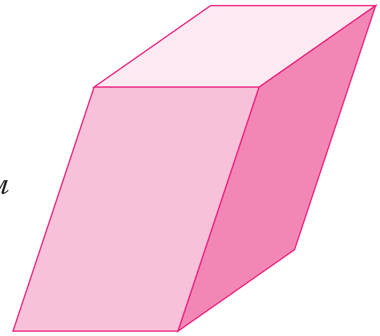
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

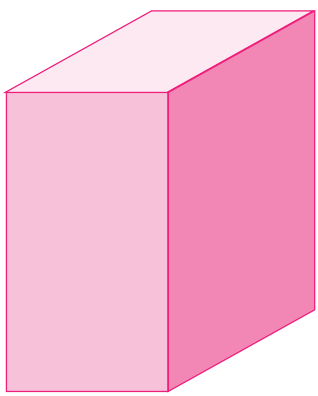


Основание — параллелограмм

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

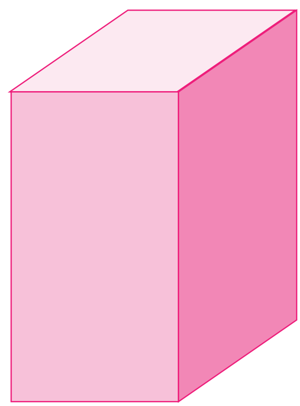


ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Основание — прямоугольник

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

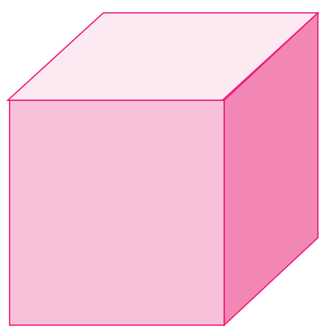


$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

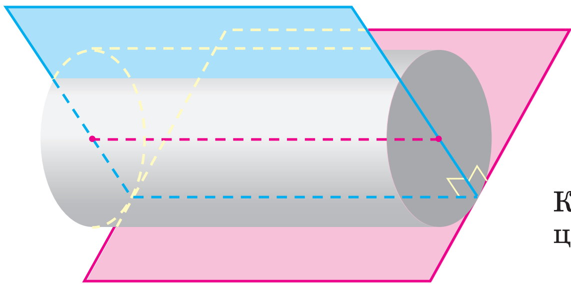
d — диагональ

a, b, c — измерения

КУБ

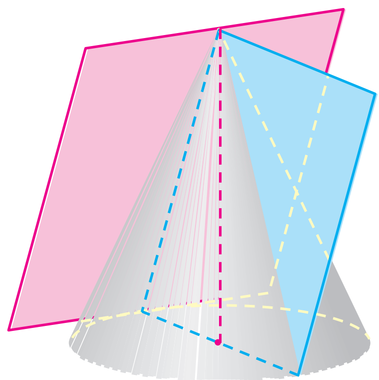


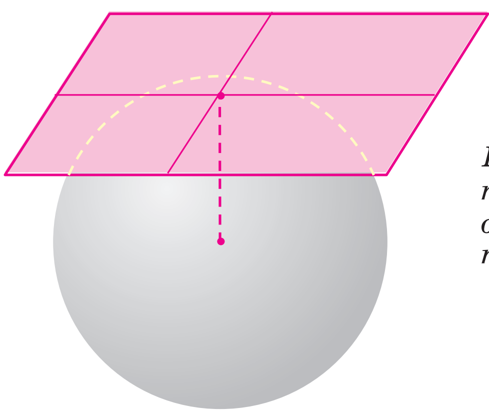
Все ребра равны



Касательная плоскость
цилиндра, конуса, шара

Плоскость касается цилиндра (конуса) по некоторой образующей тогда и только тогда, когда она перпендикулярна плоскости, проходящей через эту образующую и ось цилиндра (конуса).





Плоскость касается шара тогда и только тогда, когда она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Допущено Министерством образования
Республики Беларусь

Минск
«Беларуская Энциклопедия имени Петруся Бровки»
2020

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Г27

Авторы:

Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова, О. Е. Цыбулько

Рецензенты:

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики
Белорусского государственного университета
(кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель *Г. А. Кукрак*);

учитель математики высшей квалификационной категории
государственного учреждения образования «Гимназия № 25 г. Минска»
С. А. Скарюкина

ISBN 978-985-11-1251-3

Содержание

Дорогие друзья!

Это учебное пособие обеспечит изучение программного материала выпускного класса и повторение геометрической части курса математики.

Предлагаемое учебное пособие организовано так же, как и пособие для 10 класса. Каждый параграф начинается с обсуждения того круга вопросов, который обозначен в названии параграфа. Наиболее важное выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **жирным шрифтом**. Важные утверждения, выраженные в **теоремах** и **следствиях** из них, выделены цветом, другие важные факты выделяются ***жирным курсивом***. Понятия и факты, на которые полезно обратить внимание, но не обязательно запоминать, — *курсивом*. Смысловые блоки в параграфе помечены буквами. Например: **А)**, **Б)**, **В)**, **Г**), **Д**).

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, помеченные знаком ?. Они предназначены для проверки того, как вы усвоили содержание объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос вновь.

Номера упражнений, которые идут после контрольных вопросов, отличаются как цветом, так и шрифтом. Цвет номера, как правило, соответствует тому смысловому блоку, который помечен буквой такого же цвета.

Желаем вам успехов!

Авторы

Условные обозначения:

— дополнительный материал для углубления математических знаний;

— основные примеры с решением и подробным описанием последовательности действий;

— вопросы и задания для самоконтроля;

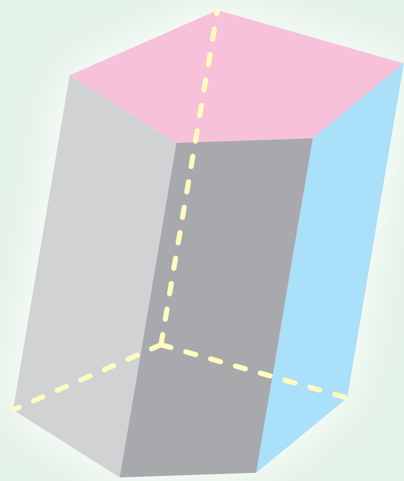
— задания для работы в классе и дома;

— учебный материал повышенного уровня;

* — задания повышенной сложности.

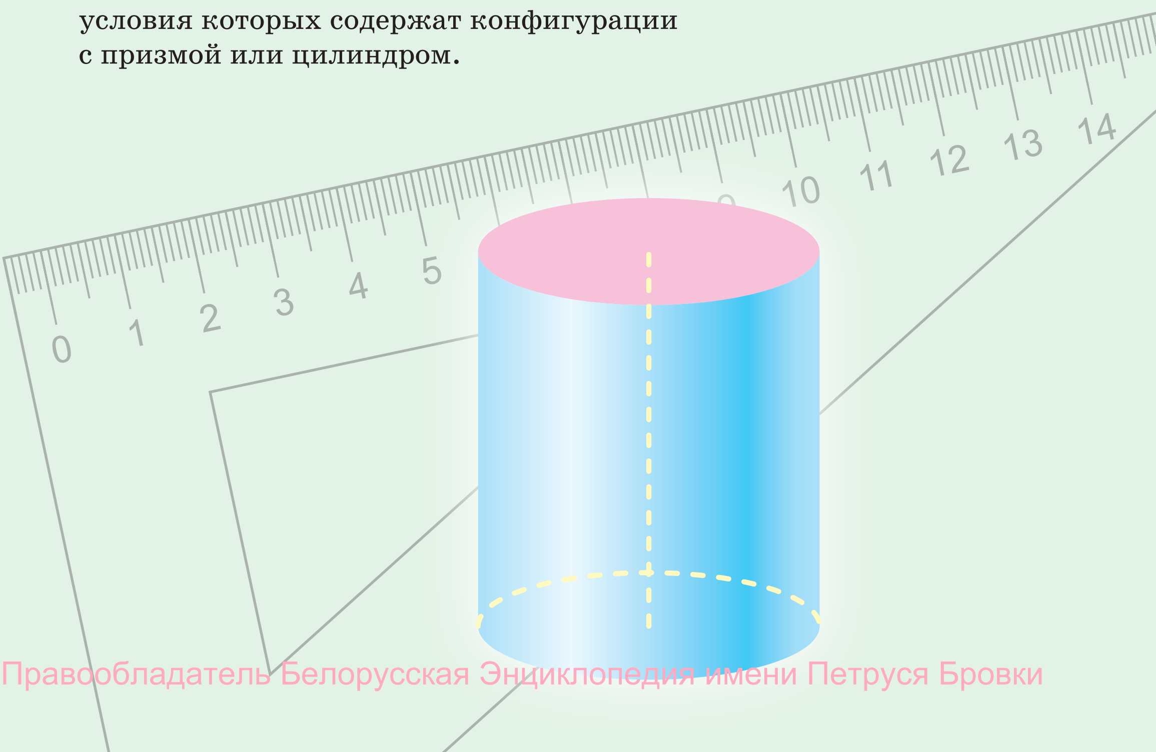
Раздел 1

Призма и цилиндр



В этом разделе вы:

- узнаете, какое тело называется призмой и какое — цилиндром;
- узнаете, чем призма и цилиндр похожи и чем они отличаются;
- познакомитесь с отдельными видами призм и цилиндров;
- познакомитесь с конфигурациями — призмой, вписанной в цилиндр, и цилиндром, вписанным в призму;
- познакомитесь с касательной прямой и касательной плоскостью цилиндра;
- научитесь находить площади поверхностей призм и цилиндров и их объемы;
- научитесь находить по известным характеристикам призмы или цилиндра другие их характеристики;
- научитесь решать разнообразные задачи, условия которых содержат конфигурации с призмой или цилиндром.



§ 1. Призма

А) Ранее вы уже знакомились с **призмой**, многогранником, две грани которого — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы.

Равные грани-многоугольники призмы лежат в параллельных плоскостях и называются **основаниями** призмы, а остальные грани-параллелограммы — **боковыми гранями**. Ребра боковых граней, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами**. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называют **диагональю** призмы (рис. 1). Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение призмы диагональной плоскостью — *диагональным сечением*. На рис. 2 показаны два диагональных сечения призмы.

Призмы делятся на *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Призма, изображенная на рис. 1, — шестиугольная, а на рис. 2 — девятиугольная.

Отличают *прямые* и *наклонные* призмы в зависимости от того, перпендикулярны или не перпендикулярны боковые ребра призмы ее основаниям. Обычно при изображении прямой призмы ее боковые ребра проводят вертикально.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной призмой**. В прямой призме все боковые грани — прямоугольники, а в правильной — равные прямоугольники.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания призмы к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**. На рис. 3 показаны две высоты DD_2 и HH_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. У прямой призмы ее высота равна боковому ребру.

Особым видом призмы является *параллелепипед* — призма, основанием которой является параллелограмм. Параллелепипед, как и призма, может быть прямым и наклонным.

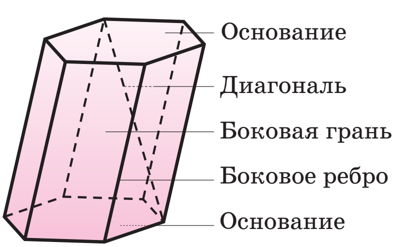


Рис. 1

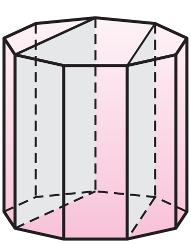


Рис. 2

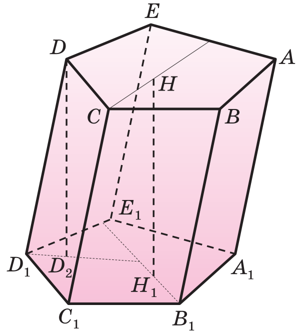


Рис. 3

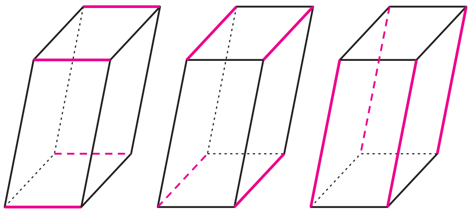


Рис. 4

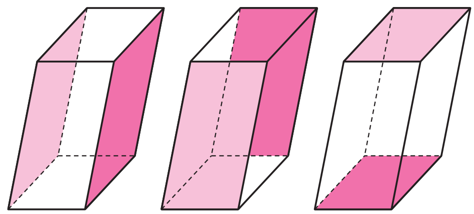


Рис. 5

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Прямоугольный параллелепипед, у которого три ребра, сходящиеся в одной вершине, равны между собой, называется *кубом*.

У параллелепипеда все грани — параллелограммы, из которых у прямого параллелепипеда прямоугольниками являются боковые грани, а у прямоугольного параллелепипеда — все грани.

12 ребер параллелепипеда разделяются на три четверки равных ребер (рис. 4), его 6 граней — на три пары равных граней (рис. 5), а четыре диагонали пересекаются в одной точке, являющейся центром симметрии параллелепипеда (рис. 6). Прямой параллелепипед в дополнение имеет ось симметрии (рис. 7) и плоскость симметрии (рис. 8). Прямоугольный параллелепипед имеет три оси симметрии (рис. 9) и три плоскости симметрии (рис. 10).

Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называют *измерениями прямоугольного параллелепипеда*. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (рис. 11), и все его диагонали равны друг другу.

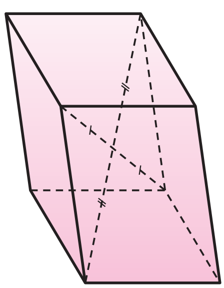


Рис. 6

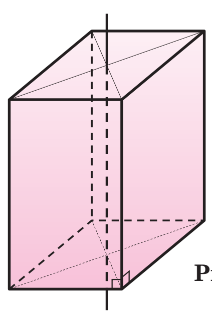


Рис. 7

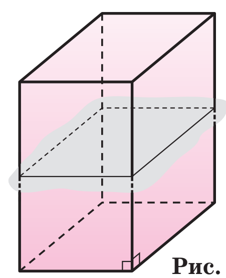


Рис. 8

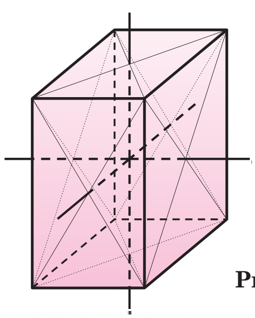


Рис. 9

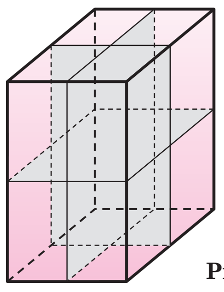


Рис. 10

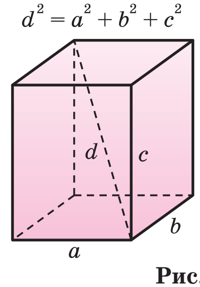


Рис. 11

Пример 1. Найдем диагональ правильной четырехугольной призмы, у которой площадь основания равна 36 см², а высота — 7 см.

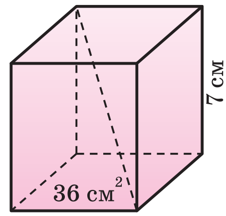


Рис. 12

Р е ш е н и е. Основанием правильной четырехугольной призмы является квадрат (рис. 12), площадь которого равна 36 см², тогда сторона основания равна 6 см.

Значит, квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен: 36 + 36 + 49, т. е. 121 см, тогда диагональ равна 11 см.

О т в е т: 11 см.

Б) Боковые грани образуют *боковую поверхность призмы*, а боковые грани вместе с основаниями — *полную поверхность призмы*.

При решении задач бывает полезно так называемое *перпендикулярное сечение призмы*, под которым понимают многоугольник, плоскость которого перпендикулярна прямым, содержащим боковые ребра, а вершины находятся на этих прямых.

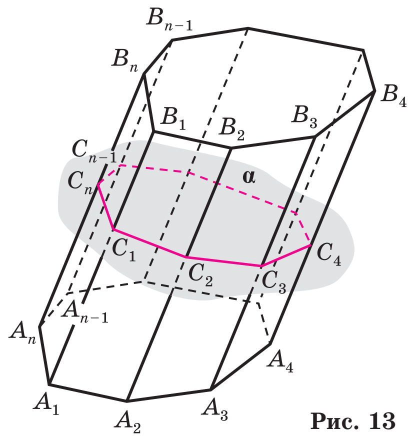


Рис. 13

Теорема 1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра:
$$S_{бок} = P \cdot l.$$

Доказательство. Пусть есть призма $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рис. 13). Проведем перпендикулярное сечение $C_1C_2C_3...C_{n-1}C_n$. Его стороны перпендикулярны сторонам параллелограммов, которые образуют боковую поверхность призмы. Поэтому для площади боковой поверхности $S_{бок}$ получаем:

$$S_{бок} = S_{A_1B_1B_2A_2} + S_{A_2B_2B_3A_3} + ... + S_{A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n} + S_{A_nB_nB_1A_1} =$$
$$= A_1B_1 \cdot C_1C_2 + A_2B_2 \cdot C_2C_3 + ... + A_{n-1}B_{n-1} \cdot C_{n-1}C_n + A_nB_n \cdot C_nC_1 \overset{(1)}{=}$$
$$= (C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}C_n + C_nC_1) \cdot A_1B_1 \overset{(2)}{=} P \cdot l.$$

При переходе (1) мы учли то, что все боковые ребра призмы равны друг другу, при переходе (2) — то, что сумма $C_1C_2 + C_2C_3 + ... C_{n-1}C_n + C_nC_1$ выражает периметр P перпендикулярного сечения призмы, а отрезок A_1B_1 — длину l бокового ребра.

Пример 2. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 3 см, 4 см и 5 см, а площадь ее боковой поверхности — 132 см². Найдем длину бокового ребра.

Р е ш е н и е. Поскольку стороны треугольника, являющегося перпендикулярным сечением призмы (рис. 14), перпендикулярны прямым, на которых лежат боковые ребра, то их длины равны 3 см, 4 см и 5 см. Значит, периметр перпендикулярного сечения — 12 см.

Учитывая, что площадь $S_{бок}$ боковой поверхности призмы, периметр P ее перпендикулярного сечения и длина бокового ребра связаны равенством $S_{бок} = P \cdot l$, находим, что $l = 132 : 12 = 11$ (см).

Ответ: 11 см.

Следствие 1. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания и высоты.

Действительно, перпендикулярное сечение прямой призмы равно ее основанию, а боковое ребро является высотой.

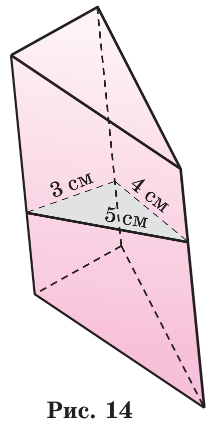


Рис. 14

В) Важной характеристикой плоской фигуры является ее площадь. Подобной характеристикой тела является его объем. Будем считать, что изучаемые нами тела имеют объем.

***За единицу объема принимают объем куба с ребром* 1.** На практике пользуются разными единицами объема, как метрическими — кубический миллиметр, кубический сантиметр, кубический дециметр, кубический метр, кубический километр, так и неметрическими — галлон, баррель, бушель, кварта.

Для объема тела выполняются его *основные свойства*:

- ***равные тела имеют равные объемы;***
- ***если тело разделено на части, имеющие объем, то его объем равен сумме объемов этих частей.***

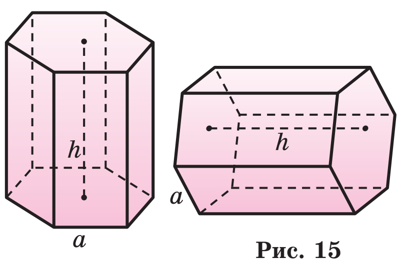


Рис. 15

При этом равными фигурами называют фигуры, которые совмещаются друг с другом. Например, равными являются две шестиугольные правильные призмы, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 15), или два цилиндра с соответственно равными радиусами оснований и образующими (рис. 16). Тело, изображенное на рис. 17, можно разделить на цилиндр и конус, и его объем равен сумме объемов этих цилиндра и конуса.

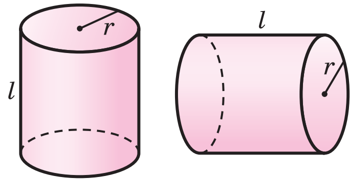


Рис. 16

Два тела с равными объемами называют **равновеликими телами.** Равные тела являются равновеликими, но не наоборот.

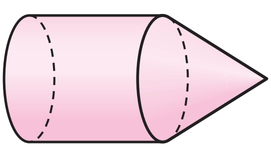


Рис. 17

$V = abc = S_{осн} \cdot h$

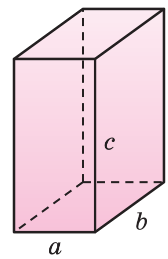


Рис. 18

Вы знаете, что ***объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений a, b, c*** (рис. 18):

$$V = abc.$$

Учитывая, что в формуле $V = abc$ произведение ab выражает площадь S основания прямоугольного параллелепипеда, а число c — его высоту h, получим, что ***объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты***: $V = Sh$.

Пример 3. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда с общей вершиной равны S_1, S_2, S_3.

а) Найдем объем этого параллелепипеда, учитывая, что $S_1 = 12$ дм^2, $S_2 = 24$ дм^2, $S_3 = 36$ дм^2.

б) Выразим объем параллелепипеда через S_1, S_2, S_3.

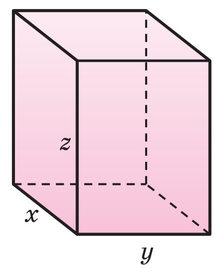


Рис. 19

Р е ш е н и е. Пусть измерения параллелепипеда равны x, y, z (рис. 19).

а) Поскольку, с учетом условия, $xy = 12$, $xz = 24$, $yz = 36$, то $xy \cdot xz \cdot yz = 12 \cdot 24 \cdot 36$, или $(xyz)^2 = 12^2 \cdot 2 \cdot 6^2$, откуда: $xyz = 12 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 72\sqrt{2}$.

б) Поскольку $xy = S_1$, $xz = S_2$, $yz = S_3$, то $xy \cdot xz \cdot yz = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$.

Отсюда $xyz = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

О т в е т: а) $72\sqrt{2}$ дм^3; б) $\sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Теорема 2. Объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты:

$$V = S_{осн} \cdot h.$$

Доказательство. Пусть есть произвольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20). На прямой AD выберем точки M и T так, что $AD = MT$, и через точки M и T проведем плоскости, перпендикулярные AD. Они пересекают прямые BC, B_1C_1, A_1D_1 соответственно в точках K и P, K_1 и P_1, M_1 и T_1 (рис. 21). Многогранники $DD_1C_1CTT_1P_1P$ и $AA_1B_1BMM_1K_1K$ равны, так как второй совмещается с первым сдвигом вдоль прямой MD.

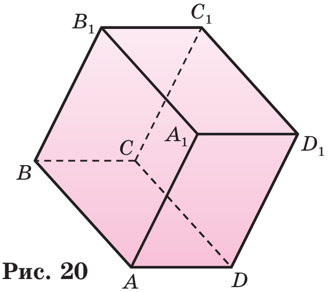


Рис. 20

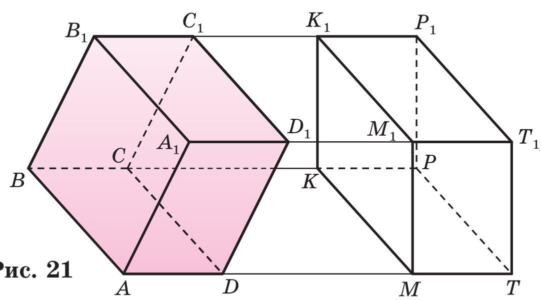


Рис. 21

А поскольку эти многогранники имеют общую часть — многогранник $DD_1C_1CMM_1K_1K$, то их оставшиеся части — параллелепипеды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $MKPTM_1K_1P_1T_1$ — имеют также равные объемы. У параллелепипедов $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $MKPTM_1K_1P_1T_1$ их высоты равны, каждая из них равна расстоянию между параллельными плоскостями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Равны также площади оснований этих параллелепипедов, поскольку у параллелограммов $ABCD$ и $MKPT$ равны стороны AD и MT и равны высоты как расстояния между параллельными прямыми AD и BC.

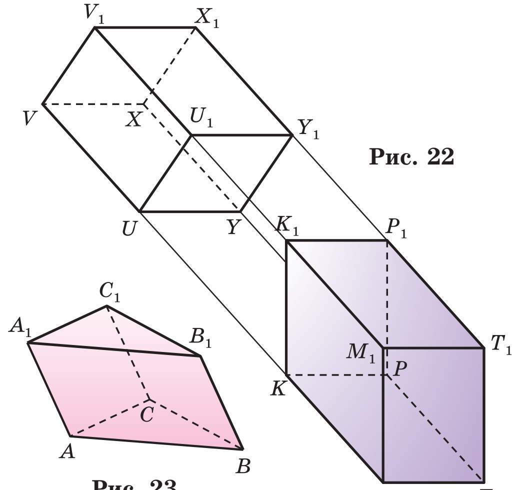


Рис. 22

Рис. 23

Получили, что произвольный параллелепипед равновелик с параллелепипедом, у которого такая же высота, а основанием является прямоугольник, равновеликий основанию исходного параллелепипеда.

Теперь можно таким же образом параллелепипед $MKPTM_1K_1P_1T_1$ заменить равновеликим параллелепипедом $UVXYU_1V_1X_1Y_1$ (рис. 22), который является прямоугольным, имеет ту же самую высоту, что и исходный параллелепипед, основание, равное $MKTP$ и, следовательно, равновеликое $ABCD$.

Значит, $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = V_{UVXYU_1V_1X_1Y_1} = S_{UVXY} \cdot UU_1 = S_{ABCD} \cdot UU_1$.

Множитель S_{ABCD} есть площадь основания параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а множитель UU_1 выражает его высоту, так как UU_1 есть перпендикуляр, восстановленный из точки U плоскости $ABCD$ к плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$. Значит, объем произвольного параллелепипеда равен произведению площади его основания и высоты.

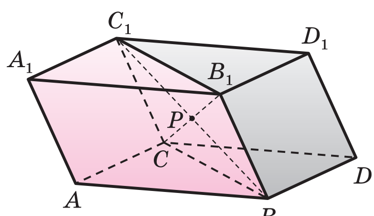


Рис. 24

Теорема 3. Объем призмы равен произведению площади ее основания и высоты:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 23). Дополним ее до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ (рис. 24). Точка P пересечения диагоналей диагонального сечения BCC_1B_1 этого параллелепипеда является его центром симметрии. Это означает, что достроенная призма $BCDB_1C_1D_1$ симметрична данной призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно центра P, поэтому эти призмы равны друг другу.

Следовательно, объем параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ равен удвоенному объему данной призмы.

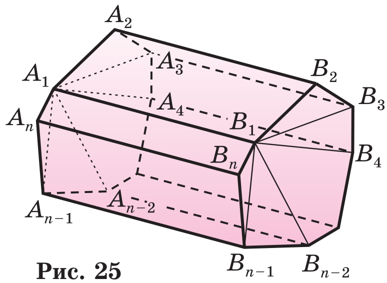


Рис. 25

Объем параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ равен произведению площади его основания $ABDC$ и высоты. Но площадь его основания $ABDC$ равна удвоенной площади основания ABC данной призмы, а высота параллелепипеда равна высоте призмы. Отсюда следует, что объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен площади ее основания ABC и высоты.

Теперь рассмотрим произвольную призму $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_nB_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ (рис. 25). Диагональными сечениями, проходящими через вершину A_1, разобьем ее на треугольные призмы-части $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4B_1B_3B_4$, ..., $A_1A_{n-2}A_{n-1}B_1B_{n-2}B_{n-1}$, $A_1A_{n-1}A_nB_1B_{n-1}B_n$, которые все имеют одну и ту же высоту, равную высоте h данной призмы. Объем данной призмы равен сумме объемов призм-частей. По уже доказанному для объема V данной призмы получим:

$$V = S_{A_1A_2A_3} \cdot h + S_{A_1A_3A_4} \cdot h + \ldots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} \cdot h + S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot h =$$
$$= \left(S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ldots + S_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + S_{A_1A_{n-1}A_n}\right) \cdot h.$$

Учитывая, что сумма в скобках выражает площадь S основания данной призмы, получаем:

$$V = S \cdot h.$$

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания и бокового ребра.

Следствие 3. Объем призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения и бокового ребра.

Это утверждение можно доказать сначала для треугольной призмы, а потом и для произвольной призмы, если использовать ее перпендикулярное сечение.

?

1. Какой многогранник называется призмой?

2. Какие грани призмы называют ее основаниями; боковыми гранями и какие ребра призмы называют боковыми ребрами?

3. Какой отрезок называют диагональю призмы; высотой призмы?

4. Какая плоскость называется диагональной плоскостью призмы и какой многоугольник называют диагональным сечением призмы?

5. Какая призма называется прямой призмой; наклонной призмой?

6. Какая прямая призма называется правильной?

7. Какая призма называется параллелепипедом?

8. Какой параллелепипед называется прямым? Какой прямой параллелепипед называется прямоугольным? Какой прямоугольный параллелепипед называется кубом?

9. Сформулируйте свойства ребер параллелепипеда; граней параллелепипеда; диагоналей параллелепипеда; диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

10. Какие ребра прямоугольного параллелепипеда называются его измерениями?

11. Как связаны диагональ прямоугольного параллелепипеда и его измерения?

12. Из чего состоит боковая поверхность призмы; полная поверхность призмы?

13. Как связаны между собой боковая поверхность призмы, периметр ее перпендикулярного сечения и боковое ребро?

14. Как найти боковую поверхность прямой призмы?

15. Что принимают за единицу объема? Сформулируйте основные свойства объема.

16. Какие фигуры называют равными; равновеликими? Как связаны равенство и равновеликость фигур?

17. Как найти объем прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения?

18. Чему равен объем произвольного параллелепипеда?

19. Чему равен объем призмы; объем прямой призмы?

Задача 1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Найдите площадь сечения, проведенного через ребро AB под углом в $60°$ к плоскости основания, учитывая, что боковое ребро призмы равно 9 см, а сечение проходит через вершину C_1.

Решение. Пусть CH — высота треугольника ABC (рис. 26). Тогда поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, то $C_1H \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Поскольку треугольник C_1CH прямоугольный, $\angle C_1CH = 90°$, $\angle C_1HC = 60°$ и $CC_1 = 9$ см, то $CH = CC_1 \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ (см), однако $C_1H = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

Поскольку в треугольнике ABC $\angle ACB = 90°$, $AH = HB = CH$, то $AB = 2CH = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см). Тогда для площади $S_{\text{сеч}}$ сечения AC_1B получаем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_1H = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 54 см^2.

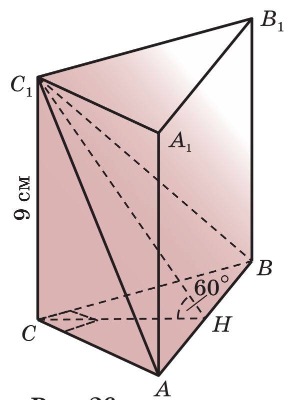


Рис. 26

Задача 2. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник. Боковое ребро AA_1 длиной 6 см образует с прилежащими сторонами основания углы в 45°. Найдите высоту призмы.

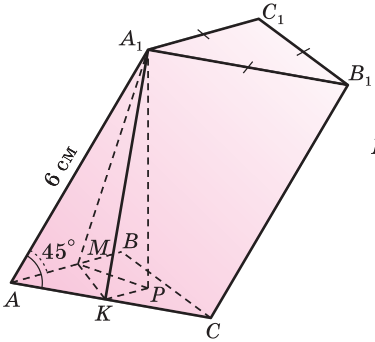


Рис. 27

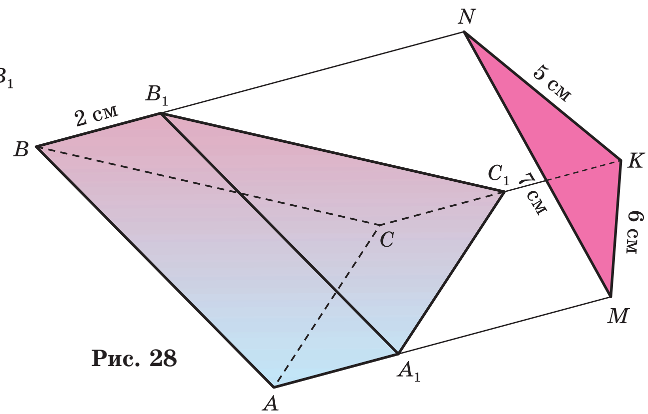


Рис. 28

Р е ш е н и е. Пусть A_1P — высота наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, проведенная из вершины A_1 к основанию ABC, AM и AK — высоты боковых граней (рис. 27).

$\triangle AMA_1 = \triangle AKA_1$ (прямоугольные, AA_1 — общая гипотенуза, $\angle A_1AM = \angle A_1AK = 45°$), значит, $AM = AK = AA_1 \cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} = MA_1 = KA_1$.

$PM = PK$ — проекции равных наклонных.

$PM \perp AM$ и $PK \perp AK$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\triangle APM = \triangle APK$ (прямоугольные, $AM = AK$, $PM = PK$ — катеты). Поэтому:

$$\angle PAM = \angle PAK = \frac{1}{2} \cdot \angle MAK = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°,\ AP = \frac{AM}{\cos 30°} = 2\sqrt{6} \text{ см}.$$

В треугольнике AA_1P:

$$\angle A_1PA = 90°,\ A_1P = \sqrt{AA_1^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

О т в е т: $2\sqrt{3}$ см.

Задача 3. Найдите площадь боковой поверхности и объем наклонной призмы с боковым ребром 2 см, учитывая, что расстояния между прямыми, которым принадлежат боковые ребра, равны 5 см, 6 см и 7 см.

Р е ш е н и е. Пусть в наклонной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро AA_1 равно 2 см, а расстояния между прямыми AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1, CC_1 и AA_1 соответственно равны 7 см, 5 см, 6 см. Тогда перпендикулярное сечение призмы — треугольник MNK — имеет стороны MN, NK и MK длиной 7 см, 5 см и 6 см соответственно (рис. 28). Для его периметра P_{MNK} и площади S_{MNK} найдем:

$$P_{MNK} = MN + NK + KM = 7 + 5 + 6 = 18 \text{ (см)};$$

$$S_{MNK} = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Теперь для боковой поверхности $S_{бок}$ и объема V получим:

$$S_{бок} = P_{MNK} \cdot AA_1 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$V = S_{MNK} \cdot l = 6\sqrt{6} \cdot 2 = 12\sqrt{6} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $S_{бок} = 36$ см^2, $V = 12\sqrt{6}$ см^3.

1. Верно ли, что в прямой призме:
а) все боковые грани — прямоугольники;
б) ее высота равна боковому ребру?

2. Верно ли, что сечение призмы плоскостью, параллельной основанию, равно этому основанию?

3. Верно ли, что в правильной призме:
а) все боковые грани — равные друг другу прямоугольники;
б) двугранные углы при боковых ребрах равны друг другу;
в) любая точка прямой, проходящей через центры оснований, равноудалена от боковых граней, а также от боковых ребер?

4. Верно ли, что:
а) у параллелепипеда все грани — параллелограммы;
б) у прямого параллелепипеда основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники;
в) у прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники?

5. Верно ли, что у параллелепипеда:
а) есть три четверки равных ребер;
б) есть три пары равных граней;
в) его четыре диагонали пересекаются в одной точке, являющейся центром симметрии параллелепипеда?

6. Определите:
а) может ли какая-либо боковая грань наклонного параллелепипеда быть прямоугольником;
б) сколько боковых граней наклонного параллелепипеда могут быть прямоугольниками.

7. Верно ли, что у прямого параллелепипеда есть:
а) ось симметрии; б) плоскость симметрии?

8. Верно ли, что у прямоугольного параллелепипеда:
а) есть три оси симметрии;
б) есть три плоскости симметрии;
в) квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений;
г) все четыре диагонали равны друг другу;
д) с двумя равными измерениями есть пять плоскостей симметрии;
е) с тремя равными измерениями есть девять плоскостей симметрии;
ж) с тремя равными измерениями есть девять осей симметрии?

9. Найдите диагональ правильной четырехугольной призмы, у которой площадь основания равна 121 см^2, а высота — 12 см.

10. Найдите диагональ:

а) куба, учитывая, что диагональ его боковой грани равна $6\sqrt{2}$ см;

б) прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что диагонали его граней равны 11 см, 19 см и 20 см.

11. В прямоугольном параллелепипеде диагональ образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите диагональ параллелепипеда, учитывая, что радиус окружности, описанной около основания, равен 3 см.

12. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания и боковое ребро относятся как 4 : 4 : 7. Найдите высоту параллелепипеда, учитывая, что его диагональ равна 33 см.

13. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 24 см и 10 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

14. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом в 60°. Найдите высоту призмы, учитывая, что длина бокового ребра равна $10\sqrt{3}$ см.

15. Основанием $ABCD$ наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат с центром O и стороной 2 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что $A_1O = \sqrt{2}$ см, а расстояние между плоскостями оснований равно $\sqrt{2}$ см.

16. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 50 см и 18 см и высотой 16 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.

17. Боковое ребро AA_1 призмы, основанием которой является правильный треугольник ABC, образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что:

а) стороны BC и AA_1 перпендикулярны;

б) четырехугольник CC_1B_1B является прямоугольником.

18. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 32 см, а боковое ребро — 24 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

19. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 8 см, а сторона основания — 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которая проходит через:

а) боковое ребро и середину стороны основания, не имеющей с этим ребром общих точек;

б) три вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

20. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см и боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 на плоскость треугольника ABC является точка пересечения его медиан. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

21. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что его измерения равны 8 см, 10 см, 11 см.

22. В прямой треугольной призме с боковой поверхностью 48 см^2 все ребра равны. Найдите высоту призмы.

23. По стороне основания a и боковому ребру l найдите полную поверхность правильной призмы, основанием которой является:
а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник.

24. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 24 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 10 см. Найдите боковую поверхность призмы.

25. Расстояния между последовательными боковыми ребрами наклонной четырехугольной призмы равны 3 см, 5 см, 2 см, 6 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что ее боковая поверхность равна 48 см^2.

26. Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны друг другу, их общее ребро равно 72 см и отстоит от двух других боковых ребер на 36 см и 105 см. Найдите боковую поверхность призмы.

27. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 15 см, 17 см, 8 см. Найдите боковое ребро призмы, учитывая, что ее боковая поверхность равновелика перпендикулярному сечению.

28. Найдите полную поверхность и объем прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что:
а) его диагональ равна 81 см, а измерения относятся как 2 : 7 : 26;
б) диагонали его граней равны 7 см, 8 см и 9 см;
в) его диагональ длиной 12 см составляет с одной боковой гранью угол в 30°, а с другой — угол в 45°;
г) сторона его основания длиной a составляет с диагональю основания угол α, а с диагональю боковой грани, в которой эта сторона лежит, — угол β;
д) диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной боковой гранью угол в 30°, а с другой — угол в 45°.

29. Найдите боковую поверхность прямого параллелепипеда, учитывая, что стороны его основания равны 2 см и 7 см, меньшая диагональ параллелепипеда — 8 см и один из углов основания — 60°.

30. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 3 м и 9 м, а его диагонали составляют с плоскостью основания углы в 45° и 60°. Найдите диагонали параллелепипеда, его боковую поверхность.

31. Найдите боковую поверхность призмы, у которой основанием является ромб со стороной 10 см и углом в 60° и:
а) боковые грани — прямоугольники, меньшая диагональ составляет с основанием угол в 45°;
б) все грани — равные ромбы.

32*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол φ, а с меньшей боковой гранью — угол α. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

33*. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через противолежащий ему катет и противолежащую этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Определите, какую часть от площади боковой поверхности призмы составляет площадь сечения.

34. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота — h, учитывая, что:
а) $a = 22$, $b = 24$, $h = 30$;
б) $a = 9\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{5}$, $h = 30\sqrt{10}$;
в) $a = 72$, $b = 20\sqrt{3}$, $h = 52$;
г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0{,}96$.

35. Найдите массу кирпича размером 25 см × 12 см × 6,5 см, учитывая, что плотность кирпича равна 1,9 г/см^3.

36. Найдите боковую и полную поверхности правильной призмы по данным, приведенным на рис. 28.

37. Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 11$ см.

38. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 5 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус окружности, описанной около основания призмы, равен 6,5 см, а высота призмы — 10 см.

39. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $PQRTP_1Q_1R_1T_1$, учитывая, что $PR_1 = 13$ см, $QT = 12$ см и $QR_1 = 11$ см.

40. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого:
а) равна 18 см и составляет угол в 30° с плоскостью одной из боковых граней и угол в 45° с боковым ребром;
б) составляет угол α с плоскостью одной из боковых граней и угол β с плоскостью основания, а его высота равна h.

41. Диагональ B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляет с плоскостью основания угол в 45°, а двугранный угол A_1B_1BD равен 60°. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что диагональ основания равна 12 см.

42. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $MNOPM_1N_1O_1P_1$, учитывая, что:

а) $MO_1 = 1$ м, $\angle O_1MO = 45°$, $\angle O_1MN = 60°$;

б) $MO_1 = 24$ см, $\angle O_1MP_1 = 45°$ и диагональ MO_1 составляет угол в 30° с плоскостью одной из боковых граней.

43. Найдите объем прямой призмы $XYZX_1Y_1Z_1$, учитывая, что:

а) $\angle YXZ = 120°$, $XY = 5$ см, $XZ = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2;

б) $\angle XY_1Z = 60°$, $XY = 4$, $ZY_1 = 12$ и двугранный угол с ребром YY_1 прямой.

44. Докажите, что:

а) равные тела являются равновеликими;

б) равновеликие тела не обязательно являются равными.

45. Тело P составлено из тел M и N, имеющими соответственно объемы V_1 и V_2. Выразите объем V тела P через объемы V_1 и V_2, учитывая, что:

а) тела M и N не имеют общих внутренних точек;

б) тела M и N имеют общую часть, объем которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

46. Пять ребер прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равны a, а остальные четыре ребра равны друг другу. Найдите объем призмы.

47. Найдите объем прямой призмы $BCDB_1C_1D_1$, учитывая, что $BC = CD$, $\angle BCD = \alpha$, диагональ B_1D равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

48. Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через его сторону, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Найдите объем призмы, учитывая, что площадь сечения равна Q.

49. Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания правильной треугольной призмы проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем призмы, учитывая, что сторона основания равна a.

50. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30°.

51. Найдите объем наклонной призмы, основанием которой является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60°.

52. Найдите боковую поверхность призмы и объем наклонной треугольной призмы, у которой:
а) расстояния между параллельными прямыми, проходящими через боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а сами ребра — 5 см;
б) две боковые грани равны и образуют угол в 60°, а прямая, которой принадлежит их общее ребро длиной a, находится на расстоянии a от плоскости противолежащей боковой грани.

53. Основанием призмы является вписанный в окружность с радиусом 4 см равнобедренный треугольник с углом в 30° при основании. Найдите объем призмы, учитывая, что ее высота равна боковой стороне основания.

54. Основанием призмы $KLMK_1L_1M_1$ является равносторонний треугольник KLM со стороной l. Вершина K_1 проектируется в центр этого основания, а ребро KK_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем призмы.

55. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что:
а) его основанием является прямоугольник со сторонами a и b, а боковое ребро длиной c составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ;
б) все его грани — равные ромбы с диагоналями, равными 6 см и 8 см.

56. Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, учитывая, что $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, а двугранный угол с ребром AB прямой.

57. Докажите, что объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра и площади перпендикулярного сечения призмы.

58. Найдите объем наклонной треугольной призмы, учитывая, что расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности — 480 см^2.

59. Площадь боковой поверхности призмы равна $S_{\text{бок}}$, периметр и площадь перпендикулярного сечения — P и $S_{\text{перп}}$. Выразите объем этой призмы через $S_{\text{бок}}$, P и $S_{\text{перп}}$.

60. У трех граней прямоугольного параллелепипеда диагонали, выходящие из одной вершины, равны 21 см, 24 см и 27 см. Найдите объем этого параллелепипеда.

61. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол между ними — 45°. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что его меньшая диагональ составляет с плоскостью основания угол в 45°.

62. Диагонали BD_1 и A_1C прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см, а ребро AB равно 3 см. Найдите объем параллелепипеда.

63. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен 3 м^3, а наименьшая и наибольшая из площадей боковых граней — 3 м^2 и $3\sqrt{5}$ м^2. Найдите длины ребер призмы.

64. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани и расстояния от этой грани до параллельного ей ребра.

65. На трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что объем призмы, боковыми ребрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

66. Найдите объем наклонной треугольной призмы, площади боковых граней которой пропорциональны числам 20, 37 и 51, ее боковое ребро равно 0,5 дм, а боковая поверхность — 10,8 дм^2.

67. На рис. 29 показана деталь. Найдите площадь ее поверхности и объем, учитывая, что размеры даны в миллиметрах.

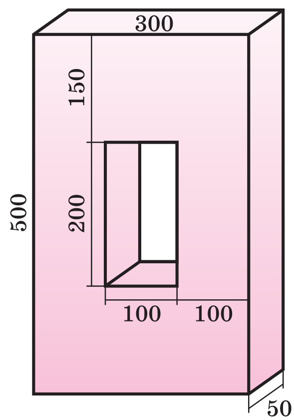


Рис. 29

68. Основанием наклонной призмы $IJKI_1J_1K_1$ является прямоугольный треугольник IJK с катетами IJ и IK, соответственно равными 7 см и 24 см. Вершина I_1 равноудалена от вершин I, J и K. Найдите объем призмы, учитывая, что ребро II_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°.

69. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}$ см является основанием треугольной призмы, у которой одна из вершин верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите боковую поверхность призмы и ее объем.

70. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с площадью S_0 (рис. 30). Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что его диагональные сечения имеют площади S_1 и S_2.

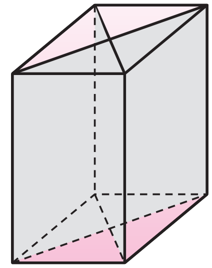


Рис. 30

§ 2. Цилиндр

А) Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через его сторону (рис. 31). На рис. 32 показано образование цилиндра при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой l, которой принадлежит сторона AD. При этом ломаная $ABCD$ описывает *поверхность* цилиндра, отрезок BC — *боковую поверхность*, а отрезки AB и DC — *основания* цилиндра (рис. 33). Прямая, проходящая через центры оснований, называется *осью* цилиндра, отрезок, соединяющий окружности оснований и перпендикулярный их плоскостям, — *образующей* цилиндра, а перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое основание, — *высотой* цилиндра (рис. 34). Высота цилиндра равна его образующей.

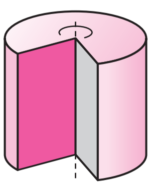


Рис. 31

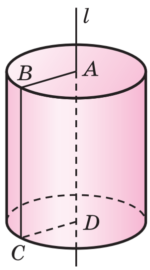


Рис. 32

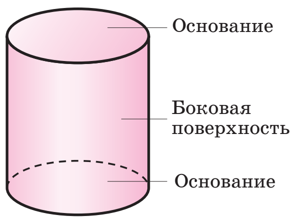


Рис. 33

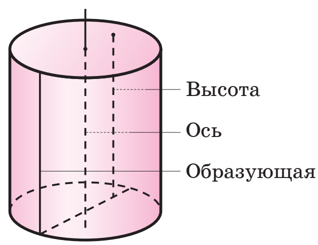


Рис. 34

Поверхность цилиндра можно развернуть на плоскость, в результате получится прямоугольник, представляющий боковую поверхность цилиндра, и два круга, представляющие его основания. На рис. 35 показаны цилиндр и его развертка.

Теорема 4. Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания и высоты:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h.$$

Доказательство проведите самостоятельно, используя рис. 35.

Если цилиндр пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится круг, равный основанию (рис. 36), а если плоскостью, перпендикулярной основанию, то прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра (рис. 37). *Осевое сечение* цилиндра, т. е. сечение плоскостью, проходящей через ось цилиндра, является прямоугольником, стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру его основания (рис. 38).

Пример 1. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60°.

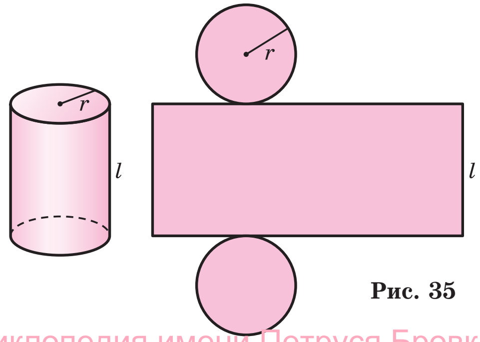


Рис. 35

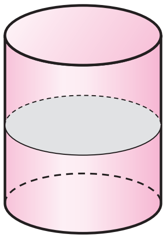


Рис. 36

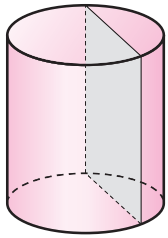


Рис. 37

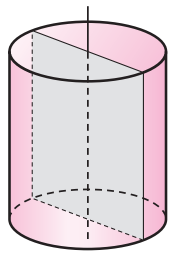


Рис. 38

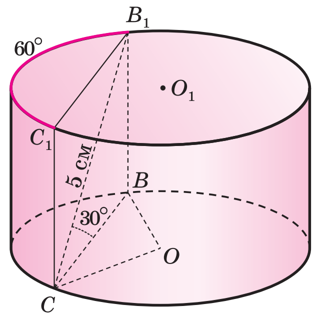


Рис. 39

Диагональ сечения равна 5 см и составляет угол в 30° с плоскостью основания. Найдем полную поверхность цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость, параллельная оси цилиндра, проходит через образующие BB_1 и CC_1 и отсекает от окружности дугу B_1C_1, равную 60° (рис. 39).

Поскольку $B_1B \parallel O_1O \parallel CC_1$, то $B_1B \perp (OBC)$, сечение BCC_1B_1 является прямоугольником и CB — проекция диагонали B_1C на плоскость основания цилиндра. Поэтому $\angle B_1CB = 30°$, $CB = CB_1 \cos 30° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см и $B_1B = \frac{1}{2}CB_1 = 2{,}5$ см.

Угол BOC — центральный, он измеряется дугой BC, тогда $\angle BOC = 60°$ и, значит, равнобедренный треугольник BOC является равносторонним. Поэтому $OB = BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ см. Тогда $S_{\text{осн}} = \pi \cdot OB^2 = \pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{75\pi}{4}$ (см^2);

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot OB \cdot BB_1 = 2\pi\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25\pi\sqrt{3}}{2} \ (\text{см}^2);$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{25\pi}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) \ \text{см}^2.$$

О т в е т: $\frac{25\pi}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ см^2.

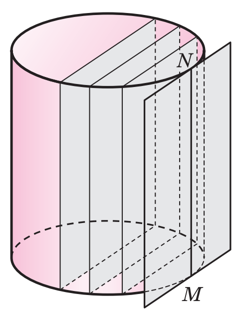


Рис. 40

Б) Будем двигать плоскость, проходящую через ось цилиндра, параллельно самой себе (рис. 40). При этом две противолежащие стороны прямоугольника-сечения цилиндра, являющиеся хордами оснований, будут уменьшаться, а две другие стороны, являющиеся образующими цилиндра, сближаться до того момента, пока не совпадут. Получим плоскость, целиком содержащую образующую цилиндра и не имеющую с ним других общих точек. Такая плоскость называется *касательной плоскостью цилиндра*. Любая прямая, проведенная в касательной плоскости цилиндра и отличная от образующей, имеет с цилиндром единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой цилиндра*.

Теорема 5. Если плоскость касается цилиндра по некоторой образующей, то ей перпендикулярна любая прямая, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна этой оси.

Доказательство. Пусть плоскость α касается цилиндра с осью AB по образующей MN, прямая l пересекает прямую AB в точке C, прямую MN в точке D и $l \perp AB$ (рис. 41). Докажем, что прямая l перпендикулярна плоскости α.

Через точку D проведем плоскость β, перпендикулярную образующей MN. Она пересекает цилиндр по кругу с центром C на прямой AB и плоскость α — по прямой DE, касающейся окружности с центром C. Поскольку $AB \parallel MN$, то $l \perp MN$, а так как l проходит через точку D и пересекает AB, то прямые l и DC совпадают. Прямая DE, по свойству касательной к окружности, перпендикулярна радиусу CD соответствующей окружности.

Таким образом, прямая l перпендикулярна прямым MN и DE, которые пересекаются и лежат в плоскости α, поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая l перпендикулярна α.

Теорема **5** выражает *свойство касательной плоскости цилиндра*.

Теорема 6. Плоскость касается цилиндра, если она проходит через его образующую и перпендикулярна прямой, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна этой оси.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через образующую MN цилиндра и перпендикулярна прямой l, которая пересекает эту образующую, ось цилиндра и перпендикулярна оси AB цилиндра (рис. 42).

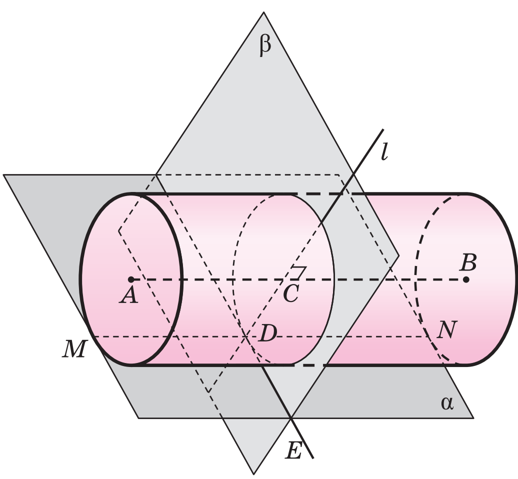


Рис. 41

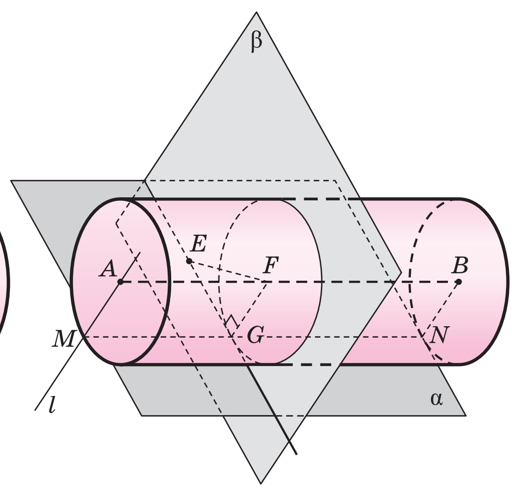


Рис. 42

Докажем, что плоскость α не имеет с цилиндром других общих точек, кроме точек образующей MN.

Пусть E — точка плоскости α, не принадлежащая образующей MN. Через эту точку проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB. Она пересечет цилиндр по кругу с центром F, образующую MN в некоторой точке G и плоскость α по прямой GE. Поскольку $FG \parallel l$ и $l \perp \alpha$, то $FG \perp \alpha$, а поэтому $FG \perp GE$. Учитывая, что FE и FG — соответственно гипотенуза и катет прямоугольного треугольника EFG, получаем, что $FE > FG$. Значит, точка E не принадлежит цилиндру с осью AB.

Теорема **6** выражает *признак касательной плоскости цилиндра*.

Пусть есть цилиндр (рис. 43). Впишем в одно из оснований цилиндра многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, через его вершины A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n проведем образующие A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n и соединим их другие концы B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n. В результате получим призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$. Ее называют *призмой, вписанной в цилиндр*, а сам цилиндр называют *цилиндром, описанным около призмы*. Если цилиндр описан около призмы, то основания цилиндра описаны около оснований призмы, а боковая поверхность цилиндра содержит боковые ребра призмы.

Подобным образом вводится понятие *призмы, описанной около цилиндра*, и *цилиндра, вписанного в призму* (рис. 44). Если призма описана около цилиндра, то ее основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются боковой поверхности цилиндра.

Пример 2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 см и $2\sqrt{5}$ см. Найдем площадь полной поверхности цилиндра, описанного около параллелепипеда, учитывая, что его диагональным сечением является квадрат.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 4$ см, $BC = 2\sqrt{5}$ см (рис. 45). Поскольку около прямоугольника $ABCD$ можно описать окружность, то около прямоугольного параллелепипеда

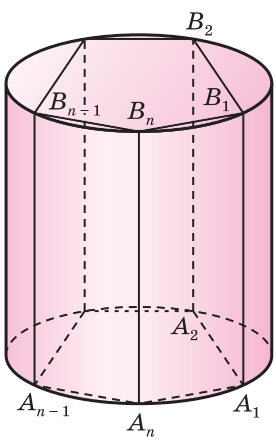


Рис. 43

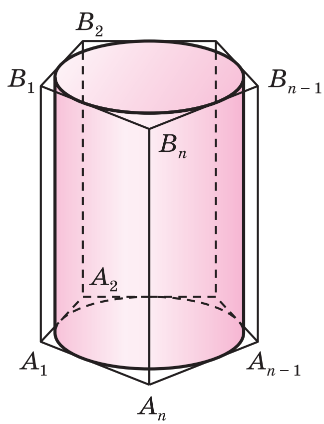


Рис. 44

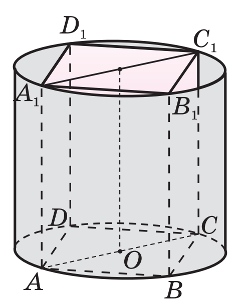


Рис. 45

можно описать цилиндр. Центр O основания цилиндра равноудален от вершин A, B, C, D основания параллелепипеда и поэтому совпадает с точкой пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Прямоугольник AA_1C_1C является диагональным сечением цилиндра. По условию $AA_1 = AC$.

Из прямоугольного треугольника ABC найдем диаметр AC основания цилиндра: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = 6$ (см).

Учитывая, что образующая AA_1 цилиндра равна диаметру его основания, находим:

$$l = 6 \text{ см}, \; r = 3 \text{ см и } S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$$
$$= 2\pi \cdot r \cdot (r + l) = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + 6) = 54\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 54π см^2.

в)

Теорема 7. Объем цилиндра равен произведению площади его основания и образующей:

$$V_{\text{ц}} = S_{\text{осн}} \cdot l.$$

Доказательство. Пусть есть цилиндр с осью OO_1 (рис. 46). В него впишем правильную призму $A_1A_2...A_{n-1}A_nB_1B_2...B_{n-1}B_n$ и около него опишем правильную призму $C_1C_2...C_{n-1}C_nD_1D_2...D_{n-1}D_n$. В соответствии с теоремой **3**, объем первой призмы равен произведению площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты призмы, которая равна боковому ребру A_1B_1, а объем второй — произведению площади многоугольника $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ и той же высоты. Объем самого цилиндра заключен между этими объемами.

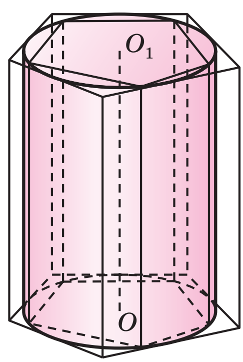


Рис. 46

Будем количество n сторон оснований призмы делать все большим и большим. При этом объем первой призмы увеличивается, объем второй — уменьшается, а разность между ними стремится к нулю, если количество сторон n становится неограниченно большим. То число, к которому приближаются объемы обеих призм, принимается за объем цилиндра.

В описанном процессе высота H призмы остается равной боковому ребру, которое равно образующей цилиндра, а площади многоугольников $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $C_1C_2...C_{n-1}C_n$ стремятся к площади S круга, лежащего в основании цилиндра. Следовательно, объем V цилиндра равен произведению площади S основания и образующей l цилиндра:

$$V = S \cdot l.$$

Пример 3. Цилиндр получен вращением квадрата вокруг своей стороны, равной a. Найдем объем цилиндра.

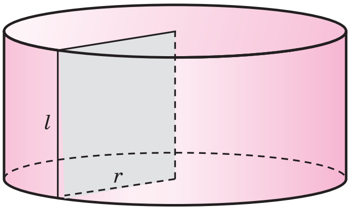


Рис. 47

Р е ш е н и е. Поскольку радиус r основания цилиндра и его образующая l (рис. 47) равны стороне a квадрата, то $S_{осн} = \pi \cdot r^2 = \pi a^2$, а $V = S_{осн} \cdot l = \pi a^3$.

О т в е т: πa^3.

1. Какое тело называется цилиндром?

2. Что называют поверхностью цилиндра; боковой поверхностью цилиндра; основаниями цилиндра?

3. Какую прямую называют осью цилиндра?

4. Какой отрезок называют образующей цилиндра; высотой цилиндра?

5. Чему равна боковая поверхность цилиндра?

6. Какая фигура получается при пересечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию цилиндра; перпендикулярной основанию цилиндра?

7. Какое сечение цилиндра называют осевым сечением?

8. Что называют касательной плоскостью цилиндра и чем является линия касания?

9. Какая прямая называется касательной прямой цилиндра?

10. Сформулируйте свойство касательной плоскости цилиндра.

11. Сформулируйте признак касательной плоскости цилиндра.

12. Когда говорят, что призма вписана в цилиндр; цилиндр описан около призмы?

13. Когда говорят, что цилиндр вписан в призму; призма описана около цилиндра?

14. Чему равен объем цилиндра?

Задача 1. Двугранный угол величиной 60°, ребро которого содержит ось цилиндра, пересекает окружности его оснований в точках A и B, A_1 и B_1 (рис. 48). Найдите длину отрезка AB_1, учитывая, что радиус основания цилиндра равен r, а образующая — l.

Р е ш е н и е. Поскольку $OO_1 \perp (AOB)$, то $\angle AOO_1 = 90°$, $\angle BOO_1 = 90°$, $\angle AOB$ — линейный угол данного двугранного угла, $\angle AOB = 60°$, поэтому треугольник AOB — равносторонний, т. е. $OA = OB = AB = r$. Аналогично получаем, что $\angle A_1O_1O = 90°$, $\angle B_1O_1O = 90°$, $O_1A_1 = O_1B_1 = A_1B_1 = r$. Значит, четырехугольники AOO_1A_1, BOO_1B_1 и ABB_1A_1 — прямоугольники.

Поэтому $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{r^2 + l^2}$.

О т в е т: $\sqrt{r^2 + l^2}$.

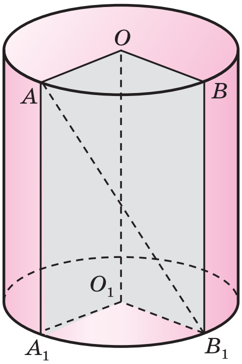


Рис. 48

Задача 2. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a.

Р е ш е н и е. Высота цилиндра, вписанного в прямую призму, равна боковому ребру призмы: $H = a$ (рис. 49). Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

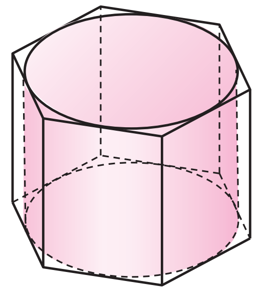


Рис. 49

Теперь находим:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{3\pi a^2}{4} \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

О т в е т: $\frac{3\pi a^3}{4}$.

Задача 3. В цилиндр вписана треугольная призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом в 30° (рис. 50). В эту призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

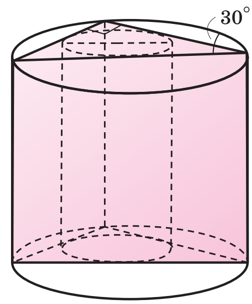


Рис. 50

Р е ш е н и е. Поскольку вписанный в треугольную призму и описанный около нее цилиндры имеют равные высоты, то отношение их объемов равно отношению площадей оснований цилиндров, которое равно квадрату отношения радиусов этих оснований.

Выразим радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности через радиус описанной окружности. Поскольку $r = \frac{a+b-c}{2}$ и $R = \frac{c}{2}$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей, то $c = 2R$, и, учитывая, что катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы, получаем:

$$a = R,\ b = R\sqrt{3},\ r = \frac{R + R\sqrt{3} - 2R}{2} = \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \text{ и } V_2 : V_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

О т в е т: $V_2 : V_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с меньшим основанием a, боковой стороной $2a$ и острым углом в $60°$. Сечение, проходящее через различные основания трапеций, имеет площадь S. Докажите, что в эту призму можно вписать цилиндр и найти его объем.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма (рис. 51), $AD \parallel BC$, $BC = a$, $AB = CD = 2a$, $\angle BAD = 60°$, $S_{AB_1C_1D} = S$.

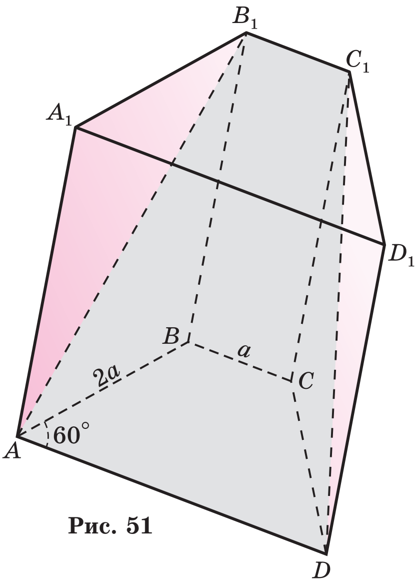


Рис. 51

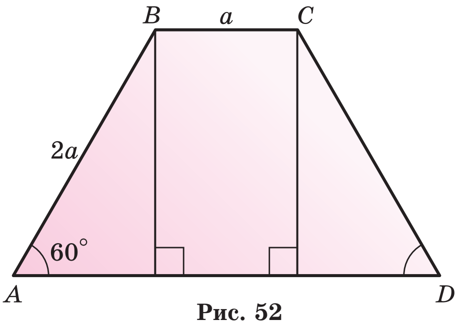


Рис. 52

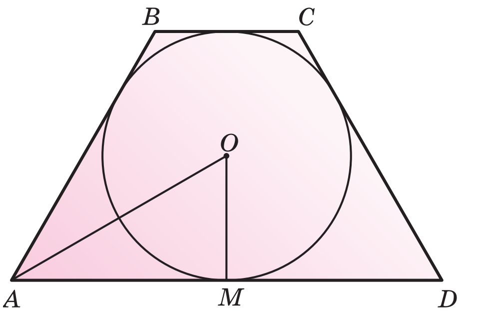


Рис. 53

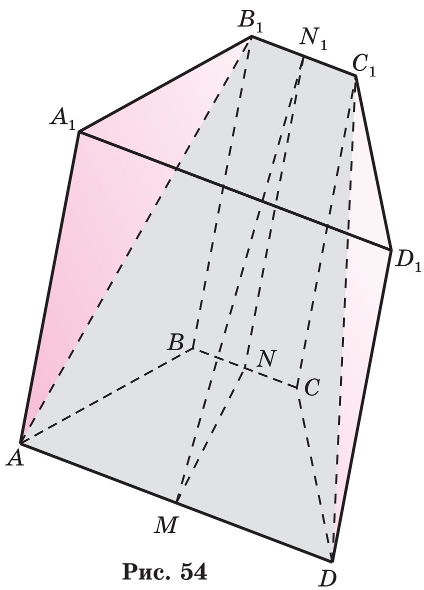


Рис. 54

Для трапеции $ABCD$ (рис. 52) находим:

$$AD = BC + 2AB \cos \angle BAD = a + 2 \cdot 2a \cos 60^\circ = 3a.$$

Поскольку $AB + CD = 4a = AD + BC$, то в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, а в прямую призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — цилиндр.

Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, M — точка касания этой окружности со стороной AD (рис. 53). Тогда M — середина AD, AO — биссектриса угла BAD,

$$AM = \frac{1}{2}AD = \frac{3a}{2}, \; MO = AM \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $B_1C_1 \parallel BC \parallel AD$, то сечение AB_1C_1D — трапеция, причем равнобедренная с основаниями B_1C_1 и AD, равными a и $3a$ соответственно. Поэтому $S = \frac{B_1C_1 + AD}{2} \cdot h = 2ah$, где h — высота трапеции AB_1C_1D.

Отсюда $h = \frac{S}{2a}$.

Пусть N и N_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно (рис. 54), тогда N_1M — высота трапеции, NN_1 — касательная прямая вписанного цилиндра, $N_1N \perp (ABC)$. Значит, $\angle N_1NM = 90°$, поэтому треугольник N_1NM прямоугольный и:

$$N_1N = \sqrt{MN_1^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2a}\right)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Поскольку радиус MO основания вписанного цилиндра равен $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а его образующая — $\frac{1}{2a}\sqrt{S^2 - 12a^4}$, то объем цилиндра:

$$V = \pi OM^2 \cdot N_1N = \frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi a}{8}\sqrt{S^2 - 12a^4}$.

71. Верно ли, что:

а) высота цилиндра равна его образующей;

б) сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию, есть круг, равный основанию;

в) сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной основанию, есть прямоугольник, одна сторона которого равна высоте цилиндра;

г) ось цилиндра параллельна его образующей;

д) осевое сечение цилиндра является прямоугольником, смежные стороны которого равны высоте цилиндра и диаметру основания;

е) плоскость, параллельная основанию цилиндра, отсекает от него тело, которое также является цилиндром?

72. Имеет ли цилиндр:

а) центр симметрии; б) оси симметрии;

в) плоскости симметрии?

73. Определите, какую фигуру образуют точки поверхности цилиндра, равноотстоящие от:

а) двух точек основания;

б) двух образующих.

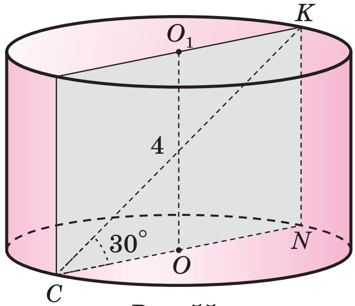


Рис. 55

74. Найдите радиус основания и высоту цилиндра по данным, приведенным на рис. 55.

75. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, учитывая, что радиус цилиндра и его высота соответственно равны:

а) 1,5 м и 4 м; б) 10 см и 21 см; в) 22 и 117.

76. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 24 см, а угол между ней и образующей цилиндра — 60°. Найдите:
а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь сечения.

77. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите:
а) площадь осевого сечения цилиндра;
б) площадь боковой и полной поверхности цилиндра.

78. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 40 см. Найдите:
а) высоту цилиндра;
б) площадь основания цилиндра;
в) боковую поверхность цилиндра;
г) полную поверхность цилиндра.

79. Осевые сечения двух цилиндров равны. Можно ли утверждать, что равны и высоты этих цилиндров?

80. Площадь осевого сечения цилиндра равна 40 м^2, а площадь его основания — 10 м^2. Найдите высоту цилиндра.

81. Высота цилиндра равна 16 см, радиус его основания — 10 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, учитывая, что расстояние между этими плоскостью и осью равно 6 см.

82. Цилиндр, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 10 см, пересечен такой плоскостью, параллельной оси цилиндра, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

83. Через образующие AB и CD цилиндра с радиусом основания r и высотой h проведено сечение, которое отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите площадь этого сечения.

84. Есть цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота — h. Точки A и B на окружностях оснований цилиндра выбраны так, что прямая AB находится на расстоянии d от оси цилиндра. Найдите:
а) h, учитывая, что $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм;
б) d, учитывая, что $h = 12$ см, $r = 10$ см, $AB = 20$ см.

85. Через одну образующую цилиндра проведены две секущие плоскости, из которых одна проходит через ось цилиндра под углом φ к другой. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями.

86. Высота цилиндра равна h, а площадь осевого сечения — S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси и отстоящей от нее на d.

87. Через образующую цилиндра проведено две такие взаимно перпендикулярные плоскости, что площади полученных сечений равны S каждая. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

88. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, боковая поверхность которого равна S.

89. Найдите радиус основания цилиндра с полной поверхностью 288π см^2 и его высоту, учитывая, что она на 12 см больше радиуса основания.

90. Определите, сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 25 см, учитывая, что на швы необходимо добавить 2,5 % площади ее боковой поверхности.

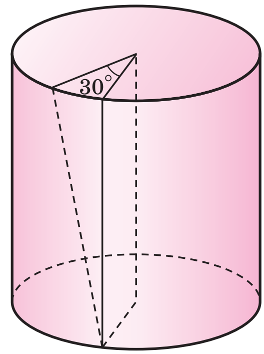


Рис. 56

91. Концы отрезка лежат на окружностях оснований цилиндра, а угол между радиусами, проведенными в его концы, равен 30° (рис. 56). Найдите угол между этим отрезком и осью, учитывая, что осевым сечением цилиндра является квадрат.

92. Плоскость, параллельная оси цилиндра с высотой 10 дм, пересекает его по прямоугольнику с площадью 240 дм^2. Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что расстояние от оси цилиндра до плоскости равно 9 дм.

93. На окружностях оснований цилиндра, высота и радиус основания которого соответственно равны 20 см и 70 см, выбраны точки A, B, C, D, являющиеся вершинами квадрата (рис. 57). Найдите его сторону.

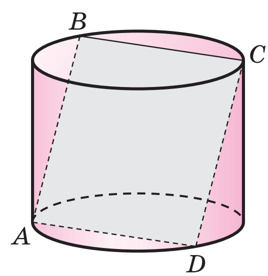


Рис. 57

94. Найдите боковую и полную поверхности цилиндра, у которого угол между диагоналями развертки боковой поверхности равен φ, а сама диагональ — d.

95. Учитывая, что один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, другой — вращением того же прямоугольника вокруг прямой BC:

а) докажите, что боковые поверхности этих цилиндров равны;

б) найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, учитывая, что $AB = p$, $BC = q$.

96. При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, полные поверхности которых равны S_1 и S_2. Найдите диагональ прямоугольника.

97. Боковая поверхность цилиндра равна площади круга, описанного вокруг его осевого сечения. Найдите отношение радиуса цилиндра к его высоте.

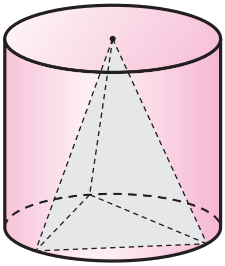


Рис. 58

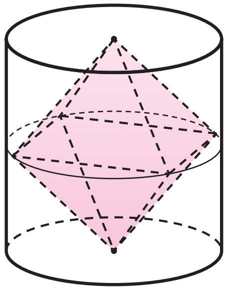


Рис. 59

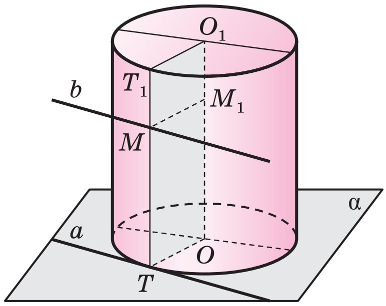


Рис. 60

98*. Найдите высоту и радиус цилиндра, у которого площадь боковой поверхности наибольшая, учитывая, что периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$.

99*. Треугольная пирамида, все ребра которой равны a, и цилиндр расположены так, что одна вершина пирамиды является центром основания цилиндра, а три остальные лежат на окружности другого основания (рис. 58). Найдите полную поверхность цилиндра.

100*. Восьмигранник, все грани которого являются правильными треугольниками, и цилиндр расположены так, что две вершины восьмигранника являются центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на цилиндрической поверхности (рис. 59). Найдите площадь осевого сечения цилиндра, учитывая, что его высота равна h.

101. Учитывая, что точка M является точкой образующей TT_1 цилиндра с осью OO_1, точка M_1 — проекцией точки M на эту ось, прямая a касается окружности основания с центром O, а прямая b касается цилиндра в точке M (рис. 60), укажите, какой может быть величина угла между:

а) плоскостью TT_1O и прямой a; в) прямыми TT_1 и TO;
б) плоскостью TT_1O и прямой b; г) прямыми TT_1 и MM_1.

102. Верно ли, что:

а) плоскость, определенная осью цилиндра и образующей, по которой другая плоскость касается цилиндра, перпендикулярна касательной плоскости;
б) плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости, определенной этими образующей и осью цилиндра, является касательной плоскостью цилиндра?

103. Докажите, что если плоскость параллельна оси цилиндра и отстоит от нее на радиус цилиндра, то она содержит образующую цилиндра, и притом только одну, т. е. является касательной плоскостью цилиндра.

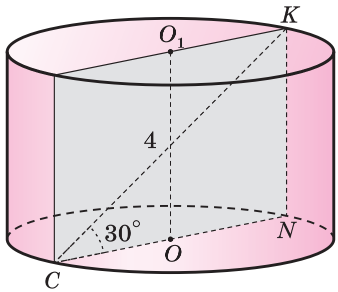


Рис. 61

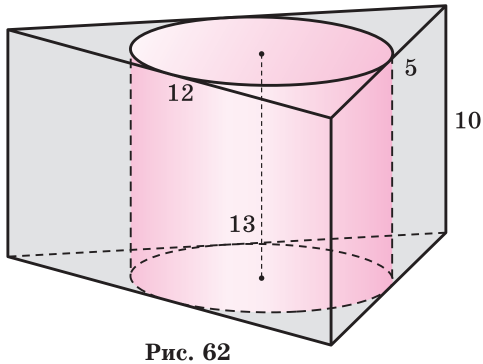


Рис. 62

104. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с углом в 30° и противолежащим катетом, равным 8 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму, учитывая, что его осевым сечением является квадрат.

105. Найдите полную поверхность цилиндра, вписанного в призму, по данным, приведенным на рисунке:

а) 61; б) 62.

106. В цилиндр, радиус основания и высота которого равны, вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра.

107. Есть правильная треугольная призма с боковым ребром a. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму, учитывая, что отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с основанием угол α (рис. 63).

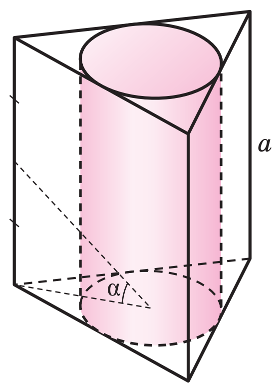


Рис. 63

108. Определите, можно ли вписать цилиндр в прямую призму, если ее основанием является:

а) треугольник; в) прямоугольник; б) ромб; г) трапеция.

109. Определите, можно ли описать цилиндр около прямой призмы, если ее основанием является:

а) треугольник; б) ромб; в) прямоугольник; г) трапеция.

110. Определите, около какой прямой призмы можно описать цилиндр, если эта призма:

а) четырехугольная; б) шестиугольная.

111. Определите, в какую прямую призму можно вписать цилиндр, если эта призма:

а) четырехугольная; б) шестиугольная.

112. Докажите, что:

а) если прямая четырехугольная призма вписана в цилиндр, то сумма противолежащих двугранных углов при боковых ребрах равна 180°;

б) если четырехугольная прямая призма описана около цилиндра, то суммы площадей противоположных боковых граней равны.

113. Учитывая, что V, r и h — соответственно объем, радиус и высота цилиндра, найдите:

а) V, если $r = 3\sqrt{2}$ см, $h = 6$ см;

б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см;

в) h, если $r = h$, $V = 27\pi$ см^3.

114. Найдите объем цилиндра, осевым сечением которого является квадрат с диагональю 30 см.

115. Найдите длину алюминиевого провода диаметром 4 мм, учитывая, что его масса равна 6,8 кг, а плотность алюминия — 2,6 г/см^3.

116. Определите, сколько тонн нефти содержит цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, учитывая, что плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

117. Найдите боковую поверхность и объем цилиндра, диаметр основания которого равен 1 м, а высота равна длине окружности основания.

118. Найдите объем цилиндра, у которого площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения — S.

119. Найдите массу свинцовой трубы длиной 25 м с толщиной стенок 4 мм и внутренним диаметром 13 мм, учитывая, что плотность свинца равна 11,34 г/см^3.

120. Определите, во сколько раз нужно увеличить:

а) высоту цилиндра без изменения его основания, чтобы объем увеличился в n раз;

б) радиус основания цилиндра без изменения его высоты, чтобы объем увеличился в n раз.

121*. Докажите, что полная поверхность цилиндра равна боковой поверхности другого цилиндра того же радиуса, высота которого равна сумме радиуса и высоты данного цилиндра.

122*. В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Найдите объем цилиндра, учитывая, что высота призмы равна h.

123*. Найдите объем цилиндра, учитывая, что диагональ вписанного в него прямоугольного параллелепипеда равна m и составляет с основанием угол α.

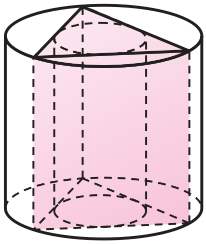


Рис. 64

124. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр (рис. 64). Найдите отношение объемов цилиндров.

125. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

126. В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, учитывая, что:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — натуральное число.

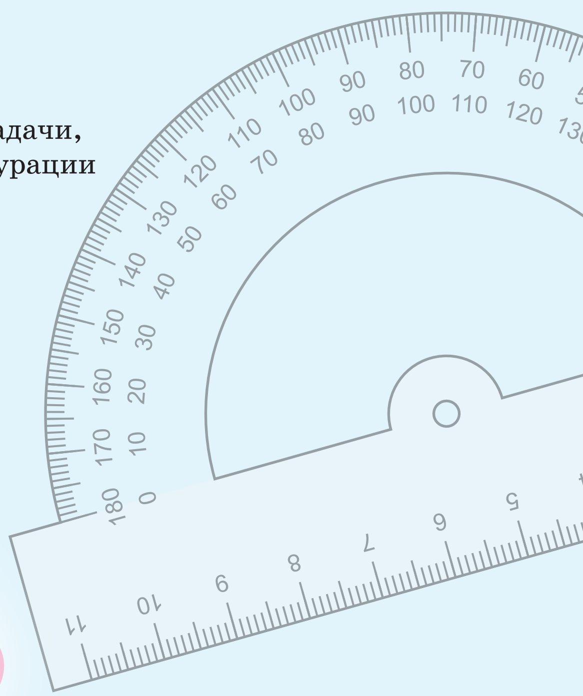
127*. Цилиндр вписан в прямой параллелепипед, основанием которого является ромб с меньшей диагональю m и большим углом α. Сечение, проведенное через меньшую диагональ одного основания и конец большей диагонали другого, составляет с основанием угол в $45°$. Найдите объем цилиндра.

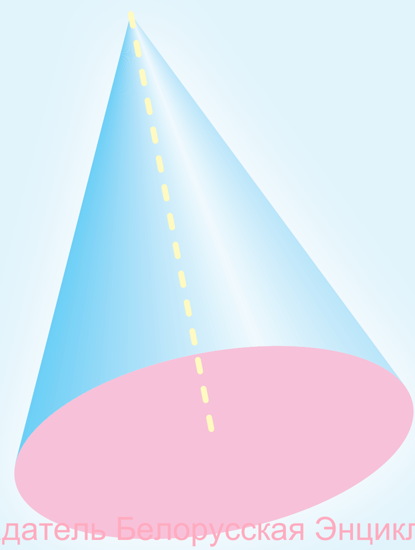
Раздел 2

Пирамида и конус

В этом разделе вы:

- узнаете, какое тело называется пирамидой и какое — конусом;
- узнаете, чем пирамида и конус похожи и чем они отличаются;
- познакомитесь с отдельными видами пирамид и конусов;
- познакомитесь с конфигурациями — пирамидой, вписанной в конус, и конусом, вписанным в пирамиду;
- познакомитесь с касательной прямой и касательной плоскостью конуса;
- научитесь находить площади поверхностей пирамид и конусов и их объемы;
- научитесь находить по известным характеристикам пирамиды или конуса другие их характеристики;
- научитесь решать разнообразные задачи, условия которых содержат конфигурации с пирамидой или конусом.





§ 3. Пирамида

А) Вы уже знакомы с **пирамидой** — многогранником, одна грань которого является многоугольником, а остальные грани-треугольники имеют общую вершину.

Треугольные грани пирамиды, имеющие общую вершину, называют **боковыми гранями**, а эту общую вершину — **вершиной** пирамиды. Ребра боковых граней, сходящиеся в вершине пирамиды, называют **боковыми ребрами** пирамиды. Многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды, называют **основанием** пирамиды (рис. 65).

Пирамиды разделяют на *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные* и т. д. в зависимости от количества сторон их оснований. Пирамида, изображенная на рис. 65, — пятиугольная, а на рис. 66 — восьмиугольная. Треугольную пирамиду еще называют *тетраэдром*. У тетраэдра все грани являются треугольниками (рис. 67).

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется **высотой пирамиды**. На рис. 66 показана высота SO пирамиды $SABCDEFGH$. Основание высоты может и не принадлежать основанию пирамиды (рис. 68).

Плоскость, проходящая через два боковых ребра пирамиды, не принадлежащие одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение пирамиды диагональной плоскостью — *диагональным сечением*. На рис. 69 показано диагональное сечение шестиугольной пирамиды.

Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника, называется **правильной пирамидой** (рис. 70).

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой** пирамиды.

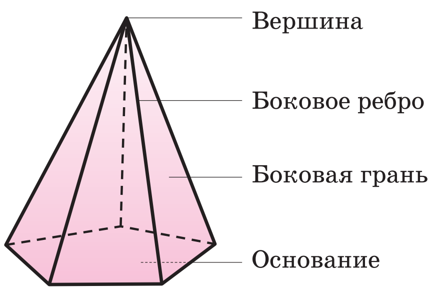


Рис. 65

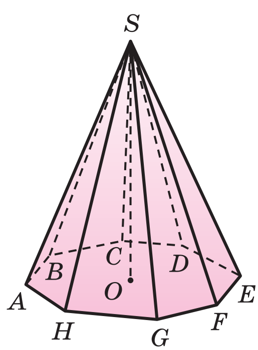


Рис. 66

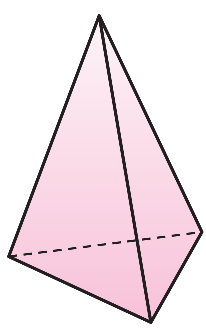


Рис. 67

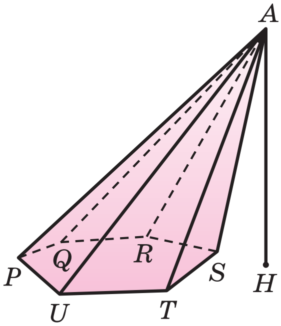


Рис. 68

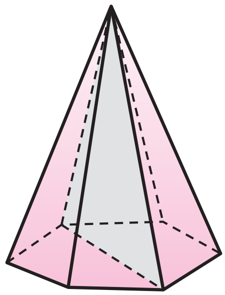


Рис. 69

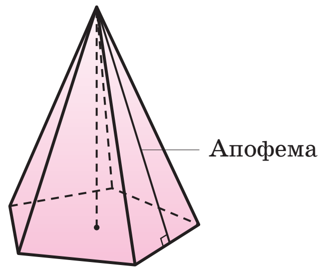


Рис. 70

Отметим, что *в правильной пирамиде*:

- *боковые ребра равны*;
- *боковые грани равны*;
- *апофемы равны*;
- *двугранные углы при основании равны*;
- *двугранные углы при боковых ребрах равны*;
- *каждая точка высоты равноудалена от вершин основания*;
- *каждая точка высоты равноудалена от ребер основания*;
- *каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.*

Отметим, что *если в пирамиде равны все*:

- *боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды* (рис. 71);
- *двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды* (рис. 72).

Боковые грани составляют *боковую поверхность пирамидыы*, а боковые грани вместе с основанием — *полную поверхность пирамиды*.

Вы знаете, что *боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы*.

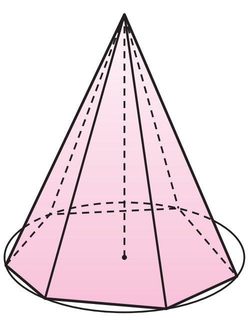


Рис. 71

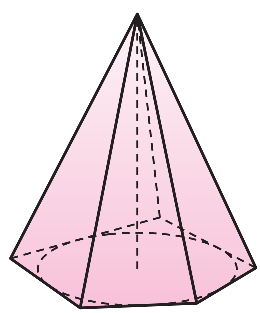


Рис. 72

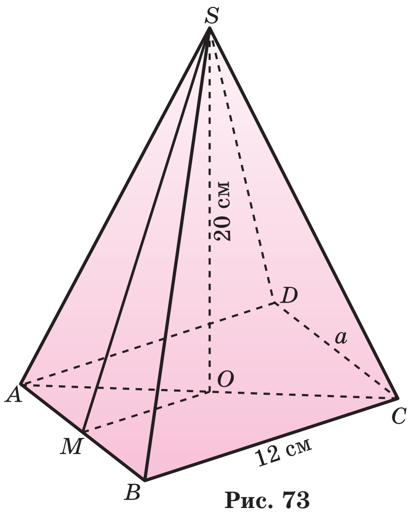


Рис. 73

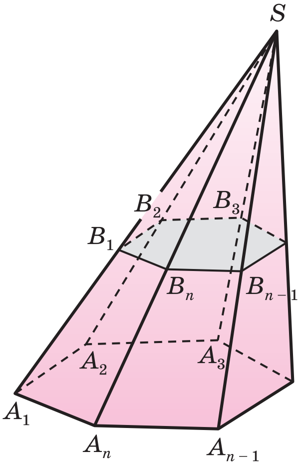


Рис. 74

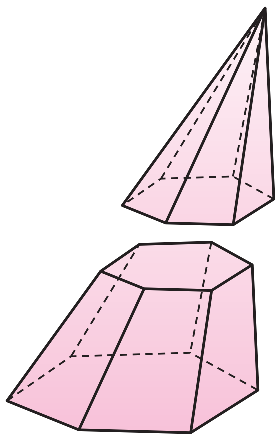


Рис. 75

Пример 1. Найдем площадь полной поверхности правильной черырехугольной пирамиды с ребром основания 12 см и высотой 20 см.

Р е ш е н и е. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Поэтому $S_{\text{осн}} = a^2 = 144$ см^2.

Высота SO пирамиды $SABCD$ проходит через центр O квадрата основания, апофема — через середину M ребра основания (рис. 73). В прямоугольном треугольнике SOM катет OM равен половине ребра основания — $OM = 6$ см, другой катет SO — известная высота. По теореме Пифагора можно найти гипотенузу: $SM = \sqrt{6^2 + 20^2} = 2\sqrt{109}$ (см).

Теперь последовательно находим:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 6 \cdot 2\sqrt{109} = 12\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{SAB} = 48\sqrt{109} \text{ см}^2, \quad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 144 + 48\sqrt{109} \text{ (см}^2\text{)}.$$

О т в е т: $144 + 48\sqrt{109}$ см^2.

Б)

Теорема 1. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:
а) боковые ребра и высота разделяются на пропорциональные части;
б) в сечении получается многоугольник, подобный основанию;
в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

Используя рис. 74, докажите эту теорему самостоятельно.

Секущая плоскость, параллельная основанию пирамиды, разделяет ее на две части (рис. 75). Одна из этих частей также является пирамидой, а другая — многогранником, который называется **усеченной пирамидой**.

Параллельные грани усеченной пирамиды называются ее **основаниями** (рис. 76). Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники,

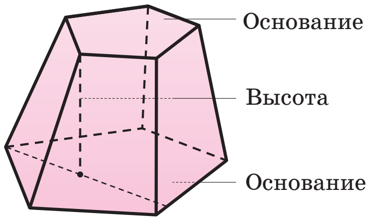


Рис. 76

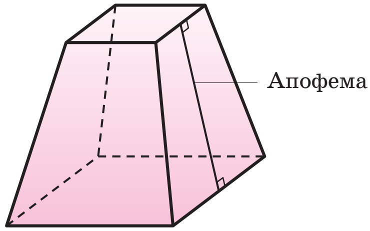


Рис. 77

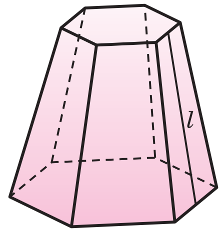


Рис. 78

стороны которых попарно параллельны, поэтому ее боковые грани — трапеции.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания пирамиды к плоскости другого основания.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется *апофемой* усеченной пирамиды. На рис. 77 показаны четырехугольная правильная усеченная пирамида и одна из ее апофем.

Теорема 2. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований и апофемы:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Доказательство. Пусть есть правильная n-угольная усеченная пирамида (рис. 78). Пусть P_1 и P_2 — соответственно периметры нижнего и верхнего оснований и l — апофема пирамиды.

Боковая поверхность данной пирамиды состоит из n равных друг другу трапеций. Пусть a и b — основания одной из этих трапеций, тогда ее площадь равна $\frac{1}{2}(a+b)l$. Учитывая, что боковая поверхность пирамиды состоит из n таких трапеций, получим, что:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(a+b)ln = \frac{1}{2}(an+bn)l = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Пример 2. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра оснований равны $6\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$, боковое ребро наклонено под углом в $60°$ к плоскости основания. Найдем полную поверхность этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Найдем площади оснований:

$$S_1 = \frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}, \quad S_2 = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

Чтобы найти боковую поверхность, необходимо знать апофему усеченной пирамиды.

Через параллельные медианы AM и A_1M_1 оснований пирамиды проведем сечение (рис. 79). Оно содержит высоту OO_1 пирамиды, соединяющей центры оснований усеченной пирамиды, и высоту MM_1 боковой грани (апофему). Ребро AA_1 проектируется на прямую AM. Поэтому в трапеции AA_1M_1M угол A_1AM равен 60°. Далее находим:

$$AM = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9; \quad A_1M_1 = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3; \quad AO = \frac{2}{3} \cdot AM = 6;$$

$$OM = AM - AO = 9 - 6 = 3; \; A_1O_1 = \frac{2}{3} \cdot A_1M_1 = 2;$$

$$O_1M_1 = A_1M_1 - A_1O_1 = 3 - 2 = 1.$$

Пусть A_1K и M_1P — высоты трапеции AA_1M_1M. Тогда:

$$AK = AO - OK = AO - O_1A_1 = 6 - 2 = 4,$$

$$MP = MO - OP = AO - O_1A_1 = 3 - 1 = 2.$$

Из прямоугольного треугольника AKA_1 находим:

$$A_1K = AK \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3} = OO_1 = M_1P.$$

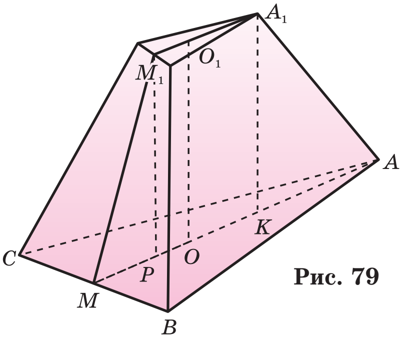


Рис. 79

Из прямоугольного треугольника PMM_1 находим:

$$MM_1 = \sqrt{PM^2 + PM_1^2} = \sqrt{4 + 48} = 2\sqrt{13}.$$

Теперь:

$$S_{\text{бок}} = 3 \cdot \frac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}, \quad S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}} = 30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}.$$

О т в е т: $30\sqrt{3} + 24\sqrt{39}$.

В) Установим формулу для вычисления объема пирамиды.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Теорема 3. Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

Доказательство. Пусть есть две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 80). Разделим высоты одной и другой пирамид на n долей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основаниям. По теореме **1в**, площади соответствующих сечений пирамид равны. Каждая из пирамид разделяется на n частей-слоев. Для первой пирамиды в каждой части построим, как показано на рис. 80, призму, целиком содержащуюся в этой части, а для каждой части второй пирамиды — призму, целиком содержащую эту часть.

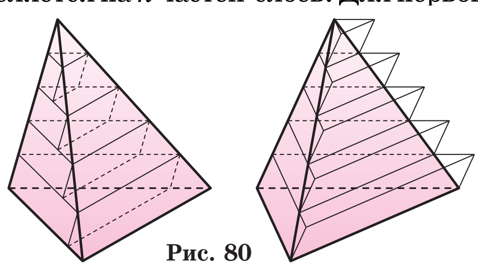


Рис. 80

Пусть V_1 и V_2 — объемы первой и второй пирамид, а Q_1 и Q_2 — суммарные объемы призм, построенных для этих пирамид. При счете от оснований пирамид призма в k-й части первой пирамиды равновелика призме для $(k + 1)$-й части второй пирамиды, так как у этих призм равновеликие основания и равные высоты. Поэтому объем Q_2 больше объема Q_1 на объем первой построенной призмы, у которой основанием является основание второй пирамиды, а высота равна $\frac{h}{n}$, где h — высота пирамиды (см. рис. 80), т. е. $Q_2 = Q_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, где S — площадь основания пирамиды. Теперь учтем, что $V_2 < Q_2$ и $V_1 > Q_1$. Будем иметь $V_2 < Q_1 + S \cdot \frac{h}{n} < V_1 + S \cdot \frac{h}{n}$, и поэтому:

$$V_2 - V_1 < S \cdot \frac{h}{n} \ (1).$$

Такие же рассуждения можно провести, если первую и вторую пирамиды поменять ролями. В результате получим неравенство:

$$V_1 - V_2 < S \cdot \frac{h}{n} \ (2).$$

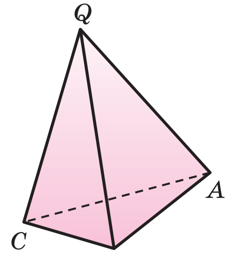


Рис. 81

Если $V_1 \neq V_2$, то неравенства (1) и (2) при любом n не могут одновременно быть истинными. Например, если допустить, что $V_2 > V_1$ и $V_2 - V_1 = a > 0$, то при $n > \frac{Sh}{a}$ неравенство (1) не будет верным. А если допустить, что $V_1 > V_2$ и $V_1 - V_2 = b > 0$, то неравенство (2) не будет верным при $n > \frac{Sh}{b}$.

Получили, что неравенства (1) и (2) истинны только при $V_1 = V_2$.

Теорема 4. Объем пирамиды равен третьей доли произведения площади ее основания и высоты:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H.$$

Доказательство. Пусть есть треугольная пирамида $QABC$ (рис. 81). Достроим ее до призмы $ABCEDQ$ с основанием ABC (рис. 82). Плоскостью QAB отделим от призмы данную пирамиду, получится четырехугольная пирамида $QBDEA$. Диагональная плоскость QDA разделяет пирамиду $QBDEA$ на две пирамиды $QDAB$ и $QDAE$ (рис. 83), у которых одна и та же высота, проведенная из вершины Q, и равные основания ABD и AED.

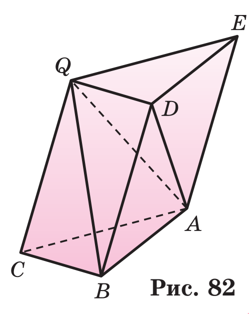


Рис. 82

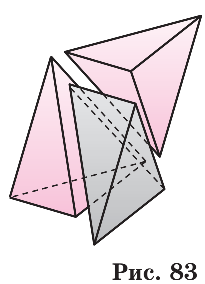


Рис. 83

Поэтому, в соответствии с теоремой **3**, пирамиды $QDAB$ и $QDAE$ равновеликие. Сравним пирамиду $QDAE$ с данной пирамидой $QABC$. У них равны основания QDE и ABC и равны высоты, проведенные из вершин A и Q, поэтому эти пирамиды также равновелики. Получается, что все три пирамиды $QABC$, $QDAB$ и $QDAE$ равновелики. Поскольку объем призмы $ABCEDQ$ равен произведению $S \cdot H$ площади S основания ABC и высоты призмы H, которая равна высоте пирамиды $QABC$, то объем пирамиды $QABC$, т. е. третьей части призмы $ABCEDQ$, равен третьей доле этого объема, т. е. $\frac{1}{3} S \cdot H$.

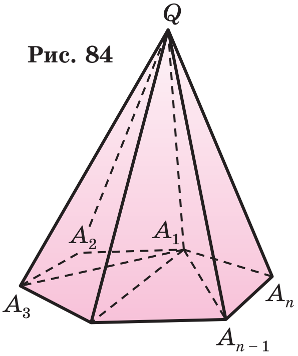


Рис. 84

Пусть теперь есть произвольная пирамида $QA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 84). Через диагонали A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1} основания $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$, выходящие из одной вершины A_1, проведем диагональные сечения, они разделят данную пирамиду на треугольные пирамиды $QA_1A_2A_3$, $QA_1A_3A_4$, ..., $QA_1A_{n-1}A_n$. Поскольку все они имеют общую высоту H, то:

$$V = \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{A_1A_3A_4} \cdot H + \ldots + \frac{1}{3} S_{A_1A_{n-1}A_n} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} H \left(S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n} \right) = \frac{1}{3} H \cdot S = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Пример 3. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 60 см^2, а ее апофема — 5 см. Найдем объем пирамиды.

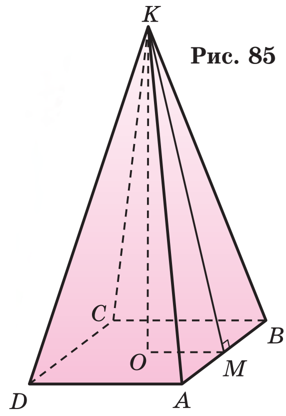


Рис. 85

Р е ш е н и е. Пусть KM — апофема правильной пирамиды $KABCD$, KO — ее высота (рис. 85). Тогда M — середина ребра AB, O — центр квадрата $ABCD$ и $KM = 5$ см.

Поскольку $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} nal$, где n — количество сторон основания пирамиды, a — длина стороны пирамиды, l — апофема пирамиды, то $60 \cdot 2 = BC \cdot 4 \cdot 5$, откуда $BC = 6$ см, $S_{ABCD} = BC^2 = 36$ см^2, $OM = \frac{1}{2} BC = 3$ см.

Из прямоугольного треугольника KOM найдем высоту KO пирамиды: $KO = \sqrt{KM^2 - MO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

Теперь найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ (см}^3\text{)}.$$

О т в е т: 48 см^3.

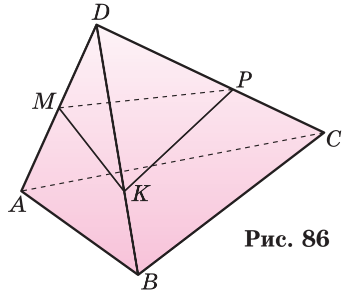


Рис. 86

Пример 4*. На ребрах DA, DB и DC пирамиды $DABC$ выбраны точки M, K и P соответственно так, что $DM : MA = 1 : 1$, $DK : KB = 2 : 1$ и $DP : PC = 3 : 2$ (рис. 86). Найдем отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

Докажем, что $\dfrac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \dfrac{DM \cdot DK \cdot DP}{DA \cdot DB \cdot DC}$.

Пусть CC_1 и PP_1 — высоты в пирамидах $DABC$ и $DMKP$. Из подобия прямоугольных треугольников DCC_1 и DPP_1 следует, что $PP_1 : DP = CC_1 : DC$. Поэтому:

$$\frac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{DMK} \cdot PP_1}{\frac{1}{3} \cdot S_{DAB} \cdot CC_1} = \frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} \cdot \frac{DP}{DC}.$$

Далее:

$$\frac{S_{DMK}}{S_{DAB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DM \cdot DK \cdot \sin \angle MDK}{\frac{1}{2} \cdot DA \cdot DB \cdot \sin \angle ADB} = \frac{DM \cdot DK}{DA \cdot DB}.$$

Нужное равенство обосновано.

Заметим, что доказанное утверждение верно и тогда, когда пирамиды $DABC$ и $DMKP$ имеют общую вершину D, а остальные их вершины находятся на трех прямых, проходящих через вершину D.

Из условия следует, что $DM : DA = 1 : 2$, $DK : DB = 2 : 3$ и $DP : DC = 3 : 5$.

Поэтому $\dfrac{V_{DMKP}}{V_{DABC}} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \dfrac{1}{5}$.

Значит, плоскость MKP делит объем пирамиды в отношении $1 : 4$.

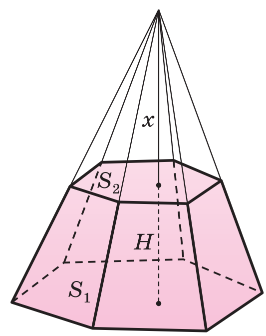


Рис. 87

Г) Теперь установим формулы для вычисления объема усеченной пирамиды. Пусть в усеченной пирамиде нижнее и верхнее основания имеют площади S_1 и S_2, а высота равна H (рис. 87). Для вычисления объема усеченной пирамиды достроим ее до полной пирамиды. Пусть высота дополняющей пирамиды равна x. Искомый объем V можно вычислить как разность объемов полной и дополняющей пирамид:

$$V = \frac{1}{3} S_1 (H + x) - \frac{1}{3} S_2 x = \frac{1}{3}(S_1 H + S_1 x - S_2 x) = \frac{1}{3}(S_1 H + (S_1 - S_2) x).$$

Чтобы найти высоту x, используем установленное в теореме **1** утверждение о том, что площади сечений пирамиды относятся как квадраты их расстояний от вершины: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2}$. Решим это уравнение, учитывая, что S_1 и S_2 — положительные числа:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{(H+x)^2} \equiv \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} = \frac{x}{H+x} \equiv H\sqrt{S_2} + x\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1} \equiv$$

$$\equiv H\sqrt{S_2} = x\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right) \equiv x = \frac{H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Значит:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 H + \frac{(S_1 - S_2)H\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \frac{\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}H\left(S_1 + \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{S_2}\right) = \frac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$

Таким образом, **объем V усеченной пирамиды равен третьей доле произведения высоты H пирамиды и суммы площадей S_1 и S_2 оснований пирамиды и их среднего геометрического $\sqrt{S_1 S_2}$:**

$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

?

1. Какой многогранник называется пирамидой?

2. Какую пирамиду называют тетраэдром?

3. Какую грань пирамиды называют ее основанием и какие грани — боковыми гранями?

4. Какие ребра пирамиды называют боковыми ребрами и какую точку — вершиной пирамиды?

5. Какой отрезок называют высотой пирамиды?

6. Какая плоскость называется диагональной плоскостью пирамиды и какой многоугольник — диагональным сечением пирамиды?

7. Какая пирамида называется правильной пирамидой?

8. Какой отрезок называется апофемой пирамиды?

9. Сформулируйте свойства элементов правильной пирамиды: боковых ребер; боковых граней; апофем; двугранных углов при основании; двугранных углов при боковых ребрах; точек высоты.

10. Сформулируйте свойство основания пирамиды, у которой равны все: боковые ребра; двугранные углы при основании.

11. Что понимают под боковой поверхностью пирамиды; полной поверхностью пирамиды?

12. Как связаны между собой боковая поверхность правильной пирамиды, периметр ее основания и апофема?

13. Сформулируйте свойства отрезков боковых ребер и высоты пирамиды, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.

14. Сформулируйте свойства сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

15. Какой многогранник называется усеченной пирамидой?

16. Какие грани усеченной пирамиды называют ее основаниями и какой отрезок — ее высотой?
17. Какая усеченная пирамида называется правильной и какой отрезок называется апофемой правильной усеченной пирамиды?
18. Как связаны между собой боковая поверхность правильной усеченной пирамиды, периметры ее оснований и апофема?
19. Какие тела называют равновеликими?
20. Какое свойство имеют треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами?
21. Чему равен объем пирамиды?
22. Чему равен объем усеченной пирамиды?

Задача 1. В правильной треугольной пирамиде высота равна $6\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около основания, — 12. Найдите:

а) апофему пирамиды; б) двугранный угол при основании пирамиды.

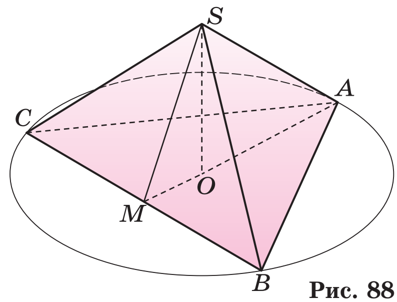


Рис. 88

Р е ш е н и е. а) Пусть SO — высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 88) и $SO = 6\sqrt{3}$.

OA — радиус описанной окружности, $OA = 12$ (O — основание высоты и центр треугольника ABC), $OM \perp BC$, где M — середина стороны BC, и $OM = \frac{1}{2} \cdot OA = 6$.

SM — апофема пирамиды $SABC$, $SM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах:

$$SM = \sqrt{OM^2 + OS^2} = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12.$$

б) $OM \perp BC$ и $SM \perp BC$, поэтому SMO — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды:

$$\sin \angle SMO = \frac{SO}{SM} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ поэтому } \angle SMO = 60°.$$

О т в е т: а) 12; б) 60°.

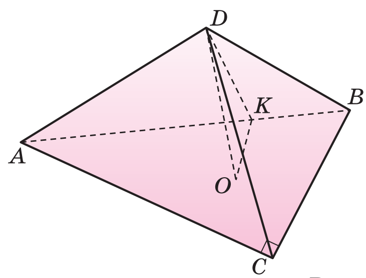


Рис. 89

Задача 2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 17 см и катетом 15 см, а ее высота равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, учитывая, что все двугранные углы при ребрах основания равны.

Р е ш е н и е. Пусть у пирамиды $DABC$ $AB = 17$ см, $AC = 15$ см, $\angle ACB = 90°$, $DO \perp (ABC)$ и $OK \perp AB$ (рис. 89).

O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, OK — ее радиус (все двугранные углы при ребрах основания равны).

$$\triangle ABC\colon BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ (см)},$$

$$OK = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{15 + 8 - 17}{2} = 3 \text{ (см)},\ S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 = 60 \text{ (см)}.$$

$$\triangle DKO\colon \operatorname{tg} \angle DKO = \frac{DO}{OK} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},\ \angle DKO = 60°,\ \cos \angle DKO = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{ABC}}{\cos \angle DKO} = \frac{60}{0{,}5} = 120 \text{ (см}^2\text{)},\ S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 120 + 60 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

О т в е т: 180 см^2.

Задача 3. Площадь основания пирамиды равна 243 см^2, а площадь сечения, параллельного основанию, — 48 см^2. Найдите расстояние между плоскостью сечения и плоскостью основания, учитывая, что высота пирамиды равна 18 см.

Р е ш е н и е. Пусть x см — искомое расстояние. Тогда, по теореме **1в**, имеем: $\frac{48}{243} = \left(\frac{18 - x}{18}\right)^2$, или $1 - \frac{x}{18} = \frac{4}{9}$, откуда $x = 10$.

О т в е т: 10 см.

Задача 4. Найдите объем треугольной пирамиды, ребра основания которой равны 13, 14, 15, учитывая, что боковые ребра образуют с плоскостью основания углы, равные α.

Р е ш е н и е. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$. Отрезки OA, OB, OC — проекции наклонных SA, SB, SC на плоскость основания, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$ (рис. 90). Прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны, так как имеют общий катет SO и по равному острому углу. Поэтому катеты OA, OB, OC равны, точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

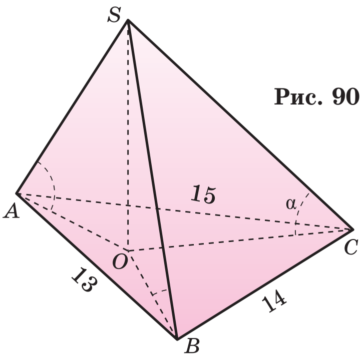


Рис. 90

Для вычисления радиуса описанной окружности используем формулу $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$, где $S_\triangle$ — площадь треугольника, а a, b, c — его стороны. Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$S = \sqrt{\frac{13+14+15}{2} \cdot \frac{14-13+15}{2} \cdot \frac{13-14+15}{2} \cdot \frac{13+14-15}{2}} = 84.$$

Тогда $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$. Найдем из прямоугольного треугольника SOA высоту SO пирамиды, а потом и ее объем.

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha,\ V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{65}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 227{,}5 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

О т в е т: $227{,}5 \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Задача 5*. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция, у которой $AD \parallel BC$ и $AD = 2BC$. На ребрах SA, SB и SC выбраны точки M, K и P соответственно так, что $SM : MA = 1 : 1$, $SK : KB = 1 : 2$ и $SP : PC = 1 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть объем пирамиды $SABCD$ равен $3V$. Поскольку площадь треугольника ABC составляет третью долю площади $ABCD$, то объем пирамиды $SABC$ равен V, а объем пирамиды $SACD$ равен $2V$.

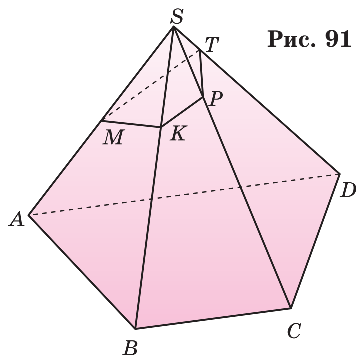


Рис. 91

Найдем объем пирамиды $SMKP$, используя равенство $\frac{V_{SMKP}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SC}$. Будем иметь:

$$V_{SMKP} = V\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}V.$$

Пусть T — точка пересечения прямой SD с плоскостью MKP (рис. 91). Тогда $\overrightarrow{ST} = x \cdot \overrightarrow{SD}$ и, кроме того, вектор $\overrightarrow{KT}$ компланарен с векторами $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KP}$, т. е. $\overrightarrow{KT} = m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP}$ при определенных множителях m и p. Выразим векторы $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KS}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{ST}$ и $\overrightarrow{KT}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$. Последовательно получаем:

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}\right), \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{KS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS},\ \overrightarrow{ST} = x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC} - x\overrightarrow{BS},$$

$$\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{ST} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{BS} + x\overrightarrow{BA} + 2x\overrightarrow{BC}.$$

Вместе с тем $\overrightarrow{KT} = m\overrightarrow{KM} + p\overrightarrow{KP} = m\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{BS}\right) + p\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{12}\overrightarrow{BS}\right) =$

$= \frac{m}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{p-2m}{12}\overrightarrow{BS} + \frac{p}{4}\overrightarrow{BC}.$

Поскольку векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$ некомпланарны, то вектор $\overrightarrow{KT}$ через них выражается однозначно. Тогда одновременно выполняются равенства $\frac{m}{2} = x$, $\frac{p-2m}{12} = \frac{1}{3} - x$, $\frac{p}{4} = 2x$. Отсюда $m = 2x$, $p = 8x$ и $x = \frac{1}{4}$. Теперь найдем объем пирамиды $SKPT$, используя равенство:

$$\frac{V_{SKPT}}{V_{SACD}} = \frac{ST \cdot SK \cdot SP}{SA \cdot SD \cdot SC}; \; V_{SKPT} = 2V \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{16}V.$$

Далее имеем: $V_{SMKTP} = V_{SMKP} + V_{SKPT} = \frac{1}{24}V + \frac{1}{16}V = \frac{5}{48}V = \frac{5}{144} \cdot 3V$. Поэтому плоскость MKP делит объем пирамиды в отношении 5 : 139.

Ответ: 5 : 139.

128. Установите, сколько вершин, ребер и граней имеет:
а) n-угольная пирамида; б) усеченная n-угольная пирамида.

129. В правильной пирамиде найдите точку, равноудаленную от всех ее:
а) вершин; б) ребер; в) граней.

130. Есть правильная пирамида. Можно ли утверждать, что она имеет плоскость симметрии?

131. Докажите, что в правильной пирамиде:
а) боковые ребра равны;
б) боковые грани равны;
в) апофемы равны;
г) двугранные углы при основании равны;
д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
е) каждая точка высоты равноудалена от вершин основания;
ж) каждая точка высоты равноудалена от ребер основания;
з) каждая точка высоты равноудалена от боковых граней.

132. Боковые ребра пирамиды равны друг другу. Определите, может ли основанием пирамиды быть:
а) ромб; в) трапеция;
б) прямоугольник; г) правильный шестиугольник.

133. Докажите, что если у пирамиды равны все:
а) боковые ребра, то около ее основания можно описать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды;
б) двугранные углы при основании, то в это основание можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды.

134. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а ее высота — $4\sqrt{3}$. Найдите:
а) боковое ребро пирамиды;
б) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

135. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, у которой:
а) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α;
б) сторона основания равна a, а двугранный угол при основании — α.

136. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, а боковое ребро — $2a$. Найдите:
а) угол между боковым ребром и основанием;
б) площадь каждого диагонального сечения.

137. Есть пирамида, у которой двугранные углы при основании равны друг другу. Верно ли, что:
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание;
б) высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны;
в) боковая поверхность равна произведению полупериметра основания и высоты боковой грани, проведенной из вершины пирамиды?

138. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей — 10 см. Найдите боковые ребра пирамиды, учитывая, что ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 35 см.

139. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами основания 6 см и 14 см и одной из диагоналей 12 см, а ее высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды.

140. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 20 см. Боковые ребра пирамиды равны друг другу, а ее высота равна 24 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

141. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом в 120°, а боковые ребра образуют с высотой пирамиды, равной 16 см, углы в 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

142. Трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см является основанием пирамиды, каждое боковое ребро которой равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.

143. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания и апофемы.

144. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды имеет длину 12 см и образует угол в 60° с плоскостью основания. Найдите поверхность пирамиды.

145. Учитывая, что высота треугольной пирамиды равна 40 см, высота каждой боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, — 41 см, а периметр основания — 42 см, докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в ее основание, и найдите площадь этого основания.

146. Найдите высоту пирамиды, стороны основания которой равны 13, 14 и 15, учитывая, что:

а) все боковые ребра составляют с основанием углы, равные α;
б) все боковые грани составляют с основанием углы, равные β.

147. Прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза AB и катет AC которого соответственно равны 29 см и 21 см, является основанием пирамиды $DABC$. Ее ребро DA перпендикулярно плоскости основания и равно 20 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

148. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 60 см и 108 см и площадью 3240 см^2, точка пересечения диагоналей которого является основанием высоты пирамиды. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что ее высота равна 36 см.

149. Есть пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а один из двугранных углов при основании равен 45°. Учитывая, что наибольшее боковое ребро равно 12 см, найдите:
а) высоту пирамиды; б) боковую поверхность пирамиды.

150. Прямоугольник с диагональю 24 см является основанием пирамиды, плоскости двух боковых граней которой перпендикулярны плоскости основания, а плоскости двух других боковых граней образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите поверхность пирамиды.

151. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 24 см, 20 см и 20 см, а каждая боковая грань наклонена к основанию под углом в 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

152. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а ее высота — H. Найдите:
а) боковое ребро пирамиды;
б) плоский угол при вершине пирамиды;
в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды;
г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды;
д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

153. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна l, а плоский угол при вершине — α. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) боковое ребро;
в) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

154*. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что сторона ее основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину пирамиды и бо́льшую диагональ основания.

155*. Двугранные углы при основании пирамиды все равны φ. Докажите, что $S_{бок} = \dfrac{Q}{\cos\varphi}$, $S_{полн} = \dfrac{2Q\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, где $S_{бок}$ и $S_{полн}$ — боковая и полная поверхности пирамиды, Q — площадь ее основания.

156. Докажите, что если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:
а) боковые ребра и высота разделятся на пропорциональные части;
б) в сечении получится многоугольник, подобный основанию;
в) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

157. Докажите, что в правильной усеченной пирамиде:
а) боковые ребра равны;
б) боковые грани равны;
в) апофемы равны;
г) двугранные углы при основании равны;
д) двугранные углы при боковых ребрах равны;
е) сумма двугранных углов при параллельных ребрах одной боковой грани равна 180°.

158. Сечение пирамиды, параллельное ее основанию, делит высоту в отношении 2 : 3, если считать от вершины. Найдите площадь сечения, учитывая, что она на 105 см^2 меньше площади основания.

159. Найдите апофему и высоту правильной усеченной треугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны 15 см и 5 см, а боковое ребро — 13 см.

160. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Найдите эти стороны.

161. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2, если считать от вершины. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 дм, а площадь ее полной поверхности — 186 дм^2. Найдите высоту усеченной пирамиды.

162. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см, а одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 1 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

163. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 5 м и 8 м, а высота — 3 м. Плоскость проходит через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

164. Найдите площадь диагонального сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, у которой стороны оснований равны a и b, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

165. Найдите объем пирамиды с высотой h, учитывая, что:
а) $h = 20$ см, а основанием является квадрат со стороной 30 см;
б) $h = 22$ м, а основанием является треугольник ABC, в котором $AB = 2$ м, $BC = 1{,}35$ м, $\angle ABC = 30°$.

166. Найдите поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 8 см, а высота — 20 см.

167. Найдите боковую поверхность и объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а высота — 12 см.

168. Все боковые грани пирамиды $SABC$ наклонены к основанию под углом в 45°. Найдите объем пирамиды, учитывая, что $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $\angle ACB = 60°$.

169*. Квадрат является основанием пирамиды, две ее грани перпендикулярны основанию, двугранный угол между противолежащими боковыми гранями равен α, а высота пирамиды — h. Найдите объем, боковую и полную поверхность пирамиды.

170. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой:
а) высота равна 15 см, а сторона основания — 12 см;
б) боковое ребро равно b и составляет с плоскостью основания угол α;
в) боковое ребро b и составляет с прилежащей стороной основания угол α;
г) боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ;
д) радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R, а плоский угол при вершине основания — α;
е) боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине — β;
ж) плоский угол при вершине равен φ, а сторона основания — a.

171. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 25 см, а третья сторона — 48 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что каждое ее боковое ребро равно 105 см.

172. Найдите объем и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что ее боковое ребро равно 37 см, а диаметр круга, вписанного в основание, — $12\sqrt{3}$ см.

173. Найдите объем пирамиды, основанием которой является:
а) равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC, равными 26 см, и основанием AC, равным 20 см, а каждое боковое ребро пирамиды образует с ее высотой угол в 30°;

б) прямоугольный треугольник с катетами a и b, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ;
в) ромб со стороной 15 см, каждый из двугранных углов при основании равен 45°, а высота пирамиды равна 6 см.

174. Найдите объем треугольной пирамиды $QABC$, учитывая, что:
а) $AB = 12$, $BC = CA = 10$ см и двугранные углы при основании равны 45°;
б) $\angle CAB = 90°$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ и каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α;
в) боковые ребра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c.

175. Основанием пирамиды $IJKL$ является треугольник, в котором $JK = 20$ см, $JL = 29$ см, $KL = 21$ см. Грани IJK и IJL перпендикулярны плоскости основания, а грань IKL составляет с ней угол в 60°. Найдите объем пирамиды.

176. Одно ребро тетраэдра равно 12 см, а остальные ребра — 9 см каждое. Найдите объем тетраэдра.

177. Одна из сторон основания треугольной пирамиды равна 16 см, противолежащее ей боковое ребро — 18 см, каждое из остальных четырех ребер — 17 см. Найдите объем пирамиды.

178. Определите, как изменится площадь боковой, полной поверхности и объем пирамиды, если, оставив углы прежними, все ее ребра:
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз.

179. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 24 дм и 10 дм, а каждое боковое ребро равно 85 дм. Пирамида пересечена плоскостью, которая параллельна плоскости основания и делит боковое ребро пополам. Найдите объем полученной усеченной пирамиды.

180. Кристалл кварца состоит из правильной шестиугольной призмы с боковым ребром 6,2 см и стороной основания 1,7 см и двух правильных шестиугольных пирамид с боковым ребром 2,5 см. Найдите массу кристалла, учитывая, что плотность кварца равна 2,7 г/см^3.

181. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой:
а) высота равна h, а двугранный угол при основании — α;
б) сторона основания равна a, а плоский угол при вершине — α;
в)* сторона основания равна a, а двугранный угол при боковом ребре — α;
г)* радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r, а острый плоский угол при одной из вершин основания — α;
д)* высота равна H, а двугранный угол при основании — β;
е)* сторона основания равна m, а плоский угол при вершине — α;
ж)* боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол φ.

182. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю b и углом α между диагоналями. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. Найдите этот угол, учитывая, что объем пирамиды равен V.

183. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. На ребрах SA, SB и SC точки M, K и P выбраны так, что $SM : MA = 2 : 3$, $SK : KB = 1 : 2$ и $SP : PC = 3 : 4$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

184. Пирамида $PEFGH$ имеет своим основанием ромб $EFGH$. На ее ребрах PE, PF и PG точки X, Y и Z выбраны так, что $PX : XE = 3 : 2$, $PY : YF = 1 : 1$ и $PZ : ZG = 4 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость XYZ делит объем пирамиды.

185. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция, в которой $AD \parallel BC$ и $AD = 3BC$. На ребрах SA, SB и SC точки E, F и G выбраны так, что $SE : EA = 1 : 2$, $SF : FB = 1 : 1$ и $SG : GC = 3 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость EFG делит объем пирамиды.

186. Четырехугольник $ABCD$ является основанием пирамиды $SABCD$. Его диагонали пересекаются в такой точке O, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 1 : 5$. Точки M, K и P на ребрах SA, SB и SC выбраны так, что $SM : MA = 1 : 2$, $SK : KB = 1 : 1$ и $SP : PC = 2 : 3$. Найдите отношение, в котором плоскость MKP делит объем пирамиды.

187. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см, а стороны оснований — 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды, ее диагональ и объем.

188. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 10 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 42 см^2. Найдите объем пирамиды.

189*. Найдите объем частей пирамиды, на которые она рассечена плоскостью, параллельной основанию, учитывая, что:

а) это основание и полученное сечение являются равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузами m и n, две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны основанию, а третья составляет с ней угол φ;

б) пирамида правильная четырехугольная, стороны основания и полученного сечения равны a и $\frac{a}{2}$, а апофема — a.

§ 4. Конус

А) Конусом называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, проходящей через один из его катетов (рис. 92). На рис. 93 показано образование конуса при вращении прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой l, которой принадлежит катет BC. При этом ломаная BAC описывает поверхность конуса, гипотенуза AB — боковую поверхность, а катет AC — основание конуса (рис. 94). Саму гипотенузу AB называют образующей конуса, неподвижную точку B — вершиной конуса, прямую, проходящую через неподвижный катет BC, — осью конуса, а перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание, — высотой конуса (рис. 95). Основание высоты конуса совпадает с центром основания конуса.

Поверхность конуса можно развернуть на плоскость, в результате получится сектор, представляющий боковую поверхность конуса, и круг, представляющий основание конуса. На рис. 96 представлены конус и его развертка.

Развертка боковой поверхности конуса определяется радиусом сектора и центральным углом φ. Радиусом сектора является образующая l конуса. Найдем угол φ. С одной стороны, длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. $2\pi r$, где r — радиус основания, с другой — $\frac{2\pi l}{360} \cdot \varphi$, поэтому $2\pi r = \frac{2\pi l}{360} \cdot \varphi$, откуда $\varphi = \frac{360r}{l}$.

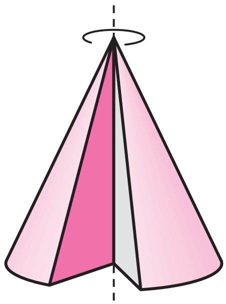


Рис. 92

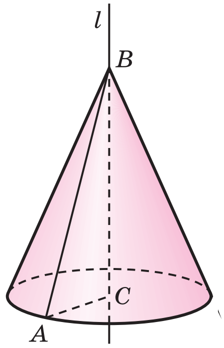


Рис. 93

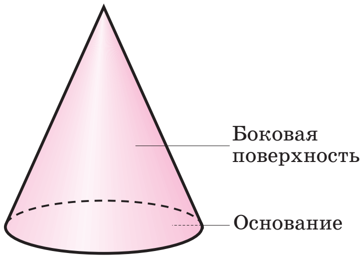


Рис. 94

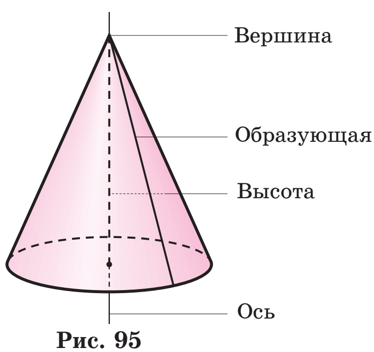


Рис. 95

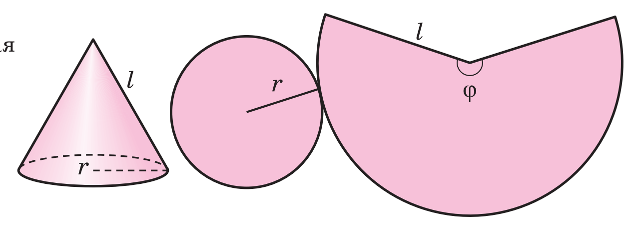


Рис. 96

Теорема 5. Боковая поверхность конуса равна произведению полуокружности его основания и образующей:

$$S_{бок} = \pi r l.$$

Доказательство. Используем формулу для вычисления площади $S_{сект}$ сектора с центральным углом градусной меры φ и радиусом l:

$$S_{сект} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \varphi.$$

Учитывая, что $\varphi = \dfrac{360r}{l}$, получим: $S_{сект} = \pi r l$.

Следствие. Площадь полной поверхности конуса равна произведению полуокружности его основания и суммы радиуса основания и образующей:

$$S_{полн} = \pi r \cdot (r + l).$$

Пример 1. Конус получен вращением прямоугольного треугольника вокруг большего катета. Найдем боковую и полную поверхности конуса, учитывая, что катеты имеют длины 8 см и 15 см.

Решение. Найдем вначале по теореме Пифагора длину гипотенузы:

$$l = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Теперь, учитывая, что образующая конуса l равна 17 см и радиус его основания r — 8 см, найдем боковую и полную поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi r l = 136\pi \text{ см}^2;\ S_{осн} = \pi r^2 = 64\pi \text{ см}^2;$$

$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 200\pi \text{ см}^2.$$

Ответ: 200π см^2.

Б) Важной пространственной конфигурацией, часто встречающейся в задачах, является комбинация конуса и плоскости.

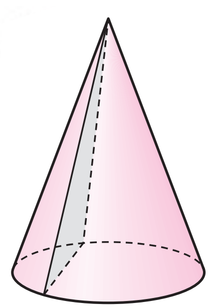


Рис. 97

Если конус пересекается плоскостью, проходящей через вершину, то получается равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 97). Осевое сечение конуса, т. е. сечение плоскостью, проходящей через ось конуса, является равнобедренным треугольником, у которого основание равно диаметру основания конуса (рис. 98).

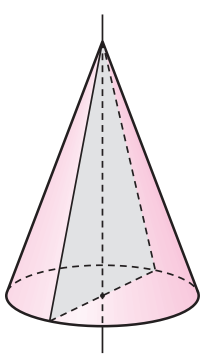


Рис. 98

Пример 2. Периметр осевого сечения конуса равен 16. Найдем полную поверхность конуса, учитывая, что развертка боковой поверхности конуса — сектор с углом в 120°.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания конуса, l — его образующая. Длина окружности основания $C = 2\pi r$ совпадает с длиной дуги развертки $\frac{2\pi l \cdot 120°}{360°}$, поэтому $2\pi r = \frac{2\pi l \cdot 120°}{360°}$, или $l = 3r$.

Поскольку периметр осевого сечения равен 16, то $2l + 2r = 16$, или $l + r = 8$, или $4r = 8$, и тогда $r = 2$, а $l = 6$.

Теперь находим: $S_{осн} = \pi r^2 = 4\pi$, $S_{бок} = \pi rl = 12\pi$, $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 16\pi$.

О т в е т: 16π.

Пересечение конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг (рис. 99).

Теорема 6. Если конус пересечь плоскостью, параллельной его основанию, то:

а) образующая и высота разделяются на пропорциональные части;

б) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

Используя рис. 100, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 3. Радиус основания конуса равен 8 см. Плоскость, параллельная его основанию, разделяет высоту в отношении 3 : 5, если считать от вершины. Найдем площадь сечения.

Р е ш е н и е. По теореме **6б**, имеем:

$$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \left(\frac{3}{3+5}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Поэтому $S_{сеч} = \pi r^2 \cdot \frac{9}{64} = \pi \cdot 8^2 \cdot \frac{9}{64} = 9\pi$ (см^2).

О т в е т: 9π см^2.

Секущая плоскость, параллельная основанию конуса, разделяет его на две части (рис. 101). Одна из этих частей также является конусом, а другая — телом, которое называется **усеченным конусом**.

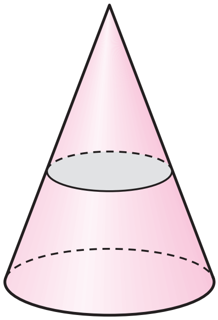


Рис. 99

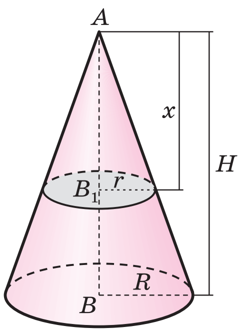


Рис. 100

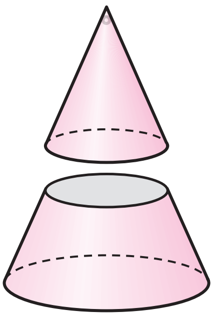


Рис. 101

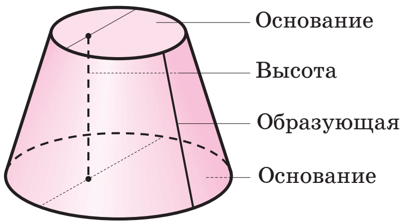


Рис. 102

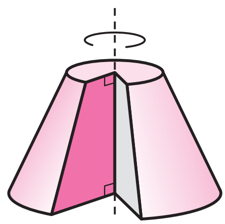


Рис. 103

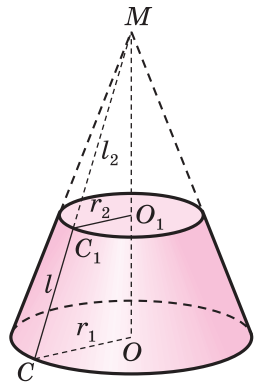


Рис. 104

Основание данного конуса и круг, полученный в сечении, называют **основаниями** усеченного конуса, а отрезок образующей данного конуса, заключенный между его основанием и секущей плоскостью, — **образующей** усеченного конуса (рис. 102). **Высотой** усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного его основания к плоскости другого основания.

Усеченный конус можно получить вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, к которой прилежат прямые углы (рис. 103).

Найдем боковую поверхность усеченного конуса. Пусть есть усеченный конус, у которого радиусы оснований CO и C_1O_1 равны r_1 и r_2 соответственно, а образующая CC_1 равна l (рис. 104).

Достроим его до полного конуса. Достроенная часть представляет собой конус, у которого радиус основания равен r_2. Пусть образующая C_1M достроенного конуса равна l_2.

Боковую поверхность $S_{бок}$ усеченного конуса можно получить как разность боковых поверхностей S_1 и S_2 полного и достроенного конусов. Пусть C_1 и C_2 — длины окружностей нижнего и верхнего оснований усеченного конуса. Тогда:

$$S_{бок} = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}C_1(l + l_2) - \frac{1}{2}C_2 l_2 = \frac{1}{2}(2\pi r_1 l + 2\pi r_1 l_2 - 2\pi r_2 l_2) = \pi\left(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2\right).$$

Найдем l_2, учитывая подобие треугольников MCO и MC_1O_1:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{l + l_2}{l_2} \equiv r_1 l_2 = r_2 l + r_2 l_2 \equiv l_2 = \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}.$$

Значит,

$$S_{бок} = \pi\left(r_1 l + (r_1 - r_2)l_2\right) = \pi\left(r_1 l + (r_1 - r_2)\frac{r_2 l}{r_1 - r_2}\right) = \pi r_1 l + \pi r_2 l = \frac{C_1 + C_2}{2}l.$$

Таким образом, **боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей его оснований и образующей:**

$$S_{бок} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Пример 4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 и 18, а его высота — 12 (рис. 105). Найдем площадь боковой поверхности этого конуса.

Р е ш е н и е. Пусть h, r_1 и r_2 — высота усеченного конуса и радиусы его оснований. Осевым сечением конуса является равнобедренная трапеция с высотой h и основаниями $2r_1$ и $2r_2$. Боковой стороной трапеции является образующая l конуса. Используя теорему Пифагора, находим:

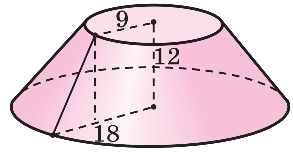


Рис. 105

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(18-9)^2 + 12^2} = 15.$$

Теперь:

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi \cdot (9+18) \cdot 15 = 405\pi.$$

О т в е т: 405π.

Проведем через вершину конуса секущую плоскость и будем ее поворачивать вокруг прямой, перпендикулярной оси конуса (рис. 106). При этом основание треугольника-сечения будет укорачиваться, а его боковые стороны сближаться, пока не совпадут. Получим плоскость, целиком содержащую образующую и не имеющую с конусом других общих точек. Такая плоскость называется **касательной плоскостью конуса**.

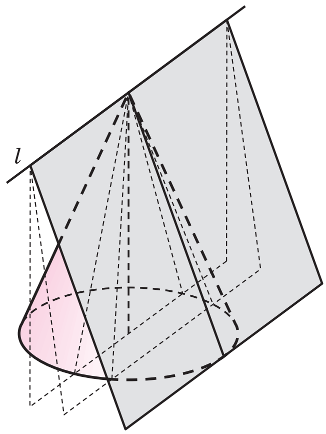


Рис. 106

Теорема 7. Если плоскость касается конуса по некоторой образующей, то ей перпендикулярна плоскость, проходящая через эту образующую и ось конуса.

Доказательство*. Пусть плоскость α касается конуса с осью AB по образующей AC (рис. 107). Докажем, что плоскость, содержащая образующую и ось AB, перпендикулярна плоскости α.

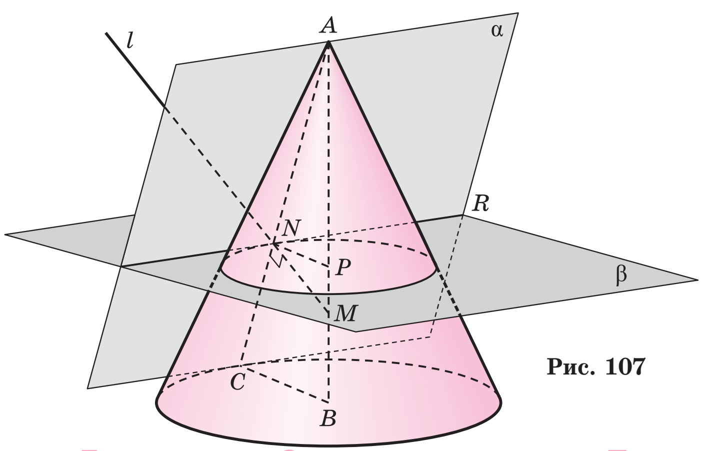


Рис. 107

Проведем прямую l, которая перпендикулярна образующей AC, пересекает ее в точке N и ось конуса в точке M, отличной от вершины A. Через точку N проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB, она пересечет конус по кругу с центром P и плоскость α — по прямой NR, касающейся окружности с центром P. Эта касательная, по свойству касательной к окружности, перпендикулярна радиусу PN соответствующей окружности. Но этот радиус есть проекция наклонной MN на плоскость β, поэтому, по теореме о трех перпендикулярах, прямая NR перпендикулярна наклонной MN, т. е. прямой l.

Таким образом, прямая l перпендикулярна прямым AC и NR, которые пересекаются и лежат в плоскости α, поэтому, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая l перпендикулярна плоскости α. Следовательно, плоскость ABC, содержащая прямую l, перпендикулярна плоскости α.

Теорема **7** выражает *свойство касательной плоскости конуса*.

Теорема 8. Плоскость касается конуса, если она проходит через его образующую и перпендикулярна плоскости, проходящей через эту образующую и ось конуса.

Доказательство*. Пусть плоскость α проходит через образующую AC конуса с осью AB и перпендикулярна плоскости ABC (рис. 108). Докажем, что плоскость α касается конуса, т. е. что точки образующей AC и только они являются общими точками конуса и плоскости α.

Точки образующей AC принадлежат и конусу, и плоскости α. Пусть E — какая-либо точка плоскости α вне образующей AC. Через эту точку проведем плоскость β, перпендикулярную оси AB, она пересекает поверхность конуса по окружности ω с центром F, образующую AC — в некоторой

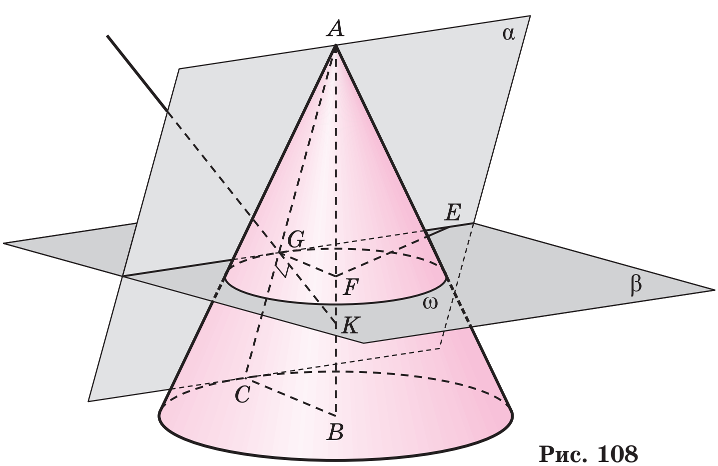


Рис. 108

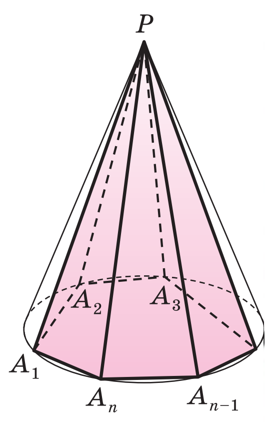


Рис. 109

точке G и плоскость α — по прямой GE. Пусть GK — прямая, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ось AB в точке K. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, прямая GE, проведенная в плоскости β через основание наклонной GK перпендикулярно ей, перпендикулярна ее проекции FG. Следовательно, GE — касательная к окружности ω, и поэтому точка E находится вне окружности ω, а значит, и вне конуса.

Теорема **8** выражает *признак касательной плоскости конуса*.

В) Пусть есть конус с вершиной P (рис. 109). Впишем в основание конуса многоугольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и через его вершины A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n проведем образующие A_1P, A_2P, ..., $A_{n-1}P$, A_nP. В результате получим тело $PA_1A_2...A_{n-1}A_n$, являющееся пирамидой. Ее называют *пирамидой, вписанной в конус*, а сам конус — *конусом, описанным около пирамиды*.

Пример 5. Усеченный конус описан около правильной шестиугольной пирамиды с ребрами оснований 5 и 2 и высотой 4 (рис. 110). Найдем площадь полной поверхности конуса.

Р е ш е н и е. Усеченные конус и пирамида имеют общую высоту: $h = 4$. Основания пирамиды являются правильными шестиугольниками, вписанными в основания усеченного конуса. Поэтому радиусы этих кругов равны ребрам оснований: $r_1 = 5$, $r_2 = 2$. Образующей l усеченного конуса является боковое ребро пирамиды. Если из вершины одного основания пирамиды опустить высоту на другое основание, то получится прямоугольний треугольник, в котором боковое ребро будет гипотенузой, а проведенная высота и отрезок, равный разности радиусов оснований, — катетами. Поэтому:

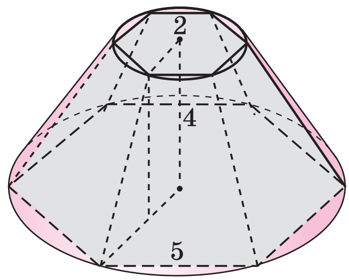


Рис. 110

$$l^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2, \quad l = \sqrt{4^2 + (5-2)^2} = 5.$$

Теперь находим:

$$S_{1\,осн} = \pi r_1^2 = 25\pi, \quad S_{2\,осн} = \pi r_2^2 = 4\pi,$$
$$S_{бок} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot l = 35\pi,$$
$$S_{полн} = S_{1\,осн} + S_{2\,осн} + S_{бок} = 64\pi.$$

О т в е т: 64π.

Если основание конуса вписано в основание пирамиды, а боковая поверхность конуса касается боковых граней пирамиды, то говорят, что *пирамида описана около конуса* или *конус вписан в пирамиду* (рис. 111).

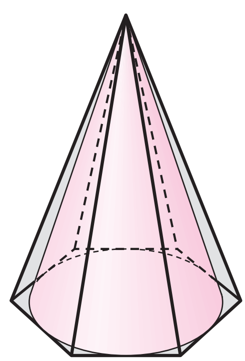


Рис. 111

Теорема 9. Объем конуса равен третьей доле произведения площади его основания и высоты:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Доказательство. Пусть есть конус с осью MN (рис. 112). В него впишем правильную пирамиду $MA_1A_2...A_{n-1}A_n$, а около него опишем правильную пирамиду $MB_1B_2...B_{n-1}B_n$. В соответствии с теоремой **4** объем первой пирамиды равен третьей доли произведения площади многоугольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и высоты H пирамиды, т. е. высоты конуса, а объем второй — произведению площади многоугольника $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ и той же высоты. Объем самого конуса заключен между этими числами.

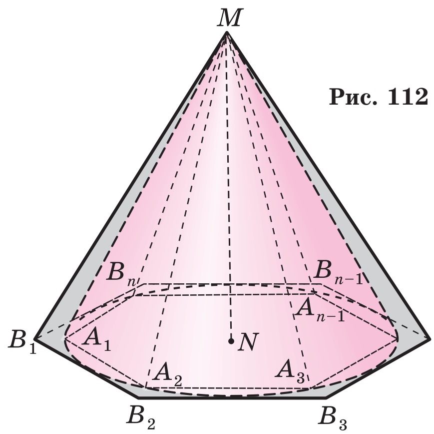


Рис. 112

Будем увеличивать количество n сторон оснований пирамид. Тогда объем первой пирамиды будет увеличиваться, объем второй — уменьшаться, причем их разность стремится к нулю, если значение переменной n неограниченно увеличивается. То число, к которому приближаются объемы обеих пирамид, принимается за объем конуса.

В описанном процессе высота H пирамиды не изменяется, а площади многоугольников $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ стремятся к площади S круга, являющегося основанием конуса. Значит, объем V конуса равен третьей доле произведения площади S основания конуса и его высоты H:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Используя рис. 113, можем, как и для усеченной пирамиды (см. § 3), доказать, что **объем V усеченного конуса равен третьей доле произведения высоты H конуса и суммы площадей S_1 и S_2 оснований конуса и их среднего геометрического $\sqrt{S_1S_2}$:**

$$V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

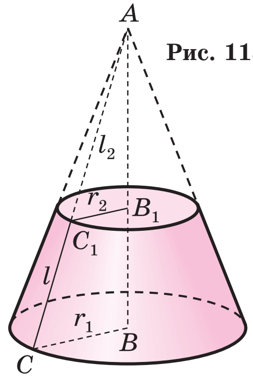


Рис. 113

Пример 6. Объем конуса равен 54π. Сечение, параллельное основанию, по площади в 9 раз меньше него. Найдем объем усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания конуса, h — его высота, r_1 — радиус сечения, h_1 — высота отсеченного конуса (рис. 114).

По теореме **6а**, $r_1 = kr$, $h_1 = kh$ при определенном k. Поскольку по условию $\frac{\pi r_1^2}{\pi r^2} = \frac{1}{9}$, то $k = \frac{1}{3}$.

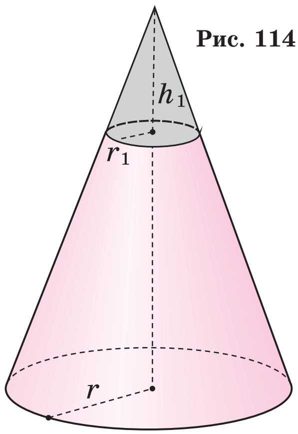


Рис. 114

Найдем объем V_1 отсеченного конуса:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27} \cdot 54\pi = 2\pi.$$

Значит, объем усеченного конуса равен $54\pi - 2\pi$, т. е. 52π.

О т в е т: 52π.

1. Какое тело называется конусом?

2. Что называют поверхностью конуса; боковой поверхностью конуса; основанием конуса?

3. Какую прямую называют осью конуса?

4. Какой отрезок называют образующей конуса; высотой конуса?

5. Чему равна боковая поверхность конуса?

6. Какая фигура получается при пересечении конуса плоскостью, параллельной его основанию; плоскостью, проходящей через вершину?

7. Какое сечение конуса называют осевым сечением?

8. Сформулируйте свойства отрезков образующей и высоты конуса, на которые они разделяются плоскостью, параллельной основанию.

9. Сформулируйте свойства сечения конуса плоскостью, параллельной основанию.

10. Какое тело называется усеченным конусом?

11. Что называют основаниями усеченного конуса, его образующей и высотой?

12. Какую плоскость называют касательной плоскостью конуса?

13. Сформулируйте свойство касательной плоскости конуса.

14. Сформулируйте признак касательной плоскости конуса.

15. Когда говорят, что пирамида вписана в конус; конус описан около пирамиды?

16. Когда говорят, что конус вписан в пирамиду; пирамида описана около конуса?

17. Чему равен объем конуса; объем усеченного конуса?

Задача 1. Высота конуса равна $6\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности конуса, учитывая, что его диагональным сечением является правильный треугольник.

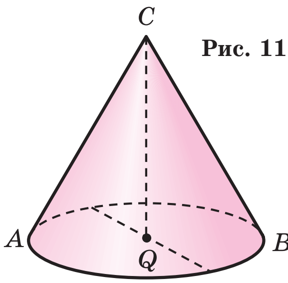


Рис. 115

Р е ш е н и е. Пусть ABC — осевое сечение конуса с осью CQ (рис. 115). Тогда $CQ = 6\sqrt{3}$, а треугольник ABC — равносторонний. Значит, для образующей l получаем:

$$l = AC = \frac{CQ}{\cos\angle ACQ} = \frac{6\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 12, \text{ так как } \angle AQC = 90^\circ,\ \angle ACQ = 30^\circ.$$

Тогда для радиуса r основания конуса верно: $r = AQ = \frac{1}{2}AC = 6$.

Поэтому $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi r(r + l) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 12) = 108\pi$.

О т в е т: 108π.

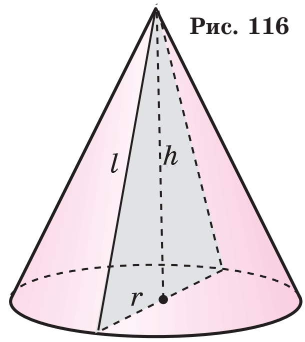


Рис. 116

Задача 2. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен 240°. Найдите площадь боковой поверхности конуса, учитывая, что его высота равна $4\sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. Образующая l конуса, его высота h, радиус r основания и центральный угол φ развертки боковой поверхности связаны равенствами $l^2 = r^2 + h^2$ и $\varphi l = 360r$. Поэтому $l = 1{,}5r$ и $2{,}25r^2 = r^2 + 80$, откуда $r = 8$ и $l = 12$.

Значит, $S_{\text{бок}} = \pi rl = \pi \cdot 8 \cdot 12 = 96\pi$.

О т в е т: 96π.

Задача 3. Объем конуса равен 36π, а площадь осевого сечения — 18. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Р е ш е н и е. Пусть r — радиус основания конуса, h — его высота (рис. 116). Тогда: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, или $36\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, или $r^2 h = 108$. Но rh есть площадь осевого сечения, и по условию $rh = 18$. Поэтому $r^2 h = rh \cdot r = 18r$, значит, $18r = 108$. Далее находим: $r = 108 : 18 = 6$, $h = 18 : 6 = 3$.

По теореме Пифагора, радиус основания конуса, его высота и образующая l связаны равенством $r^2 + h^2 = l^2$, тогда:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5} \text{ и } S_{\text{бок}} = \pi rl = 18\pi\sqrt{5}.$$

О т в е т: $18\pi\sqrt{5}$.

Задача 4. В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 6 вписан конус (рис. 117). Найдите площадь боковой поверхности конуса, учитывая, что плоские углы при вершине пирамиды прямые.

Р е ш е н и е. Боковые грани пирамиды — прямоугольные равнобедренные треугольники с катетами 6. Поэтому ребро a основания пирамиды равно $6\sqrt{2}$, а высота h, проведенная в боковой грани к ребру основания (гипотенузы), — $3\sqrt{2}$.

Конус, вписанный в пирамиду, имеет с ней общую высоту. Поскольку пирамида правильная, то основание O высоты является центром правильного треугольника основания и центром круга, который касается сторон треугольника основания и является основанием конуса.

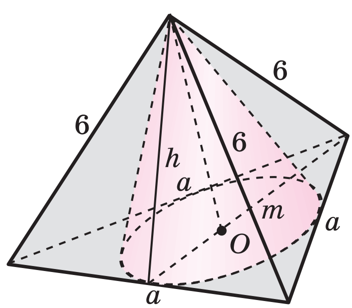


Рис. 117

Находим медиану m основания пирамиды $m = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ и радиус r основания конуса $r = \frac{1}{3}m = \sqrt{6}$. Поскольку основание конуса касается ребер основания пирамиды в их серединах, то, по теореме о трех перпендикулярах, образующей конуса является высота h боковой грани пирамиды. Поэтому $S_{\text{бок}} = \pi r h = 6\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $6\sqrt{3}\pi$.

Задача 5. Есть конус с высотой h и радиусом основания r. Найдите, на каком расстоянии от плоскости основания необходимо провести параллельную плоскость, чтобы она разделяла конус на части, объемы которых относились бы как 7 : 1.

Решение. Пусть плоскость, параллельная основанию конуса, проходит на расстоянии x от основания и пересекает конус по окружности радиуса r_1. Тогда, по теореме **6а**, $r_1 = kr$, $h - x = kh$ при определенном k. Поскольку по условию $\frac{1}{3}\pi r_1^2(h-x) : \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = 1 : (1+7)$, $k^3 = \frac{1}{8}$, поэтому $k = \frac{1}{2}$. Значит, $\frac{h-x}{h} = \frac{1}{2}$, и поэтому $x = \frac{h}{2}$.

Ответ: $\frac{h}{2}$.

190. Найдите:

а) образующую конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 118;

б) высоту конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 119;

в) боковую поверхность конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 120;

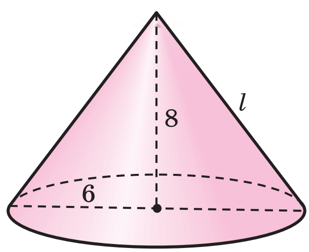


Рис. 118

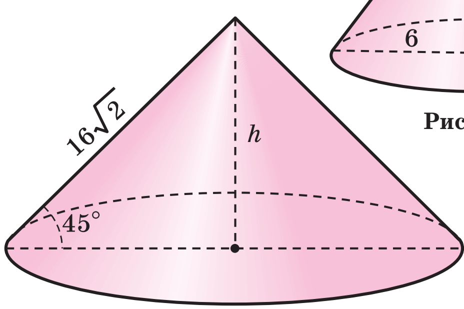


Рис. 119

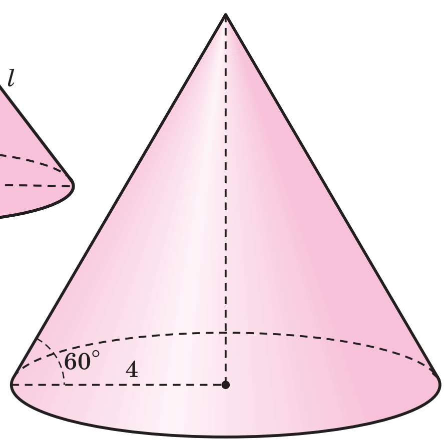


Рис. 120

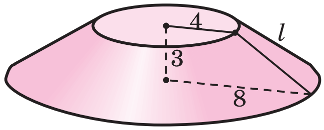


Рис. 121

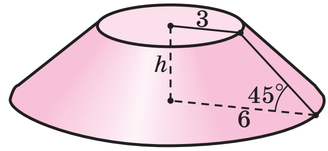


Рис. 122

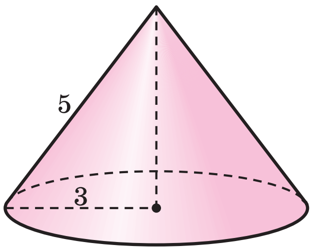
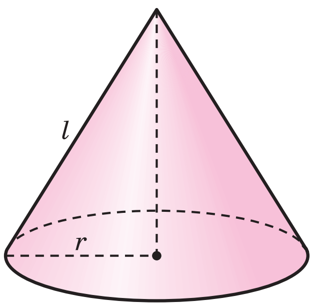


Рис. 123



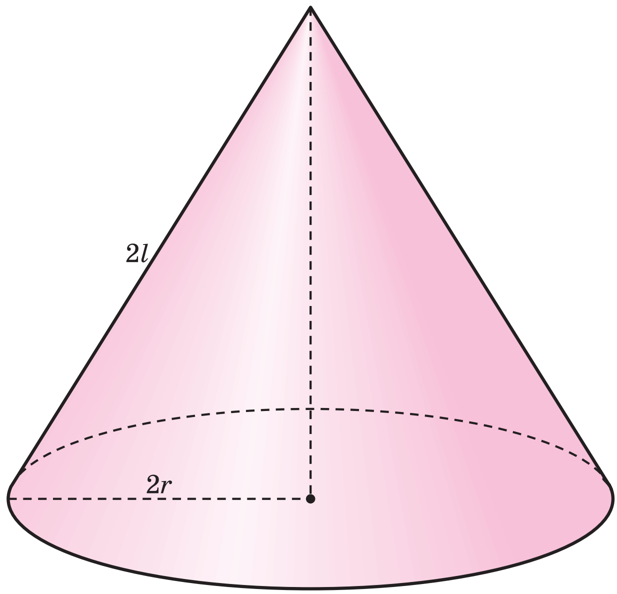


Рис. 124

г) образующую усеченного конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 121;
д) высоту усеченного конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 122;
е) полную поверхность конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 123;
ж) отношение полных поверхностей конусов, учитывая данные, приведенные на рис. 124.

191. Найдите образующую конуса, высота которого равна 45 см, а радиус основания — 24 см.

192. Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, учитывая, что:
а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$.

193. Найдите боковую поверхность и площадь основания конуса, учитывая, что его осевое сечение — равносторонний треугольник с высотой $2\sqrt{3}$ см.

194. Найдите поверхность тела, образованного вращением:
а) прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см вокруг меньшего катета;
б) равнобедренного треугольника с боковой стороной m и углом при основании φ вокруг основания;
в) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему углом в $60°$ вокруг оси, проходящей через вершину данного острого угла перпендикулярно катету.

195. Найдите полную поверхность конуса, у которого:
а) площадь осевого сечения равна 0,6 м^2, а высота конуса — 1,2 м;
б) площадь осевого сечения равна 25 см^2, а угол между высотой и образующей — $45°$;
в) образующая наклонена под углом φ к основанию, а вписанный в него треугольник имеет одной стороной отрезок длиной a и противолежащий угол величиной α.

196. Найдите боковую поверхность конуса, высота которого равна 4 см, а угол при вершине осевого сечения равен $90°$.

197. Определите угол развертки боковой поверхности конуса, у которого:
а) наибольший угол между образующими является прямым;
б) образующая составляет с плоскостью основания угол в $30°$;
в) радиус основания которого равен r, а образующая — l.

198. Сектор с радиусом 6 м и углом в $120°$ свернут в коническую поверхность. Найдите площадь основания и высоту соответствующего конуса.

199. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей соответствующего конуса и его высотой.

200. Отношение боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{1}{8}$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

201. Площадь основания конуса равна S_1, а его боковая поверхность — S_0. Найдите площадь осевого сечения конуса.

202. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в $120°$, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите площадь сечения, учитывая, что радиус основания равен 20 см.

203. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, учитывая, что:
а) она проведена через вершину конуса и отсекает от окружности основания дугу в $90°$, а высота конуса равна радиусу основания r;
б) она проведена через две взаимно перпендикулярные образующие, высота конуса равна h и наклонена к образующей под углом в $60°$;
в) она проведена через вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол в $60°$ и отсекает от окружности основания с радиусом r дугу в $120°$;

г) она проведена через вершину конуса и отстоит от центра основания на 24 см, высота конуса равна 40 см, а радиус основания — 50 см;
д) она параллельна основанию конуса с радиусом R и отстоит на d от вершины, а высота конуса равна H.

204. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2m$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен:
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

205*. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, который имеет три попарно перпендикулярные образующие.

206*. Определите, на каком расстоянии от основания проходят две плоскости, параллельные плоскости основания и делящие боковую поверхность конуса на три равные части, учитывая, что высота конуса равна H.

207. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная его образующей, длина которой равна l. Найдите длину отрезка прямой, который заключен внутри конуса.

208. Есть конус с образующей 13 см и высотой 12 см, пересеченный прямой, параллельной основанию и отстоящей от основания на 6 см, а от высоты на 2 см (рис. 125). Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри конуса.

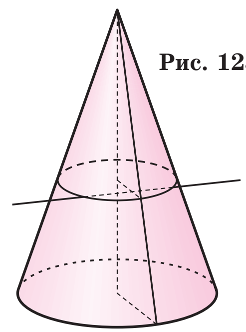


Рис. 125

209. Через середину высоты конуса, боковая поверхность которого равна 80 см^2, проведена плоскость, перпендикулярная высоте. Найдите боковую поверхность образовавшегося усеченного конуса.

210. Учитывая, что радиусы оснований усеченного конуса равны:
а) 9 см и 18 см, а высота — 12 см, найдите его образующую;
б) 16 см и 4 см, а образующая — 20 см, найдите его высоту.

211. Найдите поверхность усеченного конуса, учитывая, что радиусы его оснований равны 6 см и 10 см, а образующая — 10 см.

212. Докажите, что:
а) боковая поверхность конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 126);

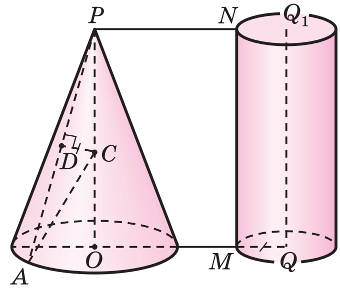


Рис. 126

б) боковая поверхность усеченного конуса равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным высоте равнобедренного треугольника, основанием которого является образующая, а вершина лежит на оси конуса (рис. 127).

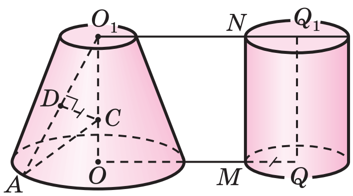


Рис. 127

213. Найдите площадь сечения усеченного конуса плоскостью, учитывая, что она проходит через:

а) две его образующие, отсекает от окружности основания дугу в $120°$, радиусы оснований конуса равны 3 и 5, а высота — $\sqrt{2}$;

б) середину высоты, параллельна основаниям, площади которых равны 16 дм^2 и 64 дм^2.

214. Найдите:

а) объем V конуса, учитывая данные, приведенные на рис. 128;

б) отношение объемов конусов, учитывая данные, приведенные на рис. 129.

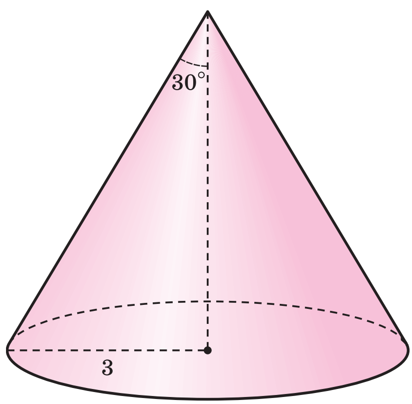


Рис. 128

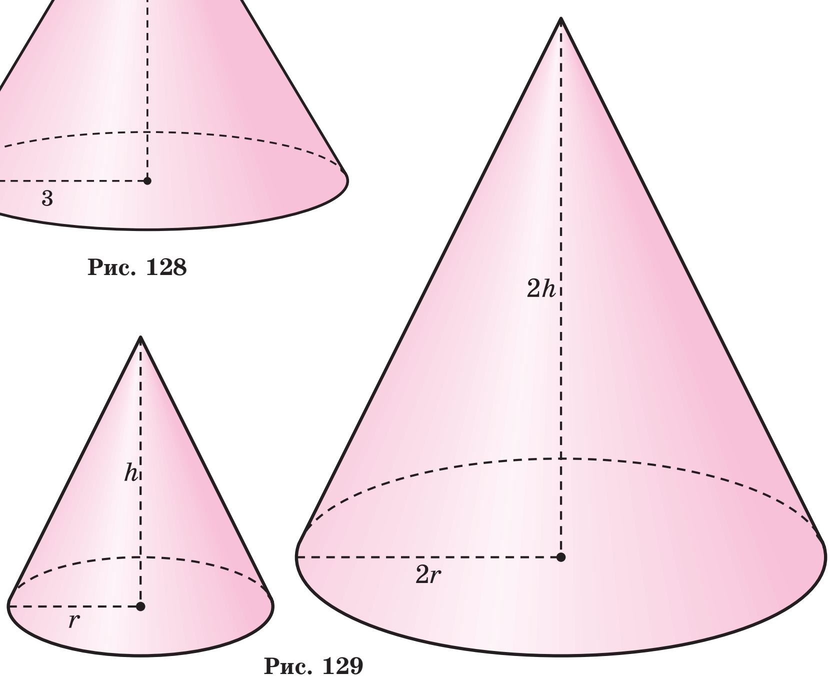


Рис. 129

215. Найдите объем конуса, у которого:
а) диаметр основания равен 40 см, а высота — 50 см;
б) образующая равна 60 см, а высота — 30 см;
в) радиус основания равен 85 см, а образующая составляет с осью конуса угол в 30°;
г) радиус основания равен 42 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом в 65°;
д) полная поверхность равна 680 дм^2, а образующая — 25 дм;
е) полная поверхность равна 160 см^2, а образующая больше радиуса основания на 2 см.

216. Пусть h, r и V — соответственно высота, радиус основания и объем конуса. Найдите:
а) V, учитывая, что $h = 12$ см, $r = 6$ см;
б) h, учитывая, что $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3;
в) r, учитывая, что $h = m$, $V = p$.

217. Две стороны треугольника равны b и c, а тупой угол между ними — α. Найдите объем тела, образованного вращением треугольника около стороны b.

218. Найдите объем конуса, учитывая, что его:
а) высота равна H и равна диаметру его основания;
б) образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения — 60 см^2;
в) образующая равна l, а боковая поверхность — P;
г) площадь его основания равна Q, а боковая поверхность — P.

219. Докажите, что если треугольник вращается вокруг стороны, то объем полученного тела равен $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — сторона, вокруг которой осуществляется вращение, а R — высота треугольника, опущенная на эту сторону.

220. Найдите объем тела, полученного вращением:
а) треугольника со сторонами 15 см, 41 см и 52 см вокруг большей стороны;
б) прямоугольного треугольника с площадью S и острым углом α около его гипотенузы;
в) параллелограмма с площадью Q вокруг стороны длиной a.

221. На расстоянии 2 см от вершины конуса с высотой 5 см проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, учитывая, что объем конуса, отсеченного от исходного, равен 24 см^3.

222. Высота конуса разделена на три доли, и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания конуса. Определите, в каком отношении этими плоскостями делится объем конуса.

223. Есть конус, радиус основания которого равен r, а высота — H. Определите, на каком расстоянии от плоскости основания нужно провести плоскость, параллельную ей, чтобы этой плоскостью конус разделился на части, объемы которых относятся как:
а) 1 : 1; б) 3 : 5; в) 5 : 3; г) 7 : 1.

224. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 6 м, пересекает его по кругу с радиусом 3 м. Найдите объемы полученных частей конуса, учитывая, что плоскость разделяет образующую конуса на части, из которых та, что ограничена этой плоскостью и основанием конуса, равна 5 м.

225. Плоскость, параллельная основанию конуса с радиусом 6 м, пересекает его по кругу с радиусом 4 м. Образованный усеченный конус равновелик цилиндру такой же высоты. Найдите радиус основания этого цилиндра.

226*. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг прямой, параллельной гипотенузе, отстоящей от нее на высоту, проведенную к гипотенузе, и не имеющей с треугольником общих точек (рис. 130). Найдите объем полученного тела.

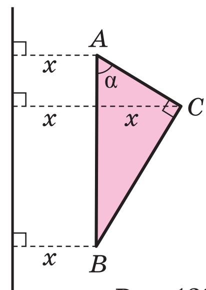


Рис. 130

227. В конусе просверлили цилиндрическое отверстие, ось которого совпадает с осью конуса. Найдите объем образовавшегося тела, учитывая, что высота конуса равна 30 см, диаметр его основания — 20 см, а диаметр цилиндрического отверстия — 10 см.

228. В треугольную пирамиду с равными ребрами вписан конус, и около этой пирамиды описан конус. Определите, во сколько раз полная поверхность описанного конуса больше полной поверхности вписанного конуса.

229. Высота конуса равна 4 см, а радиус — 6 см. Найдите полную поверхность правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

230. В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна a, а острый угол между его диагоналями — α. Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем конуса.

231. Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом φ. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем конуса.

232. Есть конус с радиусом основания 5 см и высотой 4 см, в который вписана правильная n-угольная пирамида. Плоскость, параллельная основанию конуса, пересекает его по кругу с радиусом 2 см. Найдите полную поверхность части пирамиды, заключенной между основанием конуса и секущей плоскостью, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 5$.

233. Найдите ребро:
а) куба, вписанного в конус с радиусом основания R и высотой H (рис. 131);
б) правильной треугольной призмы, у которой боковые грани являются квадратами и которая вписана в конус с радиусом основания R и высотой H.

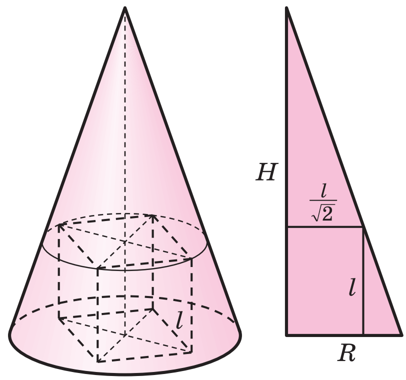


Рис. 131

234*. Есть конус с образующей l, наклоненной к плоскости основания конуса под углом в 60°. В него вписана правильная треугольная призма, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания (рис. 132). Найдите это ребро.

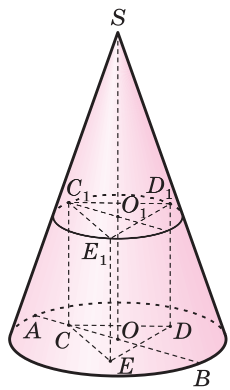


Рис. 132

235. Приняв плотность стали равной 7,8 г/см³, найдите массу стальной круглой детали, измерения которой в миллиметрах даны на рисунке:
а) 133; б) 134.

236*. Вокруг конуса описана четырехугольная пирамида. Докажите, что суммы площадей ее не смежных боковых граней равны между собой.

237*. Вокруг конуса описана треугольная пирамида. Площади ее боковых граней относятся как 5 : 6 : 7. Определите, в каком отношении линии касания разделяют боковую поверхность пирамиды.

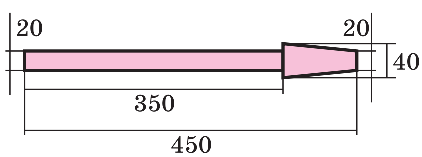


Рис. 133

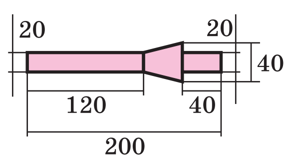


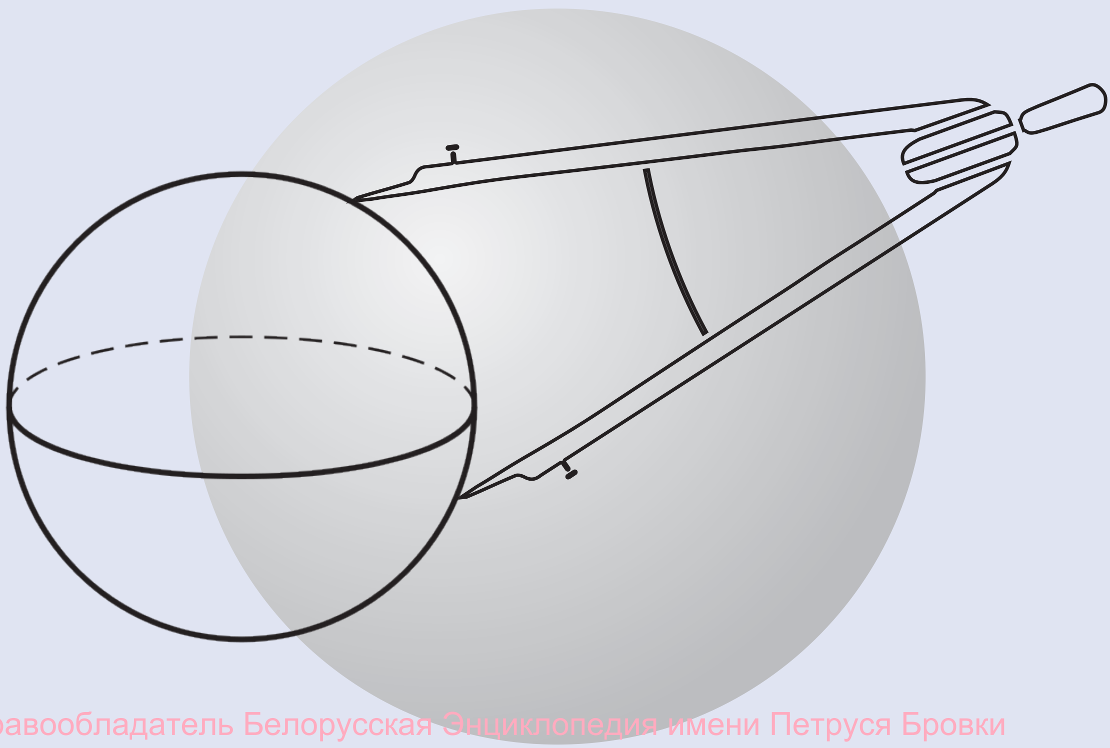
Рис. 134

Раздел 3

Сфера и шар

В этом разделе вы:

- узнаете, какое тело называют шаром и какую поверхность — сферой;
- познакомитесь с касательной прямой и касательной плоскостью сферы;
- познакомитесь с конфигурациями — многогранником, вписанным в шар, и шаром, вписанным в многогранник; цилиндром, вписанным в шар, и шаром, вписанным в цилиндр; конусом, вписанным в шар, и шаром, вписанным в конус;
- научитесь находить площадь сферы и объем шара;
- научитесь находить по известным характеристикам сферы и шара другие их характеристики;
- научитесь решать разнообразные задачи, условия которых содержат конфигурации с шаром.



§ 5. Сфера

А) Сферой называется поверхность, полученная вращением окружности вокруг какого-либо ее диаметра (рис. 135). Центр этой окружности называется **центром сферы.**

Отрезок, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, называется **радиусом сферы.** Отрезок, соединяющий две точки сферы, — **хордой сферы**, а хорда, которой принадлежит центр сферы, — **диаметром сферы** (рис. 136).

Из определения сферы следует, что все ее точки равноудалены от центра сферы. Поэтому все радиусы сферы равны друг другу.

Теорема 1. Сечение сферы плоскостью есть окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

Доказательство. Пусть сфера с центром O пересечена плоскостью α, и Q — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на плоскость α (рис. 137).

Пусть X и Y — произвольные точки линии пересечения сферы с плоскостью α. Треугольники OQX и OQY оба прямоугольные, так как отрезок OQ перпендикулярен плоскости α, а значит, и отрезкам QX и QY, лежащим в этой плоскости. Отрезок OQ является общим катетом, а гипотенузы этих треугольников равны как радиусы сферы. Поэтому треугольники OQX и OQY равны друг другу, а значит, $QX = QY$. Получили, что любые две точки линии пересечения сферы плоскостью α равноудалены от основания Q перпендикуляра, опущенного из центра сферы на эту плоскость.

Вместе с этим, если точка M плоскости α принадлежит окружности ω с центром Q и радиусом QX, то прямоугольные треугольники OQM и OQX равны, поэтому равны и их гипотенузы OM и OX. Получили, что каждая точка окружности ω принадлежит как плоскости α, так и сфере.

Значит, линия пересечения сферы с плоскостью есть окружность с центром Q.

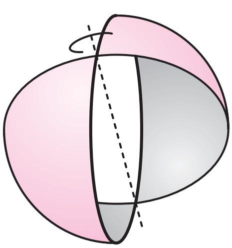


Рис. 135

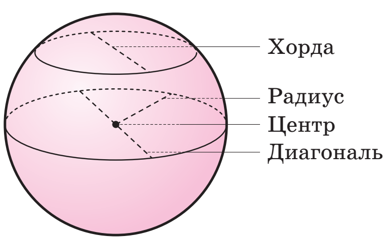


Рис. 136

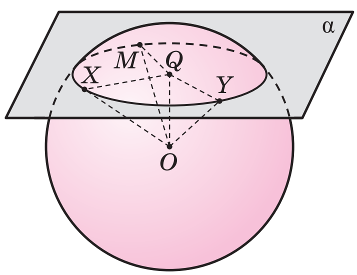


Рис. 137

Следствие. Если плоскость проходит на расстоянии d от центра сферы с радиусом R, то окружность сечения имеет радиус r, равный $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Сечение имеет наибольший радиус R, если секущая плоскость проходит через центр сферы, это сечение называют *большой окружностью*, а ограниченный ею круг — *большим кругом*.

Пример 1. Точки A, B, C сферы з радиусом 9 выбраны так, что $AC = 8$ и $\angle ABC = 45°$. Найдем расстояние от центра сферы до плоскости треугольника ABC.

Решение. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O сферы на плоскость ABC (рис. 138). Поскольку наклонные OA, OB, OC равны как радиусы сферы, то равны и их проекции на плоскость ABC, это значит, $O_1A = O_1B = O_1C$. Поэтому O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Учитывая, что отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла равно диаметру описанной окружности, из треугольника ABC найдем:

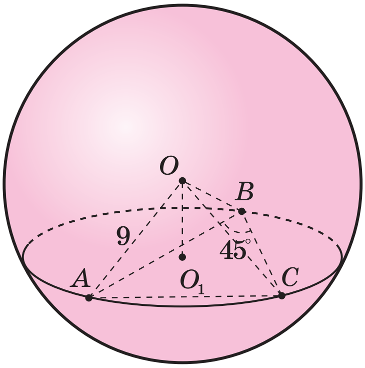


Рис. 138

$$O_1A = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{8}{2\sin 45°} = 4\sqrt{2}.$$

Теперь можно найти катет OO_1 прямоугольного треугольника AOO_1:

$$OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{81 - 32} = 7.$$

Ответ: 7.

Теорема 2. Две сферы пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна прямой, проходящей через центры сфер.

Доказательство. Пусть есть две пересекающиеся сферы, с центрами O_1 и O_2, и A — какая-либо их общая точка (рис. 139). Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой O_1O_2. Пусть эта плоскость пересекает прямую O_1O_2 в точке B. В соответствии с теоремой **1**, плоскость α пересекает ту и другую сферы по окружности с центром B. Получили, что окружность с центром B является общей окружностью данных сфер.

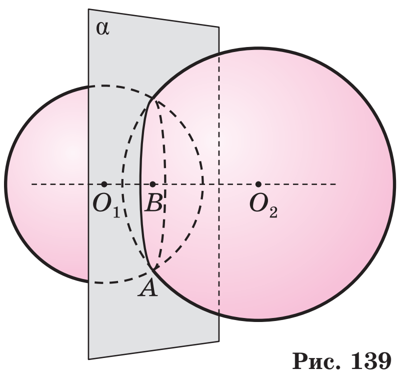


Рис. 139

Других общих точек данные окружности не имеют. Допустим, что это не так. Пусть C — какая-либо общая точка сфер, не принадлежащая окружности с центром B. Через точки C, O_1 и O_2 проведем плоскость, которая пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, которые принадлежат окружности с центром B, и вместе с этим им обеим принадлежит точка C. Но это противоречит утверждению о том, что две окружности имеют не более двух общих точек.

Б) Плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется **касательной плоскостью сферы.** Общая точка сферы и касательной плоскости называется *точкой касания*.

Прямая касательной плоскости сферы, проходящая через точку касания, имеет со сферой единственную общую точку. Такая прямая называется *касательной прямой сферы*.

Теорема 3. Касательная плоскость сферы перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Пусть плоскость α касается сферы с центром O в точке C (рис. 140). Пусть B — произвольная точка плоскости α, отличная от точки C. Через точки O, C, B проведем плоскость β, она, по теореме **1**, пересекает сферу по окружности. По отношению к этой окружности прямая BC является касательной, так как точка C — их единственная общая точка. По свойству касательной к окружности, радиус OC перпендикулярен прямой BC. Таким образом, радиус OC перпендикулярен любой прямой BC, проведенной в плоскости α через ее точку C. Значит, радиус OC перпендикулярен плоскости α.

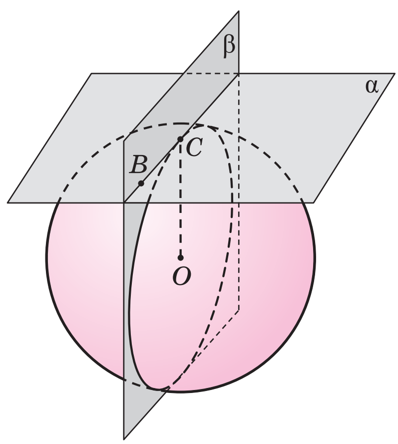


Рис. 140

Теорема 4. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной плоскостью сферы.

Доказательство. Пусть плоскость γ проходит через точку M сферы и перпендикулярна радиусу OM (рис. 141). Пусть N — произвольная точка плоскости γ, отличная от точки M. Треугольник OMN прямоугольный с гипотенузой ON, и она длинее катета.

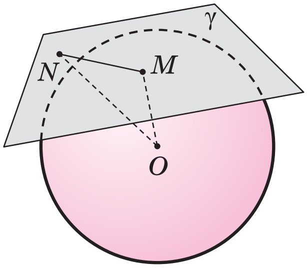


Рис. 141

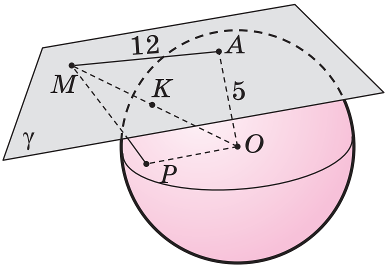


Рис. 142

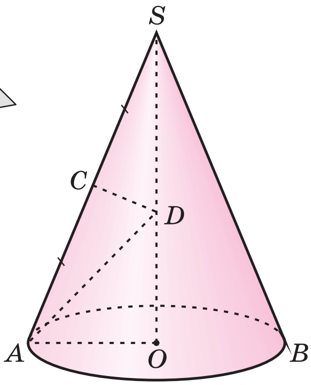


Рис. 143

Поэтому точка N расположена вне сферы. Получается, что любая точка плоскости γ, кроме точки M, не принадлежит сфере. Значит, точка M — единственная общая точка плоскости γ и сферы, а поэтому плоскость γ является касательной плоскостью сферы.

Теоремы **3** и **4** выражают соответственно *свойство* и *признак касательной плоскости сферы*.

Пример 2. Плоскость γ касается сферы с радиусом 5 в точке A. На плоскости γ выбрана точка M. Найдем расстояние от M до ближайшей точки сферы, учитывая, что $AM = 12$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр сферы (рис. 142). Поскольку $OA \perp AM$, то:

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Пусть P — некоторая точка сферы, тогда, из неравенства треугольника, следует, что:

$$MP + PO \geqslant OM, \text{ или } MP \geqslant OM - PO = 13 - 5 = 8.$$

Если K — точка сферы на отрезке OM, то выполняется равенство $MK = OM - KO$. Поэтому наиболее близкая к M точка сферы находится на расстоянии 8.

О т в е т: 8.

В) Прежде чем доказать утверждение о площади поверхности сферы, обобщим утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.

Теорема 5. Боковая поверхность конуса, усеченного конуса, цилиндра равна боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, равным длине перпендикуляра, соединяющего середину образующей с точкой на оси этого тела.

Доказательство. Пусть есть конус с вершиной S, основанием которого является круг с центром O. Пусть SAB — осевое сечение конуса (рис. 143). В плоскости AOS к образующей AS из ее середины C возведем перпендикуляр, который пересечет ось SO в некоторой точке D.

Прямоугольные треугольники AOS и DCS подобны, так как у них угол при вершине S общий. Поэтому:

$$\frac{OA}{OS} = \frac{CD}{CS}, \text{ или } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{2CS}, \text{ или } \frac{OA}{OS} = \frac{2CD}{AS}.$$

Отсюда $AS \cdot OA = 2OS \cdot CD$.

С учетом этого для боковой поверхности $S_{бок}$ конуса будем иметь:

$$S_{бок} = \pi \cdot AS \cdot OA = 2\pi \cdot OS \cdot CD.$$

Пусть есть усеченный конус, полученный вращением прямоугольной трапеции O_1EGO_2 со средней линией HL вокруг боковой стороны O_1O_2, которая перпендикулярна основаниям O_1E и O_2G, отрезок EM — проекция EG на основание O_1E (рис. 144). В плоскости O_1EG к образующей EG усеченного конуса из его середины H возведем перпендикуляр, который пересечет ось SO в некоторой точке K. Прямоугольные треугольники EGM и KHL подобны, так как их стороны попарно перпендикулярны. Поэтому:

$$\frac{HK}{HL} = \frac{EG}{GM} \quad \text{или} \quad \frac{HK}{HL} = \frac{EG}{O_1O_2}.$$

Отсюда $EG \cdot HL = O_1O_2 \cdot HK$. С учетом этого для боковой поверхности $S_{бок}$ усеченного конуса будем иметь:

$$S_{бок} = 2\pi \cdot EG \cdot HL = 2\pi \cdot O_1O_2 \cdot HK.$$

Для цилиндра утверждение очевидно (рис. 145).

Теорема 6. Поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга:

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2}.$$

Доказательство. Пусть есть сфера, образованная вращением полуокружности AB вокруг своего диаметра (рис. 146). Впишем в эту дугу ломаную $AM_1M_2M_3...M_{n-1}M_nB$ с равными звеньями и из точек M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1}, M_n опустим перпендикуляры M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ..., $M_{n-1}P_{n-1}$, M_nP_n на диаметр AB.

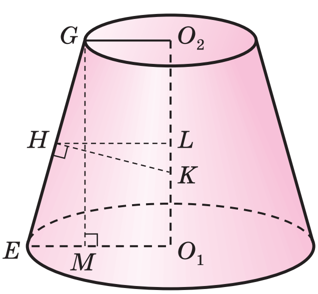


Рис. 144

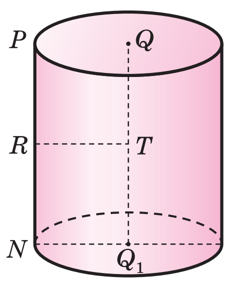


Рис. 145

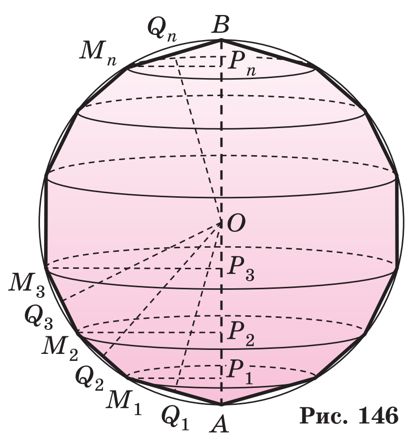


Рис. 146

Пусть Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{n-1}, Q_n — середины звеньев ломаной. Тогда OQ_1, OQ_2, OQ_3, ..., OQ_{n-1}, OQ_n — серединные перпендикуляры к этим звеньям. При вращении вокруг AB звенья ломаной будут описывать или конусы, или усеченные конусы, или цилиндр. Поэтому, в соответствии с теоремой **5**, для образовавшейся поверхности S_n получим:

$$S_n = 2\pi \cdot AP_1 \cdot OQ_1 + 2\pi \cdot P_1P_2 \cdot OQ_2 + 2\pi \cdot P_2P_3 \cdot OQ_3 + \ldots +$$
$$+ 2\pi \cdot P_{n-1}P_n \cdot OQ_{n-1} + 2\pi \cdot P_nB_n \cdot OQ_n.$$

Учтем, что отрезки OQ_1, OQ_2, OQ_3, ..., OQ_{n-1}, OQ_n все равны друг другу:

$$S_n = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot \left(AP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \ldots + P_{n-1}P_n + P_nB\right) = 2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB.$$

Пусть радиус сферы равен R. Тогда $AB = 2R$.

Будем неограниченно увеличивать количество звеньев ломаной. Тогда отрезок OQ_1 будет стремиться к радиусу сферы, а выражение $2\pi \cdot OQ_1 \cdot AB$ — к выражению $2\pi \cdot R \cdot 2R$, т. е. к выражению $4\pi R^2$. Этот предел и принимается в качестве площади поверхности сферы.

Учитывая, что πR^2 выражает площадь большого круга, получим, что поверхность сферы равна учетверенной площади большого круга.

Пример 3. Две сферы пересекаются по окружности длиной 4,8π. Найдем площадь третьей сферы, которая проходит через центры этих двух сфер и линию их пересечения, учитывая, что радиус одной из данных сфер равен 3.

Р е ш е н и е. Пусть A и B — центры пересекающихся сфер, K — центр окружности, по которой они пересекаются, и C — точка на линии их пересечения (рис. 147). Поскольку центр искомой сферы равноудален от каждой точки линии пересечения данных сфер, то он принадлежит прямой AB. Поэтому AB — диаметр третьей сферы и $\angle ACB = 90°$. Плоскость, в которой лежит линия пересечения двух сфер, перпендикулярна прямой AB, поэтому $KC \perp AB$ и KC — радиус общей окружности сфер. Из условия следует, что $2\pi \cdot KC = 4{,}8\pi$. Значит, $KC = 2{,}4$.

Пусть одна из данных сфер, например сфера с центром A, имеет радиус 3.

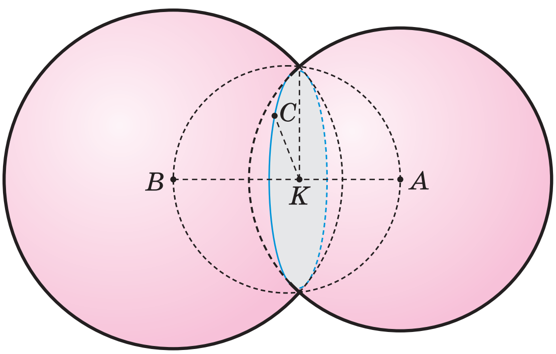


Рис. 147

Тогда из прямоугольного треугольника AKC находим, что:

$$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8.$$

Поскольку AK — проекция катета AC на гипотенузу AB в прямоугольном треугольнике ABC, то $AB \cdot AK = AC^2$, откуда $AB = \frac{AC^2}{AK} = \frac{3^2}{1,8} = 5.$

В этом случае площадь третьей сферы равна $\pi \cdot AB^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π.

1. Какая поверхность называется сферой, какая точка называется центром сферы?

2. Какой отрезок называется радиусом сферы; хордой сферы; диаметром сферы?

3. По какой фигуре пересекаются сфера и плоскость; две сферы?

4. Какое сечение сферы плоскостью называют большой окружностью, какой круг называют большим кругом?

5. Какая плоскость называется касательной плоскостью сферы, какая точка называется точкой касания плоскости и сферы?

6. Какая прямая называется касательной прямой сферы?

7. Сформулируйте свойство касательной плоскости сферы; признак касательной плоскости сферы.

8. Сформулируйте утверждение, которое обобщает утверждения о боковых поверхностях конуса, усеченного конуса и цилиндра.

9. Чему равна поверхность сферы?

Задача 1. Две паралельные плоскости, расстояние между которыми равно 9 см, пересекают сферу по окружностям с радиусами 2 см и 7 см. Найдите радиус сферы, учитывая, что плоскости проходят по разные стороны от ее центра.

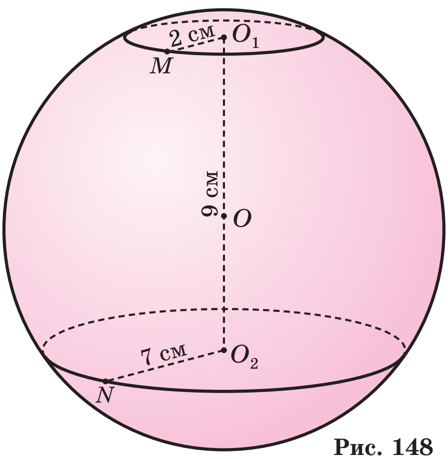


Рис. 148

Решение. Пусть плоскости α и β пересекают сферу с центром O по окружностям, радиусы O_1M и O_2N которых равны 2 см и 7 см соответственно (рис. 148), причем $O_1O_2 = 9$ см.

Поскольку $OO_1 \perp \alpha$, $OO_2 \perp \beta$ и $\alpha \parallel \beta$, то точка O принадлежит отрезку O_1O_2. Пусть $OO_1 = a$, тогда $OO_2 = 9 - a$,

$$OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2 = a^2 + 2^2, \quad ON^2 = OO_2^2 + O_2N^2 = (9 - a)^2 + 7^2.$$

Поэтому $a^2 + 2^2 = (9 - a)^2 + 7^2$.

Отсюда находим, что $a = 7$, а $OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$ (см).

Ответ: $\sqrt{53}$ см.

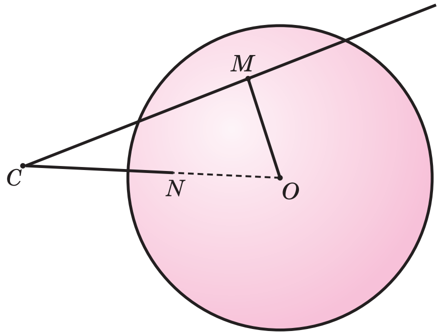


Рис. 149

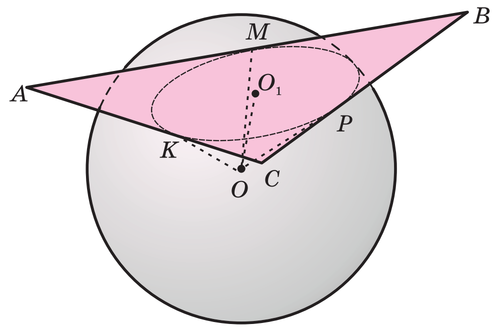


Рис. 150

Задача 2. Из точки C, отстоящей на 18 см от сферы, проведена касательная к ней. Найдите длину касательной, учитывая, что диаметр сферы равен 14 см.

Р е ш е н и е. Пусть точка C находится на расстоянии 18 см от сферы с центром O и диаметром 14 см, CM — касательная прямая (рис. 149). Самой близкой к C точкой сферы является точка N отрезка OC.

Поскольку $CM \perp OM$, то $\triangle CMO$ — прямоугольный, поэтому:

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{(ON + NC)^2 - OM^2} = \sqrt{(7 + 18)^2 - 7^2} = 24 \text{ (см)}.$$

О т в е т: 24 см.

Задача 3. Треугольник со сторонами 10, 10 и 12 касается сферы с радиусом 5. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = 12$, $AC = BC = 10$, стороны AB, AC и BC треугольника ABC касаются сферы с центром O в точках M, K и P соответственно, O_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC (рис. 150). Поскольку радиусы сферы, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным, то $OM \perp AB$, $OK \perp AC$ и $OP \perp BC$. По теореме о трех перпендикулярах, $O_1M \perp AB$, $O_1K \perp AC$ и $O_1P \perp BC$. Прямоугольные треугольники OO_1M, OO_1K и OO_1P равны, так как имеют общий катет OO_1 и равные гипотенузы. Поэтому $O_1M = O_1K = O_1P$ и, значит, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Радиус r этой окружности найдем, используя формулу $S_\triangle = pr$, где p — полупериметр треугольника, $S_\triangle$ — его площадь.

Найдем последовательно полупериметр треугольника ABC, его площадь по формуле Герона, радиус r, а затем катет OO_1 в прямоугольном треугольнике OO_1M с известной гипотенузой OM, равной 5, и найденным другим катетом O_1M, равным r:

$$p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16, \quad S_\triangle = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48,$$

$$r = 48 : 16 = 3, \quad OO_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

О т в е т: 4.

238. Докажите, что:

а) радиус r сечения сферы плоскостью удовлетворяет условию $0 < r \leqslant R$, где R — радиус сферы;

б) радиусы сечений сферы плоскостями, равноудаленными от центра сферы, равны друг другу;

в) из двух сечений больший радиус имеет то, плоскость которого расположена ближе к центру.

239. Установите, верно ли, что:

а) любые две разные точки сферы определяют ее единственную большую окружность;

б) центр сферы является центром ее симметрии;

в) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы;

г) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии.

240. Найдите геометрическое место:

а) центров сфер, которым принадлежат вершины данного треугольника;

б) центров сфер данного радиуса, которые касаются граней данного двугранного угла.

241. Определите взаимное расположение сферы с центром O и радиусом R и плоскости ABC, учитывая, что треугольник ABC является основанием треугольной пирамиды $OABC$ с высотой OH и:

а) $R = 3$ дм, $OH = 30$ см; в) $R = 1$ дм, $OA = 9$ см;

б) $R = 6$ м, $OH = 190$ см; г) $R = 0{,}7$ дм, $OH = 8$ см.

242. Найдите длину окружности, являющейся:

а) сечением сферы с радиусом 82 см плоскостью, отстоящей от центра сферы на 18 см;

б) геометрическим местом точек сферы с диаметром 25 см, отстоящих от данной точки P этой сферы на 15 см.

243. Определите, через какие две точки сферы можно провести:

а) бесконечно много больших окружностей;

б) только одну большую окружность.

244. Сфера с радиусом R высекает из плоскости, отстоящей на d от ее центра, фигуру F. Найдите:

а) площадь S фигуры F, учитывая, что $R = 18$ см, $d = 12$ см;

б) R, учитывая, что площадь фигуры F равна 18π см^2, $d = 3$ см.

245. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости:

а) прямоугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 30 см, а диагональ равна 48 см;

б) треугольника, вершины которого лежат на сфере с радиусом 26 см, а стороны равны 12 см, 16 см и 20 см.

246. Найдите длину линии пересечения сфер, радиусы которых равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между центрами — 36 дм.

247. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 18 см и 24 см лежат на сфере. Определите:
а) положение центра сферы, радиус которой равен 15 см;
б) расстояние от центра сферы с радиусом 65 см до плоскости треугольника.

248. Через конец диаметра сферы с радиусом R проведена секущая плоскость под углом α к диаметру. Найдите длину полученного сечения, учитывая, что:
а) $R = 3$ см, $\alpha = 30°$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45°$.

249. Через середины радиуса R сферы перпендикулярно к нему проведена секущая плоскость. Найдите:
а) радиус полученного сечения;
б) площадь боковой поверхности и объем конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.

250. Найдите геометрическое место проекций точки A на все плоскости, которые можно провести через точку B.

251. Докажите, что вершины двух прямоугольников, которые лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону, принадлежат одной сфере.

252. Найдите радиус окружности, по которой пересекаются сферы, учитывая, что их радиусы равны R, а расстояние между центрами — $1{,}6R$.

253. Средний радиус Земли равен 6371 км. Найдите, какой путь пройдет за час в результате вращения Земли вокруг своей оси город:
а) Могилев, который находится на 53°54′ северной широты;
б) Белыничи, который находится на 53°55′ северной широты;
в) Витебск, который находится на 55°12′ северной широты;
г) Брест, который находится на 52°06′ северной широты.

254. Средний радиус Земли равен 6371 км. Телевизионные волны распространяются по прямой. Определите, на каком расстоянии можно принять телепередачу, учитывая, что высота телевизионной башни станции равна:
а) 150 м; б) 308 м; в) 537 м.

255. При пересечении сферы с радиусом 14 см с двумя плоскостями образуются две равные окружности с общей хордой 4 см (рис. 151). Найдите радиусы окружностей.

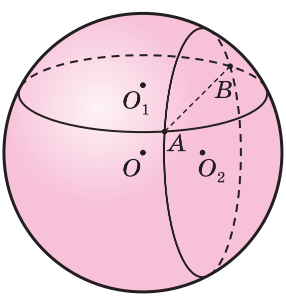


Рис. 151

256. Точка M отстоит на 16 см от ближайшей точки сферы с радиусом 10 см. Найдите длину такой окружности на сфере, все точки которой отстоят от точки M на 24 см.

257*. Вершина конуса принадлежит сфере, его ось проходит через центр, а образующая пересекает поверхность сферы. Найдите поверхность части конуса, размещенной внутри сферы, учитывая, что радиус сферы равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения конуса — 30°.

258*. На сфере с радиусом R выбраны такие точки A, B, C и D, что $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$ и $AD = BD = CD$. Найдите:
а) хорды AB и AD;
б) площадь сечения сферы плоскостью ABC.

259. Точка M находится в плоскости, которая касается сферы с радиусом R в точке A. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния от точки M до точек сферы, учитывая, что:
а) $MA = 15$ см и $R = 112$ см; б) $MA = 16$ см и $R = 63$ см.

260*. Есть тело, ограниченное двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь его сечения плоскостью, проходящей через центр сфер, равна площади сечения плоскостью, касательной к внутренней сфере (рис. 152).

261. Найдите расстояние от центра до плоскости треугольника, стороны которого касаются сферы с радиусом 5 см и равны 13 см, 14 см и 15 см.

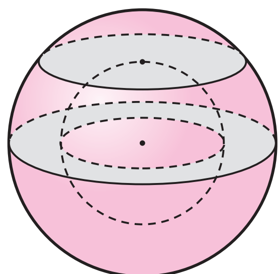


Рис. 152

262. Найдите расстояние от центра сферы с радиусом 10 см до плоскости ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, а все стороны касаются сферы.

263. Сфера касается сторон треугольника с длинами 10 см, 10 см и 16 см, а ее центр отстоит на 26 см от вершины большего угла. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

264. Через точку сферы с радиусом R проведены две плоскости, из которых одна касается сферы, а другая наклонена к ней под углом φ. Найдите длину окружности сечения.

265. Найдите радиус сферы и расстояние между точками ее касания с гранями двугранного угла в 120°, учитывая, что центр сферы отстоит на a от ребра угла.

266. Прямая отстоит на d от центра сферы с радиусом R. Докажите, что:
а) если $d < R$, то прямая пересекает сферу в двух точках;
б) если $d = R$, то прямая имеет только одну общую точку со сферой;
в) если $d > R$, то прямая не имеет со сферой общих точек.

267. Перпендикулярные плоскости так пересекают сферу, что полученные сечения имеют единственную общую точку, а их радиусы равны r_1 и r_2. Найдите поверхность сферы.

268. Найдите площадь сферы, радиус которой равен:

а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

269. Докажите, что:

а) поверхности сфер пропорциональны квадратам их радиусов;

б) полная поверхность цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг прямой, содержит одну из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата;

в) площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник с высотой, равной диаметру сферы.

270. Найдите поверхность сферы, учитывая, что:

а) длина большой окружности равна $6\sqrt{2\pi}$ м;

б) радиусы двух ее параллельных сечений, отстоящих на 3 см, равны 9 см и 12 см.

271. Найдите радиус:

а) сферы, поверхность которой равна 324 см^2;

б) круга, площадь которого равна поверхности сферы с радиусом 5 м.

272. Определите, сколько кожи пойдет на покрышку футбольного мяча с радиусом 10 см, добавив на швы 8 % площади поверхности мяча.

273. Средний радиус Земли равен 6371 км. Найдите:

а) площадь суши, учитывая, что вода покрывает примерно $\frac{3}{4}$ земной поверхности;

б) длину тропика, широта которого равна 23°27′;

в) длину полярного круга, широта которого равна 66°33′;

г) длину параллели, на которой расположен Минск (53°56′ северной широты).

274*. Секущая плоскость разделяет сферу на две поверхности (рис. 153), каждая из которых называется *сферическим куполом*. Окружность сечения называется *основанием купола*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр сферы, называют *высотой* соответствующего *сферического купола*.

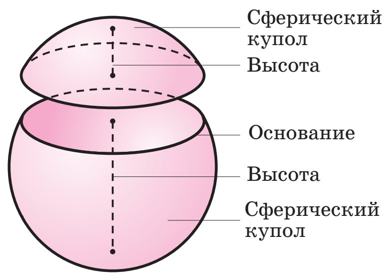


Рис. 153

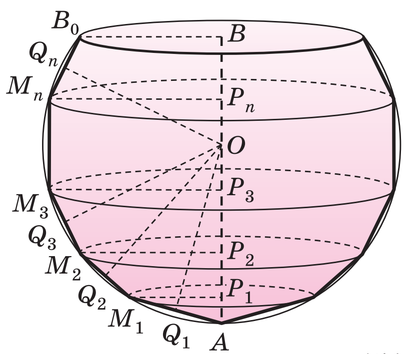


Рис. 154

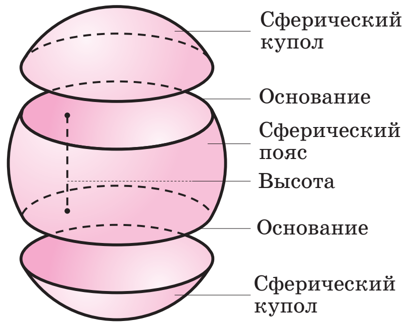


Рис. 155

Докажите, что поверхность сферического купола равна произведению его высоты и длины окружности большого круга (рис. 154).

275*. Две параллельные секущие плоскости разделяют сферу на два купола и еще одну поверхность (рис. 155), которую называют *сферическим поясом*. Окружности сечений называются *основаниями сферического пояса*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости на другую, называют *высотой сферического пояса*. Докажите, что поверхность сферического пояса равна произведению его высоты и длины окружности большого круга (рис. 156).

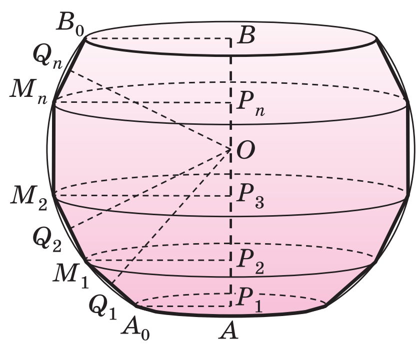


Рис. 156

276*. Радиус сферического купола равен r, а дуга осевого сечения — α. Найдите:
а) длину окружности основания купола; б) высоту купола.

277*. Радиус сферического пояса равен r, а углы, под которыми видны из центра сферы диаметры его оснований, — α и β. Найдите высоту пояса.

278*. Основания сферического пояса равны 144π см^2 и 25π см^2, а его высота — 17 см. Найдите радиус сферы.

279*. Найдите поверхность сферического пояса, радиусы оснований которого равны:
а) 16 см и 33 см, а высота — 7 см;
б) 20 м и 24 м, а радиус сферы— 25 м.

280*. Найдите поверхность сферического купола, у которого:
а) радиус основания равен r, а дуга осевого сечения — 90°;
б) радиус основания равен r, а дуга осевого сечения — 60°;
в) высота равна h, а дуга осевого сечения — 120°.

§ 6. Шар

А) Шаром называется тело, полученное вращением круга вокруг какого-либо его диаметра (рис. 157).

Границей шара является сфера. Центр, радиус, диаметр сферы называют также *центром*, *радиусом*, *диаметром шара* соответственно. Расстояние от центра шара до любой его точки не больше радиуса шара.

Сечением шара плоскостью является круг, радиус которого изменяется в пределах от нуля до радиуса шара (рис. 158).

Чтобы обосновать формулу для вычисления объема шара, докажем вначале два вспомогательных факта, которые полезны сами по себе.

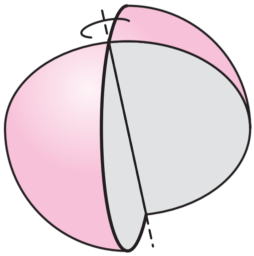


Рис. 157

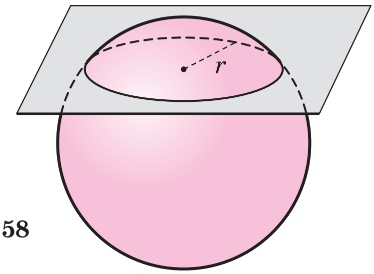


Рис. 158

Теорема 7. Объем тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, которая лежит в его плоскости, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек, равен третьей доле произведения поверхности, образованной стороной, лежащей против этой вершины треугольника, которая принадлежит оси вращения, и высоты, проведенной к этой стороне.

Доказательство. Пусть есть тело, полученное вращением треугольника ABC вокруг прямой l, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек. Пусть вершина C принадлежит оси l, а CE — высота, проведенная к стороне AB против вершины C. Докажем, что объем V тела вращения равен $\frac{1}{3}\,S_{AB}\cdot CE$, где S_{AB} обозначает поверхность, образованную вращением стороны AB.

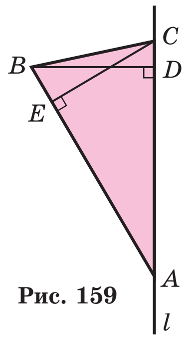


Рис. 159

Пусть сторона AC лежит на оси вращения l и BD — перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую l (рис. 159). Тогда стороны AB и CB опишут поверхности двух конусов с радиусом BD основания и высотами DA и DC соответственно. Для объема V тела вращения получаем:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot BD^2\cdot DA+\frac{1}{3}\pi\cdot BD^2\cdot DC=\frac{1}{3}\pi\cdot BD^2\cdot\left(DA+DC\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot BD\cdot BD\cdot AC.$$

Теперь обратим внимание на то, что $BD \cdot AC = AB \cdot CE$, так как каждое из этих произведений выражает удвоенную площадь треугольника ABC. Поэтому:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BD \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{3}(\pi \cdot BD \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE.$$

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l, а противоположная ей сторона AB не параллельна этой оси (рис. 160). Тогда прямая AB пересекает ось l в некоторой точке F и объем V тела вращения равен разности объемов тел, полученных вращением треугольников CAF и CBF. Учитывая это и то, что сторона CF этих треугольников принадлежит оси вращения, для объема V получаем:

$$V = \frac{1}{3}S_{AF} \cdot CE - \frac{1}{3}S_{BF} \cdot CE = \frac{1}{3}(S_{AF} - S_{BF}) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE.$$

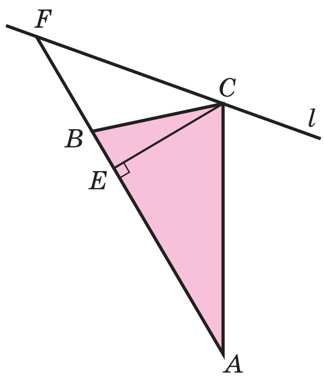


Рис. 160

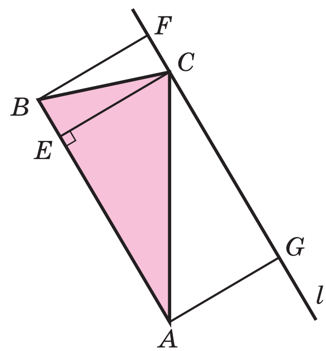


Рис. 161

Пусть сторона AC не лежит на оси вращения l, а противоположная ей сторона AB параллельна этой оси (рис. 161). Из точек A и B опустим перпендикуляры AG и BF на ось вращения l. Объем V тела вращения можно получить, вычитая из объема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABFG$, объемы двух конусов, полученных вращением треугольников CBF и CAG. Поэтому:

$$V = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot CF + \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot CG\right) =$$

$$= \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot (CF + CG) = \pi \cdot CE^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi \cdot CE^2 \cdot AB =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot CE^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot (2\pi \cdot CE \cdot AB) \cdot CE = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot CE,$$

так как выражение $2\pi \cdot CE \cdot AB$ задает поверхность, образованную вращением стороны AB.

Теорема 8. Объем тела, образованного вращением кругового сектора вокруг прямой, проходящей через его центр, лежит в его плоскости и не имеет с ним общих внутренних точек, равен третьей доле произведения радиуса сектора и поверхности, полученной при вращении дуги сектора.

Доказательство. Пусть есть тело, полученное вращением кругового сектора AOB с радиусом R вокруг прямой l, которая проходит через центр сектора O и не имеет с ним общих внутренних точек. Впишем в этот сектор ломаную $AA_1A_2...A_{n-1}A_nB$ с равными звеньями (рис. 162). Объем тела, полученного вращением этой ломаной вокруг прямой l, равен сумме объемов тел, полученных вращением треугольников AOA_1, A_1OA_2, ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOB. Пусть OC, OC_1, ..., OC_n — высоты этих треугольников. Применив теорему **7**, получим:

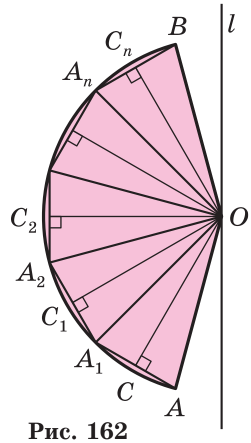


Рис. 162

$$V = \frac{1}{3}S_{AA_1} \cdot OC + \frac{1}{3}S_{A_1A_2} \cdot OC_1 + \ldots + \frac{1}{3}S_{A_nB} \cdot OC_n.$$

Но $OC = OC_1 = \ldots = OC_n$.

Поэтому $V = \frac{1}{3}\left(S_{AA_1} + S_{A_1A_2} + \ldots + S_{A_nB}\right) \cdot OC = \frac{1}{3}S_n \cdot OC$, где S_n — поверхность, образованная при вращении многозвенной ломаной.

Будем увеличивать количество сторон ломаной, вписанной в круговой сектор AOB. Тогда высота OC будет стремиться к радиусу R, а поверхность S_n — к поверхности $S_{\smile AB}$, образованной при вращении дуги AB. Поэтому объем V стремится к выражению $\frac{1}{3}S_{\smile AB} \cdot R$, которое и принимается в качестве объема тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг прямой l, проходящей через центр сектора O и не имеющей с ним общих внутренних точек.

Следствие 1. Объем шара равен третьей доле произведения его поверхности и радиуса: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

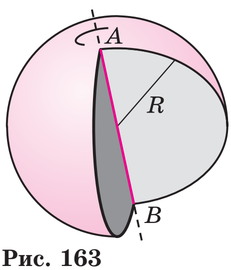


Рис. 163

Действительно, шар с радиусом R можно рассматривать как тело, образованное вращением сектора-полукруга вокруг диаметра (рис. 163). Тогда соответствующая окружность образует сферу. В соответствии с теоремой **8** получаем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\smile AB} \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 1. Плоскость, проведенная через конец радиуса шара, образует с ним угол в 60°. Найдем объем шара, учитывая, что площадь полученного сечения равна 9π.

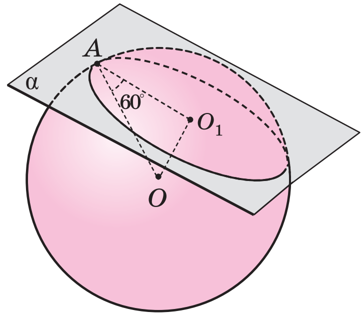


Рис. 164

Р е ш е н и е. Пусть плоскость α проходит через конец A радиуса шара с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведенный из центра шара к плоскости α (рис. 164). Тогда O_1A — проекция радиуса OA на плоскость α, $\angle OAO_1 = 60°$ и $O_1A = OA \cos 60° = 0{,}5\ OA$. Поскольку по условию $\pi O_1A^2 = 9\pi$, то $O_1A = 3$, $OA = 6$ и объем шара $V = \frac{4}{3}\pi OA^3 = 288\pi$.

О т в е т: 288π.

Б) Рассмотрим комбинации шара с другими телами.

Вписанным в шар многогранником называется многогранник, все вершины которого лежат на соответствующей сфере (рис. 165).

Описанным около шара многогранником называется многогранник, все грани которого касаются соответствующей сферы (рис. 166).

Пример 2. Шар вписан в правильную четырехугольную призму объемом V. Найдем объем шара.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная перпендикулярно боковому ребру через его середину, проходит через центр O вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в прямоугольник $ABCD$, который является сечением призмы (рис. 167). Поскольку стороны этого прямоугольника равны диаметрам шара, то сечением призмы является квадрат. Пусть радиус шара равен r. Тогда и боковое ребро, и ребро основания призмы равны диаметру шара, т. е. $2r$.

Поэтому $V = (2r)^2 \cdot 2r = 8r^3$. Поэтому, $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} \cdot 8r^3 = \frac{\pi}{6}V$.

О т в е т: $\frac{\pi}{6}V$.

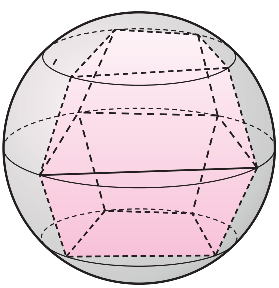


Рис. 165

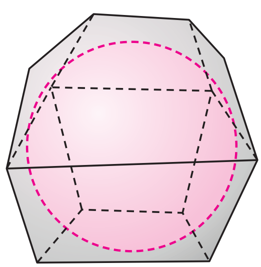


Рис. 166

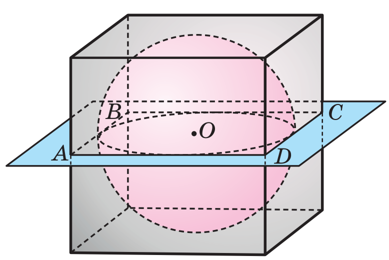


Рис. 167

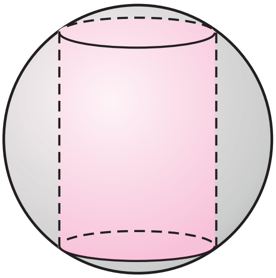


Рис. 168

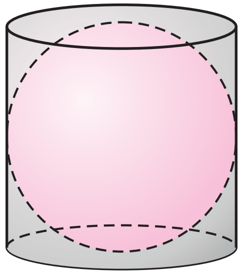


Рис. 169

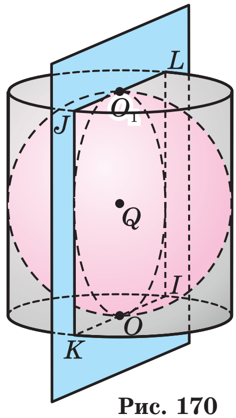


Рис. 170

Вписанным в шар цилиндром называется цилиндр, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 168).

Описанным около шара цилиндром называется цилиндр, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 169).

Пример 3. Шар вписан в цилиндр объемом V. Найдем объем шара.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось OO_1 цилиндра, проходит через центр Q вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в прямоугольник $KILJ$, являющийся осевым сечением цилиндра (рис. 170). Поскольку стороны этого прямоугольника равны диаметру шара, то радиус основания цилиндра равен радиусу r шара, а высота цилиндра составляет $2r$. Поэтому $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Тогда $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{2}{3}V$.

О т в е т: $\frac{2}{3}V$.

Вписанным в шар конусом называется конус, вершина и окружность основания которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 171).

Описанным около шара конусом называется конус, основание и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 172).

Пример 4. Шар описан около конуса объемом V. Найдем объем шара, учитывая, что осевое сечение конуса — равносторонний треугольник.

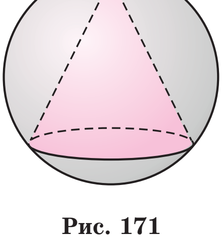


Рис. 171

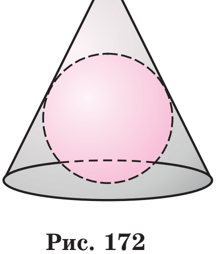


Рис. 172

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось OO_1 конуса, проходит через центр Q описанного шара и пересекает его по большому кругу, описанному около равностороннего треугольника O_1AB, являющегося сечением конуса (рис. 173).

Пусть радиус шара равен r. Тогда радиус основания и высота конуса соответственно равны $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{3r}{2}$, а его объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3\pi r^3}{8} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{9}{32}V_{\text{ш.}}$$

Поэтому $V_{\text{ш}} = \dfrac{32}{9}V$.

О т в е т: $\dfrac{32}{9}V$.

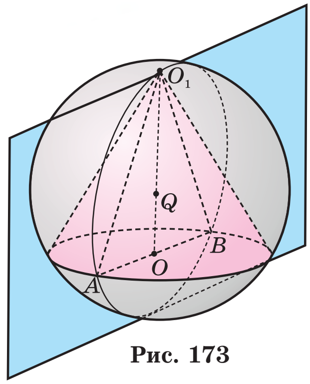


Рис. 173

Вписанным в шар усеченным конусом называется усеченный конус, окружности оснований которого принадлежат соответствующей сфере (рис. 174).

Описанным около шара усеченным конусом называется конус, основания и все образующие которого касаются соответствующей сферы (рис. 175).

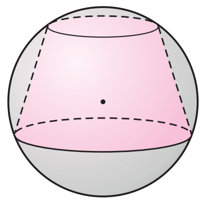


Рис. 174

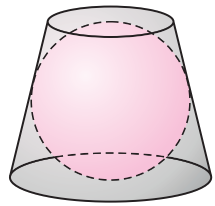


Рис. 175

Теорема 9. Около каждой треугольной пирамиды можно описать единственный шар.

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть плоскость, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему (рис. 176). Она называется *серединной плоскостью отрезка*.

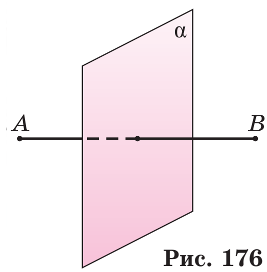


Рис. 176

Геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин треугольника, является прямая, проходящая через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярная его плоскости (рис. 177).

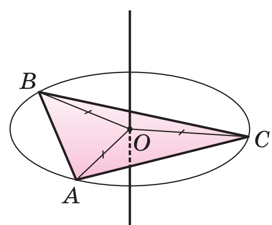


Рис. 177

Пусть есть треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 178). Через центр O_1 окружности, описанной около грани ABC, проведем прямую l, перпендикулярную плоскости этой грани. Все точки прямой l равноудалены от вершин A, B, C. Построим серединную плоскость α отрезка AD, она пересечет прямую l в некоторой точке O. Вершины A и D равноудалены от точки O. А поскольку вершины A, B, C равноудалены от точки O, то все четыре вершины A, B, C, D равноудалены от точки O. Получили, что все вершины пирамиды $ABCD$ принадлежат сфере с центром O, а это

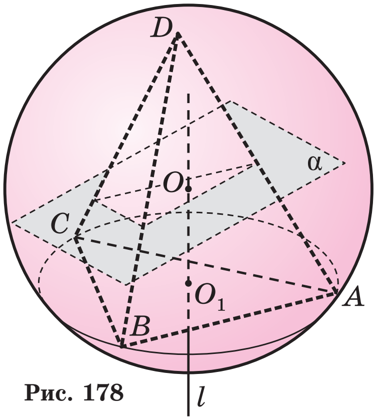


Рис. 178

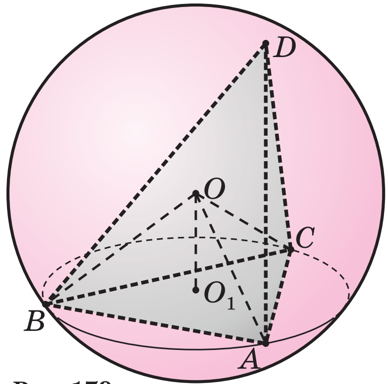


Рис. 179

означает, что шар с центром O и радиусом OA и есть шар, описанный около пирамиды $ABCD$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Следствие 2. Четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, определяют единственную сферу, единственный шар.

Пример 5. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 30$ и $AD \perp (ABC)$. Найдем радиус шара, описанного около пирамиды $ABCD$.

Р е ш е н и е. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O описанного шара на плоскость ABC (рис. 179). Поскольку наклонные OA, OB, OC равны как радиусы шара, то равны и их проекции на плоскость ABC. Значит, $O_1A = O_1B = O_1C$. Поэтому O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдем последовательно площадь треугольника ABC по формуле Герона и радиус O_1A описанной окружности:

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{10+10+12}{2} \cdot \frac{10+10-12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2} \cdot \frac{10-10+12}{2}} = 48,$$

$$O_1A = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4}.$$

Поскольку $AD \parallel OO_1$, $OO_1 \perp O_1C$ и $OA = OD$, то $OO_1 = \dfrac{1}{2}AD = 15$.

Из прямоугольного треугольника AO_1O находим:

$$OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{65}{4}.$$

О т в е т: $\dfrac{65}{4}$.

Теорема 10. В каждую треугольную пирамиду можно вписать единственный шар.

Доказательство. Сначала обратим внимание на то, что геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла, является полуплоскость, граница которой совпадает с ребром данного угла и которая делит этот угол пополам (рис. 180). Она называется *биссекторной полуплоскостью угла*.

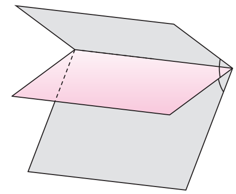


Рис. 180

Пусть есть треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 181). Проведем биссекторные полуплоскости двугранных углов AB и AC. Луч l, по которому они пересекаются, состоит из тех точек пространства, которые находятся на одинаковых расстояниях от граней ABD и ABC, ABC и ACD, т. е. от трех граней ABD, ABC и ACD. Биссекторная полуплоскость двугранного угла CD пересекает луч l в некоторой точке O. Точка O находится на расстоянии r как от грани ACD, так и от грани BCD. Поэтому расстояние от точки O до каждой грани пирамиды $ABCD$ равно r. Это значит, что шар с центром O и радиусом r касается каждой грани пирамиды $ABCD$, он является вписанным в пирамиду $ABCD$.

Единственность найденного шара следует из того, что прямая l и ее точка O определяются однозначно.

Теорема 11. Объем описанного около шара многогранника равен третьей доле произведения полной поверхности многогранника и радиуса шара:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r.$$

Доказательство*. Пусть есть многогранник, описанный около шара (рис. 182). Центр шара соединим со всеми вершинами многогранника. Если многогранник имеет n граней, то образуется n пирамид, для которых центр шара является общей вершиной, основания составляют поверхность

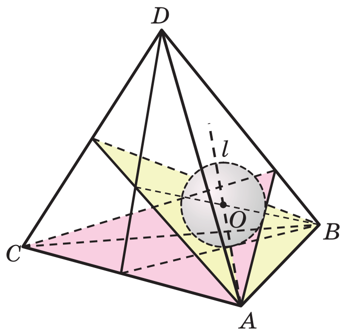


Рис. 181

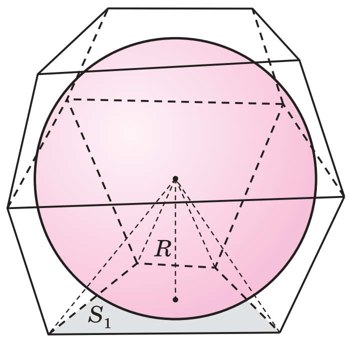


Рис. 182

многогранника, а сами пирамиды вместе составят многогранник. Основания высот этих пирамид совпадают с точками касания, поэтому сами высоты все равны радиусу r шара.

Пусть площади граней многогранника равны $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Тогда для объема V многогранника, который равен сумме объемов пирамид, получим:

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3}S_n \cdot r = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = \frac{1}{3}Sr,$$

где S — полная поверхность многогранника.

Пример 6. $ABCD$ — треугольная пирамида, в которой $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AD = 24$ и $AD \perp (ABC)$. Найдем радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCD$.

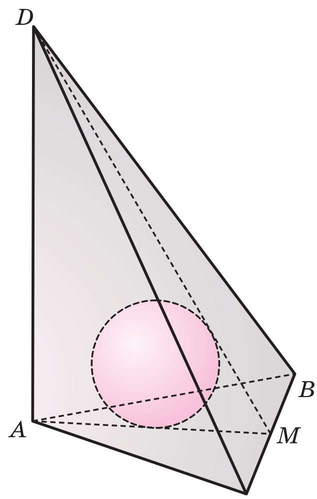


Рис. 183

Р е ш е н и е. Сначала определим полную поверхность и объем пирамиды $ABCD$.

Пусть AM — высота треугольника ABC (рис. 183). Поскольку $AB = AC$, то $BM = MC = 6$. Находим AM из прямоугольного треугольника ABM:

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Теперь $S_{ABC} = \frac{1}{2}\ BC \cdot AM = 48,$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\ S_{ABC} \cdot AD = 384.$

Прямоугольные треугольники ABD и ACD с равными катетами имеют одинаковые площади:

$$S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2}\ AB \cdot AD = 120.$$

Чтобы найти площадь треугольника BCD, учтем, что он проектируется в треугольник ABC и угол между плоскостями BCD и ABC измеряется углом AMD. Из прямоугольного треугольника AMD находим:

$$MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 24^2} = 8\sqrt{10}.$$

Поэтому $S_{BCD} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos \angle AMD} = 48\sqrt{10}$. Значит:

$$S_{\text{полн}} = S_{ABC} + 2S_{ACD} + S_{BCD} = 48 + 120 + 120 + 48\sqrt{10} = 288 + 48\sqrt{10}.$$

Поэтому:

$$r = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\text{полн}}} = \frac{3 \cdot 384}{288 + 48\sqrt{10}} = \frac{12 \cdot \left(6 - \sqrt{10}\right)}{13}.$$

О т в е т: $\dfrac{12 \cdot \left(6 - \sqrt{10}\right)}{13}$.

1. Какое тело называется шаром и какая точка называется центром шара?

2. Какой отрезок называется радиусом шара; хордой шара; диаметром шара?

3. По какой фигуре пересекаются шар и плоскость?

4. Сформулируйте утверждение об объеме тела, полученного вращением треугольника вокруг прямой, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину и не имеет с треугольником общих внутренних точек.

5. Чему равен объем шара?

6. Какой многогранник называется вписанным в шар; описанным около шара?

7. Какой шар называется вписанным в многогранник; описанным около многогранника?

8. Какой цилиндр называется вписанным в шар; описанным около шара?

9. Какой шар называется вписанным в цилиндр; описанным около цилиндра?

10. Какой конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

11. Какой шар называется вписанным в конус; описанным около конуса?

12. Какой усеченный конус называется вписанным в шар; описанным около шара?

13. Какой шар называется вписанным в усеченный конус; описанным около усеченного конуса?

14. Какая плоскость называется серединной плоскостью отрезка; биссекторной плоскостью двугранного угла?

15. В какой точке находится центр шара, описанного около треугольной пирамиды; центр шара, вписанного в треугольную пирамиду?

16. Сколькими точками пространства определяется сфера?

17. Какой зависимостью связаны объем шара и поверхность описанного около него многогранника?

Задача 1. Точки A, B, C на поверхности шара выбраны так, что попарные расстояния между ними все равны $18\sqrt{3}$ см, а плоскость ABC проходит на расстоянии 24 см от центра O шара. Найдите радиус шара.

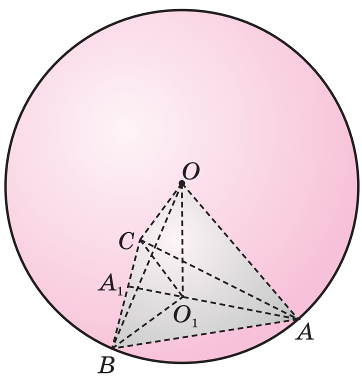


Рис. 184

Р е ш е н и е. Пусть O_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC (рис. 184). Тогда $O_1A = O_1B = O_1C$ как проекции равных наклонных — радиусов OA, OB, OC. Пусть AA_1 — высота треугольника ABC. Найдем радиус O_1A круга, описанного возле треугольника ABC:

$$O_1A = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}AB\sin 60^\circ = \frac{2}{3}\cdot 18\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\ (\text{см}).$$

Теперь из треугольника AOO_1 находим OA шара:

$$OA = \sqrt{O_1A^2 + O_1O^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\ (\text{см}).$$

О т в е т: 30 см.

Задача 2. Высота правильной шестиугольной призмы равна 10 см, а диагональ ее боковой грани — 14 см. Найдите объем описанного шара.

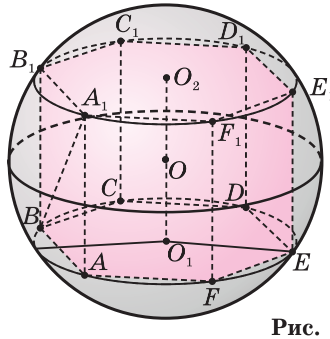


Рис. 185

Р е ш е н и е. Центр O шара, описанного около правильной призмы, находится на середине отрезка, соединяющего центры O_1 и O_2 оснований призмы (рис. 185). Поскольку $AB \perp AA_1$, то:

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - A_1A^2} = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} \text{ (см)}, \ OO_1 = \frac{1}{2}O_1O_2 = 5 \text{ см}.$$

$\triangle\, O_1AB$ — правильный, поэтому $AO_1 = AB$. $OO_1 \perp O_1A$, поэтому:

$$r = OA = \sqrt{O_1O^2 + O_1A^2} = \sqrt{5^2 + 96} = 11 \text{ (см)}.$$

Значит, $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = \frac{5324\pi}{3}$ (см^3).

О т в е т: $\frac{5324\pi}{3}$ см^3.

Задача 3. В шар вписан цилиндр, высота которого относится к радиусу основания как 3 : 2. Найдите, какую часть объема шара составляет объем цилиндра.

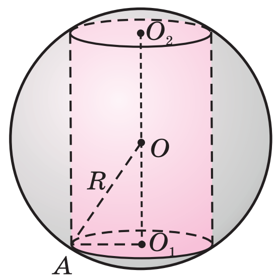


Рис. 186

Р е ш е н и е. Пусть в шар с центром O и радиусом R вписан цилиндр с осью O_1O_2 (рис. 186) и $O_1O_2 = 3k$. Тогда $O_1A = 2k$, $OO_1 = 1{,}5k$. $O_1O \perp O_1A$, поэтому, учитывая, что $O_1O^2 + O_1A^2 = OA^2$, получаем:

$$(1{,}5k)^2 + (2k)^2 = R^2, \text{ или } 2{,}5k = R.$$

Далее находим:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(2{,}5k\right)^3 = \frac{62{,}5}{3}\pi k^3 = \frac{125}{6}\pi k^3,$$

$$V_ц = \pi \cdot O_1A^2 \cdot O_1O_2 = \pi\left(2k\right)^2 \cdot 3k = 12\pi k^3, \ \frac{V_ц}{V_ш} = \frac{12\pi k^3}{\frac{125}{6}\pi k^3} = \frac{72}{125}.$$

О т в е т: $\frac{72}{125}$.

Задача 4. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем шара, вписанного в конус.

Р е ш е н и е. Плоскость, проведенная через ось BQ конуса, проходит через центр O вписанного шара и пересекает его по большому кругу, вписанному в равнобедренный треугольник ABC, который является сечением конуса (рис. 187).

Находим:

$$AQ = l \cdot \cos\alpha,\ \angle OAQ = \frac{1}{2} \cdot \angle BAQ = \frac{\alpha}{2},$$

$$OQ = AQ\ \mathrm{tg}\ \angle OAQ = l \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2},$$

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi OQ^3 = \frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \mathrm{tg}^3\ \frac{\alpha}{2}.$$

О т в е т: $\frac{4}{3}\pi l^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \mathrm{tg}^3\ \frac{\alpha}{2}$.

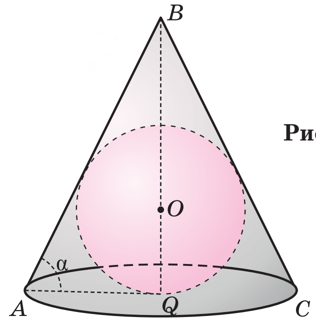


Рис. 187

281. Найдите геометрическое место:
а) середин равных хорд шара;
б) центров равных круговых сечений шара.

282. Учитывая, что V — объем шара с радиусом R, а S — площадь его поверхности, найдите:
а) S и V при $R = 8$ см; б) R и S при $V = 113{,}04$ см^3;
в) R и V при $S = 64\pi$ см^2.

283. Определите, во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в:
а) 3 раза; б) 5 раз; в) n раз.

284. Диаметр Луны составляет приблизительно четвертую долю диаметра Земли. Сравните объемы Луны и Земли.

285. Свинцовый шар, диаметр которого равен 20 см, переплавляется в шарики, диаметры которых в 10 раз меньше. Определите, сколько таких шариков получится.

286. Найдите радиус шара, объем которого равен объему:
а) цилиндра с высотой 10 см и радиусом 6 см;
б) конуса с высотой 20 см и радиусом основания 10 см.

287. Найдите высоту цилиндра, объем которого равен объему шара, учитывая, что радиус основания цилиндра равен 4 см, а радиус шара — 6 см.

288. В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до определенного уровня, опускают 4 одинаковых металлических шарика с диаметром 1 см. Определите, на сколько изменится уровень воды в мензурке.

289. Найдите диаметр шара, учитывая, что при опускании в воду он становится легче на 39,6 кг.

290. Учитывая, что плотность меди 8,9 г/см^3, определите, будет ли плавать в воде пустой медный шар с диаметром 10 см и толщиной стенок:
а) 2 мм; б) 1,5 мм.

291. Есть четыре тела — куб, шар, цилиндр и конус, причем диаметры оснований цилиндра и конуса равны их высотам. Поверхности всех этих тел равны друг другу. Определите, какое из этих тел имеет наибольший объем и какое — наименьший.

292*. Сосуд имеет форму полушара с радиусом R, дополненного цилиндром. Определите, какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V.

293*. Секущая плоскость разделяет шар на два тела (рис. 188), каждое из которых называется *шаровым сегментом*. Круг сечения называется *основанием сегмента*. Каждый из отрезков, на которые секущая плоскость разделяет перпендикулярный ей диаметр шара, называют *высотой* соответствующего *шарового сегмента*.
Две параллельные секущие плоскости разделяют шар на два шаровых сегмента и еще одно тело (рис. 189), которое называют *шаровым слоем*. Круги сечений называются *основаниями шарового слоя*. Перпендикуляр, опущенный из одной секущей плоскости к другой, называют *высотой шарового слоя*.

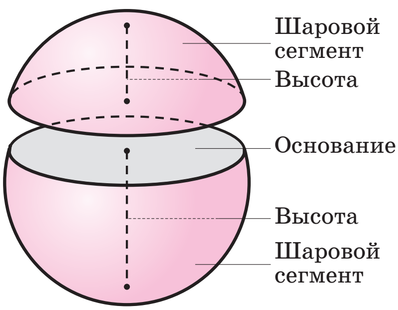


Рис. 188

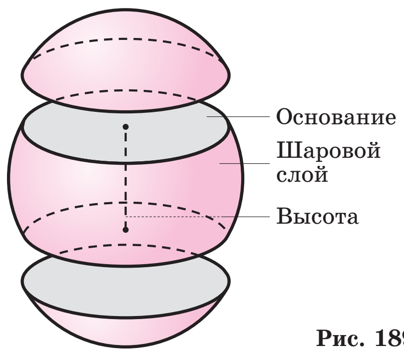


Рис. 189

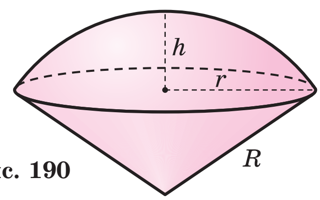


Рис. 190

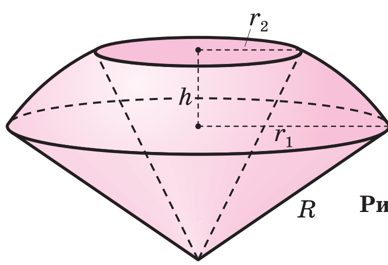


Рис. 191

Докажите, что:
а) объем V шарового сегмента с радиусом R и высотой h выражается формулой $V = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ (рис.190);
б) объем V шарового слоя с радиусом R, радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой h выражается формулой $V = \dfrac{1}{6}\pi h^2(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (рис. 191).

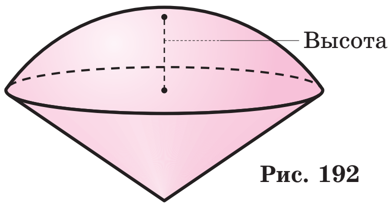


Рис. 192

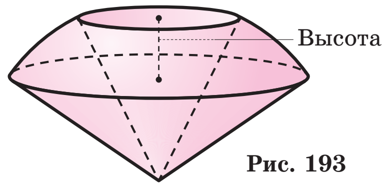


Рис. 193

294*. Тело, образованное вращением кругового сектора вокруг прямой, которая проходит через его центр, лежит в его плоскости и не имеет с ним общих внутренних точек, называется *шаровым сектором*. Шаровой сектор может быть двух видов, в зависимомти от того, принадлежит или нет оси вращения один из крайних радиусов кругового сектора. Первый из этих секторов ограничен куполом и конической поверхностью (рис. 192), второй — сферическим поясом и двумя коническими поверхностями (рис. 193). Высота купола для первого сектора или перпендикуляр, опущенный из плоскости основания одной конической поверхности на плоскость основания другой поверхности для второго купола, называется *высотой шарового сектора*. Докажите, что объем шарового сектора с радиусом R и высотой h выражается формулой:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

295*. Найдите объем шарового сектора, полученного вращением кругового сектора:
а) с углом в 30° и радиусом R вокруг одного из граничных радиусов;
б) с радиусом r и дугой в 120° вокруг прямой, которая проходит через центр сектора, лежит в его плоскости и составляет с крайними радиусами углы в 30°.

296*. Учитывая, что плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на части:
а) в отношении 3 : 1, найдите отношение объемов полученных шаровых сегментов;
б) 3 см и 9 см, найдите объемы полученных шаровых сегментов.

297*. Определите, сколько кубометров земли понадобится для того, чтобы сделать клумбу, имеющую форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см.

298*. Найдите объем шарового слоя, который образуется, если в шаре с радиусом:
а) 13 см по разные стороны от его центра провести два равных параллельных сечения с радиусом 5 см;
б) r провести два параллельных сечения, из которых одно проходит через центр, а другое делит поверхность шара в отношении 1 : 3.

299*. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите отношение объема их общей части к объему одного шара.

300*. Радиусы поверхностей двояковыпуклой линзы равны 113 мм, а ее толщина — 30 мм. Найдите объем линзы.

301*. В шаре радиусом 60 мм просверлено цилиндрическое отверстие диаметром 30 мм, ось которого проходит через центр шара. Найдите объем образованного тела.

302*. Полукруг с радиусом r, разделенный двумя радиусами на три доли, вращается вокруг диаметра. Найдите объемы тел, полученных при вращении каждой доли.

303. Найдите объем шарового сектора, дуга осевого сечения которого равна α, а:
а) радиус шара — r; б) его высота — h.

304. Диаметр шара равен 30 см и является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

305. Докажите, что:
а) геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть серединная плоскость;
б) геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, которая проходит через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярна его плоскости;
в) три серединные плоскости сторон треугольника пересекаются по одной прямой, которая проходит через центр описанной около треугольника окружности и перпендикулярна его плоскости;
г) три биссекторные полуплоскости двугранных углов при одной вершине треугольной пирамиды пересекаются по одной прямой.

306. Докажите, что:
а) около любого цилиндра можно описать шар;
б) в цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда осевое сечение цилиндра является квадратом;
в) около любого конуса можно описать шар;
г) в любой конус можно вписать шар;
д) около любого усеченного конуса можно описать шар;
е) в усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда в осевое сечение конуса можно вписать окружность, или если образующая конуса равна сумме радиусов его оснований, или если высота конуса равна среднему геометрическому диаметров его оснований;
ж) около любого прямоугольного параллелепипеда можно описать шар;
з) около прямой призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда около основания многоугольника можно описать окружность.

307. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Докажите, что:
а) центры вписанного в цилиндр и описанного около него шаров, совпадают и лежат на оси цилиндра;
б) боковая поверхность цилиндра равна поверхности вписанного в него шара;
в) полная поверхность цилиндра относится к поверхности вписанного в него шара как 3 : 2;
г) объем цилиндра относится к объему вписанного в него шара как 3 : 2.

308. Докажите, что:
а) центр шара, вписанного в цилиндр, является центром симметрии цилиндра;

б) центр шара, описанного около произвольного цилиндра, является центром его симметрии.

309. Докажите, что:

а) центры вписанного в конус и описанного около него шаров лежат на оси конуса;

б) отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно отношению их поверхностей;

в) центры шаров, вписанного в усеченный конус и описанного около него, не совпадают;

г) отношение поверхности шара к полной поверхности описанного около него усеченного конуса равно отношению их объемов.

310. Около шара с радиусом r описан прямоугольный параллелепипед. Определите его вид и найдите объем.

311. Найдите радиус шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 6 см, 9 см, 18 см.

312. Около шара описана прямая треугольная призма, основанием которой является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α. Найдите высоту призмы.

313. Найдите диаметр шара, описанного около правильной треугольной призмы, учитывая, что боковое ребро призмы равно 4 см, а ребро основания — 6 см.

314. В шар вписана прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 18 см и 24 см. Найдите объем призмы, учитывая, что радиус шара равен 39 см.

315. В шар с радиусом r вписана правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны друг другу. Найдите ребро призмы.

316. В шар с радиусом R вписана правильная четырехугольная призма, диагональ которой составляет с боковой гранью угол α. Найдите ее объем.

317. В шар с радиусом r вписан многогранник, состоящий из семи кубов, один из которых имеет общий центр с шаром, а каждый из остальных — общую грань с этим кубом и четыре вершины на поверхности шара. Найдите ребро куба.

318. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором два шара с радиусом r расположены так, что каждый касается другого шара и пяти граней параллелепипеда.

319. Докажите, что:

а) если в правильную призму можно вписать шар, то центром шара является середина отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) в пирамиду с одинаковыми двугранными углами при основании можно вписать шар.

320. В шар вписан цилиндр, у которого угол между диагоналями осевого сечения равен α, а образующая — l. Найдите объем шара.

321. Есть два цилиндра, осевыми сечениями которых являются квадраты, причем один из них описан около шара, а другой вписан в этот шар. Найдите отношение их объемов.

322. Докажите, что:
а) цилиндр или конус, ось которого проходит через центр шара, пересекает его поверхность по окружности;
б) около любой правильной пирамиды можно описать шар;
в) в любую правильную пирамиду можно вписать шар.

323. Найдите объем шара, вписанного в конус, образующая которого равна:
а) b и равна диаметру основания конуса;
б) a и составляет с плоскостью основания угол δ.

324. В конус с углом α при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан шар с радиусом R. Найдите:
а) r как функцию R и α; б) R как функцию r и α;
в) α как функцию R и r.

325. В конус с радиусом основания r и образующей l, вписан шар. Найдите длину линии, по которой шар касается боковой поверхности конуса.

326. Шар с радиусом R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

327. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите поверхность и объем описанного шара.

328. В шар вписан конус. Докажите, что радиус шара равен $\frac{h^2+r^2}{2h}$, где h — высота конуса, r — радиус его основания.

329. Найдите радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

330. Найдите радиусы вписанного в правильную четырехугольную пирамиду и описанного около нее шаров, учитывая, что сторона основания пирамиды равна a и:
а) плоский угол при вершине — α;
б) двугранный угол при основании — 60°.

331. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 20 см, а радиус шара, описанного около пирамиды, — 12,5 см. Найдите объем пирамиды.

332. Найдите объем шара, вписанного в:
а) правильную шестиугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — b;
б) пирамиду, учитывая, что ее основанием служит ромб со стороной a, острым углом α и двугранными углами β при основании.

333. Найдите радиус шара, который:
а) описан около правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна a и составляет с плоскостью основания угол α;
б) вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 26 см и высотой 16 см.

334. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4 см, вписан шар. Найдите объем пирамиды, учитывая, что радиус шара равен 1 см.

335. Определите объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, учитывая, что центр шара:
а) отстоит от вершины пирамиды на a, а от бокового ребра — на b;
б) делит высоту пирамиды в отношении $5 : 3$, если считать от вершины, а сторона основания пирамиды равна a.

336. В шар с радиусом R вписана пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник с углом α при вершине, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол в $60°$. Найдите ее объем.

337. В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, вписан шар. Найдите объем шара, учитывая, что две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом β.

338. Найдите поверхность и объем шара, описанного около пирамиды, основанием которой является:
а) прямоугольный треугольник с гипотенузой 2, и каждое боковое ребро составляет с основанием угол α;
б) прямоугольник с диагональю 10, и боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β.

339. Найдите поверхность и объем шара, описанного около:
а) правильной четырехугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 14 дм и 2 дм, а боковое ребро наклонено к основанию под углом в $45°$;
б) пирамиды, у которой основанием является прямоугольник со стороной a и углом между этой стороной и диагональю основания — α, а каждое ребро пирамиды составляет с основанием угол в $60°$.

340. Найдите поверхность и объем шара, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой высота равна 17 см, а радиусы окружностей, описанных около основания, — 5 см и 12 см.

341. Найдите поверхность и объем шара, описанного около правильной четырехугольной усеченной пирамиды, у которой боковое ребро равно 14 см, а ребра оснований — $5\sqrt{2}$ см и $12\sqrt{2}$ см.

342*. Шар касается всех ребер треугольной пирамиды. Найдите его радиус, учитывая, что все ребра пирамиды равны a.

343. Квадрат со стороной a является основанием пирамиды, две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, учитывая, что большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α.

344*. В треугольную пирамиду с высотами h_1, h_2, h_3, h_4 вписан шар с радиусом R. Докажите, что $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

345*. Докажите, что:
а) объем конуса равен третьей доле произведения его полной поверхности и радиуса вписанного шара;
б) если конусы описаны около шара, то их объемы пропорциональны площадям поверхностей.

346*. Докажите, что если около шара описать цилиндр и конус, осевые сечения которых есть правильные многоугольники, то:
а) объем цилиндра является средним геометрическим объемов шара и конуса;
б) площади их поверхностей образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

347*. В конус вписан цилиндр, полная поверхность которого равна боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса — прямой. Докажите, что вершина конуса отстоит от верхнего основания цилиндра на половину образующей конуса.

348*. Из шарового сегмента вырезан конус, имеющий с ним общие основание и высоту. Найдите объем оставшейся части сегмента, учитывая, что дуга осевого сечения сегмента равна α, а радиус дуги — R.

349*. В шаровой сегмент, дуга осевого сечения которого равна α, вписан шар с объемом V. Найдите разность объемов сегмента и шара.

§ 7. Правильные многогранники

А) Пусть есть плоский многоугольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Вне плоскости этого многоугольника выберем произвольно точку S и проведем лучи через нее и все точки сторон многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Эти лучи образуют определенную поверхность (рис. 194), разделяющую пространство на две области. Ту из областей, которая не содержит целиком никакой прямой, называют *многогранным углом*. Точку S называют *вершиной* многогранного угла, плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, ..., $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 — *гранями*, а лучи SA_1, SA_2, ..., SA_n — *ребрами* многогранного угла (рис. 195).

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости любой его грани. Многогранный угол на рис. 196 — выпуклый, а на рис. 197 — невыпуклый. По количеству граней многогранные углы разделяют на *трехгранные*, *четырехгранные* и т. д.

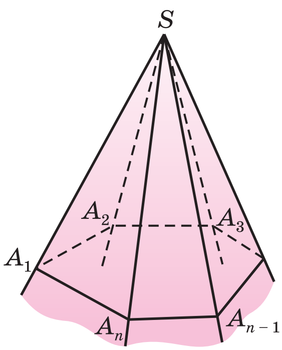


Рис. 194

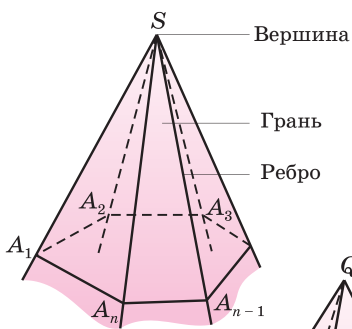


Рис. 195

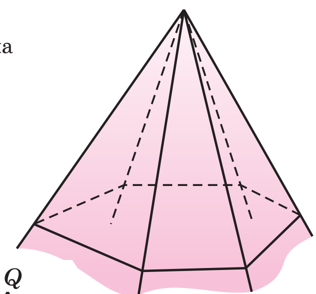


Рис. 196

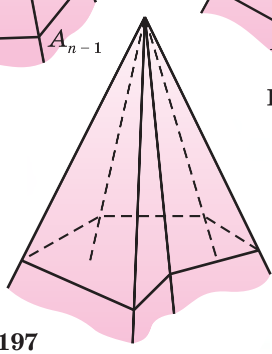


Рис. 197

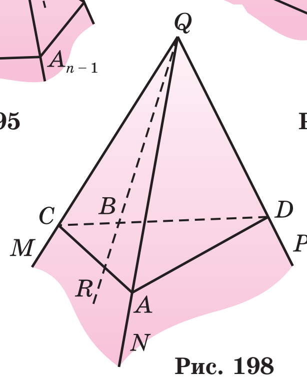


Рис. 198

Теорема 12. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство. Установим сначала, что каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его углов.

Пусть есть трехгранный угол $QMNP$ (рис. 198). Пусть для определенности угол MQP — больший из плоских углов трехгранного угла. В плоскости грани MQP от луча QP отложим угол PQR, равный углу PQN,

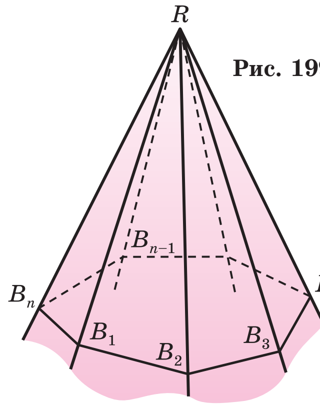


Рис. 199

и на лучах QN и QR отложим равные отрезки QA и QB. Через прямую AB проведем такую плоскость, которая пересекает ребра QM и QP в некоторых точках C и D. Треугольники AQD и BQD равны, так как у них сторона QD общая и по построению равны углы BQD и AQD, а также стороны BQ и AQ. Значит, $DB = DA$. Далее, по свойству сторон треугольника, получаем $DC < AC + DA$, или $DB + BC < AC + DA$, или $BC < AC$. Теперь, поскольку у треугольников BQC и AQC сторона QC общая, стороны BQ и AQ равны, но $BC < AC$, то $\angle BQC < \angle AQC$. Прибавив к левой и правой частям этого неравенства соответственно углы BQD и AQD, которые равны друг другу, получим, что:

$$\angle BQC + \angle BQD < \angle AQC + \angle AQD,$$

$$\angle CQD < \angle AQC + \angle AQD.$$

Пусть теперь есть выпуклый многогранный угол с вершиной R (рис. 199). Если пересечь его какой-либо плоскостью, то в сечении получим многоугольник $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, каждая вершина которого является вершиной трехгранного угла, образованного двумя гранями данного угла и секущей плоскостью. По доказанному для этих трехгранных углов получаем:

$$\angle B_nB_1B_2 < \angle B_nB_1R + \angle B_2B_1R;$$
$$\angle B_1B_2B_3 < \angle B_1B_2R + \angle B_3B_2R;$$
$$\angle B_2B_3B_4 < \angle B_2B_3R + \angle B_4B_3R;$$
$$...$$
$$\angle B_{n-1}B_nB_1 < \angle B_{n-1}B_nR + \angle B_1B_nR.$$

Сложим покомпонентно эти неравенства:

$$\angle B_nB_1B_2 + \angle B_1B_2B_3 + \angle B_2B_3B_4 + ... + \angle B_{n-1}B_nB_1 <$$
$$< (\angle B_nB_1R + \angle B_1B_2R + \angle B_2B_3R + ... + \angle B_{n-1}B_nR) +$$
$$+ (\angle B_2B_1R + \angle B_3B_2R + \angle B_4B_3R + ... + \angle B_1B_nR).$$

Теперь обратим внимание на то, что сумма в левой части последнего неравенства есть сумма углов многоугольника $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, которая равна $180° \cdot (n - 2)$, а в правой — сумма углов всех треугольников B_1RB_2, B_2RB_3, B_3RB_4, ..., $B_{n-1}RB_n$ и B_nRB_1, но без их углов при вершине R, которая равна $180° \cdot n - S$, где S выражает сумму плоских углов данного многогранного угла. Таким образом, $180° \cdot (n - 2) < 180° \cdot n - S$, отсюда $S < 360°$.

Б) Многогранник, у которого все грани являются равными правильными многоугольниками и все двугранные углы равны друг другу, называется **правильным многогранником.**

Из этого определения следует, что *у правильного многогранника равны друг другу все его*:

- *плоские углы*;
- *многогранные углы*;
- *ребра*.

Теорема 13. Количество ребер, сходящихся в каждой вершине правильного многогранника, не больше пяти.

Доказательство. Допустим, что это не так, т. е. в вершине многогранника сходится шесть или больше ребер. Тогда при этой вершине многогранник имел бы шесть или больше равных плоских углов. Учитывая, что сумма этих углов меньше 360°, получаем, что каждый из них меньше 60°. Но это невозможно, поскольку гранями правильного многогранника являются правильные многоугольники, а в них углы не меньше 60°.

Теорема 14. Количество сторон правильного многоугольника, являющегося гранью правильного многогранника, не больше пяти.

Доказательство. В каждой вершине правильного многогранника сходится не менее трех плоских углов, поэтому каждый из них должен быть меньше 120°. Вместе с этим угол правильного шестиугольника равен 120°, а угол правильного многоугольника с бо́льшим количеством сторон больше 120°. Поэтому правильные многоугольники, количество сторон которых больше пяти, не могут быть гранями правильного многоугольника.

Теорема 15. Есть пять типов правильных многогранников.

Доказательство. В соответствии с теоремой **14** гранями многогранника могут быть правильные треугольники, четырехугольники или пятиугольники.

Если гранями правильного многогранника служат треугольники, то, с учетом теоремы **13**, в вершинах многогранника могут сходиться три, четыре или пять ребер. Если гранями правильного многогранника служат четырехугольники или пятиугольники, то в вершинах многогранника может сходиться только три ребра. Значит, существует не более пяти видов правильных многогранников.

Чтобы убедиться, что такие виды многогранников существуют, достаточно указать способ построения каждого из них.

Прежде всего отметим, что правильный многогранник, гранями которого служат правильные четырехугольники, т. е. квадраты, является *кубом*, который еще называют *правильным гексаэдром*. Куб можно построить так. В произвольно выбранной плоскости построить квадрат, через его

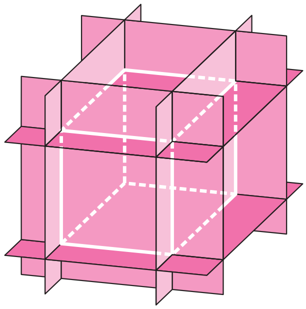


Рис. 200

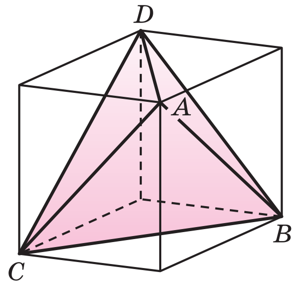


Рис. 201

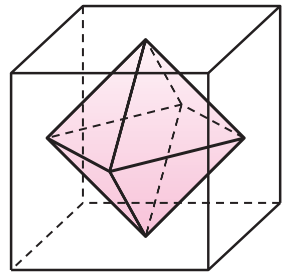


Рис. 202

стороны провести плоскости, перпендикулярные выбранной плоскости, и еще одну плоскость, параллельную выбранной плоскости и отстоящую от нее на сторону квадрата (рис. 200). Мы видим, что гексаэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходятся три треугольные грани, может быть таким. Построить куб. Выбрать одну из его вершин A и в каждой грани с этой вершиной выбрать вершину, противолежащую вершине A. Пусть это вершины B, C, D. Точки A, B, C, D являются вершинами искомого многогранника (рис. 201). Действительно, каждый из отрезков AB, AC, AD, BC, CD, DB является диагональю одной из граней куба, поэтому все эти отрезки равны друг другу. Получается, что в треугольной пирамиде $ABCD$ все грани являются правильными треугольниками. Такая пирамида называется *правильным тетраэдром*. Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины.

Построенне многогранника, в каждой вершине которого сходятся четыре треугольные грани, может быть таким. Построить куб и найти центры шести его граней (рис. 202). Эти точки являются вершинами многогранника, все грани которого — правильные треугольники. Такой многогранник называется *правильным октаэдром*. Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин.

Построение многогранника, в каждой вершине которого сходятся три пятиугольные грани, можно выполнить, снова используя куб. Если через каждое из двенадцати ребер куба провести плоскость, которая не имеет с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра, то полученные 12 плоскостей при пересечении дадут грани некоторого многогранника. Можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что грани этого двенадцатигранника будут правильными пятиугольниками (рис. 203). Такой многогранник называется *правильным додекаэдром*. Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин.

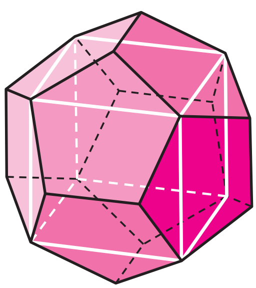


Рис. 203

Наконец, многогранник, в каждой вершине которого сходятся пять треугольных граней, можно построить, используя додекаэдр, именно центры граней додекаэдра являются вершинами искомого правильного многогранника (рис. 204).

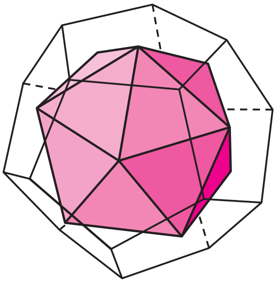


Рис. 204

Такой многогранник называется *правильным икосаэдром*. Икосаэдр имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин. Таким образом, есть пять типов правильных многогранников.

Названия правильных многогранников происходят из греческого языка. Термин *тетраэдр*, по-гречески τετραεδρον, означает *четырехгранник*: τετρα — четыре и εδρα — грань. Соответственно термины *гексаэдр*, *октаэдр*, *додекаэдр*, *икосаэдр* по-гречески εξαεδρον, οκταεδρον, δωδεκαεδρον, εικοσαεδρον означают *шестигранник*, *восьмигранник*, *двенадцатигранник*, *двадцатигранник*: εξ — шесть, οκτα — восемь, δωδεκα — двенадцать, εικοσι — двадцать.

Мы знаем, что правильные гексаэдр и тетраэдр имеют описанный и вписанный шары. Точно так же описанный и вписанный шары имеют октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Центры этих шаров совпадают, и эта точка является центром симметрии соответствующего правильного многогранника, кроме тетраэдра, который не имеет центра симметрии.

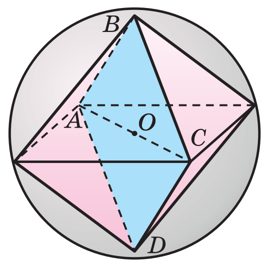


Рис. 205

Пример 1. Найдем радиус шара, описанного около правильного октаэдра с ребром a.

Р е ш е н и е. Поскольку правильный октаэдр — фигура симметричная, имеет плоскости симметрии, оси симметрии и центр симметрии, то центр O шара, описанного около правильного октаэдра, находится в центре его симметрии (рис. 205). Этой точкой является середина отрезка AC, соединяющая две противоположные вершины. Рассмотрим сечение $ABCD$ октаэдра плоскостью, которая является плоскостью симметрии и проходит через четыре вершины октаэдра. Этим сечением является правильный четырехугольник, т. е. квадрат. Центр описанного около октаэдра шара есть центр квадрата-сечения, вершины квадрата — вершины октаэдра, которые располагаются на поверхности описнного шара. Поэтому радиус R шара, описанного около правильного октаэдра с ребром a, равен половине диагонали квадрата со стороной a, т. е. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

О т в е т: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

?

1. Как образуется многогранный угол?

2. Какую точку называют вершиной, какой угол называют гранью и какой луч называют ребром многогранного угла?

3. На какие виды разделяются многогранные углы по количеству их граней?

4. Каким отношением связаны плоские углы многогранного угла?

5. Какому условию удовлетворяет сумма плоских углов многогранного угла?

6. Какой многогранник называется правильным?

7. Каким отношением связаны плоские углы правильного многогранника; многогранные углы правильного многогранника; ребра правильного многогранника?

8. Какому условию удовлетворяет количество ребер, сходящихся в вершине правильного многогранника; количество сторон грани правильного многогранника?

9. Какой правильный многогранник называется тетраэдром; гексаэдром; октаэдром; додекаэдром; икосаэдром?

10. Сколько граней, сколько ребер, сколько вершин имеет тетраэдр; гексаэдр; октаэдр; додекаэдр; икосаэдр?

Задача. Найдите радиус шара, вписанного в правильный октаэдр с ребром a.

Р е ш е н и е. Если в многогранник вписан шар, то объем V этого многогранника, площадь S_n его полной поверхности и радиус r вписанного шара связаны равенством $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$. Объем правильного октаэдра равен сумме объемов двух равных правильных четырехугольных пирамид, из которых его можно составить.

Найдем объем такой пирамиды $BADCE$ (рис. 206), учитывая, что каждое ее ребро равно a. Поскольку основание $ADCE$ пирамиды является плоскостью симметрии правильного октаэдра, а вершины пирамид, из которых октаэдр составлен, симметричны друг другу, то высота BO пирамиды равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. пример 1). Площадь основания пирамиды как площадь квадрата со стороной a равна a^2.

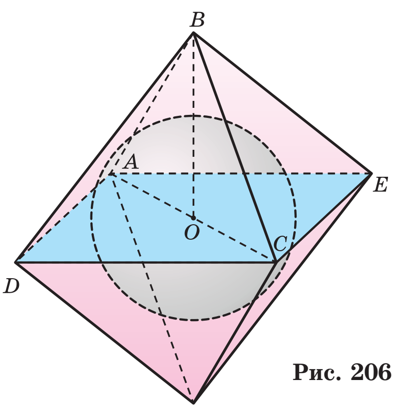


Рис. 206

Поэтому для объема V_1 одной пирамиды-части получаем $V_1 = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, а для объема V правильного октаэдра — $V = 2V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Поверхность правильного октаэдра состоит из восьми правильных треугольников с ребром a. Поэтому для площади S_n полной поверхности правильного октаэдра будем иметь:

$S_n = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$. Значит, $r = \frac{3V}{S_n} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

350*. Докажите, что:

а) если все плоские углы трехгранного угла прямые, то и все двугранные углы также прямые;

б) если два плоских угла трехгранного угла прямые, то и противолежащие им двугранные углы также прямые.

351*. Трехгранный угол, плоские углы которого прямые, пересечен плоскостью. Докажите, что ортоцентр сечения является основанием перпендикуляра, проведенного из вершины угла на секущую плоскость.

352*. Ребра трехгранного угла с вершиной S, плоские углы которого прямые, пересекает плоскость α в точках A, B, C. Докажите, что:

а) площадь каждого из треугольников SAB, SAC, SBC есть среднее геометрическое площади проекции этого треугольника на плоскость α и площади треугольника ABC;

б) сумма квадратов площадей треугольников SAB, SAC, SBC равна квадрату площади треугольника ABC.

353*. Докажите, что у трехгранного угла пересекаются по одной прямой три его:

а) биссекторные плоскости двугранных углов;

б) плоскости, каждая из которых проходит через биссектрису плоского угла и перпендикулярна его плоскости;

в) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и биссектрису противолежащего плоского угла;

г) плоскости, каждая из которых проходит через ребро и перпендикулярна противолежащей грани.

354*. Трехгранный угол пересекается параллельными плоскостями. Найдите геометрическое место:

а) ортоцентров полученных треугольников;

б) центроидов полученных треугольников;

в) центров окружностей, описанных около полученных треугольников.

355. Склейте правильный:

а) тетраэдр по его развертке, изображенной на рисунке 207;

б) гексаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 208;

в) октаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 209;

г) додекаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 210;

д) икосаэдр по его развертке, изображенной на рисунке 211.

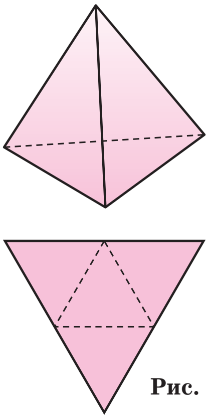


Рис. 207

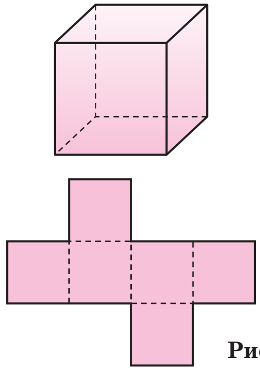


Рис. 208

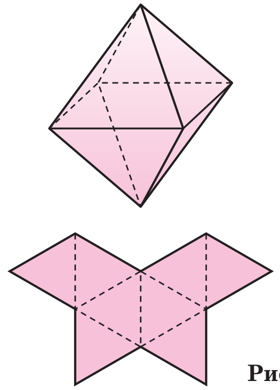


Рис. 209

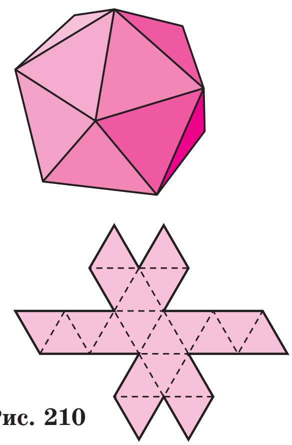


Рис. 210

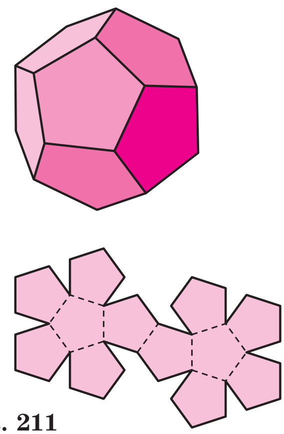


Рис. 211

356. Два одинаковых правильных тетраэдра приставлены друг к другу равными гранями. Является ли полученный многогранник правильным?

357. От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают правильный тетраэдр с ребром 1. Определите вид полученного тела.

358. Ребро куба равно a. Найдите радиус шара:
а) вписанного в куб; б) описанного около куба.

359. Докажите, что:
а) около куба можно описать и в куб можно вписать шар;
б) около правильного тэтраэдра можно описать и в него можно вписать шар;
в) около правильного октаэдра можно описать и в него можно вписать шар.

360. Найдите радиус шара:
а) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a;
б) описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

361. Радиус шара равен R. Найдите полную поверхность описанного около шара многогранника, учитывая, что этот многогранник является:
а) кубом; б) правильным октаэдром; в) правильным тетраэдром.

362. Укажите, сколько центров симметрии имеет:
а) отрезок;
б) параллелепипед;
в) пара пересекающихся плоскостей;
г) правильная треугольная призма;
д) шестиугольная призма;
е) куб;
ж) правильный тетраэдр;
з) правильный октаэдр;
и) правильный додекаэдр;
к) правильный икосаэдр.

363. Укажите, сколько осей симметрии имеет:
а) отрезок;
б) правильный треугольник;
в) правильный шестиугольник;
г) куб;
д) правильный тетраэдр;
е) правильный октаэдр.

364. Укажите, сколько плоскостей симметрии имеет:
а) четырехугольная призма;
б) правильная шестиугольная призма;
в) треугольная пирамида;
г) правильный тетраэдр;
д) куб;
е) правильный октаэдр;
ж) правильный додекаэдр;
з) правильный икосаэдр.

365. Найдите площадь сечения куба с ребром a, проходящего через диагонали двух его граней. Рассмотрите все случаи.

366. Концы диагоналей D_1A, D_1C и D_1B_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1ABB_1 — правильный тетраэдр, и найдите отношение площадей поверхности куба и тетраэдра.

367. Найдите угол между ребрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину и не принадлежат одной грани.

368. Найдите двугранный угол:
а) правильного тетраэдра; б) правильного октаэдра.

369. Ребро правильного тетраэдра $PQUV$ равно q. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, которая проходит через центр грани QUV и:
а) параллельна грани UPV; б) перпендикулярна ребру QP.

370. Докажите, что отрезки, соединяющие центры граней правильного тетраэдра, равны друг другу.

371. В правильном тетраэдре h — высота, l — ребро, а k — расстояние между центрами его граней. Выразите:
а) l через h; б) k через l.

372. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между:
а) двумя его противолежащими вершинами;
б) центрами двух смежных граней;
в) противолежащими гранями.

373. Докажите, что центры граней правильного:
а) октаэдра являются вершинами куба;
б) тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра;
в) куба являются вершинами правильного октаэдра;
г) додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра;
д) икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

374. Докажите, что двугранный угол правильного тетраэдра вместе с двугранным углом правильного октаэдра составляет $180°$.

375. Вершина каждой грани правильного тетраэдра соединена с серединой высоты, проведенной к этой грани. Докажите, что полученные отрезки попарно перпедикулярны.

376. Докажите, что в правильном октаэдре:
а) противолежащие ребра параллельны;
б) противолежащие грани параллельны;
в) расстояния между противолежащими гранями равны;
г) периметр сечения, параллельного грани, — величина постоянная.

377. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между центрами двух его граней. Рассмотрите все возможные случаи.

378. В цилиндр, высота которого равна h, вписан такой октаэдр, что две его вершины являются центрами оснований цилиндра. Определите, при каких условиях октаэдр будет правильным, и найдите его ребро.

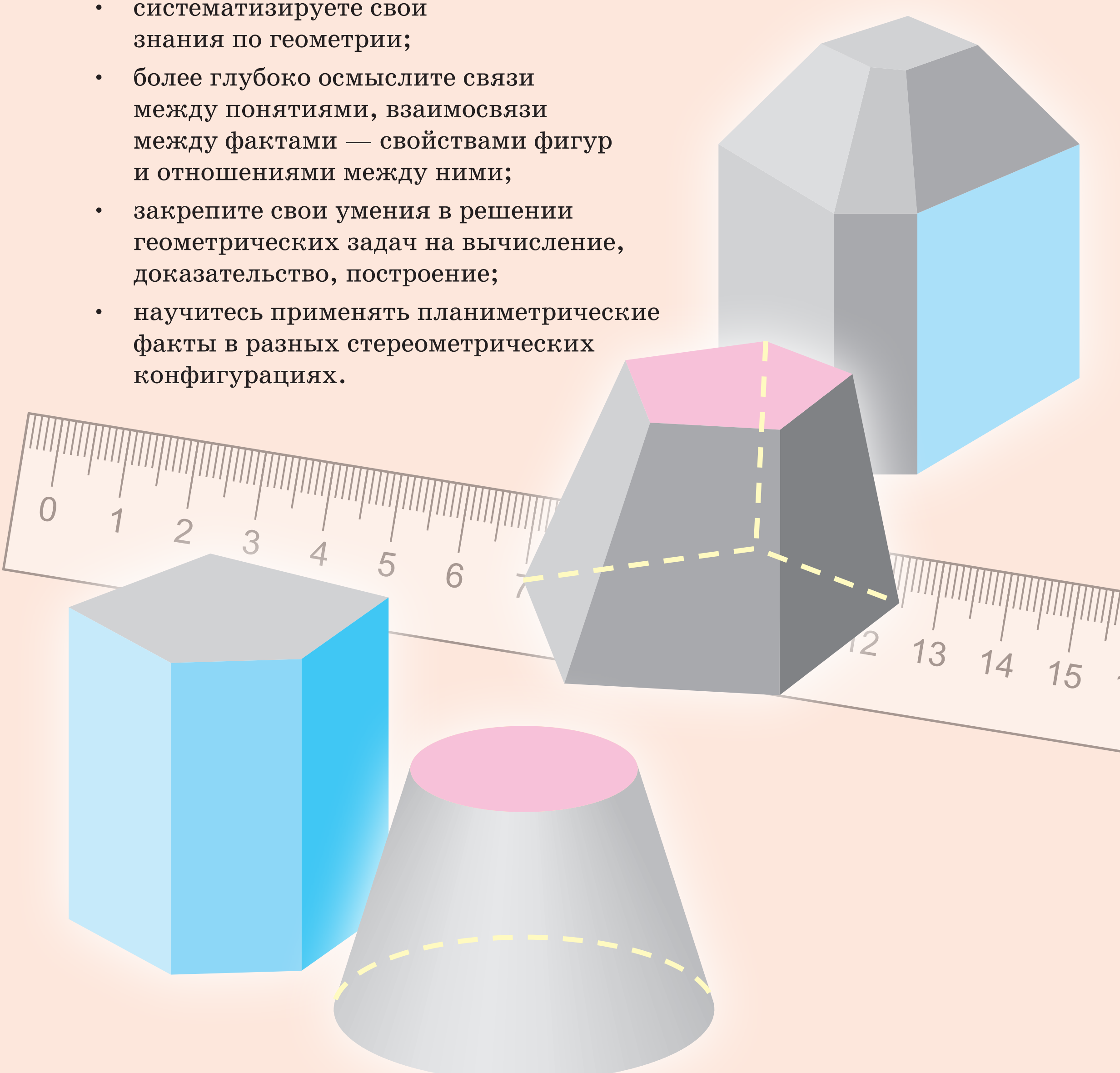
379. Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма количества граней и вершин на 2 больше количества ребер (теорема Эйлера).

Раздел 4

Повторение

В этом разделе вы:

- систематизируете свои знания по геометрии;
- более глубоко осмыслите связи между понятиями, взаимосвязи между фактами — свойствами фигур и отношениями между ними;
- закрепите свои умения в решении геометрических задач на вычисление, доказательство, построение;
- научитесь применять планиметрические факты в разных стереометрических конфигурациях.



§ 8. Геометрические фигуры и их свойства

А) Прямые и плоскости

Основное содержание школьной геометрии связано с соответствующими геометрическими конфигурациями — простейшими геометрическими фигурами или их сочетаниями. К таким конфигурациям относятся: две прямые в пространстве; прямая и плоскость; две плоскости; две прямые плоскости; три прямые плоскости; разносторонний треугольник; прямоугольный треугольник; равнобедренный треугольник; окружность и прямая; окружность и две прямые; окружность и треугольник; четырехугольник общего вида; четырехугольник и окружность; трапеция; параллелограмм; прямоугольник; ромб; квадрат.

Условие геометрической задачи обычно описывает определенную геометрическую конфигурацию, которую можно рассматривать как сочетание названных простейших конфигураций. Поэтому вначале целесообразно сделать схематический рисунок, который более или менее верно отражает условие задачи. Затем, анализируя построенный рисунок, попробовать наметить план перехода от данных свойств и числовых характеристик к тому, что требуется в задаче. Наконец, нужно реализовать намеченный план, оформив решение задачи.

Прямые в пространстве

Две прямые a и b могут не принадлежать одной плоскости или принадлежать ей. Две прямые одной плоскости могут иметь общую точку или не иметь ее. В соответствии с этим **две прямые пространства** либо *скрещиваются* (рис. 212), либо *пересекаются* (рис. 213), либо *параллельны* (рис. 214).

Скрещивающиеся и пересекающиеся прямые могут быть *перпендикулярными*, т. е. такими, что угол между ними равен 90° (рис. 215).

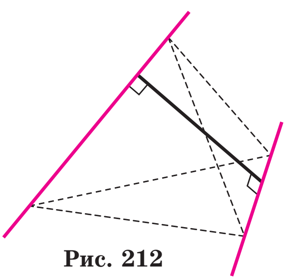


Рис. 212

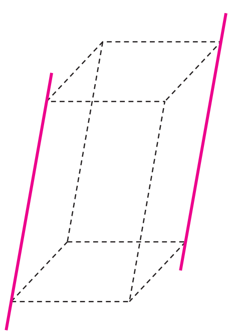


Рис. 214

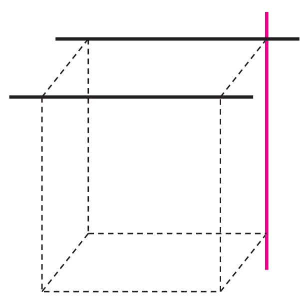


Рис. 215

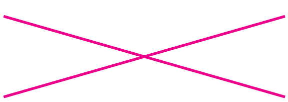


Рис. 213

Отношение	Признаки	Свойства
Прямые скрещиваются	Прямые скрещиваются, если одна из них принадлежит некоторой плоскости, а другая пересекает ее в точке, не принадлежащей первой прямой	Если прямые скрещиваются, то: • через каждую из них можно провести плоскость, параллельную другой прямой; • через них можно провести плоскости, параллельные друг другу; • они имеют единственный общий перпендикуляр
Прямые параллельны	Прямые параллельны, если: • они перпендикулярны одной плоскости; • они являются линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью	Если из трех различных прямых первая прямая параллельна второй, а вторая — третьей, то первая и третья прямые также параллельны. Если две различные прямые параллельны третьей, то они параллельны и друг другу. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то ее пересекает и другая прямая. Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны друг другу

Прямая и плоскость

В пространстве у прямой и плоскости общих точек может быть: ни одной, одна или более одной. В соответствии с этим **прямая и плоскость пространства** либо *параллельны* (рис. 216), либо *пересекаются* (рис. 217), либо *прямая лежит в плоскости* (рис. 218).

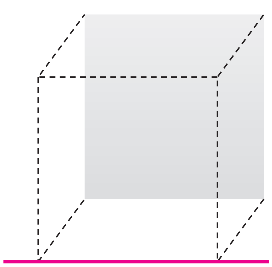


Рис. 216

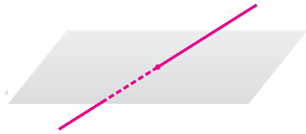


Рис. 217

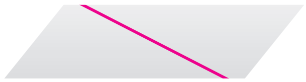


Рис. 218

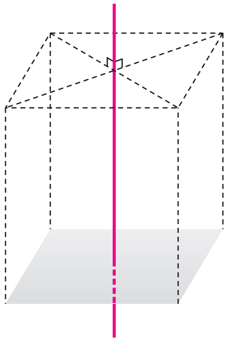


Рис. 219

Частным случаем пересекающихся прямой и плоскости является их *перпендикулярность*, т. е. такое их расположение, когда прямая перпендикулярна любой прямой плоскости (рис. 219).

Отношение	Признаки	Свойства
Параллельность прямой и плоскости	Прямая параллельна плоскости, если она не принадлежит этой плоскости и параллельна какой-либо ее прямой	Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то она пересекает ее по прямой, параллельной первой прямой
Перпендикулярность прямой и плоскости	Прямая перпендикулярна плоскости, если: • она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости; • она является линией пересечения двух плоскостей, которые перпендикулярны данной плоскости	Через каждую точку пространства можно провести: • единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой; • единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости

Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Отрезок, соединяющий какую-либо точку P прямой l, перпендикулярной плоскости α, с точкой Q пересечения прямой l и плоскости α (рис. 220), называется *перпендикуляром плоскости*, проведенным из точки P, а точка Q — *основанием перпендикуляра*. Отрезок PR, соединяющий какую-либо точку P пространства, не принадлежащую плоскости α, с какой-либо ее точкой R, отличной от перпендикуляра к плоскости, называется *наклонной к плоскости*, проведенной из точки P, а точка R — *основанием наклонной*. Если PQ — перпендикуляр к плоскости α, то отрезок QR называется *проекцией наклонной* PR на плоскость α.

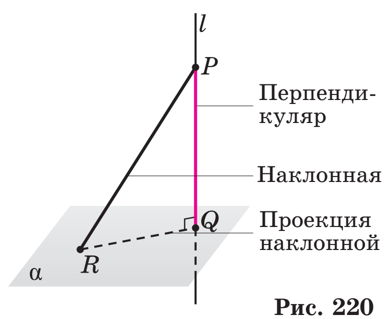


Рис. 220

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной, а если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной (рис. 221).

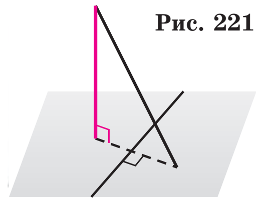


Рис. 221

Две плоскости

В пространстве две плоскости либо имеют общую точку, либо не имеют ее. В соответствии с этим **две плоскости пространства** либо *параллельны* (рис. 222), либо *пересекаются* (рис. 223).

Частным случаем пересекающихся плоскостей является их *перпендикулярность*, т. е. такое их расположение, когда угол между ними равен 90° (рис. 224).

Отношение	**Признаки**	**Свойства**
Параллельность плоскостей	Плоскости являются параллельными, если: • одна из них проходит через пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости; • две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости; • они перпендикулярны одной прямой	Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. Две параллельные плоскости высекают из параллельных прямых равные отрезки. Три параллельные плоскости высекают из параллельных прямых пропорциональные отрезки. Если первая плоскость параллельна второй, а вторая — третьей, то первая и третья плоскости также параллельны. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны друг другу
Перпендикулярность плоскостей	Плоскости являются перпендикулярными, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости	• Плоскость, перпендикулярная линии пересечения двух данных плоскостей, перпендикулярна каждой из них. • Если через точку одной из перпендикулярных плоскостей проведена прямая, перпендикулярная другой плоскости, то эта прямая принадлежит первой плоскости

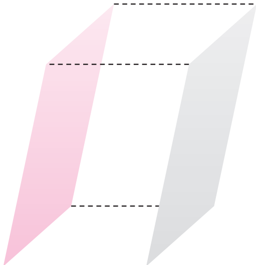


Рис. 222

Рис. 223

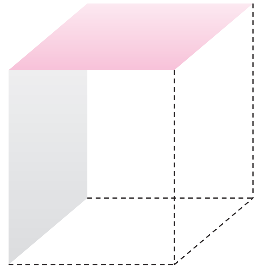


Рис. 224

Многогранный угол

Две полуплоскости с общей границей разделяют пространство на две части, каждую из которых вместе с полуплоскостями называют **двугранным углом** (рис. 225), сами полуплоскости, ограничивающие двугранный угол, называют **гранями** угла, а общую прямую — **ребром** двугранного угла (рис. 226).

Угол, образованный двумя перпендикулярами, возведенными из произвольной точки ребра двугранного угла в каждой из его граней, называется **линейным углом** двугранного угла (рис. 227).

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Двугранный угол измеряется своим линейным углом.

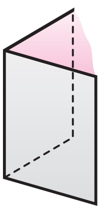


Рис. 225

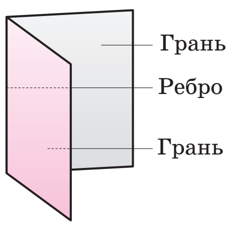


Рис. 226

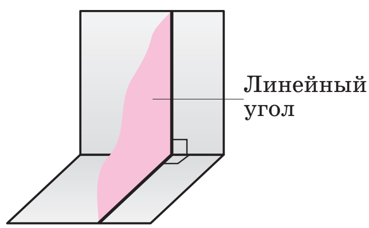


Рис. 227

Часть пространства, ограниченная всеми лучами, которые проходят через точки плоского многоугольника и имеют общее начало, не принадлежащее плоскости этого многоугольника, называется **многогранным углом** (рис. 228). Общее начало лучей, которые образуют многогранный угол, называют **вершиной** многогранного угла, а сами лучи — **ребрами** многогранного угла; плоские углы, ограничивающие многогранный угол, называют **гранями** многогранного угла (рис. 228).

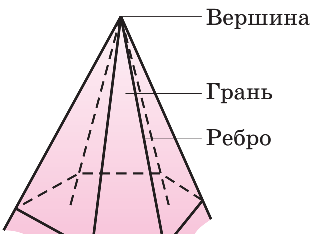


Рис. 228

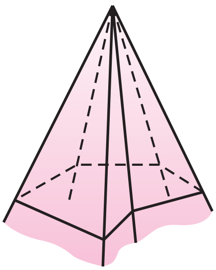


Рис. 229

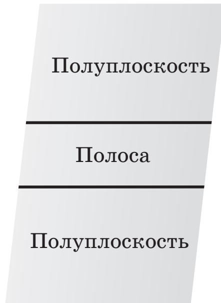
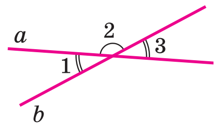


Рис. 230



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
$\angle 1 = \angle 3$

Рис. 231

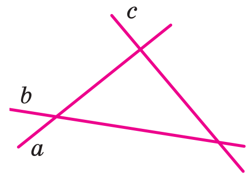


Рис. 232

Многогранные углы разделяют на **выпуклые** и **невыпуклые**, в зависимости от того, располагается или не располагается угол по одну сторону от плоскости любой его грани. Многогранный угол на рис. 228 — выпуклый, а на рис. 229 — невыпуклый. По количеству граней многогранные углы разделяют на **трехгранные, четырехгранные** и т. д.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Две прямые плоскости

Параллельные прямые разделяют плоскость на две полуплоскости и полосу (рис. 230).

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла (рис. 231), которые объединяют в пары. Углы 1 и 2, имеющие общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180°, а вертикальные углы равны друг другу.

Три прямые плоскости

Среди трех прямых a, b, c может не быть параллельных прямых (рис. 232), либо такие прямые могут быть. Если прямые a и b параллельны, то третья прямая c может быть параллельной им (рис. 233) либо пересекать их (рис. 234).

Если две прямые a и b пересечены третьей прямой, то образуется 8 углов (рис. 235). Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*, углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренними односторонними*, углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренними накрест лежащими*.

Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

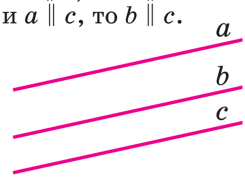


Рис. 233

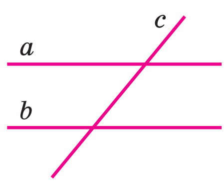


Рис. 234

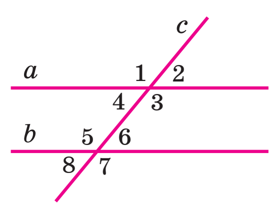


Рис. 235

Признаки параллельности прямых плоскости	**Свойства параллельных прямых плоскости**
Прямые являются параллельными, если при пересечении их третьей прямой: • соответственные углы равны; • внутренние накрест лежащие углы равны; • внутренние односторонние углы вместе составляют 180°	Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой: • соответственные углы равны; • внутренние накрест лежащие углы равны; • внутренние односторонние углы вместе составляют 180°

Б) Треугольник

Разносторонний треугольник

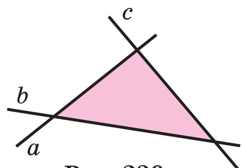


Рис. 236

Три попарно пересекающиеся прямые выделяют из плоскости треугольник (рис. 236). Стороны и углы треугольника называют его основными *элементами*. С треугольником связывают и другие элементы.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом (рис. 237).

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 238).

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны (рис. 239).

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между его вершиной и противолежащей стороной (рис. 240).

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через противолежащую сторону (рис. 241).

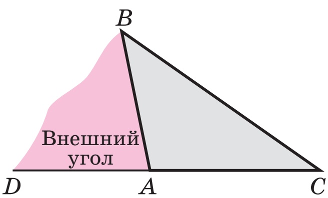


Рис. 237

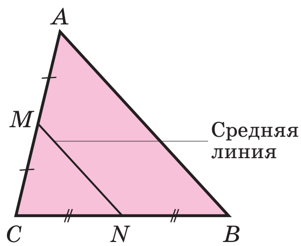


Рис. 238

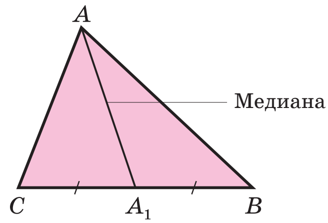


Рис. 239

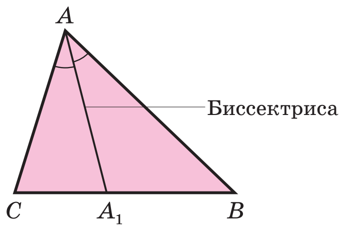


Рис. 240

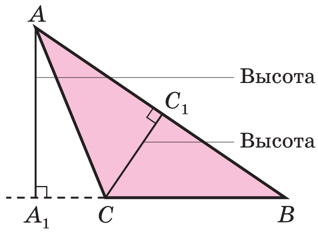


Рис. 241

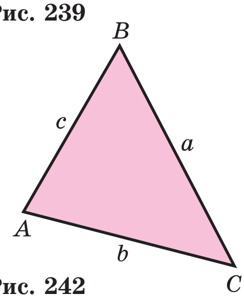


Рис. 242

Треугольник имеет следующие *свойства*:

Элемент	Свойство	
Стороны и углы (см. рис. 242)	Сумма внутренних углов равна 180°	$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
	Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности	$b - c < a < b + c$ $a - c < b < a + c$ $a - b < c < a + b$
	Большему углу соответствует бо́льшая противолежащая сторона	Если $\angle A > \angle C$, то $a > c$
	Большей стороне соответствует больший противолежащий угол	Если $a > c$, то $\angle A > \angle C$
	Квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
	Стороны пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов). Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника (теорема синусов)	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
Внешний угол (см. рис. 237)	Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle BAD = \angle B + \angle C$
Средняя линия (см. рис. 238)	Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине	$MN \parallel AB$ $MN = \frac{1}{2}AB$
Медиана	Медиана треугольника делит его на равновеликие части (см. рис. 239). Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отсекает от каждой из них третью, если считать от стороны (рис. 243)	$S_{CAA_1} = S_{BAA_1}$ $A_1G = \frac{1}{3}AA_1$ $B_1G = \frac{1}{3}BB_1$ $C_1G = \frac{1}{3}CC_1$

Элемент	Свойство	
Биссектриса	Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (см. рис. 240). Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис треугольника делит каждую из них в отношении, первый компонент которой — сумма сторон, заключающих биссектрису, а второй — третья сторона (рис. 244)	$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$ $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{AB + AC}{BC}$
Высота	Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (рис. 245)	

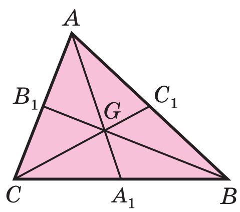


Рис. 243

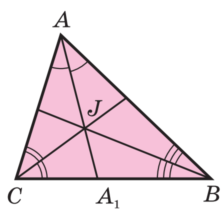


Рис. 244

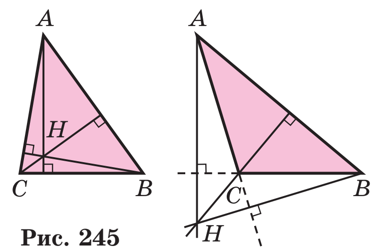


Рис. 245

Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший, его угол может быть и острым (рис. 246), и прямым (рис. 247), и тупым (рис. 248). В соответствии с этим треугольники делятся на *остроугольные*, *прямоугольные*, *тупоугольные*.

Стороны, образующие прямой угол прямоугольного треугольника, называют *катетами*, а его третью сторону — *гипотенузой*.

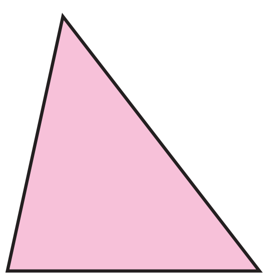


Рис. 246

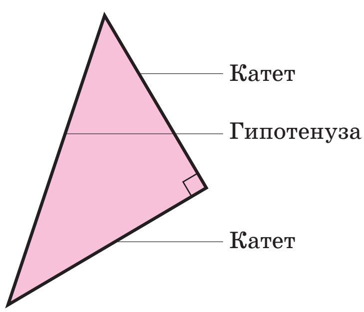


Рис. 247

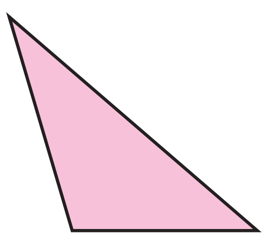


Рис. 248

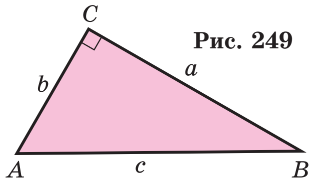


Рис. 249

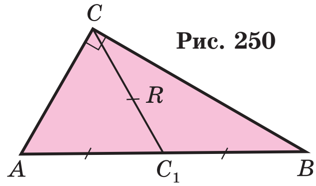


Рис. 250

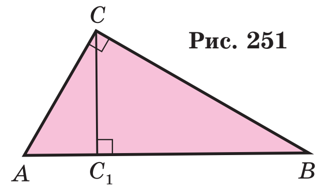


Рис. 251

Прямоугольный треугольник (см. рис. 249) имеет следующие *свойства*:

Элемент	**Свойство**	
Стороны и углы	Острые углы вместе составляют 90°	$\angle A + \angle B = 90°$
	Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора)	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
	Если катет лежит против угла в 30°, то он равен половине гипотенузы	
	Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°	
	Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе. Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему	$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$ $\mathrm{tg}\, A = \frac{BC}{AC}$ $\mathrm{ctg}\, A = \frac{AC}{BC}$
Медиана	Медиана, проведенная к гипотенузе (см. рис. 250), равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности	$CC_1 = AC_1 = BC_1 = R$
Высота	Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу (см. рис. 251)	$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1}$ $AC = \sqrt{AB \cdot AC_1}$ $BC = \sqrt{AB \cdot BC_1}$

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

- он имеет прямой угол;
- сумма двух каких-либо его углов равна 90°;
- квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;
- одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

Равнобедренный треугольник

Если треугольник имеет равные стороны, его называют *равнобедренным* (рис. 252). Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним* (рис. 253).

Равные стороны равнобедренного треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью сторону — *основанием* (рис. 254).

Равнобедренный треугольник (рис. 255) имеет следующие *свойства*:

Элемент	Свойства	
Стороны и углы	Углы при основании равны	$\angle A = \angle B$
Медиана, высота, биссектриса	Медиана, биссектриса, высота, проведенные к основанию, совпадают	Если BB_1 — медиана, то BB_1 — биссектриса и высота; если BB_1 — биссектриса, то BB_1 — медиана и высота; если BB_1 — высота, то BB_1 — биссектриса и медиана

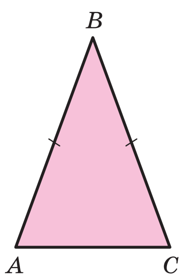


Рис. 252

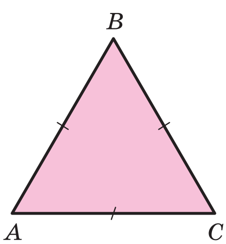


Рис. 253

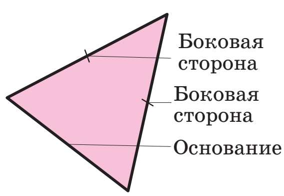


Рис. 254

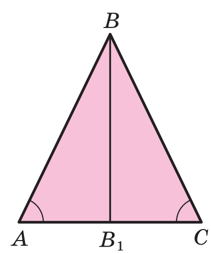


Рис. 255

Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

- две его стороны равны;
- два его угла равны;
- проведенные из одной вершины медиана и высота совпадают;
- проведенные из одной вершины медиана и биссектриса совпадают;
- проведенные из одной вершины высота и биссектриса совпадают.

В) Окружность и прямая

Окружность и круг

Отношение длины C любой окружности к ее диаметру d есть постоянная величина. Это отношение выражается числом, обозначаемым π:

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113} \approx 3{,}141592653\ldots$$

Длина C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами:

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2; \quad S = \frac{C}{2}r \quad \text{(рис. 256).}$$

Окружность и прямая

Общих точек у прямой и окружности может быть не больше двух (рис. 257).

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Касательная — прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

Свойство касательной: касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания (рис. 258).

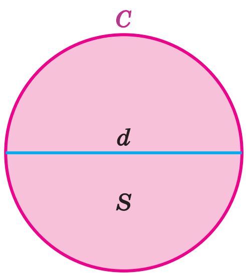


Рис. 256

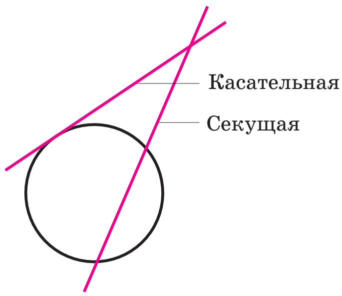


Рис. 257

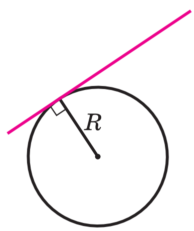
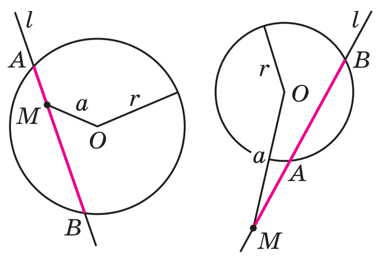


Рис. 258

Признак касательной. Прямая является касательной, если она проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Если прямая проходит через данную точку и пересекает данную окружность, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения прямой с окружностью есть величина постоянная, равная $r^2 - a^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки, если точка лежит внутри круга, и равная $a^2 - r^2$, если точка лежит вне круга (рис. 259).



$$MA \cdot MB = |a^2 - r^2|$$

Рис. 259

Окружность и две прямые

Две параллельные прямые, каждая из которых имеет общие точки с окружностью, высекают из окружности равные дуги (рис. 260).

Пересекающиеся прямые по отношению к окружности могут располагаться так, что точка пересечения либо совпадает с центром, либо лежит на окружности, либо лежит внутри круга, либо лежит вне круга.

Угол, вершина которого находится в центре круга (рис. 261), называется *центральным углом*. Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Угол между касательной и секущей, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 262).

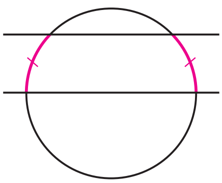
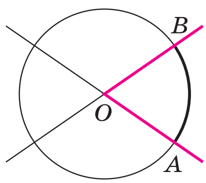
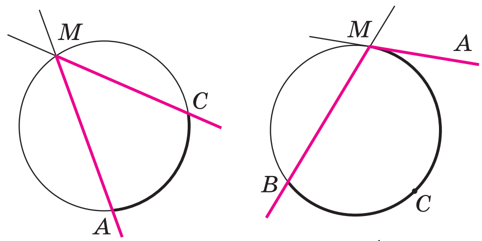


Рис. 260



$\angle AOB = \smile AB$

Рис. 261



$\angle AMC = \frac{1}{2} \smile AC$ $\quad \angle AMB = \frac{1}{2} \smile BCM$

Рис. 262

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны (рис. 263).

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному (рис. 264).

Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол высекает из окружности (рис. 265).

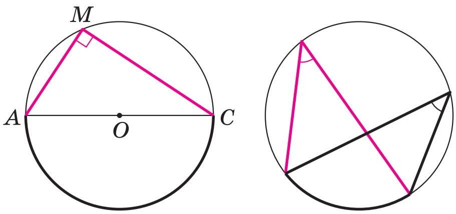
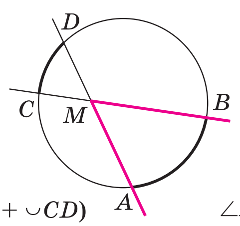
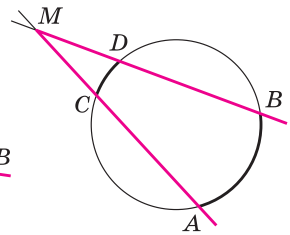


Рис. 263



$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$

Рис. 264



$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile CD)$

Рис. 265

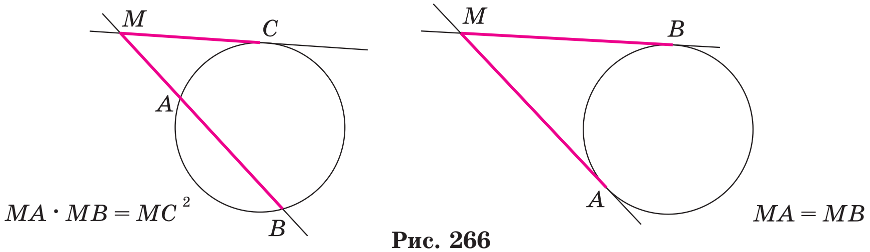


Рис. 266

Если секущая и касательная проходят через данную точку вне круга, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения секущей с окружностью равно квадрату расстояния от данной точки до точки касания касательной, проходящей через данную точку. Расстояния от данной точки вне круга до точек касания с данной окружностью двух касательных, проведенных через данную точку, равны друг другу (рис. 266).

Окружность и треугольник

Окружность, вписанная в многоугольник, — окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

Окружность, описанная около многоугольника, — это окружность, проходящая через все вершины многоугольника.

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника (рис. 267).

Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 268).

Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с другими элементами треугольника формулами:

$$r = \frac{S}{p}; \qquad R = \frac{abc}{4S}; \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R \text{ (рис. 269).}$$

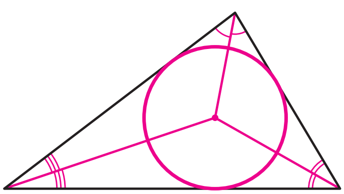


Рис. 267

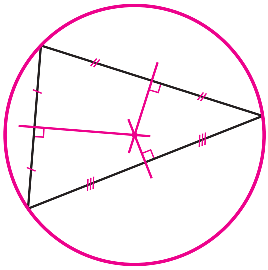


Рис. 268

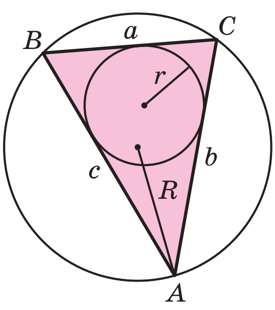


Рис. 269

Г) Четырехугольник

Четырехугольник общего вида

Плоская замкнутая четырехзвенная ломаная без самопересечений выделяет из плоскости *четырехугольник*. Четырехугольник на рис. 270 — *выпуклый*, а на рис. 271 — *невыпуклый*. Обычно рассматривают выпуклые четырехугольники.

Свойства четырехугольника:

- сумма внутренних углов равна 360°;
- середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 272);
- из треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, произведение площадей треугольников, прилежащих к одной паре противоположных сторон, равно произведению площадей треугольников, прилежащих к другой паре противоположных сторон (рис. 273).

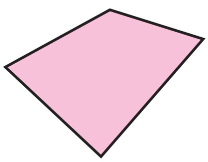


Рис. 270

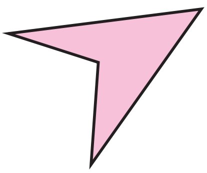


Рис. 271

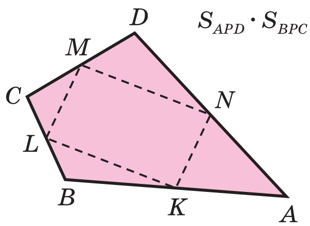


Рис. 272

$S_{APD} \cdot S_{BPC} = S_{APB} \cdot S_{CPD}$

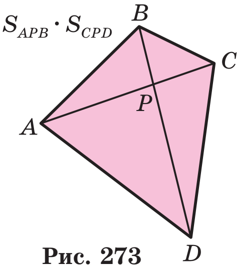


Рис. 273

Четырехугольник и окружность

Свойство описанного четырехгольника (рис. 274): суммы противоположных сторон равны.

Признак описанного четырехугольника. Четырехугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон.

Свойства вписанного четырехугольника (рис. 275):

- суммы противоположных углов равны 180°;
- произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

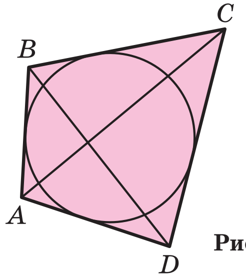


Рис. 274

$AD + BC = AB + CD$

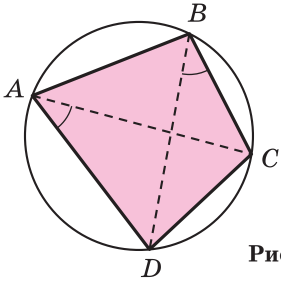


Рис. 275

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Признаки вписанного четырехугольника. Четырехугольник является вписанным в окружность, если:

- сумма противоположных углов равна 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$;
- углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну сторону, равны: $\angle ACB = \angle ADB$, или $\angle BAC = \angle BDC$, или $\angle CAD = \angle CBD$, или $\angle ACD = \angle ABD$.

Трапеция

Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не паралельны (рис. 276).

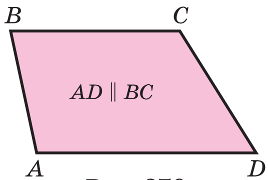


Рис. 276

Свойства трапеции (рис. 277):

- сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°: $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle C + \angle D = 180°$;
- средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$;
- две прямые, проходящие через боковые стороны трапеции, и прямая, проходящая через середины ее оснований, пересекаются в одной точке;
- из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, прилежащие к основаниям треугольники подобны, а прилежащие к боковым сторонам — равновелики:

$$\triangle AOD \sim \triangle COB;\ S_{AOB} = S_{DOC}.$$

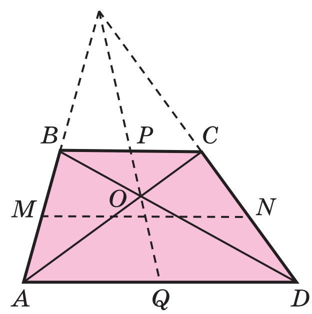


Рис. 277

Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон (рис. 278).

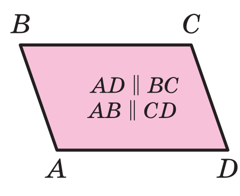


Рис. 278

Свойства параллелограмма (рис. 279):

- сумма углов, прилежащих к любой его стороне, равна 180°:
  $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$,
  $\angle C + \angle D = 180°$, $\angle D + \angle A = 180°$;
- его противолежащие стороны параллельны и равны:
  $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, $AD = BC$ и $AB = CD$;
- его противоположные угла равны:
  $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

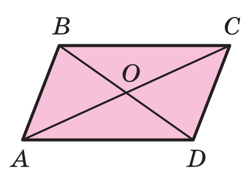


Рис. 279

- точка пересечения диагналей делит их пополам:
  $AO = CO$, $BO = DO$;
- точка пересечения диагоналей есть центр симметрии параллелограмма.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если:

- суммы углов, прилежащих к каким-либо двум смежным сторонам, равны 180° каждая:
  $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle B + \angle C = 180°$,
  или $\angle B + \angle C = 180°$ и $\angle C + \angle D = 180°$,
  или $\angle C + \angle D = 180°$ и $\angle D + \angle A = 180°$,
  или $\angle D + \angle A = 180°$ и $\angle A + \angle B = 180°$;
- его противоположные стороны параллельны:
  $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$;
- его противоположные стороны равны:
  $AD = BC$ и $AB = CD$;
- он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон:
  $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ или $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;
- его противоположные углы равны:
  $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;
- его диагонали точкой пересечения делятся пополам:
  $AO = CO$, $BO = DO$.

Прямоугольник

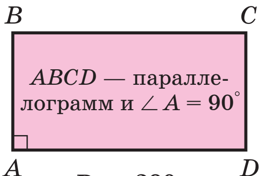


Рис. 280

Прямоугольник — параллелограмм, у которого есть прямой угол (рис. 280).

Свойства прямоугольника (рис. 281):

- все его углы равны друг другу и прямые:
  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;
- его диагонали равны: $AC = BD$;
- серединные перпендикуляры к его сторонам являются осями симметрии.

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

- его диагонали равны: $AC = BD$;
- серединный перпендикуляр к какой-либо стороне параллелограмма является его осью симметрии: MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.

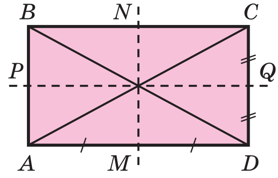


Рис. 281

Ромб

Ромб — параллелограмм, имеющий равные смежные стороны (рис. 282).

Свойства ромба (рис. 283):

- все его стороны равны друг другу: $AB = BC = CD = DA$;
- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;
- его диагонали делят углы пополам:
  $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;
- прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.

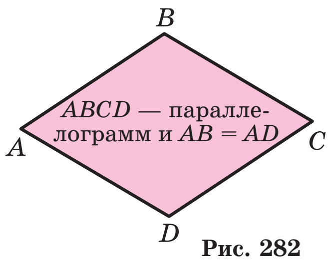


Рис. 282

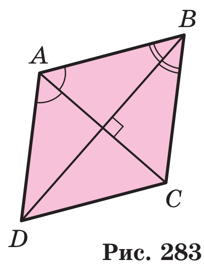


Рис. 283

Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

- он имеет пару равных смежных сторон:
  $AB = BC$, или $BC = CD$, или $CD = DA$, или $DA = AB$;
- его диагонали перпендикулярны: $AC \perp BD$;
- его диагонали делят углы пополам:
  $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;
- прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.

Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого есть равные смежные стороны, или ромб, у которого есть прямой угол (рис. 284).

Поскольку квадрат является и прямоугольником, и ромбом, то у него есть все свойства прямоугольника и все свойства ромба.

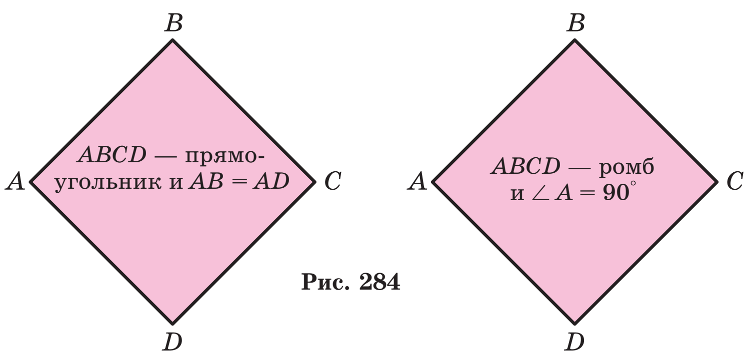


Рис. 284

Д) Отношения между фигурами

Геометрические фигуры могут находиться в отношениях равенства и подобия.

Равенство фигур

Равные фигуры — фигуры, совпадающие при наложении, либо фигуры, преобразующиеся друг в друга при некотором движении.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если соответственно:

- две стороны и угол между ними в одном треугольнике равны двум сторонам и углу между ними в другом треугольнике;
- сторона и прилежащие к ней углы в одном треугольнике равны стороне и прилежащим к ней углам в другом треугольнике;
- три стороны в одном треугольнике равны трем сторонам в другом треугольнике.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

- катеты;
- катет и прилежащий к нему острый угол;
- гипотенуза и острый угол;
- гипотенуза и катет.

Подобие фигур

Подобные многоугольники — многоугольники с одним и тем же количеством сторон с соответствующими равными углами и пропорциональными соответствующими сторонами.

Отношение соответствующих сторон подобных многоугольников называется *коэффициентом подобия*.

Теория подобия основана на *теореме Фалеса*: если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне высекают также равные отрезки (рис. 285).

Верна *обобщенная теорема Фалеса*: ряд параллельных прямых, пересекающих две другие прямые, высекают на них пропорциональные отрезки (рис. 286).

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

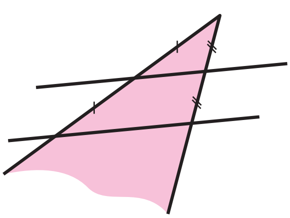
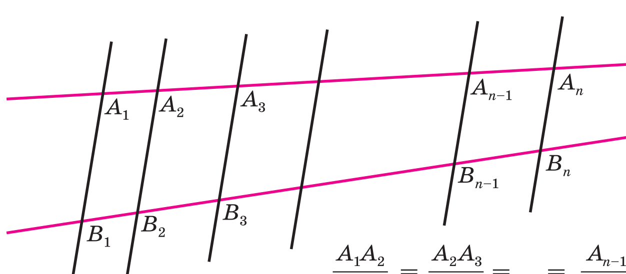


Рис. 285



$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$$

Рис. 286

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если у них:

- есть по равному углу, а прилежащие к ним стороны пропорциональны;
- есть по два равных угла;
- все три стороны пропорциональны.

Отношение любых соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Отношение объемов подобных фигур-тел равно кубу коэффициента подобия.

1. Какие две прямые пространства называют скрещивающимися; пересекающимися; параллельными?

2. Сформулируйте свойства скрещивающихся прямых; параллельных прямых.

3. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых; признаки параллельных прямых.

4. Какие прямая и плоскость называются параллельными; пересекающимися; перпендикулярными?

5. Сформулируйте свойства параллельности прямой и плоскости; перпендикулярности прямой и плоскости.

6. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости; перпендикулярности прямой и плоскости.

7. Какие две плоскости называют параллельными; пересекающимися; перпендикулярными?

8. Сформулируйте свойства параллельности плоскостей; перпендикулярности плоскостей.

9. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей; перпендикулярности плоскостей.

10. Какой отрезок называют перпендикуляром к плоскости; наклонной к плоскости; проекцией наклонной к плоскости?

11. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.

12. Какие углы называют смежными; вертикальными?

13. Сформулируйте свойство смежных углов; вертикальных углов.

14. Какие углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, называют соответственными; внутренними накрест лежащими; внутренними односторонними?

15. Сформулируйте свойства параллельных прямых через углы, образованные при пересечении двух прямых третьей.

16. Сформулируйте признаки параллельных прямых через углы, образованные при пересечении двух прямых третьей.

17. Какой отрезок называют средней линией треугольника; медианой треугольника; биссектрисой треугольника; высотой треугольника?

18. Какой угол называют внешним углом треугольника?

19. Сформулируйте свойства-неравенства, связывающие стороны и углы треугольника.

20. Сформулируйте свойства-равенства, связывающие стороны и углы треугольника.
21. Сформулируйте свойство внешнего угла треугольника.
22. Сформулируйте свойство средней линии треугольника.
23. Сформулируйте свойство медианы треугольника; точки пересечения медиан треугольника.
24. Сформулируйте свойства биссектрисы треугольника; точки пересечения биссектрис треугольника.
25. Какой треугольник называется остроугольным; прямоугольным; тупоугольным?
26. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
27. Сформулируйте свойства углов прямоугольного треугольника; сторон прямоугольного треугольника; медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе; высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.
28. Сформулируйте признаки прямоугольного треугольника.
29. Какой треугольник называется равнобедренным; равносторонним?
30. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника; признаки равнобедренного треугольника.
31. Что выражает число π?
32. Чему равна длина окружности; площадь круга?
33. Какая прямая называется касательной к окружности; секущей окружности?
34. Сформулируйте свойство касательной; признак касательной.
35. Сформулируйте свойство точки секущей, расположенной внутри круга; точки секущей, расположенной вне круга.
36. Сформулируйте свойство дуг, высекаемых из окружности параллельными прямыми.
37. Какой угол называется центральным; вписанным?
38. Как измеряется центральный угол; вписанный угол; угол с вершиной внутри круга; угол с вершиной вне круга?
39. Как связаны между собой расстояния от данной точки секущей, расположенной вне круга, до точек ее пересечения с окружностью и расстояние от данной точки до точки касания касательной, проходящей через данную точку?
40. Как связаны расстояния от данной точки вне круга до точек касания с данной окружностью двух касательных, проведенных через данную точку?
41. Какая окружность называется вписанной в многоугольник; описанной около многоугольника?
42. Где находится центр вписанной в треугольник окружности; центр описанной около треугольника окружности?
43. Как радиусы вписанной в треугольник окружности и описанной около треугольника окружности связаны с основными элементами треугольника и его площадью?
44. Как сторона треугольника и противолежащий ей угол связаны с радиусом описанной окружности?
45. Сформулируйте свойства четырехугольника.
46. Какой четырехугольник называется трапецией; параллелограммом?
47. Какой параллелограмм называется прямоугольником; ромбом?
48. Дайте два определения квадрата.
49. Сформулируйте свойства трапеции; параллелограмма; прямоугольника; ромба.
50. Сформулируйте признаки параллелограмма; прямоугольника; ромба.
51. Сформулируйте свойство описанного четырехугольника; признак описанного четырехугольника.

52. Сформулируйте свойство вписанного четырехугольника; признак вписанного четырехугольника.

53. Какое отношение между фигурами называется равенством фигур; подобием фигур?

54. Сформулируйте признаки равенства треугольников; признаки подобия треугольников.

55. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

56. Сформулируйте теорему Фалеса; обобщенную теорему Фалеса.

57. Чему равно отношение линейных элементов подобных фигур; площадей подобных фигур; объемов подобных фигур?

58. Как отношение равенства связано с отношением подобия?

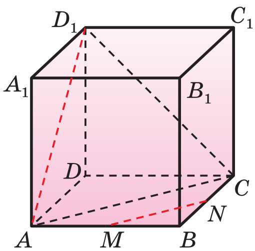


Рис. 287

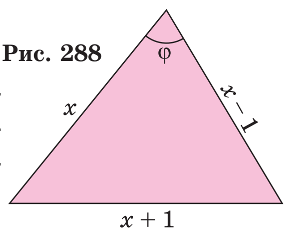
Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AB и BC. Найдите угол между прямыми MN и AD_1.

Решение. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведем диагонали AC и CD_1 граней $ABCD$ и CDD_1C_1 (рис. 287).

Поскольку в треугольнике ABC отрезок MN — средняя линия, то $MN \parallel AC$ и угол между прямыми MN и AD_1 равен углу между прямыми AC и AD_1. Учтем теперь, что в кубе все грани — равные квадраты, у которых равны диагонали. Поэтому треугольник ACD_1 — равносторонний и, значит, $\angle CAD_1 = 60°$.

Ответ: 60°.

Рис. 288



Задача 2. Найдите периметр треугольника, у которого средняя по длине сторона на единицу отличается от каждой другой стороны, а косинус наибольшего угла равен $\frac{5}{13}$.

Решение. Пусть длина средней по величине стороны равна x (рис. 288). Тогда длины двух других сторон будут равны $x - 1$ и $x + 1$. Учитывая, что наибольший угол φ в треугольнике находится напротив наибольшей стороны, по теореме косинусов получаем:

$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x\,(x-1)\cos\varphi.$$

Поскольку $\cos\varphi = \frac{5}{13}$, то $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2x(x-1)\cdot\frac{5}{13}$, или $3x^2 - 42x = 0$. Поскольку x есть длина стороны треугольника, то $x > 1$. Поэтому $x = \frac{42}{3}$. Найдем теперь периметр P треугольника:

$$P = (x-1) + x + (x+1) = 3x = 3\cdot\frac{42}{3} = 42.$$

Ответ: 42.

Задача 3. Углы ACB, ACD и BAD четырехугольника $ABCD$ соответственно равны 46°, 52° и 82°. Найдите угол ABD.

Р е ш е н и е. Около треугольника BCD опишем окружность (рис. 289). Поскольку $\angle BCD = 46° + 52° = 98°$, то градусная мера дуги BD, не содержащей точки C, равна $2 \cdot 98°$, т. е. 196°, а градусная мера дополнительной дуги BCD — $360° - 196° = 164°$.

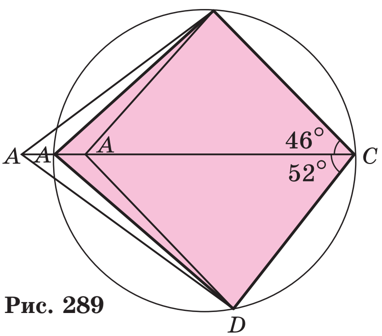


Рис. 289

Заметив, что $164° : 2 = 82° = \angle BAD$, делаем вывод, что точка A не может находиться ни вне окружности, ведь тогда угол BAD был бы меньше 82°, ни внутри окружности, ведь тогда угол BAD был бы больше 82°. Поэтому углы ACD и ABD являются вписанными и опираются на одну дугу. Значит, они равны: $\angle ABD = \angle ACD = 52°$.

О т в е т: 52°.

Задача 4. Докажите, что отрезки, которые соединяют вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной ей вершине, разделяют на три доли диагональ, которая соединяет две другие вершины.

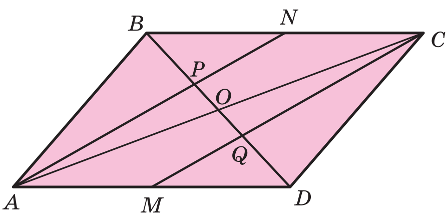


Рис. 290

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и BC, прямые AN и CM пересекают диагональ BD в точках P и Q соответственно (рис. 290). Необходимо доказать, что $BP = PQ = QD$.

Проведем диагональ AC, и пусть O — точка пересечения AC с BD. Поскольку O — центр симметрии как параллелограмма $ABCD$, так и параллелограмма $ANCM$, то $OB = OD$, $OQ = OP$ и $BP = OB - OP = OD - OQ = QD$. Поэтому остается убедиться, что $BP = 2OP$.

Рассмотрим треугольник ABC. В нем AN и BO — медианы, P — точка их пересечения. Поэтому равенство $BP = 2OP$ является верным.

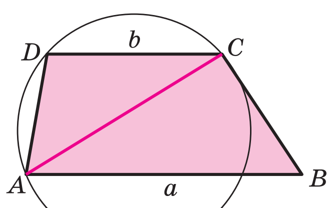


Рис. 291

Задача 5. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD равны a и b соответственно. Окружность, проходящая через точки A, D, C, касается прямой BC. Найдите AC.

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 291) $AB = a$, $CD = b$. Поскольку $AB \parallel CD$, то $\angle ACD = \angle BAC$. Угол ADC как вписанный в окружность измеряется половиной дуги AC, на которую он опирается. Угол ACB как угол между хордой AC и касательной BC измеряется половиной дуги AC, заключенной внутри угла. Поэтому $\angle ACB = \angle ADC$ и $\triangle BCA \sim \triangle ADC$

по двум углам. Значит, $AB : AC = AC : CD$, откуда $AC^2 = AB \cdot CD = ab$. Поэтому $AC = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

380. OA и OB — отрезки одной прямой с длинами a и b соответственно. Найдите расстояние между:

а) точками A и B; б) точкой O и серединой C отрезка AB.

381. Используя рисунок:

а) 292, найдите угол между прямыми c и d;

б) 293, найдите угол APQ;

в) 294 и то, что $BF \parallel CD$, найдите угол FBD;

г) 295, найдите угол AED, учитывая, что $CD \parallel AB$;

д) 296, найдите углы треугольника CDE;

е) 297, найдите угол KNL;

ж) 298, докажите, что $DE \parallel BC$;

з) 299, докажите, что $QN \parallel MP$.

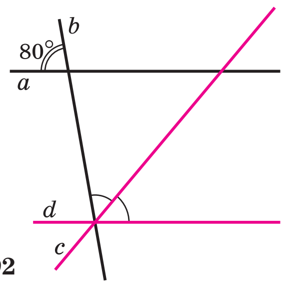


Рис. 292

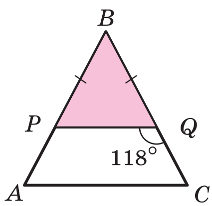


Рис. 293

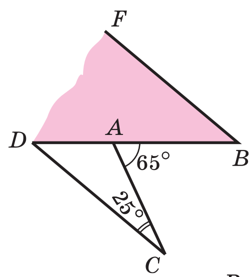


Рис. 294

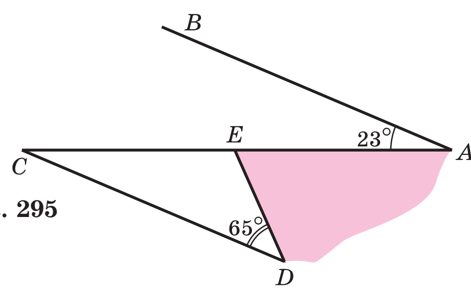


Рис. 295

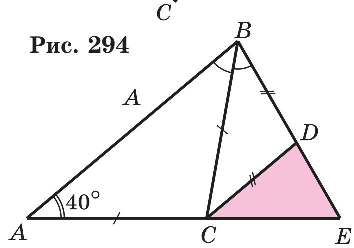


Рис. 296

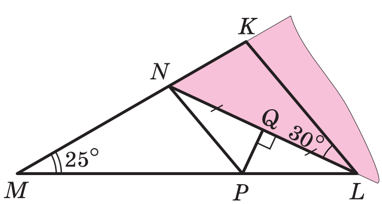


Рис. 297

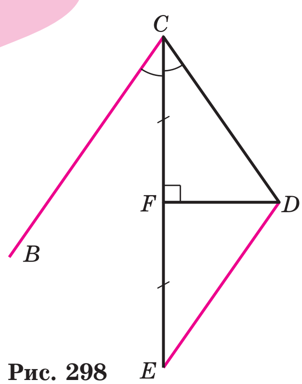


Рис. 298

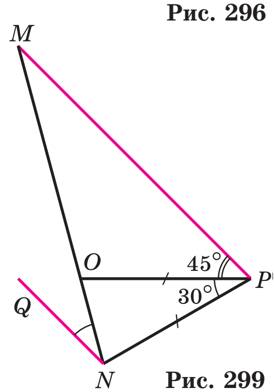


Рис. 299

382. Докажите, что луч, выходящий из вершины равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, и параллельный этому основанию, делит соответствующий внешний угол пополам.

383. Найдите угол между биссектрисами:

а) двух углов с общей стороной, величины которых равны α и β, и примените результат для случая смежных углов;

б) углов AOB и COD, учитывая, что они и угол BOC соответственно равны α, β и γ, и примените результат для случая вертикальных углов.

384. Есть два параллельных отрезка BD и CE с концами на сторонах угла A (рис. 300). Прямые, проходящие через концы отрезка BD и перпендикулярные сторонам угла, пересекаются в точке F, а такие же прямые для отрезка CE — в точке G. Докажите, что точки A, F, G лежат на одной прямой.

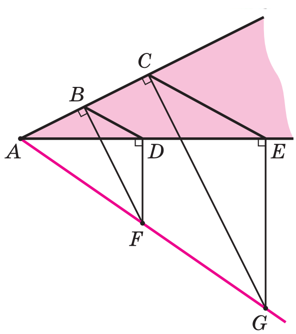
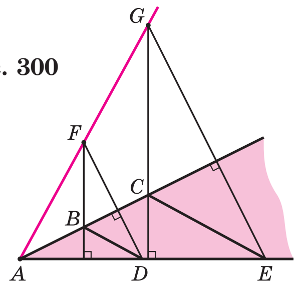


Рис. 300



385. Определите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен:

а) $135°$; б) $144°$; в) $150°$; г) $156°$; д) $128\frac{4}{7}°$; е) $163\frac{7}{11}°$.

386. Определите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен:

а) $36°$; б) $24°$; в) $14{,}4°$; г) $6\frac{2}{3}°$.

387. Найдите сторону BC треугольника ABC, у которого угол A равен $60°$, а стороны AB и AC — соответственно 5 и 8.

388. Найдите сторону AC треугольника ABC и дайте геометрическое объяснение полученному результату, учитывая, что:

а) угол A равен $60°$, а стороны AB и BC — соответственно 15 и 13;

б) угол A равен $120°$, а стороны AB и BC — соответственно 16 и 19;

в) угол A равен $60°$, а стороны AB и BC — соответственно $2\sqrt{6}$ и $6\sqrt{2}$;

г) угол A равен α, а стороны AB и BC — соответственно c и a; установите, сколько решений имеет задача при различных значениях a, b и α.

389. Найдите периметр треугольника, у которого одна сторона равна 6 см, а прилежащие к ней углы — 45° и 60°.

390. Найдите отношение сторон AC и BC треугольника ABC, углы A и B которого соответственно равны 30° и 45°.

391. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, у которого:

а) одна сторона равна 10, а угол против нее — 120°;

б) одна сторона равна m, а прилежащие к ней углы — α и β;

в) две стороны равны a и b, а высота, проведенная к третьей стороне, — h.

392. Из точки K, что лежит внутри угла ABC величиной 60°, опущены перпендикуляры KM и KN на его стороны. Найдите отрезок MN, учитывая, что $KB = a$.

393. Найдите радиус окружности, проходящей через:

а) две противоположные вершины прямоугольника с измерениями 4 и 6 и середину большей стороны;

б) две противоположные вершины прямоугольника с измерениями 4 и 6 и середину меньшей стороны;

в) вершины острых углов и середину большей стороны прямоугольного треугольника с катетами 12 и 5;

г) центр квадрата со стороной a, его вершину и середину стороны, не содержащей этой вершины.

394. Докажите, что окружности, описанные около треугольников:

а) ACK и BCK, где K — точка основания AB равнобедренного треугольника ABC, равны друг другу;

б) ABC и ABH, где H — точка пересечения высот непрямоугольного треугольника ABC, симметричны относительно прямой AB.

395. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей.

396. Учитывая, что точка M — основание медианы AM треугольника ABC и $AB > AC$, сравните углы:

а) AMB и AMC; б) BAM и CAM.

397. Учитывая, что точка L — основание биссектрисы AL треугольника ABC и $AB > AC$, сравните:

а) углы ALB и ALC; б) отрезки BL и CL.

398. Учитывая, что точки M, L, H — соответственно основания медианы AM, биссектрисы AL и высоты AH треугольника ABC с неравными сторонами AB и AC, установите взаимное расположение этих точек на прямой BC.

399. Докажите, что сумма расстояний от любой:
а) точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне;
б) внутренней точки равностороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

400. Докажите, что:
а) сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны менее, чем на удвоенный отрезок, соединяющий общую точку этих двух сторон с произвольной точкой третьей стороны;
б) сумма расстояний от произвольной точки многоугольника до всех его вершин больше полупериметра многоугольника;
в) медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности этой полусуммы и половины третьей стороны.

401. Найдите:
а) границы, между которыми заключена сумма медиан треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c;
б) точку, сумма расстояний от которой до вершин данного четырехугольника наименьшая.

402. Докажите, что отрезок, соединяющий:
а) вершину треугольника и произвольную точку противолежащей стороны, меньше большей из двух других сторон;
б) точки двух сторон треугольника, меньше наибольшей его стороны;
в) две внутренние точки треугольника, меньше наибольшей его стороны.

403. Докажите, что биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника с разными катетами делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

404. Найдите:
а) проведенную к гипотенузе высоту прямоугольного треугольника, учитывая, что его катеты равны a и b;
б) сторону треугольника, учитывая, что проведенная к ней высота равна h, а две другие стороны — a и b;
в) высоты треугольника и его площадь, учитывая, что его стороны равны a, b, c;
г) площадь треугольника, учитывая, что его высоты равны h_a, h_b, h_c;
д) медианы треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c;
е) стороны треугольника и его площадь, учитывая, что его медианы равны m_a, m_b, m_c;

ж) биссектрисы треугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c;
з) радиус описанной около треугольника окружности, учитывая, что его стороны равны a, b, c.

405. Определите, к какой стороне треугольника ближе расположена точка пересечения:
а) серединных перпендикуляров сторон треугольника;
б) высот треугольника;
в) медиан треугольника.

406. Определите, к какой вершине треугольника ближе расположена точка пересечения:
а) биссектрис треугольника;
б) высот треугольника;
в) медиан треугольника.

407. Определите, какой из трех отрезков наименьший, учитывая, что эти отрезки являются:
а) высотами одного треугольника;
б) медианами одного треугольника;
в) биссектрисами треугольника.

408. Определите:
а) можно ли разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника;
б) сколькими способами равносторонний треугольник можно разрезать на два равных треугольника.

409. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, выходящих из той же вершины, что и биссектриса, уменьшенному на произведение отрезков, на которые основание биссектрисы делит противолежащую сторону.

410. Найдите угол между:
а) высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, учитывая, что углы против этой вершины равны α и β;
б) высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, учитывая, что его острый угол равен α.

411. Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна произведению радиуса описанного круга и полупериметра треугольника, образованного основаниями высот.

412. На сторонах угла A величиной $75°$ выбраны такие точки K и L, что $AK = \sqrt{2}$ и $AL = \sqrt{3}$, а на луче, который выходит из точки A и проходит внутри угла под углом в 45° к лучу AL, такая точка M, что $AM = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

413. Высота треугольника равна h, а отрезки, на которые противолежащая сторона разделяется основанием высоты, — k и l. Найдите отрезки, на которые разделяется эта высота другой высотой треугольника.

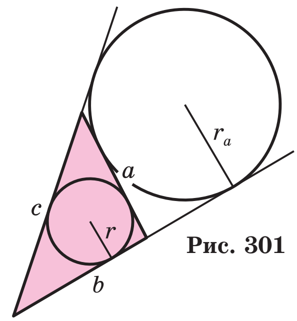


Рис. 301

414. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник со сторонами a, b, c, и радиус r_a его вневписанной окружности, касающейся стороны длиной a (рис. 301), связаны формулой $rr_a = (p - b)(p - c)$, где p — полупериметр треугольника.

415. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите:
а) радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (рис. 302);
б) расстояния от вершины A до точек касания вписанной окружности и стороны AB треугольника (рис. 303);
в) расстояния от вершины A до точек касания противолежащей вневписанной окружности и прямых, содержащих стороны треугольника (рис. 304).

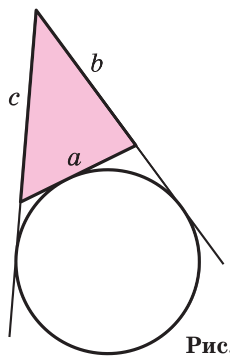


Рис. 302

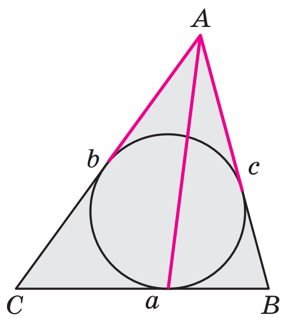


Рис. 303

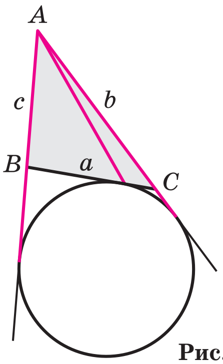


Рис. 304

416. Есть треугольник, у которого один из углов не меньше 90°. Его острый угол разделен лучами на несколько долей. Докажите, что эти лучи делят противолежащую сторону на части, длины которых возрастают, если считать от вершины большего угла.

417. Есть треугольник, у которого один из углов не меньше 90°. Одна из сторон этого угла разделена на несколько долей. Докажите, что лучи, выходящие из вершины противолежащего угла и проходящие через точки деления, разделяют этот угол на части, величины которых убывают, если считать от другой стороны большего угла.

418. Найдите:
а) sin 15°; б) cos 75°; в) tg 105°; г) ctg 135°.

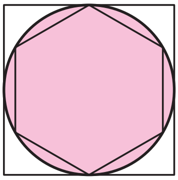


Рис. 305

419. Используя рисунок 305, на котором около окружности описан квадрат и в нее вписан правильный шестиугольник, докажите, что число π заключено между числами 3 и 4.

420. Установите, как два круга с радиусами r и $3r$ расположены относительно друг друга, учитывая, что их центры отстоят на:
а) r; б) $2r$; в) $3r$; г) $4r$; д) $5r$.

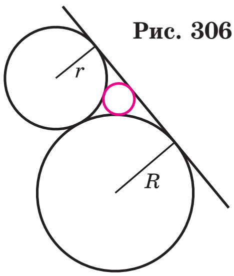
421. Учитывая, что M — внутренняя точка треугольника ABC, сравните углы BAC и BMC.

422. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, основание — b, а высота, проведенная к основанию, — h. Выразите радиус окружности, описанной около треугольника, через каждые две из трех данных переменных.

423. Найдите расстояние между точками касания внешней касательной двух касающихся окружностей с радиусами r и R.

424. Центры двух окружностей с радиусами r и R удалены на d. Найдите расстояние между точками касания их:
а) внешней касательной; б) внутренней касательной.

Рис. 306



425. Найдите радиус круга, который касается двух внешне касающихся окружностей с радиусами r и R и их общей касательной (рис. 306).

426. Определите, сколько одинаковых кругов можно расположить вокруг круга такого же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних.

427. Через произвольно выбранную точку прямой, содержащей общую хорду двух окружностей, проведены их касательные. Докажите, что расстояния от этой точки до точек касания равны друг другу.

428. В окружность вписан треугольник ABC, у которого $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите угол C, учитывая, что центр окружности находится вне треугольника на расстоянии 1 от стороны AB.

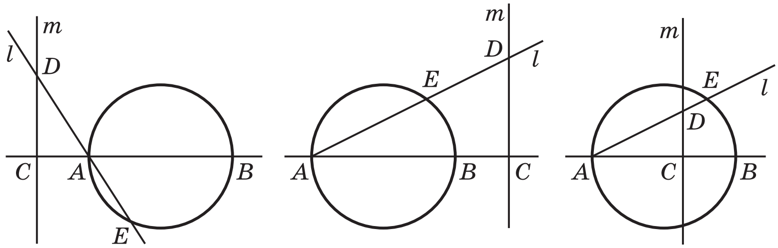


Рис. 307

429. Через конец A диаметра AB данной окружности проведена прямая l, пересекающая другую прямую m, которая перпендикулярна прямой AB (рис. 307). Докажите, что произведение расстояний от конца A до точек D и E пересечения прямой l с прямой m и окружностью есть постоянная величина.

430. Через точку Q пересечения внешних касательных окружностей ω_1 и ω_2 проведена их секущая (рис. 308). Докажите, что для любой такой секущей произведение $QA_1 \cdot QA_2$ есть постоянная величина.

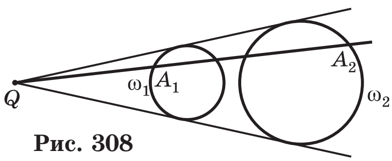


Рис. 308

431. Углы, прилежащие к одной стороне вписанного в окружность треугольника, равны α и β. Найдите угол между этой стороной и касательной окружности, проведенной через противолежащую вершину.

432. Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, учитывая, что углы между противоположными сторонами равны α и β (рис. 309).

433. Определите, какая из:

а) хорд, проходящих через точку внутри круга, наименьшая;

б) секущих, проходящих через данную точку вне круга, имеет с ним наибольшую общую часть.

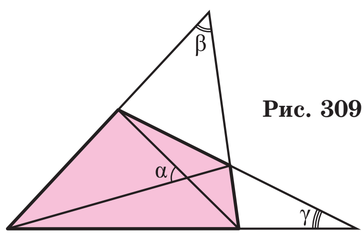


Рис. 309

434. Два угла остроугольного треугольника, вписанного в окружность, равны α и β. Найдите углы треугольника, образованного касательными окружности, проведенными через вершины данного треугольника.

435. Докажите, что:

а) высота треугольника и радиус описанного около него круга, проведенные из одной вершины, образуют равные углы со сторонами треугольника, выходящими из той же вершины;

б) основания высот треугольника являются вершинами треугольника, для которого высоты данного треугольника являются биссектрисами;

в) если из четырех точек одна является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках, то каждая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в трех остальных точках;
г) биссектриса внутреннего угла треугольника и биссектрисы двух внешних углов при двух других вершинах пересекаются в одной точке, которая равноудалена от стороны, противолежащей этому внутреннему углу, и от прямых, проходящих через две другие стороны;
д) из шести биссектрис внутренних и внешних углов треугольника каждые три, которые пересекаются в одной точке, являются высотами треугольника с вершинами в трех остальных точках.

436. Докажите, что хорды двух:
а) пересекающихся окружностей, соединяющие точки пересечения с ними двух секущих, проходящих через точки пересечения окружностей, параллельны друг другу (рис. 310);
б) касающихся окружностей, которые соединяют точки пересечения с ними двух секущих, проходящих через точку касания окружностей, параллельны друг другу (рис. 311).

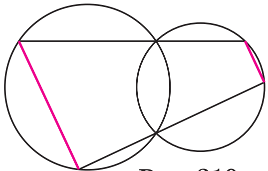


Рис. 310

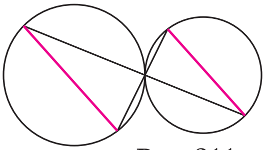


Рис. 311

437. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с внутренней точкой противолежащей стороны, разделяет его на два треугольника. Докажите, что эта вершина и центры окружностей, описанных около этих и данного треугольников, лежат на одной окружности.

438. Докажите, что расстояние от центра окружности, описанной около треугольника, до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от ортоцентра до противолежащей вершины.

439. Докажите, что прямая, параллельная касательной в вершине вписанного треугольника и пересекающая стороны, выходящие из этой вершины, отсекает от треугольника такой четырехугольник, около которого можно описать окружность.

440. Докажите, что:
а) сумма квадрата расстояния ортоцентра треугольника от его вершины и квадрата противолежащей стороны равна квадрату диаметра описанной окружности;
б) сумма трех слагаемых, каждое из которых есть произведение высоты остроугольного треугольника и расстояния ортоцентра до вершины, из которой проведена эта высота, равна полусумме квадратов сторон треугольника.

441. На отрезке и двух его половинах в одной полуплоскости построены полукруги (рис. 312). Учитывая, что радиус меньшего полукруга равен r, найдите радиус круга, касающегося всех трех полукругов.

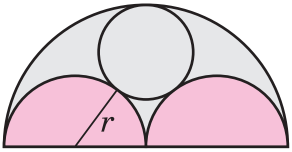


Рис. 312

442. На отрезке и двух его неравных частях в одной полуплоскости построены полукруги. Учитывая, что радиусы двух меньших полукругов равны R и r, найдите радиус круга, касающегося всех трех полукругов.

443. Прямоугольный сектор с радиусом r, дугой с таким же радиусом и с центром в конце дуги сектора разделен на две части (рис. 313). Найдите радиус круга, вписанного:

а) в меньшую часть; б) в большую часть.

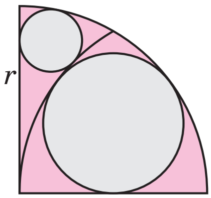


Рис. 313

444. Установите, может ли:

а) вписанный многоугольник иметь равные углы и неравные стороны;
б) вписанный многоугольник иметь равные стороны и неравные углы;
в) описанный многоугольник иметь равные углы и неравные стороны;
г) описанный многоугольник иметь равные стороны и неравные углы.

445. Найдите радиус каждого из:

а) трех равных кругов, вписанных в круг с радиусом R и касающихся друг друга (рис. 314);
б) четырех равных кругов, каждый из которых касается круга с радиусом R и двух из этих равных кругов (рис. 315).

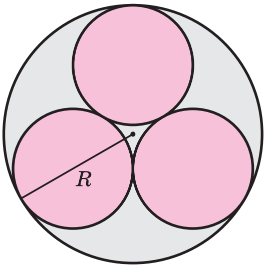


Рис. 314

446. Есть равносторонний треугольник, вписанный в окружность. Докажите, что расстояние любой точки дуги, стягиваемой какой-либо стороной треугольника, от противолежащей вершины равно сумме расстояний этой точки от двух других вершин.

447. Выразите через радиус r окружности сторону правильного вписанного:

а) треугольника; г) восьмиугольника;
б) четырехугольника; д) пятиугольника.
в) шестиугольника;

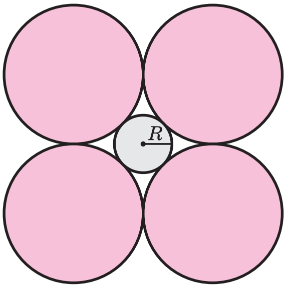


Рис. 315

448. Выразите через радиус окружности сторону и диагонали правильного вписанного:

а) треугольника; г) пятиугольника;
б) четырехугольника; д) десятиугольника.
в) шестиугольника;

449*. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите расстояния:

а) от ортоцентра треугольника до его вершины A;

б) от центра окружности, описанной около треугольника, до его стороны AB;

в) от центра окружности, вписанной в треугольник, до его вершины A;

г) от центра J_A вневписанной окружности треугольника до вершины A;

д) между центрами вписанной и вневписанной окружностей.

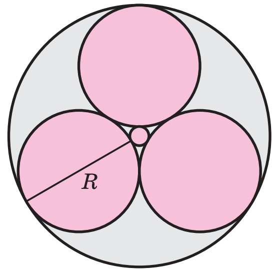


Рис. 316

450. Три равные окружности попарно касаются. Еще одна окружность касается их внешним образом, а другая — внутренним (рис. 316). Найдите отношение их радиусов.

451. Конец B хорды AB окружности с радиусом R является центром окружности с радиусом n, пересекающей данную окружность в точках P и Q (рис. 317). Найдите хорды AP и AQ, учитывая, что хорда AB равна m.

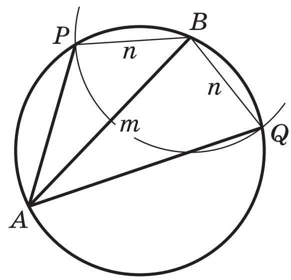


Рис. 317

452. Найдите расстояние:

а) между серединами диагоналей трапеции, учитывая, что основания трапеции равны a и b;

б) от середины отрезка да прямой, учитывая, что его концы отстоят от этой прямой на a и b;

в) от вершины параллелограмма до прямой, проходящей через противоположную вершину, учитывая, что две другие вершины отстоят от этой прямой на a и b.

453. Углы A, B, C четырехугольника $ABCD$ равны α, β и γ. Найдите угол между биссектрисами:

а) углов A и B; б) углов A и C;

в) двух углов, образованных парами прямых, которым принадлежат противоположные стороны.

454. Докажите, что:

а) если противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке (рис. 318);

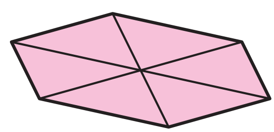


Рис. 318

б) если противоположные стороны четырехугольника не параллельны, то три прямые, проходящие через середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке;

в) середины диагоналей трапеции и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

455. Основания трапеции равны a и b, а боковые стороны — c и d. Найдите:
а) диагонали трапеции; б) площадь трапеции.

456. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований.

457. Найдите разность квадратов диагоналей параллелограмма, учитывая, что:
а) его внутренняя точка отстоит от вершин на a, b, c, d;
б) его стороны равны m и n, а площадь — S.

458. Найдите площадь параллелограмма, учитывая, что его стороны равны m и n, а внутренняя точка отстоит от вершин на a, b, c, d.

459. Найдите площадь четырехугольника, учитывая, что его стороны равны a, b, c и d, а его диагонали — k и l.

460. Определите, при каком условии:
а) около параллелограмма можно описать окружность;
б) около трапеции можно описать окружность;
в) в параллелограмм можно вписать окружность.

461*. Докажите, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон (теорема Птолемея).

462. Стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c и d. Найдите его:
а) диагонали; б) площадь.

463. Есть два подобных треугольника, стороны одного из которых равны 5, 6, 8, а наименьшая сторона второго — 15. Найдите две другие стороны второго треугольника.

464*. Докажите, что:
а) два параллелограмма подобны, если у них есть по равному углу и их стороны пропорциональны;
б) два прямоугольника подобны, если они имеют пару пропорциональных смежных сторон;
в) два любых квадрата подобны.

465. Найдите длину отрезка, концы которого:
а) лежат на сторонах треугольника и делят каждую в отношении $n : m$, если считать от их общей вершины, учитывая, что третья сторона треугольника равна a;
б) лежат на боковых сторонах трапеции и делят их в отношении $m : n$, если считать от большего основания длиной a, при этом другое основание равно b.

466. Вершины треугольника отстоят от не пересекающей его прямой на k, l, m. Найдите расстояние от этой прямой до ортоцентра треугольника.

467. Есть трапеция с основаниями a и b. Найдите:

а) отношение отрезков каждой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения;

б) отношение расстояний от точки пересечения боковых сторон до концов каждой из них;

в) длину отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, причем концы отрезка принадлежат боковым сторонам;

г) длину отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны, причем концы отрезка принадлежат прямым, содержащим диагонали.

468. Докажите, что прямой, проходящей через середины оснований трапеции, принадлежит точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны.

469. Углы B и C треугольника ABC равны β и γ соответственно, причем $\beta < \gamma$. Основание D биссектрисы AD соединено с такой точкой E стороны AB, что $AE = AC$. Найдите угол BDE, учитывая, что отрезок AD является биссектрисой:

а) внутреннего угла D (рис. 319);

б) внешнего угла при вершине D (рис. 320).

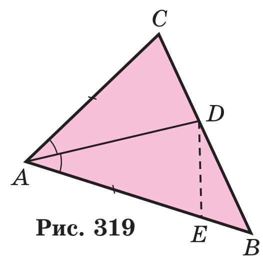


Рис. 319

470. Есть треугольник со сторонами a, b, c. Найдите расстояния от концов стороны длиной a до точки, в которой биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине пересекает прямую, содержащую эту сторону.

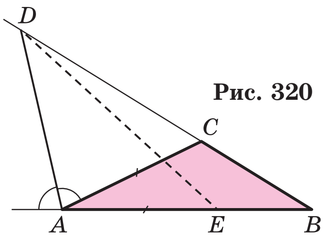


Рис. 320

471. Через точку пересечения биссектрис треугольника проведена прямая, параллельная одной из сторон. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами треугольника, равен сумме отрезков сторон, заключенных между параллельными прямыми.

472. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол, образованный:

а) биссектрисами внутренних углов, прилежащих к стороне против угла α;

б) биссектрисами внешних углов, прилежащих к стороне против угла α;

в) биссектрисой одного из внутренних углов, прилежащих к стороне против угла α, и биссектрисой внешнего угла при другом конце этой стороны.

473. Прямая пересекает две стороны треугольника и прямую, содержащую третью сторону. Учитывая, что точками пересечения первая и вторая стороны делятся в отношениях k и l, найдите отношение расстояний от точки пересечения прямой с продолжением третьей стороны до ее концов.

474. Через середину хорды длиной a проведена другая хорда длиной b. Найдите отрезки, на которые эта хорда делится первой хордой.

475. Окружность касается одной стороны треугольника и пересекает другую его сторону в точках, отстоящих от вершины на a и на b. Найдите расстояние от вершины треугольника до точки касания.

476. Через точку внутри круга с радиусом r, отстоящую от центра на a, проведены диаметр и перпендикулярная ему хорда. Найдите эту хорду.

477. Через точку вне круга с радиусом r, отстоящую от центра на a, проведена касательная. Найдите расстояние от этой точки до точки касания.

478*. Используя свойства внутренней точки хорды окружности, докажите теорему косинусов и теорему Пифагора.

479. Докажите, что расстояние точки окружности от ее хорды равно среднему геометрическому расстояний концов хорды от касательной к окружности в этой точке.

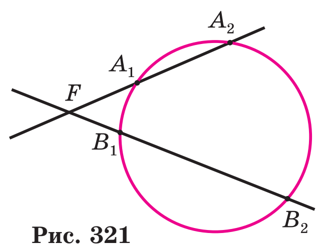


Рис. 321

480. От точки F пересечения прямых на одной из них отмечены такие точки A_1 и A_2, а на другой — такие точки B_1 и B_2, что $FA_1 \cdot FA_2 = FB_1 \cdot FB_2$, при этом точки отмечались на обеих прямых по одну сторону (рис. 321) или на обеих прямых по разные стороны от точки F (рис. 322). Докажите, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 лежат на одной окружности.

481*. Найдите площадь правильного десятиугольника, учитывая, что его сторона равна a.

482*. Выразите через радиус окружности сторону правильного вписанного:

а) двенадцатиугольника;

б) пятнадцатиугольника;

в) шестнадцатиугольника.

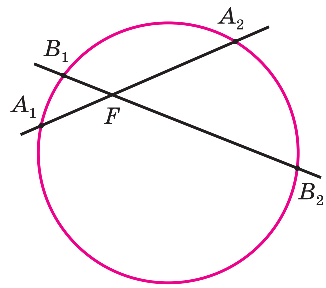


Рис. 322

483*. Постройте правильный двенадцатиугольник и проведите все его диагонали. Найдите точки, через которые точно проходят:
а) три диагонали; б) четыре диагонали.
Обоснуйте полученные гипотезы.

§ 9. Геометрические величины

В курсе школьной математики изучают четыре величины — градусную меру угла, длину отрезка, площадь фигуры, объем тела.

Использование величины позволяет выразить результат сравнения геометрической фигуры Ф с фигурой, с которой сопоставлено число 1, определенным действительным числом r. Это сопоставление задает определенную функцию $r = f(Ф)$. Выбор фигуры-эталона означает выбор единицы измерения. Кроме основной единицы используют и производные от нее, которые в метрической системе мер образуются единообразно с помощью приставок греческого происхождения.

Приставка	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2

Приставка	Обозначение	Множитель
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}

С помощью функции $r = f(Ф)$ можно так сформулировать общие свойства геометрических величин:

- результат измерения есть неотрицательное число, т. е. $f(Ф) \geqslant 0$;
- если фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$ равны, то результаты их измерения также равны, т. е. если $Ф_1 = Ф_2$, то $f(Ф_1) = f(Ф_2)$;
- если фигура Ф разделена на части $Ф_1$ и $Ф_2$, то результат измерения фигуры Ф равен сумме результатов измерения фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т. е. $f(Ф) = f(Ф_1) + f(Ф_2)$.

А) Мера угла и дуги

Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части (см. рис. 323), каждую из которых вместе с лучами называют *углом*, сами лучи — *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла. Угол обозначают знаком $\angle$.

Луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам, называют *биссектрисой угла* (рис. 323).

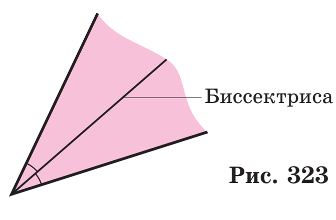


Рис. 323

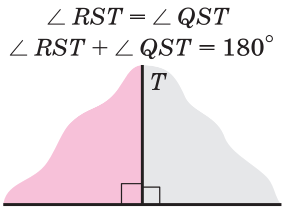


Рис. 324

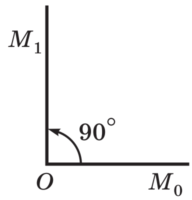


Рис. 325

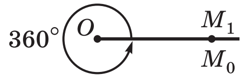


Рис. 326

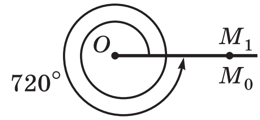


Рис. 327

Угол, стороны которого являются противоположными лучами, называют *развернутым*, его стовосьмидесятую долю называют *градусом* и обозначают знаком °. Градус есть единица измерения величины, называемой *градусной мерой угла*.

Шестидесятую долю градуса называют *минутой*, шестидесятую долю минуты — *секундой*. Минуту обозначают знаком ′, секунду — знаком ″.

Угол, равный своему смежному углу, называют *прямым*, это показывают так, как на рис. 324.

Угол меньше прямого называют *острым*, а угол больше прямого и меньше развернутого — *тупым*.

Угол можно рассматривать как меру поворота луча OM вокруг своего начала O от его некоторого первоначального положения OM_0. Тогда четверть полного оборота дает прямой угол (рис. 325), полный оборот — угол величиной 360° (рис. 326), а два полных оборота — угол величиной 720° (рис. 327).

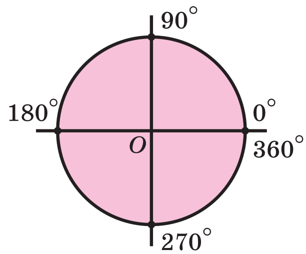


Рис. 328

При измерении углов, связанных с окружностью, пользуются понятием градусной меры дуги. *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Например, градусная мера четверти окружности равна 90°, полуокружности — 180°, трех четвертей окружности — 270°, всей окружности — 360° (рис. 328).

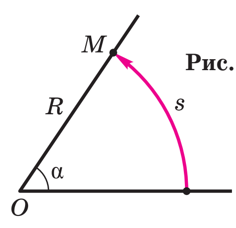


Рис. 329

Еще одной единицей угла является *град*, под ним понимают сотую долю прямого угла.

Важным для математики является радианное измерение углов. Пусть зафиксирована одна из сторон угла. Если вращать другую его сторону вокруг вершины, то образуется некоторый угол. Отношение пути s, который описывает произвольная точка M луча при вращении вокруг его начала O, к отрезку OM равно $\frac{\pi\alpha}{180}$, т. е. не зависит от выбора точки M (рис. 329).

Поэтому это отношение принимается за меру угла. Количественно она равна пути, пройденному точкой по единичной окружности.

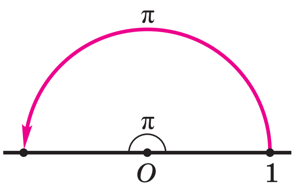


Рис. 330

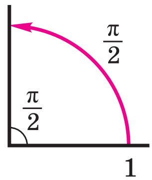


Рис. 331

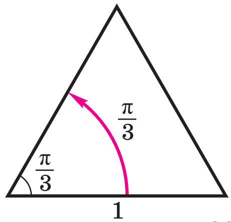


Рис. 332

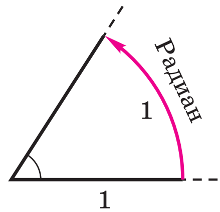


Рис. 333

Развернутому углу соответствует половина длины единичной окружности, т. е. число π (рис. 330). Прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 331), угол правильного треугольника — $\frac{\pi}{3}$ (рис. 332). Угол, мера которого равна числу 1, называется **радианом** (рис. 333). Угол в 1 радиан вырезает из окружности дугу, равную радиусу этой окружности (рис. 334).

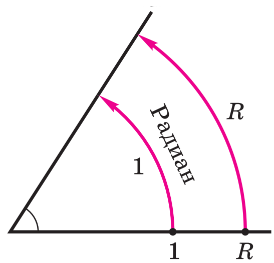


Рис. 334

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана;}$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}2958^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Обозначение радиана в записи меры угла принято опускать. Запись вида $\alpha = 1{,}23$ означает, что величина угла α равна 1,23 радиана.

Соответствие между градусной и радианной мерами для часто используемых углов дается следующей таблицей:

Градусы	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
Радианы	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Углом между пересекающимися прямыми называется один из четырех образованных ими углов величиной не больше 90° (рис. 335).

Угол между параллельными прямыми принимается равным нулю (рис. 336).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными им (рис. 337).

Углом между пересекающимися прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 338).

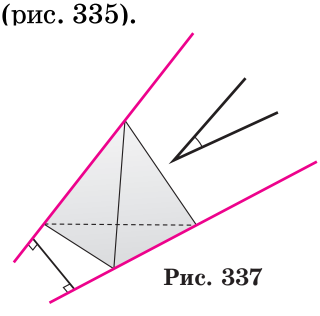


Рис. 337

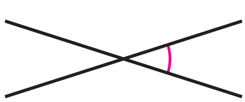
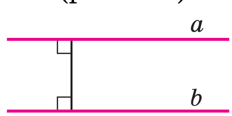


Рис. 335



$a \parallel b$ и $\angle(a, b) = 0$

Рис. 336

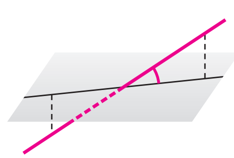


Рис. 338

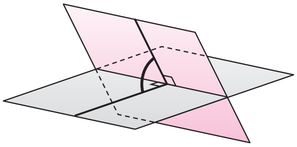


Рис. 339

Угол между параллельными прямой и плоскостью принимается равным нулю.

Углом между пересекающимися плоскостями называется один из четырех образованных ими двугранных углов величиной не больше 90° (рис. 339).

Угол между параллельными плоскостями принимается равным нулю.

Сумма углов многоугольника, как выпуклого, так и невыпуклого, с количеством сторон n равна $180° \cdot (n - 2)$.

Сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°.

Б) Длина отрезка. Расстояние

Две точки M и N прямой разделяют ее на три части (рис. 340), которые вместе с точками M и N образуют луч с началом в точке M, луч с началом в точке N и *отрезок* MN. Если выбрать *единицу длины*, то можно измерить *длину отрезка*. В качестве единицы длины принят *метр*, под которым понимают путь, пройденный в вакууме светом за $\frac{1}{299\,792\,458}$ доли секунды.

С длиной отрезка связана другая величина — расстояние.

Из точки A в точку B можно попасть разными путями (рис. 341). Кратчайшим из них является путь 2 по отрезку AB. *Расстоянием между точками* называется длина отрезка, соединяющего их.

Наименьшим расстоянием от точки E до прямой l является расстояние до точки P — основания перпендикуляра EP (рис. 342). *Расстоянием между точкой и прямой* называется длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой.

Любые две точки одной из параллельных прямых равноудалены от другой прямой (рис. 343). *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-либо точки одной прямой до другой прямой.

Две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр (рис. 344). *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.

Рис. 340

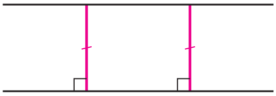


Рис. 343

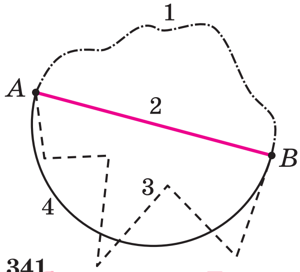


Рис. 341

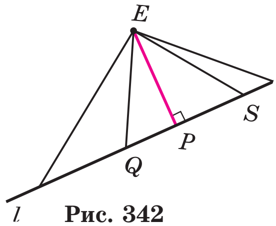


Рис. 342

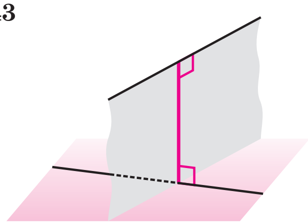


Рис. 344

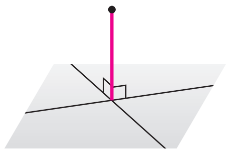


Рис. 345

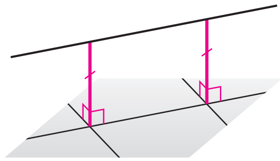


Рис. 346

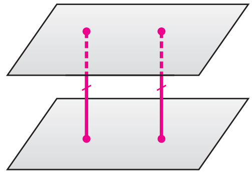


Рис. 347

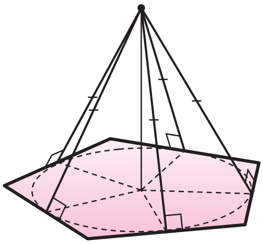


Рис. 348

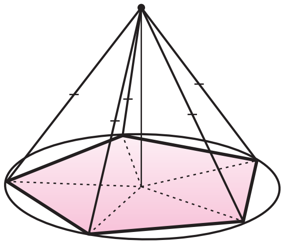


Рис. 349

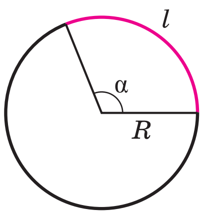


Рис. 350

Перпендикуляр к плоскости, проведенный из некоторой точки, меньше любой наклонной к этой плоскости, проведенной из той же точки (рис. 345). *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Расстояние от любой точки прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости одно и то же и равно длине перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой к плоскости (рис. 346). *Расстоянием между параллельными прямой и плоскостью* называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки прямой к плоскости.

Расстояние от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости одно и то же и равно длине их общего перпендикуляра (рис. 347). *Расстоянием между параллельными плоскостями* называется длина перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки одной плоскости к другой плоскости.

Если данная точка пространства равноудалена от сторон многоугольника, то в этот многоугольник можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника (рис. 348).

Если данная точка пространства равноудалена от вершин многоугольника, то около этого многоугольника можно описать окружность, центр которой совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника (рис. 349).

Длина C окружности с радиусом R выражается формулой $C = 2\pi R$. *Длина l дуги* окружности с радиусом R и радианной мерой α выражается формулой $l = R\alpha$ (рис. 350).

В) Площадь фигуры

Если выбрать *единицу площади*, то можно измерить *площадь фигуры*. В качестве единицы площади принят *квадратный метр*, под которым понимают площадь квадрата со стороной, равной 1 м.

Площадь S треугольника (рис. 351) равна:

- половине произведения стороны и проведенной к ней высоты h_a: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$;
- произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей средней линии: $S = h_a \cdot l_a$;
- половине произведения двух его сторон и синуса угла γ между ними: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- квадратному корню из произведения полупериметра и трех разностей полупериметра с каждой стороной:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

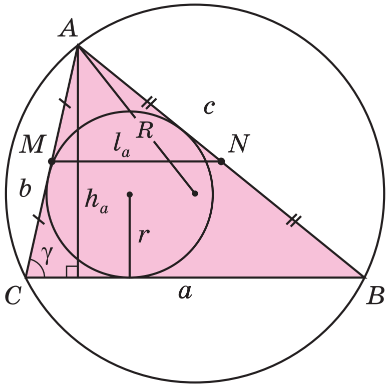


Рис. 351

- произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности: $S = pr$;
- произведению трех сторон a, b, c треугольника, разделенному на учетверенный радиус описанной окружности: $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

Площадь S четырехугольника (рис. 352) равна половине произведения его диагоналей d_1 и d_2 и синуса угла α между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$.

Площадь S трапеции (рис. 353) равна произведению ее средней линии l и высоты h: $S = l \cdot h$.

Площадь S параллелограмма (рис. 354) равна произведению стороны a и проведенной к ней высоты h: $S = a \cdot h$.

Площадь S прямоугольника (рис. 355) равна произведению его смежных сторон a и b: $S = a \cdot b$.

Площадь S ромба (рис. 356) равна половине произведения диагоналей d_1 и d_2: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

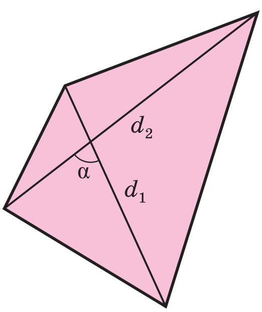


Рис. 352

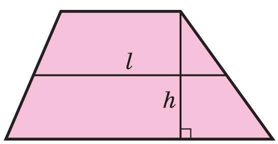


Рис. 353

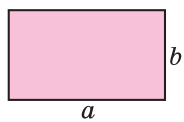


Рис. 355

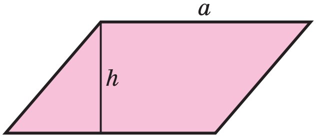


Рис. 354

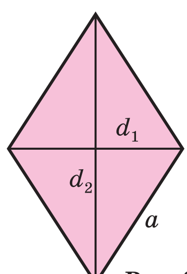


Рис. 356

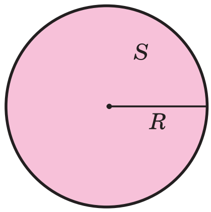


Рис. 357

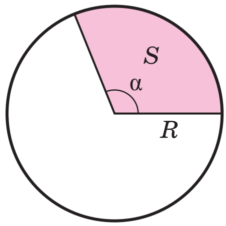


Рис. 358

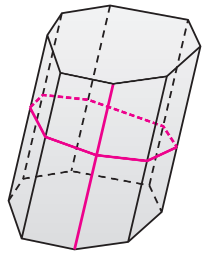


Рис. 359

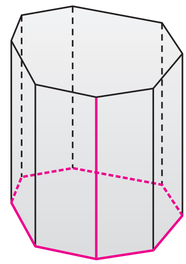


Рис. 360

Площадь S круга (рис. 357) с радиусом R выражается формулой $S = \pi R^2$.

Площадь S сектора с радиусом R и центральным углом (рис. 358), радианная мера которого равна α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, выражается формулой $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

Площадь S боковой поверхности призмы (рис. 359) равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения $P_{\text{перпенд. сеч}}$ и длины l бокового ребра: $S = P_{\text{перпенд. сеч}} \cdot l$.

Площадь S боковой поверхности прямой призмы (рис. 360) равна произведению периметра $P_{\text{осн}}$ ее основания и высоты h: $S = P_{\text{осн}} \cdot h$.

Площадь S боковой поверхности цилиндра (рис. 361) равна произведению длины окружности C основания и высоты h: $S = C \cdot h$.

Площадь S боковой поверхности правильной пирамиды (рис. 362) равна произведению полупериметра p ее основания и апофемы l: $S = p \cdot l$.

Площадь S боковой поверхности правильной усеченной пирамиды (рис. 363) равна произведению полусуммы периметров P_1 и P_2 ее оснований и апофемы: $S = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$.

Площадь S боковой поверхности конуса (рис. 364) равна произведению половины длины C окружности его основания и образующей l: $S = \frac{1}{2}C \cdot l$.

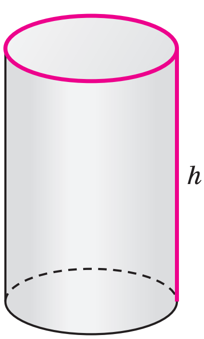


Рис. 361

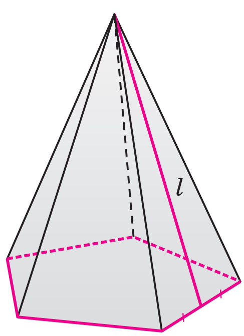


Рис. 362

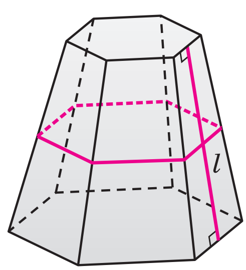


Рис. 363

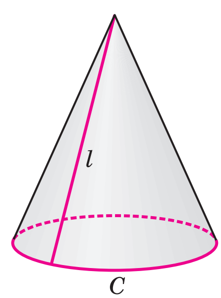


Рис. 364

Площадь S боковой поверхности усеченного конуса (рис. 365) равна произведению полусуммы длин C_1 и C_2 окружностей его оснований и образующей l или произведению периметра $\frac{C_1 + C_2}{2}$ срединного сечения и образующей l: $S = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l$.

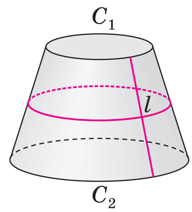


Рис. 365

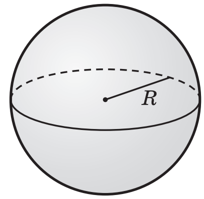


Рис. 366

Площадь S сферы с радиусом R (рис. 366) равна учетверенной площади большого круга: $S = 4\pi R^2$.

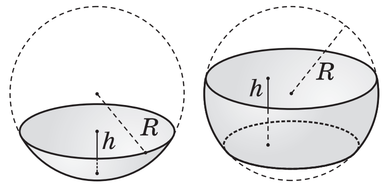


Рис. 367

Площадь S сферического купола, как и *сферического пояса* (рис. 367), с радиусом R и высотой h равна произведению длины окружности большого круга и высоты h соответствующего тела: $S = 2\pi Rh$.

Г) Объем тела

Если выбрать *единицу объема*, то можно измерить *объем тела*. В качестве единицы объема принят *кубический метр*, под которым понимают объем куба с ребром, равным 1 м.

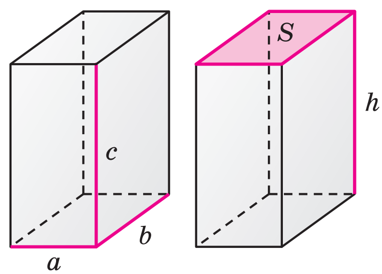


Рис. 368

Объем V прямоугольного параллелепипеда (рис. 368) равен:

- произведению трех его измерений a, b, c: $V = abc$;
- произведению площади его основания и высоты h: $V = Sh$.

Объем V произвольного параллелепипеда (рис. 369) равен произведению площади его основания и высоты h: $V = Sh$.

Объем V призмы равен произведению площади S ее основания и высоты h (рис. 370) или произведению площади $S_{\text{перпенд. сеч}}$ ее перпендикулярного сечения и длины l бокового ребра (рис. 371): $V = Sh$; $V = S_{\text{перпенд. сеч}} \cdot l$.

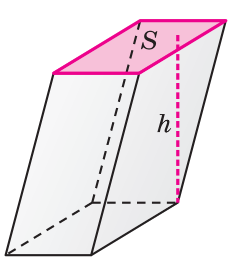


Рис. 369

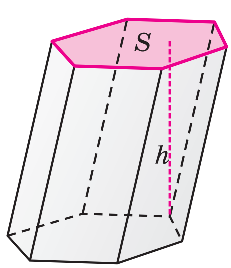


Рис. 370

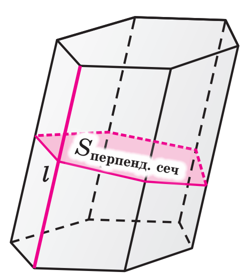


Рис. 371

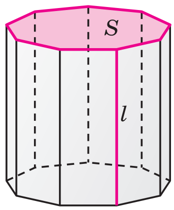


Рис. 372

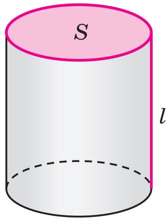


Рис. 373

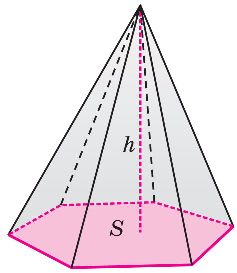


Рис. 374

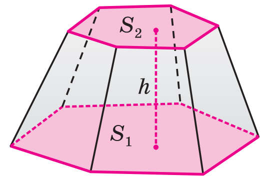


Рис. 375

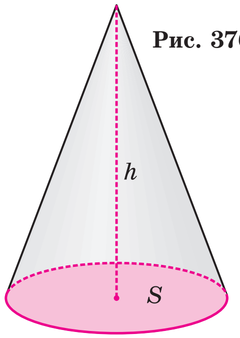


Рис. 376

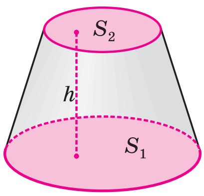


Рис. 377

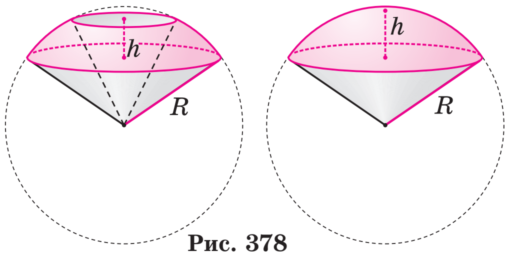


Рис. 378

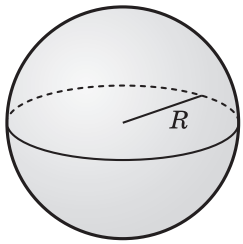


Рис. 379

Объем V прямой призмы (рис. 372) равен произведению площади S ее основания и длины l бокового ребра: $V = Sl$.

Объем V цилиндра (рис. 373) равен произведению площади S его основания и образующей l: $V = Sl$.

Объем V пирамиды (рис. 374) равен третьей доле произведения площади S ее основания и высоты h: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Объем V усеченной пирамиды (рис. 375) равен третьей доле произведения высоты h пирамиды и суммы площадей S_1 и S_2 оснований пирамиды и их среднего геометрического: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$.

Объем V конуса (рис. 376) равен третьей доле произведения площади S его основания и высоты h: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Объем V усеченного конуса (рис. 377) равен третьей доле произведения высоты h конуса и суммы площадей S_1 и S_2 оснований конуса и их среднего геометрического: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$.

Объем V шара с радиусом R (рис. 379) равен третьей доле произведения его поверхности и радиуса: $V = \frac{1}{3}\cdot 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Объем V шарового сектора с радиусом R и высотой h (рис. 378) равен третьей доле произведения поверхности соответствующего сферического пояса или купола и радиуса: $V = \frac{1}{3}\cdot 2\pi Rh \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

Объем V шарового сегмента (рис. 380) с радиусом R и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$.

Объем V шарового слоя (рис. 381) с радиусом R, радиусами r_1 и r_2 оснований и высотой h выражается формулой $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$.

Объем V описанного около шара многогранника (рис. 382) равен третьей доле произведения полной поверхности S многогранника и радиуса r шара: $V = \frac{1}{3}SR$.

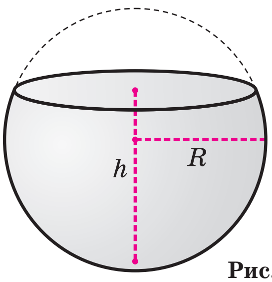


Рис. 380

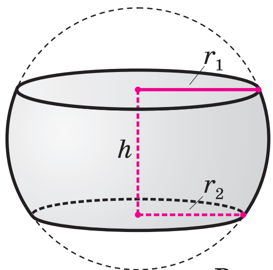


Рис. 381

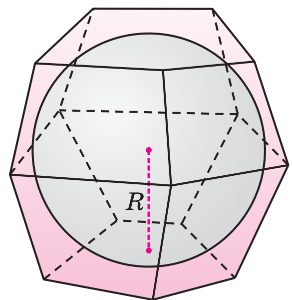


Рис. 382

?

1. Что такое единица измерения и как из основной единицы некоторой величины образуются ее новые единицы?

2. Сформулируйте основные свойства величины.

3. Какую фигуру называют углом и что называют его сторонами и вершиной?

4. Какой луч называют биссектрисой угла?

5. Какой угол называют прямым; острым; тупым; развернутым?

6. Как называют величину, с помощью которой измеряют углы?

7. Как называют основную единицу измерения углов и как она определяется?

8. Назовите производные единицы измерения угла и укажите, как они связаны с основной единицей.

9. Какой смысл имеют углы с градусной мерой больше 360°?

10. Что называют градусной мерой дуги?

11. Какая единица измерения углов называется радианом и как радиан связан с градусом?

12. Что называют углом между пересекающимися прямыми; между скрещивающимися прямыми?

13. Что называют углом между пересекающимися прямой и плоскостью; пересекающимися плоскостями?

14. Что принимают за величину угла между параллельными прямыми; между параллельными прямой и плоскостью; между параллельными плоскостями?

15. Что называют двугранным углом; гранями двугранного угла; ребром двугранного угла?

16. Какой угол называют линейным углом двугранного угла и какое свойство имеют линейные углы одного и того же двугранного угла?

17. Что принимают за меру двугранного угла?

18. Чему равна сумма внутренних углов плоского многоугольника?

19. Какому условию удовлетворяет сумма плоских углов выпуклого многогранного угла?

20. Какую фигуру называют отрезком?

21. Как называют величину, с помощью которой измеряют отрезки?

22. Как называют основную единицу измерения отрезков?

23. Назовите производные единицы измерения длины и укажите, как они связаны с основной единицей.

24. Что называют расстоянием между двумя точками; расстоянием между точкой и прямой; расстоянием между параллельными прямыми; расстоянием между параллельными прямой и плоскостью; расстоянием между параллельными плоскостями?

25. Сформулируйте свойство многоугольника, для которого существует точка пространства, равноудаленная от всех вершин многоугольника.

26. Сформулируйте свойство многоугольника, для которого существует точка пространства, равноудаленная от всех сторон многоугольника.

27. Чему равна длина окружности с радиусом R; длина дуги окружности с радиусом R и радианной мерой α?

28. Как называют величину, с помощью которой измеряют поверхности?

29. Как называют основную единицу измерения площади и как она определяется?

30. Назовите производные единицы измерения площади и укажите, как они связаны с основной единицей.

31. Как площадь треугольника выражается через сторону и проведенную к ней высоту; через среднюю линию и высоту; через две стороны и угол между ними; через стороны; через полупериметр и радиус вписанной окружности; через стороны и радиус описанной окружности.

32. Как площадь четырехугольника выражается через его диагонали и угол между ними.

33. Как площадь трапеции выражается через среднюю линию и высоту.

34. Как площадь параллелограмма выражается через его сторону и проведенную к ней высоту?

35. Как площадь прямоугольника выражается через его стороны?

36. Как площадь ромба выражается через его диагонали?

37. Чему равна площадь круга с радиусом R; площадь сектора с радиусом R и центральным углом, радианная мера которого равна α?

38. Чему равна площадь боковой поверхности призмы; прямой призмы; цилиндра?

39. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды; конуса; правильной усеченной пирамиды; усеченного конуса?

40. Чему равна площадь сферы; сферического купола; сферического пояса?

41. Как называют величину, с помощью которой измеряют тела?

42. Как называют основную единицу измерения объемов и как она обозначается?

43. Назовите производные единицы измерения объемов и укажите, как они связаны с основной единицей.

44. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда; произвольного параллелепипеда?

45. Чему равен объем призмы; прямой призмы; цилиндра?

46. Чему равен объем пирамиды; конуса; усеченной пирамиды; усеченного конуса?

47. Чему равен объем шара?

48. Как объем описанного около шара многогранника связан с его поверхностью и его радиусом?

Задача 1. Прямые AB, CD, EF пересекаются в одной точке O, при этом прямая CD образует равные углы с прямыми AB и EF (рис. 383). Найдите $\angle AOF$, учитывая, что его величина на 75° больше, чем величина $\angle BOD$.

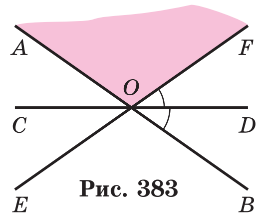


Рис. 383

Р е ш е н и е. В соответствии с условием:

$$\angle BOD = \angle DOF \text{ и } \angle AOF = \angle BOD + 75^\circ.$$

Теперь, учитывая, что $\angle AOF + \angle FOD + \angle DOB = 180^\circ$, получаем: $\angle BOD + 75^\circ + \angle FOD + \angle DOB = 180^\circ$ или $3\angle BOD + 75^\circ = 180^\circ$. Поэтому $\angle BOD = 35^\circ$, а $\angle AOF = 35^\circ + 75^\circ = 110^\circ$.

О т в е т: 110°.

Задача 2. Найдите стороны треугольника, учитывая, что один из его углов прямой, биссектриса другого угла делит противоположную сторону в отношении 3 : 5, а периметр равен 72 см.

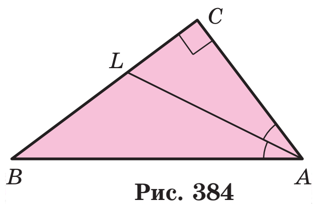


Рис. 384

Р е ш е н и е. Пусть есть треугольник ABC, у которого $\angle C = 90^\circ$, AL — биссектриса, $CL : LB = 3 : 5$ и $AB + BC + CA = 72$ см (рис. 384).

Тогда, по свойству биссектрисы треугольника:

$$CA : 3 = AB : 5 = t,\ CA = 3t,\ AB = 5t,$$

а по теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(5t)^2 - (3t)^2} = 4t$. Учитывая условие, имеем $AB + BC + CA = 72$ см, $5t + 4t + 3t = 72$. Значит, $t = 6$ и $AB = 5 \cdot 6 = 30$ (см), $BC = 4 \cdot 6 = 24$ (см), $CA = 3 \cdot 6 = 18$ (см).

О т в е т: 30 см, 24 см, 18 см.

Задача 3. Найдите стороны треугольника, учитывая, что его углы, прилежащие к одной стороне, равны 45° и 60°, а проведенная к ней высота — 12 см.

Р е ш е н и е. Пусть есть треугольник ABC, у которого $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, CH — высота и $CH = 12$ см (рис 385). Имеем:

$$\angle ACH = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,\ \angle BCH = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Поскольку $\triangle ACH$ — прямоугольный и равнобедренный, то:

$$AH = CH = 12 \text{ см},\ AC = CH\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ см}.$$

$$BC = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3} \text{ см},\ BH = \frac{1}{2}BC = 4\sqrt{3} \text{ см},$$

так как $\angle BHC = 90^\circ$, $\angle CBH = 60^\circ$.

Поэтому $AB = AH + HB = 12 + 4\sqrt{3} = 4\left(3 + \sqrt{3}\right)$ (см).

О т в е т: $4\left(3 + \sqrt{3}\right)$ см, $8\sqrt{3}$ см, $12\sqrt{2}$ см.

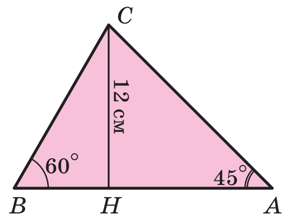


Рис. 385

Задача 4. Прямые, проходящие через концы A и C основания AC равнобедренного треугольника ABC и середину K его высоты BH, проведенной к основанию, разделяют треугольник на три треугольника ADK, CFK и ACK и четырехугольник $BDKF$ (рис. 386). Определите, какую часть каждый из них составляет от площади данного треугольника.

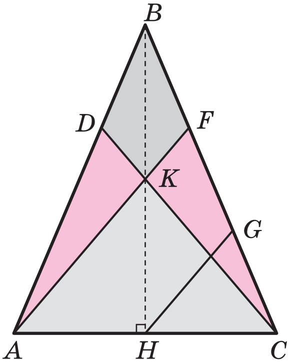


Рис. 386

Р е ш е н и е. Пусть $HG \parallel AK$.

$BF = FG$, так как KF — средняя линия в $\triangle BHG$,

$FG = GC$, так как HG — средняя линия в $\triangle AFC$.

Значит, $BF = FG = GC = \frac{1}{3}BC$. Теперь находим:

$$\frac{S_{BKF}}{S_{BCH}} = \frac{BK \cdot BF}{BH \cdot BC} = \frac{BK}{BH} \cdot \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\frac{S_{HKC}}{S_{HBC}} = \frac{HK \cdot HC}{HB \cdot HC} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad \frac{S_{CKF}}{S_{BCH}} = \frac{S_{BCH} - S_{CKH} - S_{BKF}}{S_{BCH}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Поскольку BH — ось симметрии, то:

$$\frac{S_{BDKF}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{BKF}}{2S_{BCH}} = \frac{1}{6}, \quad \frac{S_{AKC}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{HKC}}{2S_{HBC}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_{AKD}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKF}}{2S_{HBC}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

О т в е т: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$.

Задача 5. Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что он вписан в шар радиуса R, а диагональ осевого сечения составляет с основанием угол α.

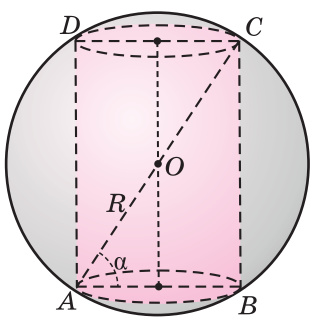


Рис. 387

Р е ш е н и е. Пусть диагональ AC осевого сечения цилиндра, вписанного в шар с радиусом R, наклонена к основанию цилиндра под углом α (рис. 387). Осевое сечение $ABCD$ есть прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, которая получается в сечении сферы.

Из прямоугольного треугольника ABC для диаметра AB основания цилиндра и его высоты BC получаем:

$$AB = AC \cos \alpha = 2R \cos \alpha; \qquad BC = AC \sin \alpha = 2R \sin \alpha.$$

Поэтому $S = 2\pi rh = \pi \cdot AB \cdot BC = \pi \cdot 2R \cos \alpha \cdot 2R \sin \alpha = 4\pi R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 2\pi R^2 \sin 2\alpha$.

О т в е т: $2\pi R^2 \sin 2\alpha$.

Задача 6. Рожок для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр основания 5 см. В него вложили две ложки мороженого в виде полушаров диаметром 5 см. Выясните, поместится ли мороженое в рожок, когда оно растает.

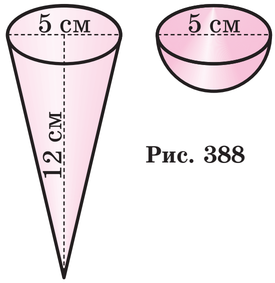


Рис. 388

Решение. Как геометрическое тело рожок для мороженого представляет собой конус с высотой 12 см и радиусом $\frac{5}{2}$ см, а помещенное в него мороженое — полушар с радиусом $\frac{5}{2}$ см (рис. 388).

Вместимость V_1 формы составляет $\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 12$, т. е. $\frac{150\pi}{6}$ см^3.

Помещенное в рожок мороженое имеет объем V_2 шара с радиусом 5 см, т. е. $\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$, или $\frac{125\pi}{6}$ см^3.

Сравнение объемов V_1 и V_2 дает: $V_1 = \frac{150\pi}{6}$ см$^3 > \frac{125\pi}{6}$ см$^3 = V_2$.

Поэтому поскольку, когда мороженое растает, его объем существенно не изменится, то оно целиком поместится в коническую форму.

Ответ: поместится.

484. Три прямые a, b, c пересекаются в одной точке, причем прямая a составляет с прямой b угол в 20°, а с прямой c — угол в 72°. Найдите:
а) угол между прямыми b и c;
б) угол между биссектрисами углов, которые прямая c составляет с прямыми a и b, причем эти углы располагаются по одну сторону от прямой c.

485. Найдите величину каждого из углов, образованных при пересечении двух прямых, учитывая, что величина одного из них:
а) в 8 раз меньше, чем суммарная величина трех остальных;
б) составляет $\frac{2}{7}$ от суммарной величины трех остальных.

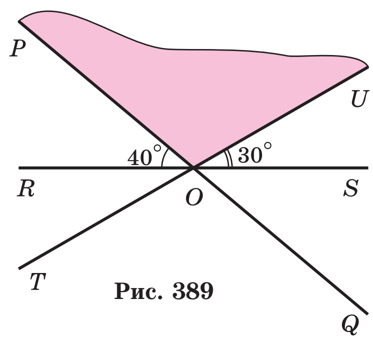


Рис. 389

486. Прямые AB, CD, EF проходят через точку Q. При этом QE — биссектриса угла AQC, равного 161°. Найдите величину CQF.

487. Используя рис. 389, найдите величину угла TOQ.

488. Три прямые a, b, c плоскости размещаются так, как показано на рис. 390. Найдите:

а) угол между прямыми b и c;

б) угол между биссектрисами углов, которые прямая c образует с прямыми a и b, причем эти углы располагаются по разные стороны от прямой c.

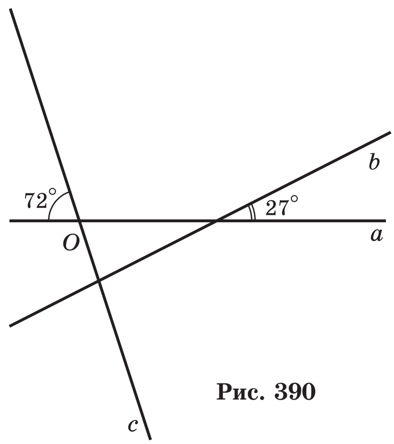


Рис. 390

489. Правильные трех-, четырех-, пяти-, шестиугольники имеют углы, которые измеряются целым числом градусов, а углы правильного семиугольника этого свойства не имеют. Найдите:

а) величину угла правильного семиугольника;

б) количество правильных многоугольников, углы которых измеряются целым числом градусов.

490. Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны.

491. Один катет прямоугольного треугольника с периметром 84 см равен 35 см. Найдите гипотенузу.

492. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 5 : 6, а гипотенуза равна 122 см. Найдите проекции катетов на гипотенузу.

493. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 35 см. Найдите медиану, проведенную из вершины прямого угла.

494. Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого больше одного катета на 2 см, а другого — на 25 см.

495. Биссектриса, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее в отношении 2 : 5. Выясните, в каком отношении делит гипотенузу проведенная к ней высота.

496. Диагонали трапеции равны 15 см и 20 см, а средняя линия — 12,5 см. Найдите высоту трапеции.

497. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, у которых наибольшие биссектрисы равны 5 см и 12 см. Найдите наибольшую биссектрису треугольника.

498. Найдите радиус окружности, описанной около:

а) прямоугольного треугольника, биссектриса которого делит один из катетов на части 4 см и 5 см;

б) равнобедренной трапеции, основания которой равны 60 см и 80 см, а боковая сторона — 26 см.

499. Докажите, что сумма величин, обратных квадратам катетов прямоугольного треугольника, равна величине, обратной квадрату высоты, проведенной к гипотенузе.

500. Основания прямоугольной трапеции равны 17 см и 25 см, а бо́льшая боковая сторона — 10 см. Найдите отрезок, который соединяет точку продолжения меньшей боковой стороны с серединой большей и перпендикулярен ей.

501. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит ее на части 3 см и 2 см, если считать от вершины. Найдите эту высоту и периметр треугольника.

502. Высота равнобедренного треугольника разделена в отношении 2 : 3, если считать от вершины. Через вершину основания и точку деления проведена прямая. Выясните, в каком отношении она делит боковую сторону.

503. Найдите биссектрису угла треугольника, учитывая, что этот угол равен 120°, а прилежащие к нему стороны — 6 см и 12 см.

504. Найдите отрезки, на которые разделяет сторону треугольника его биссектриса длиной 24 см, проведенная из вершины, в которой сходятся стороны с длинами 20 см и 45 см.

505. Найдите перпендикуляры, опущенные на стороны равностороннего треугольника длиной 24 см из его внутренней точки, учитывая, что они относятся как 1 : 2 : 3.

506. Найдите сторону треугольника, учитывая, что:

а) две другие его стороны равны 5 см и 6 см, а площадь треугольника — 12 см^2;

б) две другие его стороны равны 10 м и 17 м, а радиус описанной окружности — $10\frac{5}{8}$ м.

507. Найдите стороны треугольника, учитывая, что:

а) одна из них в два раза меньше другой и на 4 см меньше третьей, а площадь треугольника равна $4\sqrt{5}$ см^2;

б) радиусы вневписанных окружностей равны 6 см, 9 см и 18 см (рис. 391).

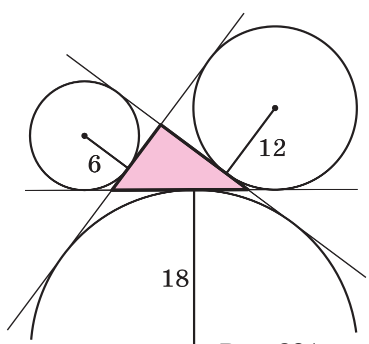


Рис. 391

508. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния:

а) точки M от точек окружности с радиусом r, учитывая, что точка M удалена от центра окружности на a;

б) между точками окружностей с радиусами r_1 и r_2, учитывая, что расстояние между их центрами равно d;
в) между точками прямой и окружности с радиусом r, учитывая, что прямая удалена от центра окружности на d.

509. Определите, существует ли треугольник, высоты которого равны:
а) 3 см, 4 см и 5 см; б) 1 см, 1 см и 3 см; в) 5 см, 10 см и 12 см.

510. Есть правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2. Угол при вершине между ребрами одной грани равен α. Через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите периметр и площадь полученного сечения.

511. В конус вписан цилиндр, полная поверхность которого равна боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса — прямой. Докажите, что вершина конуса отстоит от верхнего основания цилиндра на половину образующей конуса.

512. Найдите радиус шара, учитывая, что:
а) площадь сечения шара плоскостью, которая перпендикулярна радиусу и проходит через его середину, равна 36π см^2;
б) общая хорда перпендикулярных сечений, проведенных на расстояниях 8 см и 12 см от центра, равна 18 см;
в*) он описан около правильной треугольной призмы, у которой высота равна H, а диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α;
г*) он вписан в правильную n-угольную пирамиду, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании — φ;
д*) он описан около правильной n-угольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α;
е*) он описан около пирамиды, у которой основанием является прямоугольник с диагональю 8 см, а каждое боковое ребро составляет с основанием угол в 15°;
ж) он описан около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 4 см.

513. Площадь большого круга шара равна 50π см^2, а два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6 см. Найдите расстояние от центра шара до сечения, учитывая, что площадь одного из них равна 25π см^2.

514. Четыре шара лежат на столе так, что каждый касается трех остальных и плоскости стола. Три шара имеют радиус, равный R. Найдите радиус четвертого шара.

515*. Докажите, что центр шара, описанного около:
а) правильной призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы;

б) правильной пирамиды, лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды.

516*. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 2 м, а сторона основания — 3 м. Найдите:
а) диаметр описанного шара;
б) угол, под которым видно из центра боковое ребро.

517*. Правильная n-угольная призма вписана в шар с радиусом R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

518*. Найдите диаметр шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой:
а) сторона основания равна 4 см, а боковое ребро — 6 см;
б) высота равна 28 см, а боковое ребро — 35 см;
г) все ребра равны a.

519*. Найдите радиус шара, описанного около правильной пирамиды, у которой боковое ребро равно:
а) b и составляет с основанием угол α; б) l, а высота — h.

520. Высота правильной пирамиды равна h, а радиус описанной около основания окружности — r. Определите:
а) радиус описанного шара;
б) при каком соотношении между h и r центр шара лежит внутри пирамиды; на ее основании; вне пирамиды.

521*. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а боковое ребро — 2 см. Выясните, как по отношению к пирамиде расположен центр описанного около нее шара.

522*. Около правильной четырехугольной пирамиды описан шар. Найдите радиус этого шара, учитывая, что сторона основания равна:
а) 6 см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°;
б) $2a$, а боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом в 60°.

523*. В шар с радиусом r вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с основанием пирамиды угол α. Найдите это ребро.

524. Найдите радиус шара, учитывая, что:
а) в него вписана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а высота равна стороне основания;
б) он вписан в пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, а каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β;

в) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10, а ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом δ;

г) он вписан в треугольную пирамиду, боковые ребра которой взаимно перпендикулярны и равны a;

д) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю $2a$, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β;

е) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h.

525*. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол при основании треугольника — α. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

526*. Докажите, что на высоте правильной пирамиды лежит центр:
а) описанного около нее шара; б) вписанного в нее шара.

527*. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой:

а) боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60°, а радиус окружности, описанной около основания, — 4 см;

б) сторона основания равна a и высота — h;

в) боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 60°, а сторона основания равна a;

г) плоский угол при вершине равен α, а сторона основания — a.

528*. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом в 60°, а сторона основания равна:
а) 12 см; б) 18 см; в) l.

529*. Найдите радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, высота которой равна h, а двугранный угол при основании составляет:
а) 60°; б) α.

530*. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковое ребро — $2a$. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.

531*. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а угол между противолежащими боковыми гранями — α. Найдите радиус вписанного шара.

532. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, учитывая, что:

а) сторона ее основания равна a и плоский угол при вершине — α;
б) ее высота равна стороне основания, а объем — 9 см^3;
в) ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 30°, а середина апофемы пирамиды отстоит от плоскости основания на 2 см;
г) ее боковое ребро — 2 см и наклонено к плоскости основания под углом в 60°;
д) ее высота равна 12 см, а боковое ребро — 15 см.

533*. Радиусы шаров, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду и описанного около нее, равны 4 см и 10 см. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

534*. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол при основании треугольника — α. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

535. Опишите способ разделения:
а) треугольника на два равновеликих треугольника одной прямой;
б) параллелограмма двумя прямыми, которые проходят через произвольную точку на его диагонали, так, что части, расположенные по разные стороны диагонали, попарно равновелики;
в) прямоугольника на равновеликие фигуры прямой, не проходящей через вершину.

536. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что одна из них относится к его диагонали как 5 : 13, а диагональ квадрата, равновеликого прямоугольнику, равна $4\sqrt{30}$ см.

537. Найдите отношение сторон прямоугольника, площадь которого составляет 75 % площади квадрата с периметром, равным периметру прямоугольника.

538. Найдите площади двух подобных прямоугольников, на которые разделен прямоугольник со сторонами 4 м и 17 м.

539. Найдите стороны ромба, диагонали которого относятся как $m : n$, а площадь равна S.

540. Внутреннюю точку параллелограмма соединили с его вершинами. Докажите, что сумма площадей треугольников, прилежащих к одной паре противоположных сторон, равна сумме площадей треугольников, прилежащих к другой паре сторон.

541. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и N, что $AM : MB = k$ и $AN : ND = l$. Найдите, какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $AMPN$, учитывая, что P — точка пересечения прямых BN и DM.

542. Найдите площади треугольников, на которые треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см разделяется:
а) своими медианами;
б) медианой и высотой, проведенными к средней по длине стороне.

543. Каждая из сторон AB и DC параллелограмма $ABCD$ разделена на m равных отрезков-долей, а каждая из двух других сторон — на n равных отрезков-долей. Начало первого, второго и т. д. отрезков на стороне AB, если считать от вершины A, соединили с концом первого, второго и т. д. отрезка на стороне CD, если считать от вершины D. Так же конец первого, второго и т. д. отрезков на стороне AD, если считать от вершины A, соединили с началом первого, второго и т. д. отрезков на стороне BC, если считать от вершины B. В результате параллелограмм разделили на треугольники, трапеции и параллелограммы (рис. 392). Выясните, какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь одного такого параллелограмма.

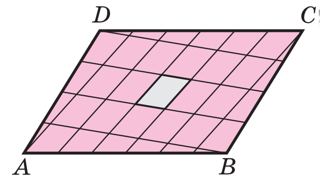


Рис. 392

544. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Определите, какую часть площади параллелограмма составляет площадь восьмиугольника, ограниченного этими отрезками (рис. 393).

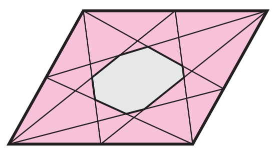


Рис. 393

545. Найдите площадь треугольника, у которого:
а) две стороны вместе составляют 15 см, а проведенные к ним высоты равны 4 см и 6 см;
б) две стороны равны 5 см и 7 см, а угол против одной из них — 45°;
в) две стороны равны 27 см и 29 см, а медиана к третьей стороне — 26 см;
г) две вершины являются основаниями высот, проведенных к двум бо́льшим сторонам треугольника со сторонами 65 см, 70 см, 75 см, а третья вершина является вершиной данного треугольника, из которой выходит его третья высота (рис. 394);
д) одна сторона равна 10 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, — 9 см и 12 см;
е) медианы равны 9 см, 12 см, 15 см.

546. Внутренняя точка треугольника со сторонами 4 см, 13 см, 15 см отстоит на 5 см от первой стороны и на 1 см от второй. Найдите ее расстояние от третьей стороны.

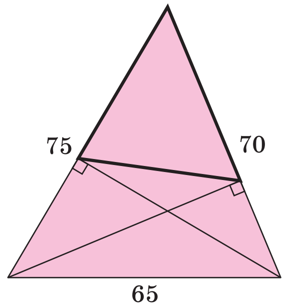


Рис. 394

547. Найдите стороны треугольника, учитывая, что отрезки, соединяющие центр вписанной окружности с вершинами треугольника, разделяют его на треугольники с площадями 12 см^2, 39 см^2 и 45 см^2.

548. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые делит его гипотенузу точка касания с вписанной в треугольник окружностью.

549. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, а их свободные вершины соединены (рис. 395). Найдите площадь полученного шестиугольника.

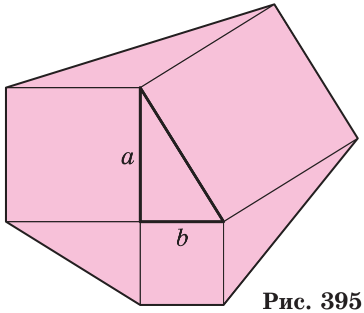


Рис. 395

550. Точки G_1, G_2, G_3 являются проекциями центроида G прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C на стороны BC, AC, AB соответственно (рис. 396). Докажите, что площадь треугольника GG_1G_2 равна площади четырехугольника $GG_1G_3G_2$.

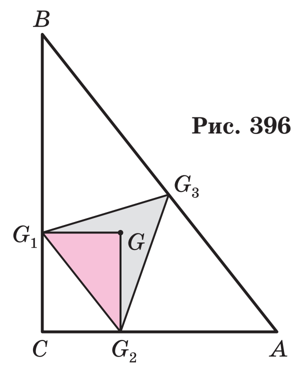


Рис. 396

551. Определите, на каком расстоянии от вершины треугольника с высотой 4 см нужно провести прямую, параллельную стороне, к которой проведена эта высота, чтобы площадь треугольника разделилась в отношении $m : n$, если считать от вершины.

552. Одна сторона треугольника с площадью S разделена на n долей прямыми, параллельными другой стороне, и из обоих концов каждого из параллельных отрезков, заключенных между сторонами треугольника, опущены перпендикуляры на следующую прямую (рис. 397). Найдите площадь фигуры, образованной полученными прямоугольниками.

553. Определите, в каком отношении, если считать от вершины, нужно разделить сторону треугольника двумя прямыми, параллельными другой стороне, чтобы треугольник разделился на равновеликие части.

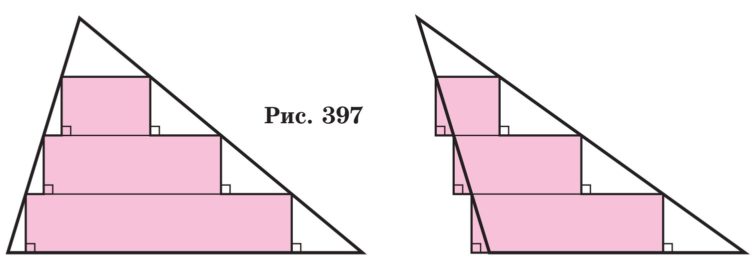


Рис. 397

554. Каждая сторона треугольника с площадью Q разделена в отношении $m : n : m$. Найдите площадь шестиугольника, вершинами которого являются точки деления.

555. Точка P стороны AB треугольника ABC делит ее в отношении $m : n$, а точки Q и R сторону BC — в отношении $i : j : k$. Найдите, в каком отношении площадь треугольника разделяется прямыми PQ и PR.

556. Из треугольника ABC со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вырезан треугольник KLM, площадь которого составляет шестнадцатую долю площади треугольника ABC, а стороны параллельны сторонам треугольника ABC и равноудалены от них (рис. 398). Найдите расстояние между параллельными сторонами треугольников.

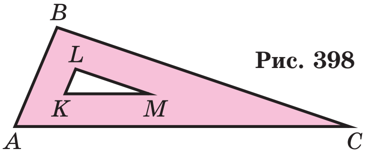


Рис. 398

557. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC и разделяющая его медиану BG в отношении $1 : 2$, если считать от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Определите, какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника ABK.

558. Докажите, что треугольники ABM и CBM, где M — внутренняя точка треугольника ABC, равновелики тогда и только тогда, когда точка M является точкой медианы BB_1.

559. Прямая, параллельная стороне треугольника, разделила его на равновеликие части. Выясните, в каком отношении эта прямая разделила две другие стороны.

560. Прямая, параллельная стороне треугольника с площадью S, отсекает от него треугольник с площадью Q. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая принадлежит стороне большего треугольника.

561. Найдите все такие внутренние точки X треугольника ABC, что треугольники XAB и XAC равновелики.

562. Используя площади, докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника.

563. Найдите площадь трапеции, у которой:
а) основания равны 142 см и 89 см, а диагонали — 120 см и 153 см;
б) высота равна 12 см, а диагонали — 20 см и 15 см;
в) основания равны 6 см и 20 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см.

564. Основания трапеции равны 5 см и 11 см, а высота — 5 см. Определите, на каком расстоянии от меньшего основания нужно провести прямую, параллельную ему, чтобы площадь трапеции разделилась в отношении $9 : 8$, если считать от меньшего основания.

565. Прямая, проведенная через вершину тупого угла трапеции параллельно боковой стороне, разделяет основание в отношении 1 : 2. Найдите:

а) основания трапеции, учитывая, что площадь отделенного треугольника равна 6 см, а высота трапеции — 3 см;

б) большее основание трапеции, учитывая, что ее средняя линия равна 15 см.

566. Найдите бо́льшую сторону трапеции, учитывая, что три ее стороны равны друг другу, площадь равна 8 см^2, а острый угол — 30°.

567. Докажите, что площадь трапеции равна:

а) удвоенной площади треугольника, вершинами которого являются концы одной боковой стороны и середина другой;

б) произведению одной боковой стороны и перпендикуляра к ней, опущенного из середины другой боковой стороны.

568. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны:

а) 6 и 8, а отрезок, соединяющий середины оснований, — 5;

б) m и n, а средняя линия — l.

569. Из четырех треугольников, на которые разделена трапеция своими диагоналями, треугольники, прилежащие к основаниям, имеют площади S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

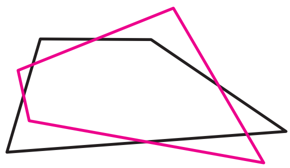


Рис. 399

570. Определите, в каком отношении диагонали делят на четыре части площадь трапеции, основания которой относятся как $m : n$.

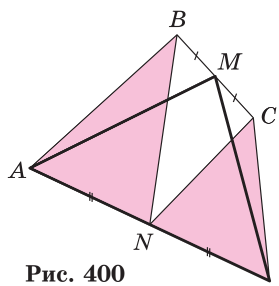


Рис. 400

571. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого противоположные стороны AB и CD длиной соответственно 2 и 4 перпендикулярны, а стороны AD и BC равны 5 и 7 соответственно.

572. Докажите, что:

а) два четырехугольника, середины сторон которых совпадают (рис. 399), равновелики;

б) если середины M и N сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$ соединить с его вершинами (рис. 400), то суммарная площадь треугольников ABN и CDN равна площади треугольника ADM;

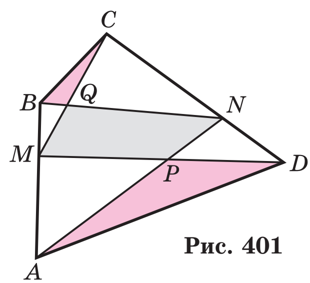


Рис. 401

в) если M и N — такие точки сторон AB и DC четырехугольника $ABCD$, что $AM : BM = CN : DN$, а P и Q — точки пересечения отрезка AN с отрезком DM и отрезка CM с отрезком BN соответственно (рис. 401), то площадь

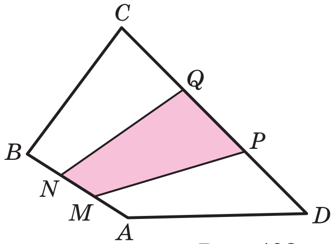


Рис. 402

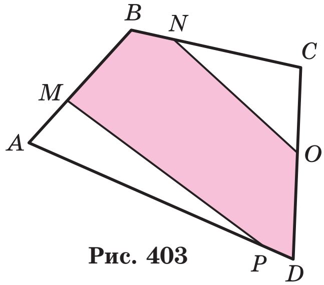


Рис. 403

четырехугольника $MQNP$ равна суммарной площади треугольников APD и BQC;
г) если M и N — точки, делящие сторону AB четырехугольника $ABCD$ на три доли, а P и Q — точки, делящие сторону DC также на три доли (рис. 402), то площадь четырехугольника $MNQP$ равна третьей доле площади данного четырехугольника.

573. M, N, O, P — такие точки сторон четырехугольника $ABCD$, что $AM : BM = 3 : 5$, $BN : CN = 1 : 3$, $CO : PO = 4 : 5$, $DP : AP = 1 : 8$. Определите, какую часть площадь шестиугольника $MBNODP$ (рис. 403) составляет от площади данного четырехугольника, и установите, при любых ли отношениях $AM : BM$, $BN : CN$, $CO : PO$, $DP : AP$ задача имеет решение.

574. Найдите площадь каждого из треугольников, на которые разделяется четырехугольник с площадью 45 м^2 точкой пересечения диагоналей, учитывая, что эта точка разделяет их в отношениях $2 : 3$ и $4 : 5$.

575. Прямые, проходящие через вершины C и D четырехугольника $ABCD$ и соответственно параллельные прямым BD и BC, пересекаются в точке E. Докажите, что треугольник ACE равновелик данному четырехугольнику.

576. Через середину каждой диагонали четырехугольника провели прямую, параллельную другой диагонали, и через точку пересечения этих прямых и середину каждой стороны четырехугольника провели прямые. Докажите, что они разделили четырехугольник на равновеликие четырехугольники.

577. Стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника равны 17 см, 25 см, 26 см, 30 см, а диагональ AC — 28 см. Найдите площадь четырехугольника и его диагональ BD.

578. В круг с радиусом R вписаны три равных круга, касающихся друг друга. Найдите площадь той части большого круга, которая не покрывается вписанными кругами (рис. 404).

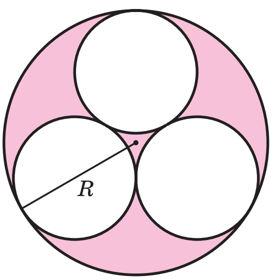


Рис. 404

579. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 4 см. Найдите площадь сечения призмы, проведенного через другой катет и противолежащую вершину другого основания, учитывая, что боковое ребро призмы равно 3 см, а площадь описанного около нее шара — 61π см^2.

580. Около шара с радиусом r описана правильная треугольная призма. Найдите ее:
а) боковую поверхность; б) полную поверхность.

581. Две полуплоскости с общей границей касаются цилиндра, а двугранный угол между ними, обращенный к цилиндру, равен 60°. Выясните, в каком отношении линии касания этих поверхностей разделили боковую поверхность цилиндра.

582. Ось цилиндра с радиусом основания r и вдвое большей высотой является границей двух полуплоскостей, двугранный угол между которыми равен 36°. Найдите полную поверхность образовавшейся меньшей части цилиндра.

583. Найдите боковую поверхность цилиндра, учитывая, что площадь его осевого сечения равна S.

584. Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что:
а) его образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°, а высота равна 6 см;
б) он описан около шара с радиусом r, а угол между образующей и основанием конуса равен α;
в) он получен свертыванием жестяного сектора с углом в 270° и радиусом 7,1 см и закрыт жестяным кругом.

585. Центральный угол развертки боковой поверхности конуса равен 90°. Найдите площадь его осевого сечения, учитывая, что радиус основания конуса равен 6 см.

586. В конус высотой 24 см вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см. Найдите отношение полных поверхностей пирамиды и конуса.

587. В усеченный конус вписана правильная усеченная n-угольная пирамида. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см, а высота — 4 см. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

588. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, учитывая, что:
а) ее высота равна 8 см, а сама она описана около шара, центр которого отстоит от боковой грани пирамиды на 3 см;
б) радиус вписанной в нее сферы равен 8 см, а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом в 60°;

в) она описана около шара с радиусом R, а плоский угол при ее вершине равен α;
г) она усеченная, описана около шара с радиусом r, а двугранный угол при ее основании равен α.

589. Найдите отношение:
а) полной поверхности цилиндра, вписанного в шар, к поверхности шара, учитывая, что высота цилиндра равна диаметру его основания;
б) полной поверхности цилиндра к поверхности вписанного в него шара.

590. Выясните, как изменится поверхность шара, если его радиус увеличить в 2 раза.

591. Диаметры трех шаров такие, что они могут быть сторонами прямоугольного треугольника. Установите зависимость между поверхностями шаров.

592. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Выясните, как относится площадь полученного сечения к площади большого круга.

593. Найдите площадь сечения шара плоскостью, которая:
а) отстоит от центра на 10 см, а радиус шара равен 60 см;
б) отстоит от центра на 19 дм, а радиус шара равен 82 см;
в) проведена через середину радиуса длиной 28 см;
г) проведена через конец радиуса длиной R под углом в $60°$ к нему.

594. Докажите, что сечения шара двумя плоскостями, проходящими через концы одного диаметра под равными углами к нему, равновелики.

595. Внутри шара с радиусом r взята точка, отстоящая от центра на d. Через него проведены три попарно перпендикулярные плоскости. Найдите сумму площадей трех полученных сечений.

596. В цилиндр, диаметр d которого равен высоте, вписан шар. Найдите поверхность шара и полную поверхность цилиндра.

597. Найдите поверхность шара, учитывая, что:
а) он вписан в цилиндр с боковой поверхностью 36π см^2;
б) в него вписана прямая призма, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник, высота призмы равна 12 см, а длина диагонали меньшей грани — 13 см;
в) он описан около прямой призмы, основанием которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами 3 см, а площадь сечения, проведенного через один из катетов основания и противолежащую вершину другого основания, равна 7,5 см^2;
г) он касается поверхности данного шара с радиусом r, боковой поверхности цилиндра, описанного около данного шара и одного основания цилиндра;

д) осевое сечение цилиндра, вписанного в шар, является квадратом, а боковая поверхность цилиндра равна 16π см^2;
е) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания 4 см и боковой гранью, наклоненной к плоскости основания под углом α;
ж) он вписан в правильную четырехугольную пирамиду, высота которой втрое больше радиуса шара, а сторона основания равна a;
з) он описан около правильной пирамиды, боковое ребро которой равно b и составляет с основанием пирамиды угол α;
и) он вписан в конус, образующая которого равна l и составляет с плоскостью основания угол в 60°.

598. Найдите поверхность шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, у которой:
а) сторона основания равна 2 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60°;
б) сторона основания равна a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 30°;
в) боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60°, а радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см;
г) ребро которой равно a и составляет с плоскостью основания угол α.

599. Учитывая, что шар вписан в правильную четырехугольную пирамиду, расстояние от вершины которой до центра шара равно a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания — α, найдите полную поверхность пирамиды.

600. Радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, равен r, а двугранный угол при основании — α. Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что она является:
а) четырехугольной; б) треугольной.

601. Через точку высоты полушара проведена перпендикулярная ей плоскость и в полученные шаровые сегмент и слой вписаны такие конус и цилиндр соответственно, что сечение полушара является их общим основанием. Найдите такое положение сечения, при котором боковые поверхности конуса и цилиндра равны.

602. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.

603. Радиус шара равен 18 см. Выясните, какую площадь имеет часть его поверхности, которая видна из точки, отстоящей от центра на 30 см.

604. Четверть круга AOB с радиусом r вращается вокруг радиуса OB. Определите, на каком расстоянии x от центра O нужно выбрать точку P и через нее провести прямую l, параллельную радиусу OA, чтобы кольцо, описанное отрезком CD, где C и D — точки пересечения прямой l с хордой AB и дугой AB соответственно (рис. 405), имело данную площадь πm, и найдите наибольшее значение этой площади при изменении x от 0 до r.

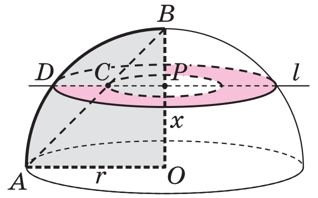


Рис. 405

605. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в цилиндр:

а) с радиусом r, учитывая, что диагональ параллелепипеда составляет с основанием цилиндра угол α, а угол между диагоналями основания равен 60°;

б) с высотой h, учитывая, что угол между диагоналями одной грани параллелепипеда, обращенный к боковому ребру, равен α, а угол между диагоналями параллелепипеда, обращенный к тому же ребру, — β.

606. Есть цилиндр с радиусом основания r, осевым сечением которого является квадрат. В него вписана прямая треугольная призма, у которой два двугранных угла при боковых ребрах равны α каждый. Найдите объем призмы.

607. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с острым углом α. В него вписан цилиндр с радиусом r, диагональ осевого сечения которого составляет с основанием угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

608. Найдите объем правильной треугольной призмы, описанной около шара с радиусом r.

609. Железобетонная плита для перекрытия потолка размерами $180 \times 24 \times 580$ см имеет по длине 9 круглых сквозных отверстий диаметром 10 см. Найдите массу плиты, приняв плотность железобетона равной 2400 кг/м^3.

610. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар с радиусом R, учитывая, что диагональ параллелепипеда составляет с одной гранью угол α, а:

а) с другой — угол в 60°;

б) угол между диагональю этой грани и стороной основания равен 60°.

611. Найдите объем правильной призмы, вписанной в шар с радиусом:

а) 9 см, учитывая, что она четырехугольная и ее высота равна 14 дм;

б) R, учитывая, что она треугольная и ее высота равна H;

в) R, учитывая, что она четырехугольная и диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом α.

612. Найдите объем цилиндра, учитывая, что он вписан в:
а) правильную четырехугольную призму, каждое ребро которой равно a;
б) правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a;
в) шар с радиусом R, а высота равна диаметру основания;
г) шар с радиусом R, а диагональ его осевого сечения составляет с основанием угол α.

613. Цилиндр с радиусом основания r и высотой h рассечен плоскостью, параллельной оси. Найдите объем меньшей части цилиндра, учитывая, что дуга ее основания равна $120°$.

614. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, учитывая, что она:
а) описана около шара с радиусом 3 см, а диагональ ее основания — $14\sqrt{2}$ см;
б) описана около шара с радиусом r, двугранный угол при ее основании равен α;
в) вписана в шар с радиусом 4 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом в $30°$.

615. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, учитывая, что она:
а) описана около шара с объемом V, а двугранный угол при основании пирамиды равен α;
б) вписана в шар с радиусом R, а плоский угол при вершине равен α;
в) вписана в шар с радиусом R, а боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α;
г) вписана в шар с радиусом r, а боковая грань наклонена к основанию под углом α;
д) описана около шара с радиусом r, а высота пирамиды равна H.

616. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, учитывая, что:
а) радиус шара, вписанного в нее, равен 10 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в $60°$;
б) ее высота равна H, а радиус описанного около нее шара — R.

617. Найдите объем правильной шестиугольной пирамиды, учитывая, что:
а) радиус шара, вписанного в нее, равен 10 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в $60°$;
б) ее высота равна H, а радиус описанного около нее шара — R.

618. Найдите объем конуса, учитывая, что:
а) в него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник, у которого меньшая сторона равна a и острый угол между

диагоналями — α, а боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания угол β;
б) он вписан в пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и острым углом φ, а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол θ.

619. Найдите площадь осевого сечения конуса с объемом 48 см^3 и длиной окружности основания 9 см.

620. Радиус конуса равен r, а образующая составляет с основанием угол α. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

621. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол α. В него вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом β. Найдите объем пирамиды.

622. Найдите объем конуса, учитывая, что радиус его основания равен 18 дм, а радиус вписанного в конус шара равен 9 дм.

623. Найдите объем конуса, в который вписан шар с радиусом r, учитывая, что:
а) образующая конуса равна диаметру его основания;
б) это конус наименьшего объема;
в) угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α.

624. Правильная четырехугольная пирамида, у которой сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину и параллельной стороне основания. Найдите объем полученного тела вращения.

625. Сравните поверхность шара с полной поверхностью цилиндра, учитывая, что они имеют равные объемы и радиус шара равен радиусу основания цилиндра.

626. Выясните, как относятся объемы шаров, если их поверхности относятся как $m : n$.

627. Найдите отношение:
а) объемов шара и вписанного в него конуса, основанием которого служит большой круг, а вершина принадлежит поверхности шара;
б) объемов усеченного конуса с радиусами оснований r и r_1 и вписанного в него шара.

628. Найдите объем шара, учитывая, что:
а) его диаметр равен D;
б) объем его части, заключенной между касательной плоскости шара и плоскостью, параллельной ей и отстоящей на 3 см, равен 72π см^3;

в) он описан около прямой призмы с объемом 24 см^3, основанием которой является прямоугольный треугольник, а катеты основания и боковое ребро относятся как 1 : 2 : 3.

629. Учитывая, что шар вписан в правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и двугранным углом при ней — α, найдите объем шара.

630. Найдите объем шара, учитывая, что он:
а) описан около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 24 см, а боковое ребро — 16 см;
б) вписан в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании — α.

631. Чтобы отлить свинцовый шар диаметром 3 см, используют свинцовые шарики диаметром 5 мм. Определите, сколько таких шариков нужно взять.

632. Плоскость отстоит на 3 см от шара и пересекает его по кругу с радиусом 4 см. Найдите объем шара.

633. Найдите массу гранитного шара диаметром 1,8 м, учитывая, что плотность гранита равна 2,6 кг/дм^3.

634. Найдите радиус шара, учитывая, что его масса равна:
а) 150 кг, он изготовлен из железа, плотность которого равна 7,9 г/см^3;
б) 10 кг, он изготовлен из чугуна, плотность которого равна 7,2 г/см^3.

635. Определите:
а) шар какого диаметра получится при переплавке двух чугунных шаров с диаметрами 25 см и 35 см;
б) сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска свинца массой 1 кг, учитывая, что плотность свинца равна 11,4 г/см^3.

636. Внешний диаметр полого шара равен 30 см, а толщина стенок — 5 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

637. Найдите массу полого железного шара, учитывая, что плотность железа равна 7,9 г/см^3, а:
а) внутренний и внешний диаметры соответственно равны 35 мм и 50 мм;
б) радиусы внутренней и внешней поверхностей равны 50 мм и 100 мм.

638. Чугунный шар диаметром 10 см покрыт бронзовой оболочкой толщиной 3 мм. Найдите массу бронзы, израсходованной на покрытие шара, учитывая, что плотность бронзы равна 8,7 г/см^3.

639*. Радиус шара равен 2 м, а радиус сечения шара плоскостью — 1 м. Найдите объем сектора, который соответствует сегменту, отсеченному плоскостью.

640*. Определите, какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, высота которого равна десятой доле диаметра шара.

641*. Найдите объем части шара, которую отсекает от него плоскость, учитывая, что радиус окружности сечения равен:
а) 24 см, а радиус шара — 30 см; б) 60 см, а радиус шара —75 см.

642*. Найдите объем части шара, учитывая, что она заключена между:
а) двумя плоскостями, которые перпендикулярны диаметру шара с радиусом R и разделяют диаметр на три доли;
б) параллельными плоскостями α и β, из которых плоскость α пересекает шар с радиусом R по окружности с радиусом r, а плоскость β равноотстоит от плоскости α и параллельной ей касательной плоскости шара.

643*. Поверхность шара равна 100π см^2. Найдите объемы сегментов, на которые плоскость, перпендикулярная диаметру, делит шар, учитывая, что площадь сечения шара этой плоскостью равна 16π см^2.

644*. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара с радиусом 9 см, делит этот диаметр в отношении 1 : 2. Найдите объем меньшего шарового сегмента.

645*. Найдите объем шарового сектора, учитывая, что:
а) его радиус равен r, а угол его осевого сечения — 120°;
б) радиус окружности основания соответствующего купола равен 60 см, а радиус шара — 75 см;
в) радиус окружности основания соответствующего купола равен 100 см, а радиус шара — 125 см.

646*. Шаровой сектор получен вращением кругового сектора вокруг своей оси симметрии. Докажите, что если площадь его осевого сечения равна третьей доле площади большого круга, то его объем равен четвертой доле объема шара.

647*. Шарообразный приемник газа имеет в диаметре 9,22 м. Выясните:
а) какова его вместимость;
б) до скольких атмосфер сжат газ в газоприемнике, учитывая, что закачанный в него при нормальном давлении газ занимает 2500 м^3.

648. Определите, сколько воды вмещает котел, размеры которого на рис. 406 даны в сантиметрах.

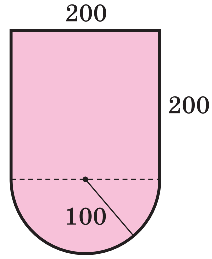


Рис. 406

649. Газовый резервуар имеет форму цилиндра, прикрытого сверху шаровым сегментом. Радиус цилиндра равен 15 дм, высота цилиндрической части — 100 дм, а полная высота резервуара — 125 дм. Найдите его объем.

650. Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого приставлены равные шаровые сегменты. Радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота сегмента — 0,5 м. Определите, какой длины должна быть образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны была равна 50 м^3.

651. Шар образован вращением полукруга вокруг прямой, которая содержит диаметр. При этом поверхность, образованная вращением хорды, один конец которой совпадает с концом данного диаметра, делит шар на части с равными объемами. Найдите косинус угла между этой хордой и диаметром.

652. Шар с радиусом 15 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 18 см. Найдите полную поверхность полученного тела.

§ 10. Координаты и векторы

А) Координаты

Декартова система координат в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел. Декартову систему координат образуют три попарно перпендикулярные координатные оси с общим началом и одинаковыми единичными отрезками (рис. 407). Каждой точке M пространства соответствует упорядоченная тройка чисел $(a; b; c)$ — координаты этой точки (рис. 408).

По координатам концов $A\,(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B\,(x_B;\ y_B;\ z_B)$ отрезка AB можно определить его длину: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$. Координаты середины отрезка есть средние арифметические соответствующих координат его концов: если $A\,(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B\,(x_B;\ y_B;\ z_B)$ и точка $C\,(x_C;\ y_C;\ z_C)$ — середина отрезка AB, то:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\qquad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\qquad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

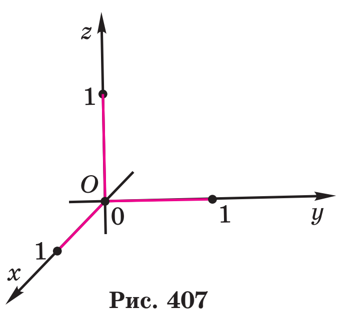


Рис. 407

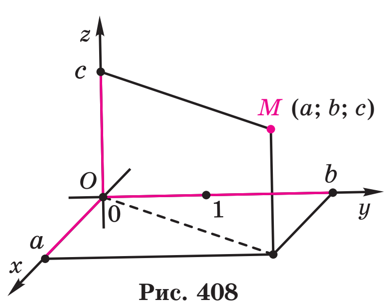


Рис. 408

Б) Векторы

Направленные отрезки представляют векторы (рис. 409). Начало направленного отрезка считается началом вектора, а конец — концом вектора, длиной вектора считается длина направленного отрезка. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если они одинаково направлены и имеют одинаковую длину (рис. 410). Равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает, что середины отрезков AD и BC совпадают (рис. 411 а, б).

Вектор, представленный направленным отрезком $\overrightarrow{AA}$, называют нулевым: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Векторы, представленные направленными отрезками $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, называют противоположными: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Складывать векторы можно по правилу треугольника $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$ (рис. 412) или по правилу параллелограмма $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ (рис. 413).

Сложение векторов имеет переместительное свойство, т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, сочетательное свойство, т. е. $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$, кроме того, уравнение $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ всегда имеет единственное решение, которое называют разностью векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$: $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ (рис. 414).

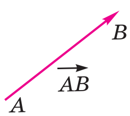


Рис. 409

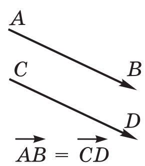


Рис. 410

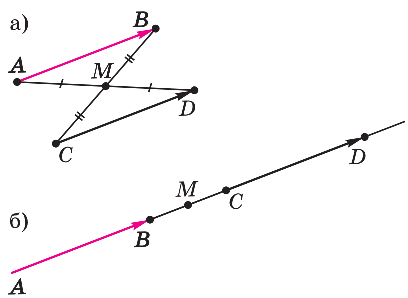


Рис. 411

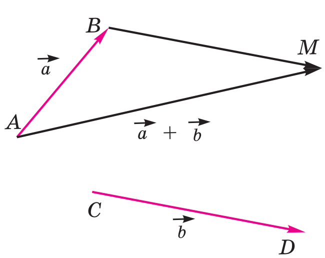


Рис. 412

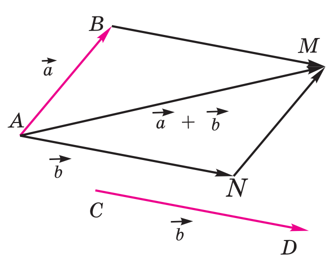


Рис. 413

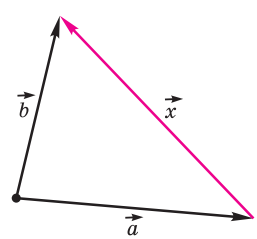


Рис. 414

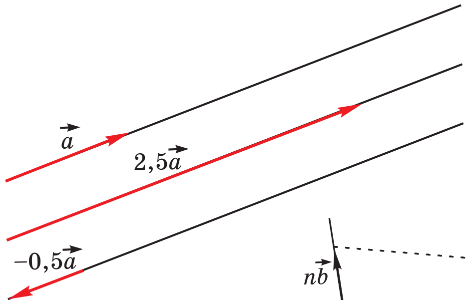


Рис. 415

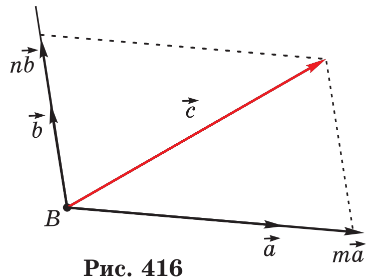


Рис. 416

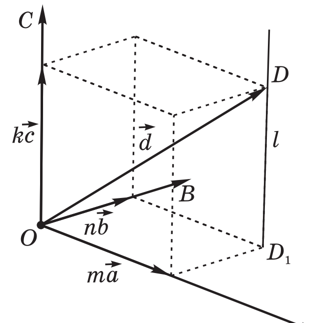


Рис. 417

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k является такой вектор $k\vec{a}$, что, во-первых, векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$ и, во-вторых, длины векторов $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ связаны равенством $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ (рис. 415).

При этом верно равенство $(m \cdot n)\vec{a} = m(n\vec{a})$. Если $k = 0$, то произведением $k\vec{a}$ является нулевой вектор. С действием умножения вектора на число связаны два распределительных свойства:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{и} \quad (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, параллельные одной прямой, называют *коллинеарными*. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них можно выразить через другой: или $\vec{a} = n\vec{b}$, или $\vec{b} = m\vec{a}$ при некоторых числах m и n.

Для любых двух векторов существует плоскость, которой они параллельны. Векторы, параллельные одной плоскости, называют **компланарными**. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с ними, можно однозначно выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \text{ (рис. 416).}$$

Верно и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ связаны равенством $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, то они компланарны.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то для любого вектора $\vec{d}$ существует единственная упорядоченная тройка действительных чисел (m, n, k) такая, что $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$ (рис. 417).

Таким образом, из двух коллинеарных векторов один может быть выражен через другой, из трех компланарных векторов один может быть выражен через два другие, а из четырех любых векторов один может быть выражен через три другие.

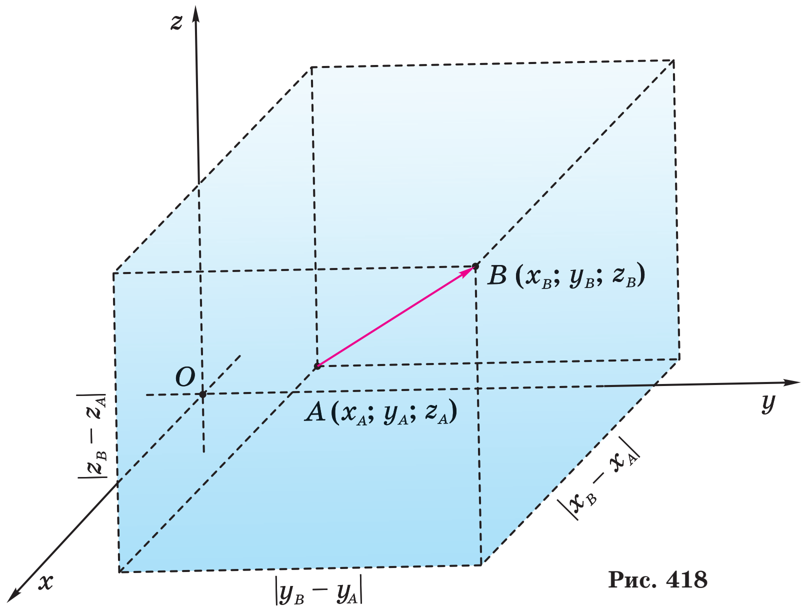


Рис. 418

Если выбрана декартова система координат $Oxyz$, то координаты (a; b; c) точки M пространства называют и координатами вектора $\overrightarrow{OM}$. Если A (x_A; y_A; z_A), B (x_B; y_B; z_B), то $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$; $z_B - z_A$) (рис. 418). При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число: если $\vec{a}$ (x_a; y_a; z_a), $\vec{b}$ (x_b; y_b; z_b) и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c}$ ($x_a + x_b$; $y_a + y_b$; $z_a + z_b$) и $k\vec{a}$ (kx_a; ky_a; kz_a).

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, а если хотя бы один из множителей есть нулевой вектор, то скалярное произведение таких векторов по определению принимается равным нулю.

Скалярное произведение векторов имеет переместительное свойство $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, распределительное свойство $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, множитель можно выносить за знак скалярного произведения $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$. С помощью скалярного произведения можно находить длины векторов и косинусы углов между ними: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (x_a; y_a; z_a) и $\vec{b}$ (x_b; y_b; z_b) выражается через их координаты в декартовой системе равенством $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Уравнению $ax + by + cz + d = 0$, в котором коэффициенты a, b, c не равны нулю одновременно, удовлетворяет любая точка определенной плоскости. Этой плоскости перпендикулярен вектор $\vec{N}$ $(a;\ b;\ c)$. Если плоскость имеет уравнение $ax + by + cz + d = 0$, то расстояние до нее от точки M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

В) Применение векторов и координат

Скалярное произведение векторов можно использовать для нахождения:

- угла α между прямыми AB и CD: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$;
- угла β между плоскостями через перпендикулярные этим плоскостям векторы $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$: $\cos\beta = \dfrac{|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}|}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|}$;
- угла γ между прямой AB и плоскостью, которой перпендикулярен вектор $\overrightarrow{N}$: $\sin\gamma = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{N}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{N}|}$;
- расстояния d от точки M до прямой AB: $d = \dfrac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AM}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}\right)^2}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

?

1. Как задать прямоугольную декартову систему координат на плоскости; в пространстве?

2. Как найти координаты данной точки на плоскости; в пространстве?

3. Как найти точку по ее известным координатам на плоскости; в пространстве?

4. Как найти координаты середины отрезка по известным координатам его концов на плоскости; в пространстве?

5. Как представляют вектор? Что называют началом вектора, концом вектора, длиной вектора?

6. Какие векторы считаются равными; противоположными?

7. Как можно найти сумму векторов?

8. Какие свойства имеет сложение векторов?

9. Как определяется разность векторов? Какой вектор считается нулевым?

10. Как определяется произведение вектора на число?

11. Какие свойства имеет умножение вектора на число?

12. Какие векторы называются коллинеарными? Какое свойство имеют коллинеарные векторы?

13. Какие векторы называются компланарными? Какое свойство имеют компланарные векторы?

14. Сформулируйте свойство, которым обладают любые четыре вектора пространства.

15. Как определяются координаты вектора в декартовой системе координат?

16. Как найти координаты вектора по координатам его концов?

17. Как найти координаты суммы данных векторов; произведения данного вектора на число?

18. Как определяется скалярное произведение векторов?

19. Какие свойства имеет скалярное произведение векторов?

20. Сформулируйте признак перпендикулярности двух векторов.

21. Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?

22. Как использовать скалярное произведение для нахождения длины вектора; угла между векторами; угла между прямыми?

23. Разъясните предложение «Плоскость β имеет уравнение $ax + by + cz + d = 0$». Какой смысл имеет тройка чисел $(a; b; c)$?

24. Как найти расстояние от заданной своими координатами точки до плоскости, заданной своим уравнением?

25. Как можно найти угол между прямыми, каждая из которых проходит через две точки с известными координатами?

26. Как можно найти угол между двумя плоскостями, которые заданы своими уравнениями?

27. Как можно найти угол между плоскостью, заданной своим уравнением, и прямой, проходящей через две точки с известными координатами?

28. Как можно найти расстояние от данной точки до прямой, проходящей через две точки с известными координатами?

Задача 1. Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды $ABCD$, вершины которой имеют координаты A (1; 2; 13), B (4; 6; 12), C (13; 5; 4) и D (−11; 6; −3).

Р е ш е н и е. Пусть у сферы, описанной около треугольной пирамиды $ABCD$, центр находится в точке Q (x, y, z) и радиус равен R. Тогда $AQ = BQ = CQ = DQ = R$. Поэтому:

$$\begin{cases} R^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-13)^2, \\ R^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-12)^2, \\ R^2 = (x-13)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2, \\ R^2 = (x+11)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2, \end{cases} \quad \text{или:} \quad \begin{cases} R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 26z + 174, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y - 24z + 196, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 26x - 10y - 8z + 210, \\ R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 22x - 12y + 6z + 166, \end{cases}$$

или, после вычитания первого равенства из остальных:

$$\begin{cases} R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 26z + 174, \\ 0 = -6x - 8y + 2z + 22, \\ 0 = -24x - 6y + 18z + 36, \\ 0 = 24x - 8y + 32z - 8. \end{cases}$$

Из третьего условия находим, что $y = -4x + 3z + 6$. С учетом этого второе и четвертое условия дают:

$$\begin{cases} 13x - 11z = 13, \\ 7x + z = 7, \end{cases}$$

откуда находим, что $x = 1$, $z = 0$. Тогда $y = 2$ и $R = 13$.

О т в е т: $Q\ (1,\ 2,\ 0)$, $R = 13$.

Задача 2. В треугольнике ABC отмечена точка Q. Докажите, что $S_{BQC} \cdot \overrightarrow{QA} + S_{AQC} \cdot \overrightarrow{QB} + S_{AQB} \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.

Пусть в треугольнике ABC отмечена точка Q и пусть $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ — векторы единичной длины, направленные по лучам QA, QB, QC соответственно (рис. 419). С учетом того, что:

$$S_{BQC} = QB \cdot QC \cdot \sin\angle BQC,$$
$$S_{AQC} = QA \cdot QC \cdot \sin\angle AQC,$$
$$S_{AQB} = QA \cdot QB \cdot \sin\angle AQB,$$
$$\overrightarrow{QA} = QA \cdot \vec{e_1},\ \overrightarrow{QB} = QB \cdot \vec{e_2},\ \overrightarrow{QC} = QC \cdot \vec{e_3},$$

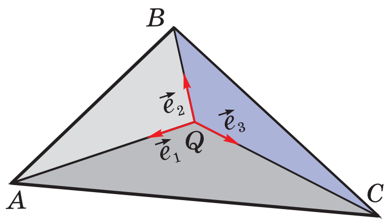


Рис. 419

имеем:

$$S_{BQC} \cdot \overrightarrow{QA} + S_{AQC} \cdot \overrightarrow{QB} + S_{AQB} \cdot \overrightarrow{QC} =$$
$$= QA \cdot QB \cdot QC \cdot (\sin\angle BQC \cdot \vec{e_1} +$$
$$+ \sin\angle AQC \cdot \vec{e_2} + \sin\angle AQB \cdot \vec{e_3}).$$

Проведем три прямые, параллельные QA, QB, QC, которые попарно пересекаются в точках C_1, A_1, B_1 (рис. 420).

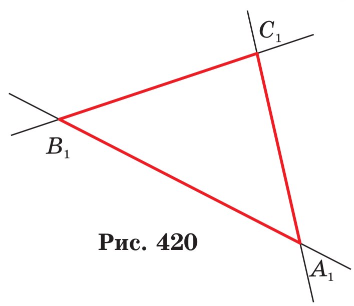


Рис. 420

Поскольку $A_1B_1 \parallel QC$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = A_1B_1 \cdot \vec{e_3}$.

Аналогично $\overrightarrow{C_1A_1} = C_1A_1 \cdot \vec{e_2}$, так как $C_1A_1 \parallel QB$ и $\overrightarrow{B_1C_1} = B_1C_1 \cdot \vec{e_1}$, ведь $B_1C_1 \parallel AQ$.

Дополнительно, по свойству углов с соответственно параллельными сторонами, имеем:

$$\sin\angle AQB = \sin\angle A_1C_1B_1,\ \sin\angle AQC = \sin\angle A_1B_1C_1,\ \sin\angle BQC = \sin\angle B_1A_1C_1.$$

Выразим стороны треугольника $A_1B_1C_1$ через его углы и радиус R описанной окружности:

$$A_1B_1 = 2R\sin\angle A_1C_1B_1,\ B_1C_1 = 2R\sin\angle B_1A_1C_1,\quad C_1A_1 = 2R\sin\angle C_1B_1A_1.$$

Теперь получаем:

$$\vec{0} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1} = A_1B_1 \cdot \vec{e_3} + B_1C_1 \cdot \vec{e_1} + C_1A_1 \cdot \vec{e_2} =$$
$$= 2R\left(\sin\angle A_1C_1B_1 \cdot \vec{e_3} + \sin\angle B_1A_1C_1 \cdot \vec{e_1} + \sin\angle C_1B_1A_1 \cdot \vec{e_2}\right) =$$
$$= 2R\left(\sin\angle AQB \cdot \vec{e_3} + \sin\angle BQC \cdot \vec{e_1} + \sin\angle CQA \cdot \vec{e_2}\right).$$

Задача 3. В четырехугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и углы $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$.

Докажите, что четвертая сторона AD удовлетворяет равенству:

$$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\beta - 2bc\cos\gamma + 2ac\cos(\beta + \gamma)$$

(это так называемая первая теорема косинусов для четырехугольника).

Четырехугольник $ABCD$ полностью определяется векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ (рис. 421). Тогда $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ и:

$$\overrightarrow{AD}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)^2 =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Поскольку угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ дополняет угол ABC до $180°$, то $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -2ab\cos\beta$. Аналогично $2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = -2bc\cos\gamma$. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен сумме β и γ, поскольку вектор $\overrightarrow{AB}$ после поворота на угол β получает направление вектора $\overrightarrow{BC}$, а затем, после поворота на угол γ, — направление вектора $\overrightarrow{CD}$, то $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2ac\cos(\beta + \gamma)$.

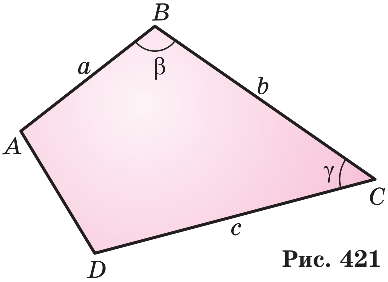


Рис. 421

Этим завершается доказательство нужного утверждения.

653. У прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковые грани параллельны координатным осям. Найдите координаты его вершин, учитывая, что B (4; 2; –2), D_1 (–1; 3; 4).

654. Найдите расстояние от точки M (4; –3; 12) до:
а) координатных плоскостей;
б) координатных осей;
в) начала координат.

655. На координатных осях найдите точки, расположенные на расстоянии d от точки K (5; 4; –3), если:
а) $d = 10$; б) $d = 7$; в) $d = 13$.

656. Найдите все точки, равноотстоящие от точек A (–1; 4; 11), B (3; –4; 11) и C (11; –5; –4).

657. Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды $ABCD$, вершины которой имеют координаты A (5; 0; 7), B (5; 5; 4), C (–7; 5; 4) и D (–7; 0; 4).

658. Определите, в каком отношении плоскость $2x - 3y + 5z - 5 = 0$ делит отрезок AB, если:

а) A (3; –2; –1), B (2; 7; –1); б) A(–1; 4; 11), B (3; –4; 1).

659. Найдите множество таких точек M (x;y; z), сумма квадратов расстояний которых до точек A (1; 2; 3) и B (3; 4; –1) равна 44.

660. Найдите множество таких точек M (x;y; z), сумма квадратов расстояний которых до точек A (1; 2; 3), B (2; 0; 4) и C (3; –5; 2) равна 105.

661. Около квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки этой окружности до вершин квадрата равна учетверенному квадрату его стороны. Как изменится это утверждение, если рассматривать точки вписанной в квадрат окружности?

662. Около куба описана сфера. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки этой сферы до вершин куба равна сумме квадратов всех ребер куба. Как изменится это утверждение, если рассматривать точки вписанной в куб сферы?

663. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что:
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

664. Нарисуйте треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Покажите векторы:

а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{B_1B}$; в) $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CC_1}$;

б) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{C_1C}$.

665. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают точки пересечения медиан. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны одной плоскости.

666. В пространстве расположены два параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Точки A, B, C, D — середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ также параллелограмм.

667. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины отрезков AA_1 и BD. Докажите, что прямые MN, C_1D_1 и B_1C параллельны одной плоскости.

668. В каждой из боковых граней треугольной призмы проведена диагональ. Докажите, что не существует плоскости, которой параллельны эти диагонали. Верно ли аналогичное утверждение для четырехугольной призмы?

669. В пространстве отмечены точки A, B, C, D. Какую фигуру образуют все такие точки M, для которых:

а) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + x\overrightarrow{AD}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{AD}$, $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$;

в) $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{AD}$, $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$?

670. В пространстве отмечены точки A, B, C, D. Определите, для каких точек M верно равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

671. Докажите, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

672. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

673. Стороны треугольника T_1 параллельны медианам треугольника T_2. Докажите, что стороны треугольника T_2 параллельны медианам треугольника T_1.

674. Четыре компланарных вектора одинаковой длины в сумме дают нулевой вектор. Докажите, что это две пары противоположных векторов.

675. Из точки Q, взятой внутри выпуклого n-угольника, провели лучи, пересекающие стороны многоугольника или их продолжения под прямыми углами. На каждом луче от точки Q отложили вектор $\vec{a}_i$, длина которого равна длине соответствующей стороны. Докажите, что $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n=\vec{0}$.

676. Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D верно равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

677. Ребра AD и BC основания пирамиды $SABCD$ параллельны, точки M и N выбраны на ребрах SA и SC так, что $SM:MA=1:2$, $SN:NC=2:1$. Учитывая, что $BC=3AD$, найдите, в каком отношении плоскость MNB делит ребро SD.

678. Лучи l_1, l_2 и l_3 — биссектрисы углов, образованных лучами QA, QB и QC. Докажите, что если $l_1\perp l_2$, то лучи l_1, l_2 и l_3 попарно перпендикулярны.

679. Диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке Q. Докажите, что:

а) $\cos\angle AQB+\cos\angle AQD+\cos\angle AQA_1=1$;

б) $\cos\angle AQC+\cos\angle AQD_1+\cos\angle AQB_1=-1$.

680. Точка Q — центр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что точка H является точкой пересечения высот тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{QH}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}$.

681. Найдите множество точек пространства, для которых сумма квадратов расстояний до координатных осей равна a^2.

682. Найдите множество точек пространства, для которых сумма квадратов расстояний до координатных плоскостей равна a^2.

683. Запишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и параллельной прямой AB, если A (2; 1; − 1), B (3; −2; 2).

684. Определите взаимное расположение прямых AB и CD, если:
а) A (2; 1; −1), B (2; 2; −2), C (−2; 2; −2), D (1; 2; 0);
б) A (−2; 1; −1), B (3; 2; −2), C (−3; 2; 6), D (3; 2; 10);
в) A (−2; 1; −1), B (−3; 2; −2), C (−3; 2; 6), D (−1; 0; 8);
г) A (−2; 1; −1), B (−3; 2; −2), C (3; −4; 4), D (1; −2; 6).

685. Определите взаимное расположение прямой AB и сферы с центром Q и радиусом R, если:
а) A (1; −1; 4), B (3; 0; 2), Q (2; −2; 1) и $R = 3$;
б) A (1; −1; −3), B (3; 0; −1), Q (2; −2; 1) и $R = 1$;
в) A (5; −7; −4), B (5; 1; 0), Q (3; −2; 1) и $R = 3$.

686. Найдите длину отрезка прямой AB, принадлежащего шару с центром Q и радиусом R, если:
а) A (− 5; − 6; 9), B (− 7; − 6; 7), Q (2; − 2; 1) и $R = 13$;
б) A (− 4; 9; 3), B (4; 15; − 3), Q (2; 4; − 1) и $R = 3$.

687. Из точки M проведены все касательные к сфере с центром Q и радиусом R. Запишите уравнение плоскости, в которой находятся точки касания, если:
а) M (0; 2; 3), Q (2; − 2; 1) и $R = 3$;
б) M (10; 1; 2), Q (− 2; 1; 7) и $R = 5$.

688. Сфера с центром Q касается прямой AB. Найдите условие, которому удовлетворяет радиус этой сферы, если:
а) Q (2; − 2; 1), A (0; 2; 3), B (3; 0; 2);
б) Q (− 2; 1; 0), A (1; 1; 2), B (2; 1; − 1).

689. Найдите координаты тех точек на сфере с центром Q и радиусом R, которые наиболее близки и наиболее удалены от прямой AB, если:
а) A (0; 6; −1), B (6; 0; −4), Q (2; −2; 1) и $R = 3$;
б) A (4; 1; 1), B (−11; 1; 0), Q (−2; 1; 0) и $R = 3$.

690. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите расстояние от вершины A призмы:
а) до прямой CD_1; в) до прямой DE_1; д) до прямой BC_1;
б) до прямой C_1D; г) до прямой D_1E; е) до прямой B_1C.

691. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите расстояние от вершины A призмы:
а) до прямой D_1E; в) до прямой B_1D; д) до прямой DE_1;
б) до прямой BF_1; г) до прямой B_1E; е) до прямой A_1C.

692. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите расстояние между прямыми:

а) AB_1 и BC_1; в) AB_1 и BE_1; д) AC_1 и BD_1;
б) AB_1 и BD_1; г) AB_1 и BF_1; е) AC_1 и BE_1.

693. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите угол между прямыми:

а) AB_1 и B_1C; в) AB_1 и B_1E; д) AC_1 и B_1D;
б) AB_1 и B_1D; г) AB_1 и B_1F; е) AC_1 и B_1E.

694. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите угол между плоскостью ACD_1 и прямой:

а) AB_1; в) BC_1; д) AC_1; ж) BF_1;
б) BD_1; г) BE_1; е) BA_1; з) B_1E.

695. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите угол между плоскостями:

а) AB_1C и A_1BF; в) AB_1C и A_1BE_1; д) AE_1C_1 и FBD_1;
б) AB_1C и A_1BD_1; г) AB_1C и A_1BF_1; е) AE_1C_1 и F_1BC_1.

696. У правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребра основания равны 1, боковые ребра — 2. Найдите расстояние от вершины D призмы до плоскости:

а) AB_1C; в) A_1BF; д) A_1BE_1; ж) FBD_1;
б) A_1BD_1; г) A_1BF_1; е) AE_1C_1; з) F_1BE_1.

§ 11. Геометрические построения

А) Геометрическое место точек

Множество всех точек, имеющих определенное свойство, называют *геометрическим местом точек*.

Геометрическое место точек, равноудаленных:

- от сторон угла — биссектриса этого угла (рис. 422);
- от данной точки — окружность (рис. 423);
- от двух данных точек — серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки (рис. 424);

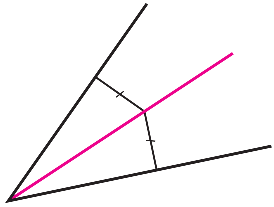


Рис. 422

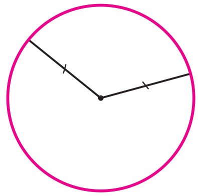


Рис. 423

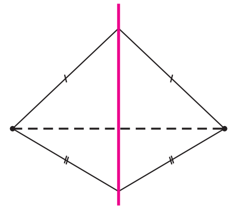


Рис. 424

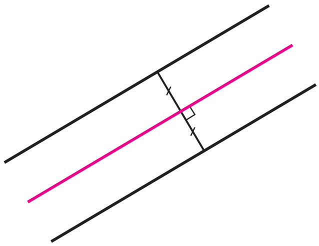


Рис. 425

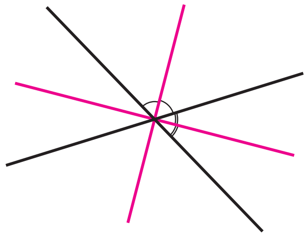


Рис. 426

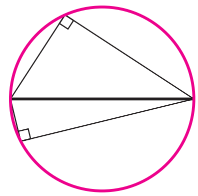


Рис. 427

- от двух данных параллельных прямых — серединный перпендикуляр к перпендикуляру, опущенному из какой-либо точки одной прямой на другую прямую (рис. 425);
- от двух данных пересекающихся прямых — пара прямых, образованных биссектрисами углов, на которые данные прямые разделяют плоскость (рис. 426).

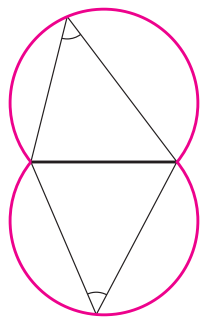


Рис. 428

Геометрическое место точек, из которых данный отрезок:

- виден под прямым углом — окружность, для которой данный отрезок служит диаметром (рис. 427);
- виден под данным углом, отличным от развернутого, — пара дуг, для которых данный отрезок служит общей хордой (рис. 428).

Б) Построения линейкой и циркулем

В геометрии важную роль играют построения с использованием только двух инструментов — линейки и циркуля.

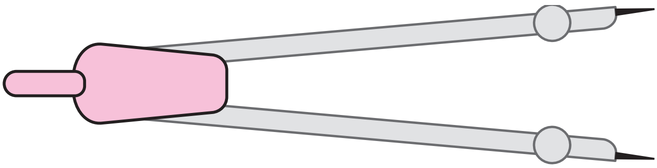
Рис. 429

Геометрическая линейка односторонняя и не имеет делений (рис. 429). С ее помощью можно провести:

- прямую, проходящую через данные точки;
- луч с данным началом, проходящий через другую данную точку;

- отрезок, соединяющий данные точки;
- произвольную прямую;
- произвольный луч;
- произвольный отрезок.

Рис. 430



С помощью *циркуля* (рис. 430) можно:

- отметить две точки R и S, расстояние между которыми равно данному отрезку AB;
- построить окружность с центром в выбранной точке и радиусом, равным данному отрезку;
- построить произвольную окружность.

Это *элементарные построения*, которые можно выполнить линейкой или циркулем. Их сочетание позволяет проводить более сложные построения.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки означает свести ее к последовательному выполнению элементарных построений, которые можно выполнить циркулем и геометрической линейкой. Вместе с этим сводить решение каждой задачи к элементарным построениям нерационально. Обычно построение нужной фигуры сводят к так называемым *основным построениям*:

- построение отрезка, равного данному отрезку;
- построение угла, равного данному углу;
- построение треугольника, равного данному треугольнику;
- построение треугольника, стороны которого равны трем данным отрезкам;
- построение треугольника, сторона которого равна данному отрезку, а прилежащие к этой стороне углы — двум данным углам;
- построение треугольника, угол которого равен данному углу, а прилежащие к нему стороны — двум данным отрезкам;
- построение середины данного отрезка;
- построение биссектрисы данного угла;
- построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой;
- построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой;
- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу;

- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету;
- построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности;
- построение отрезка, равного сумме (разности) данных отрезков;
- деление данного отрезка на n отрезков-долей;
- деление данного отрезка в данном отношении $m : n$;
- построение отрезка, четвертого пропорционального трем данным отрезкам;
- построение отрезка, среднего пропорционального двум данным отрезкам;
- построение отрезка, длина которого выражается через длины a и b данных отрезков по формуле $\sqrt{a^2 \pm b^2}$.

1. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла; от данной точки; от двух данных точек?

2. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых; от двух данных пересекающихся прямых?

3. Какая фигура является геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом; данный отрезок виден под данным углом, отличным от развернутого?

4. Какие построения можно выполнить геометрической линейкой; циркулем?

5. Что означает требование: *Решить задачу на построение*?

6. Как построить отрезок, равный данному; угол, равный данному; треугольник, равный данному?

7. Как построить треугольник по трем его сторонам; треугольник по стороне и прилежащим углам; треугольник по углу и прилежащим сторонам?

8. Как построить середину отрезка, биссектрису угла?

9. Как построить прямую, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой; прямую, которая проходит через данную точку и параллельна данной прямой?

10. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу; по гипотенузе и катету?

11. Как построить прямую, которая проходит через данную точку и касается данной окружности?

12. Как разделить отрезок на n отрезков-долей; отрезок в отношении $m : n$?

13. Как построить отрезок, четвертый пропорциональный трем данным отрезкам; средний пропорциональный двум данным отрезкам; отрезок, длина которого выражается через длины a и b данных отрезков по формуле $\sqrt{a^2 \pm b^2}$?

Задача 1. Через данную точку M проведите окружность данного радиуса R, которая касается данной окружности ω (M_0, R_0).

Пусть данный отрезок длиной R, окружность ω и точка M (рис. 431). Для построения требуемой окружности необходимо знать ее центр O.

Поскольку искомая окружность проходит через точку M, то ее центр отстоит от M на R, т. е. принадлежит окружности ω_1 (M, R) с центром M и радиусом R (рис. 432).

Учтем теперь, что условием касания двух окружностей является равенство расстояний между их центрами сумме радиусов этих окружностей, если касание внешнее, или разности их радиусов, если касание внутреннее.

Поэтому точка O должна принадлежать окружности, концентричной с окружностью ω, и иметь радиус, который на R отличается от радиуса окружности ω. Этому условию удовлетворяют все точки двух окружностей ω_2 (M_0, $R_0 + R$) и ω_3 (M_0, $|R_0 - R|$) (рис. 433).

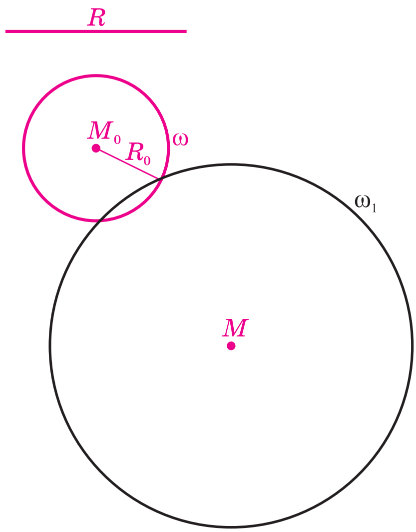


Рис. 432

Поскольку нужная точка принадлежит как окружности ω_1, так и одной из окружностей ω_2 или ω_3, то количество решений зависит от того, во скольких точках окружность ω_1 пересекает окружности ω_2 и ω_3.

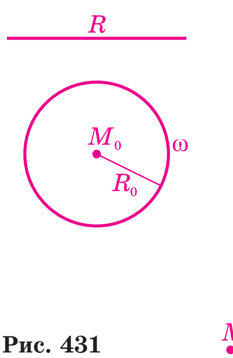


Рис. 431

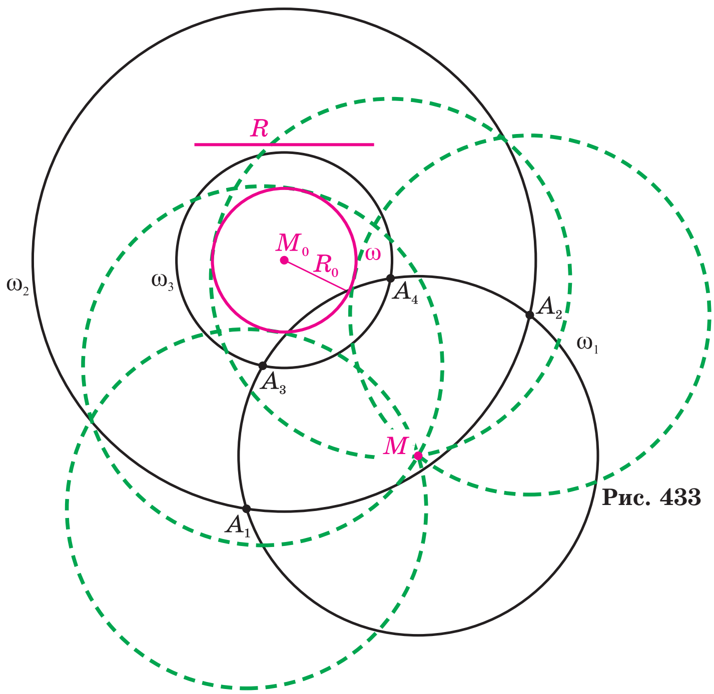


Рис. 433

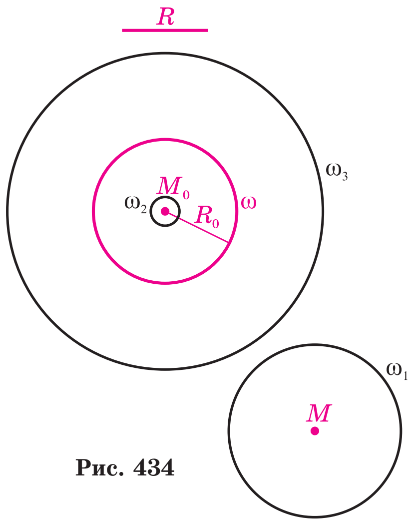


Рис. 434

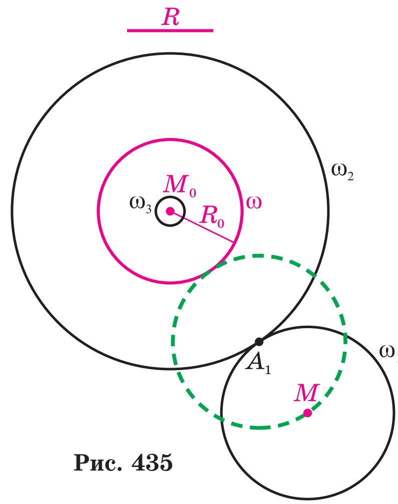


Рис. 435

При таких данных, как на рисунке 431, искомых точек оказалось четыре — точки A_1, A_2, A_3, A_4, т. е. задача имеет четыре решения.

Если точек пересечения нет, то задача решения не имеет (рис. 434).

Если есть одна общая точка, то задача имеет единственное решение (рис. 435).

Если общих точек — две, то задача имеет два решения (рис. 436).

Если общих точек — три, то задача имеет три решения (рис. 437).

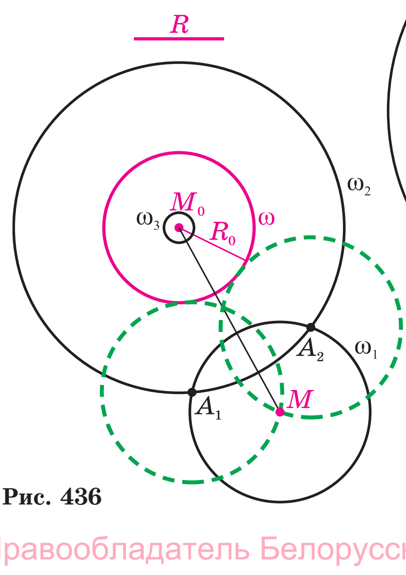


Рис. 436

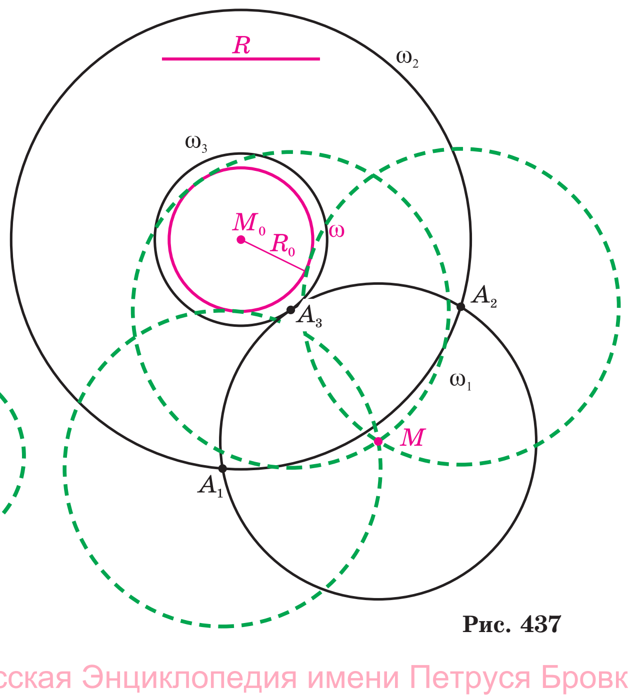


Рис. 437

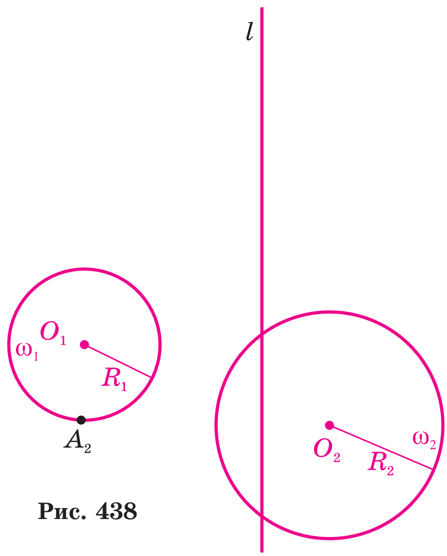


Рис. 438

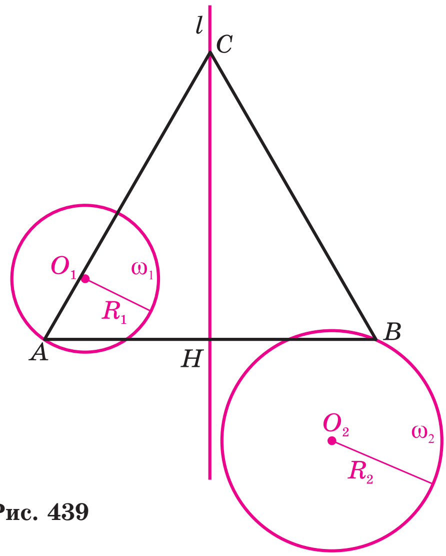


Рис. 439

Задача 2. Постройте равносторонний треугольник, две вершины которого лежат на данных окружностях ω_1 и ω_2, а высота — на данной прямой l.

Пусть даны окружности ω_1 (O_1, R_1) и ω_2 (O_2, R_2) и прямая l (рис. 438).

Допустим, что нужный равносторонний треугольник ABC построен: вершины A и B лежат на данных окружностях ω_1 и ω_2, а высота CH — на данной прямой l (рис. 439).

Поскольку высота равностороннего треугольника является осью его симметрии, то точки A и B симметричны относительно прямой l. Но точка A принадлежит и окружности ω_1, а ее образ при симметрии относительно прямой l — точка B — принадлежит окружности ω_2. Это означает, что точка B есть точка пересечения окружноси ω_2 и образа окружности ω_1 при симметрии относительно прямой l. Этот факт позволяет выполнить нужное построение.

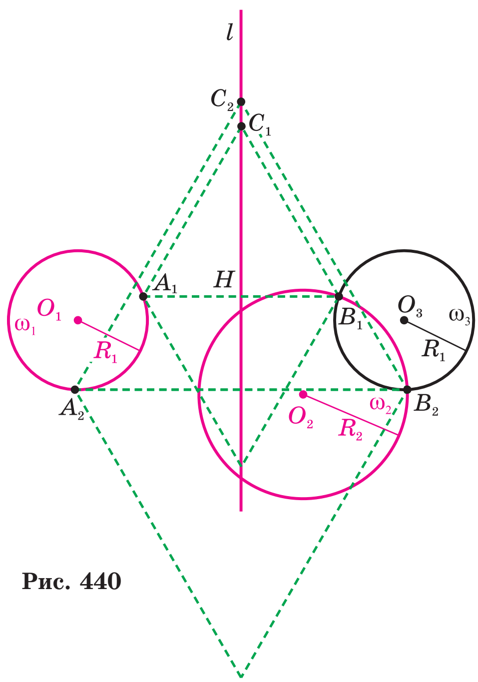


Рис. 440

1. $\omega_3\ (O_3,\ R_1) = S_l\ (\omega_1\ (O_1,\ R_1))$.
2. $\{B_1,\ B_2\} = \omega_2 \cap \omega_3$ (рис. 440).
3. $\{A_1,\ A_2\} = S_l\ (\{B_1,\ B_2\})$.
4. $C_1 = R_{A_1}^{60^\circ}(B_1)$.
5. $C_2 = R_{A_2}^{60^\circ}(B_2)$.

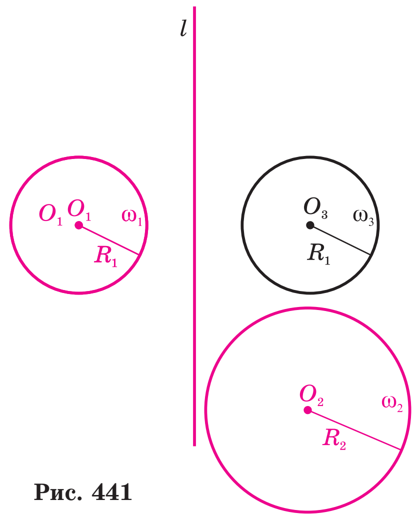


Рис. 441

Треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый. Действительно, вершины A_1 и B_1 лежат на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно. Сам треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний, высота C_1H этого треугольника лежит на прямой l, поскольку по построению точки A_1 и B_1 симметричны относительно прямой l.

Аналогично обосновывается, что треугольники $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ также являются решениями задачи.

При таком размещении данных по условию фигур, как на рис. 440, т. е. когда $l \nparallel B_1B_2$, задача имеет четыре решения.

Количество решений зависит от количества общих точек окружностей ω_3 и ω_2 (шаг 2).

Если общих точек нет, то нужного треугольника не существует (рис. 441).

Если окружности ω_3 и ω_2 касаются, то задача имеет единственное решение (рис. 442).

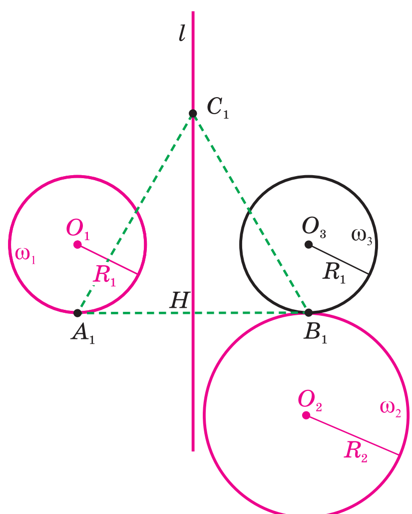


Рис. 442

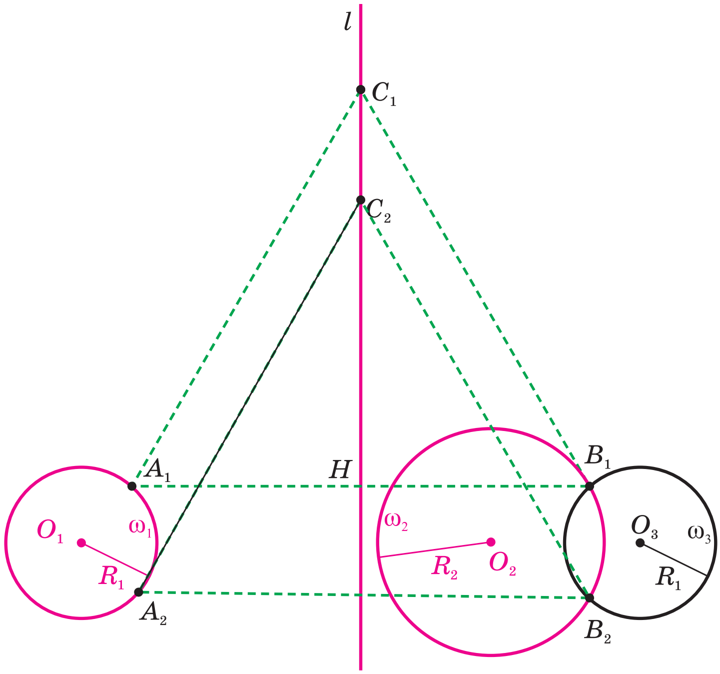


Рис. 443

Два решения задача имеет тогда, когда $\omega_2 \cap \omega_3 = \{B_1, B_2\}$ и $B_1B_2 \parallel l$ (рис. 443).

Задача 3. Постройте окружность, которая проходила бы через данные точки A и B, а касательная к ней, проведенная из данной точки C, имела бы данную длину a.

Пусть даны точки A, B, C и отрезок длиной a (рис. 444), нужно построить окружность, которой принадлежат точки A и B, а касательная к ней, проведенная из точки C, имеет длину a.

Допустим, что искомая окружность построена (рис. 445).

Пусть прямая CB пересекает окружность ω в точке K. Поскольку через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность, то для построения окружности ω достаточно определить положение точки K.

Пусть $CK = x$ и $CB = b$. Тогда, по свойству касательной, $bx = a^2$. Это равенство означает, что отрезок длиной x можно найти как проекцию катета длиной a в прямоугольном треугольнике на гипотенузу длиной b (рис. 446).

Выполним следующие построения.

Рис. 444

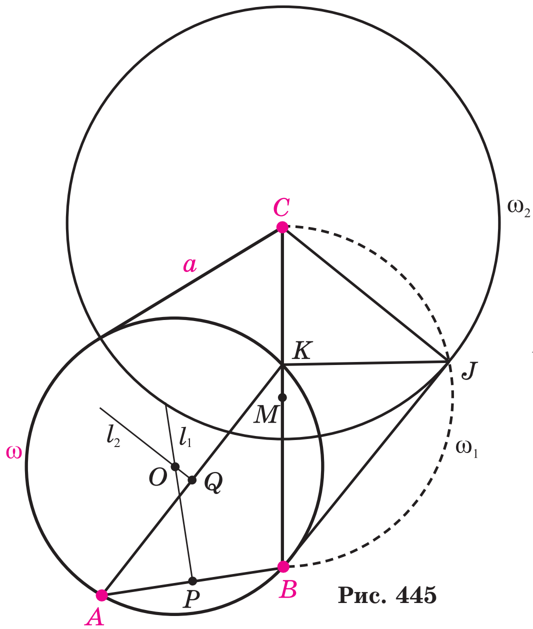


Рис. 445

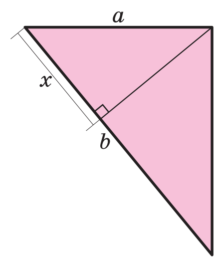


Рис. 446

1. M — середина отрезка CB.

2. $J = \omega_1 (M, MB) \cap \omega_2 (C, a)$.

3. $JK \perp CB$ и $K \in CB$.

4. P — середина отрезка AB.

5. Q — середина отрезка AK.

6. $l_1 \perp AB$ и $P \in l_1$.

7. $l_2 \perp AK$ и $Q \in l_2$.

8. $O = l_1 \cap l_2$.

9. $\omega = \omega (O, OB)$.

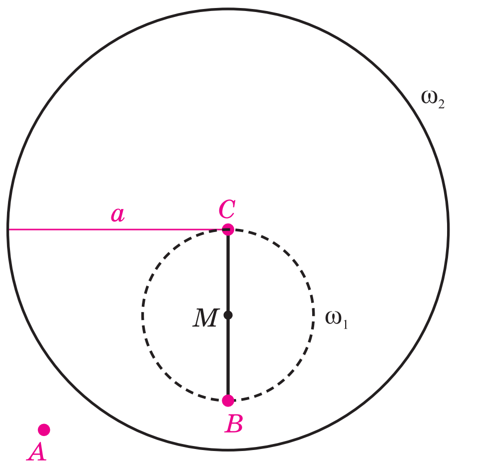


Рис. 447

Окружность ω — искомая, поскольку она проходит через точки A и B, а касательная CT к ней из точки C имеет длину, равную $\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b}$, т. е. a.

Количество решений зависит от количества общих точек окружностей ω_1 и ω_2 (шаг 2).

Если общих точек нет ($a > b$), то нужной окружности не существует (рис. 447).

Если окружноси ω_1 и ω_2 пересекаются или касаются ($a \leqslant b$), то задача имеет единственное решение.

697. Докажите, что:

а) если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки X плоскости истинно равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$;

б) если для четырех данных точек A, B, C, D плоскости и произвольной ее точки X истинно равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.

698. Есть прямоугольный треугольник KLM, катеты которого MK и ML соответственно равны 1 и 3. Найдите геометрическое место таких точек Z этой плоскости, что $PK^2 + QL^2 = 2QM^2$.

699. Напишите уравнение линии, по которой движется точка M, если известно, что $MC = 2MF$ и:

а) C (0; 0) и F (6; 0);
б) C (−2; 0) и F (1; 0);
в) C (1; −2) и F (−2; 1);
г) C (−5; −2) и F (4; 4).

700. Найдите геометрическое место:

а) вершин C треугольников, имеющих общее основание AB, у которых сторона AC равна данному отрезку;

б) середин хорд данной окружности, равных данному отрезку;

в) вершин равнобедренных треугольников с общим данным основанием;

г) середин отрезков длиной a, концы которых принадлежат двум взаимно перпендикулярным прямым;

д) точек, касательные из которых к данной окружности имеют данную длину.

701. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые:

а) проходят через две данные точки;

б) касаются данной прямой в данной ее точке;

в) касаются данной окружности;

г) проходят через данную точку;

д) делят данную окружность пополам;

е) имеют с данной окружностью общую хорду данной длины;

ж) высекают на данной прямой хорды данной длины;

з) высекают на двух данных прямых хорды, равные данному отрезку;

и) имеют радиус данной длины и касаются данной прямой.

702. Дана окружность с центром O и диаметром AB. На каждом радиусе OC откладывается отрезок OM, равный проекции этого радиуса на диаметр AB. Найдите геометрическое место точек M.

703. Найдите точку, принадлежащую:

а) данной прямой и равноудаленную от двух данных прямых;

б) стороне треугольника и равноудаленную от двух других его сторон.

704. Найдите геометрическое место точек, оканчивающихся на данной прямой и имеющих данную середину.

705. Найдите геометрическое место вершин треугольников, которые имеют данное основание и данную площадь.

706. Найдите геометрическое место:

а) точек, сумма расстояний которых до двух данных параллельных прямых равна данному отрезку;

б) точек, разность расстояний которых до двух данных параллельных прямых равна данному отрезку;

в) концов отрезков, выходящих из данной точки и делящихся данной прямой пополам;

г) середин отрезков, соединяющих данную точку с данной прямой;

д) середин хорд, которые высекаются данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку;

е) точек, являющихся основаниями перпендикуляров, проходящих через данную точку, к прямым, проходящим через другую данную точку;

ж) точек, в которых пересекаются прямые, проходящие через две данные точки и пересекающиеся под данным углом;

з) концов отрезков, которые начинаются на данной окружности, параллельны и равны данному отрезку длиной a.

707*. Квадрат со стороной 1 движется внутри прямого угла так, что две его соседние вершины находятся на сторонах угла (рис. 448). Выясните, по какой линии движется его центр.

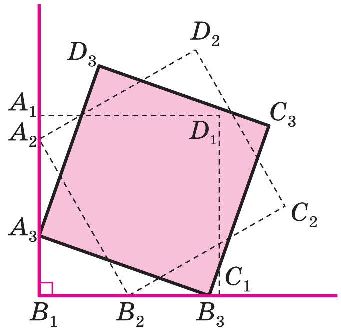


Рис. 448

708. Есть прямая l и точки C и D по одну сторону от нее на расстояниях m и n соответственно. Точка X плоскости выбирается так, что прямые XC и XD пересекают прямую l в точках C_1 и D_1 соответственно и $\frac{XC}{XC_1}+\frac{XD}{XD_1}=k$ (рис. 449; а, б). Найдите геометрическое место таких точек X, учитывая, что:

а) $m=3$, $n=1$, $k=2$; б) $m=5$, $n=1$, $k=\frac{3}{2}$; в) $m=5$, $n=1$, $k=3$.

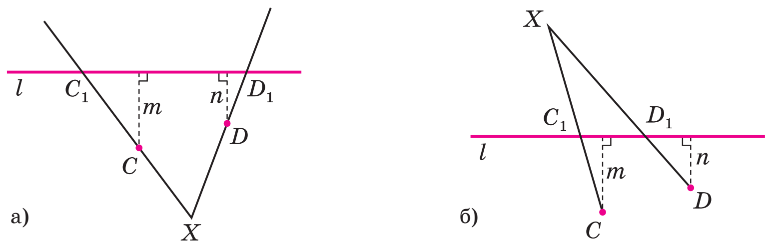


Рис. 449

709. Есть две точки P и Q. Найдите геометрическое место таких точек Y, что медиана:
а) QQ_1 треугольника YPQ равна стороне PY;
б) PP_1 треугольника YPQ равна высоте к стороне PQ.

710. Есть две точки A и B, расстояние между которыми равно 2. Найдите геометрическое место таких точек X, что:
а) $AX^2 - BX^2 = 1$; б) $AX^2 + BX^2 = 10$.

711. Есть прямой угол A и прямая l, проведенная через вершину A. Точки U и V находятся на разных сторонах угла A и отстоят от его вершины на 1. Точки U_1 и V_1 — образы точек U и V при симметрии относительно прямой l. Прямая, проведенная через точку U_1 параллельно прямой AV, пересекает прямую, проведенную через точку V_1 параллельно прямой AU, в точке Y. Найдите геометрическое место точек Y.

712. Есть точка M на одной из двух прямых a и b, которые пересекаются под углом в 45°. Точка X выбирается так, что прямой X_1X_2, где X_1 и X_2 — образы точки X при симметрии относительно прямых a и b, принадлежит точка M. Найдите геометрическое место точек X.

713. Есть две точки I и J. На прямой IJ выбирается точка X и строятся квадраты со сторонами IX и JX по одну сторону от прямой IJ. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пересечения диагоналей построенных квадратов.

714. Есть квадрат $PQRS$. Найдите геометрическое место точек Z плоскости, для которых $ZP + ZR = ZQ + ZS$.

715. Найдите геометрическое место центров параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям данного четырехугольника, а вершины лежат на его сторонах.

716. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки единичной окружности до вершин квадрата, описанного около этой окружности.

717. Через ортоцентр H равностороннего треугольника ABC проведена прямая m, и на нее опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 из вершин A, B, C. Найдите HC_1, учитывая, что $HA_1 = 6$ и $HB_1 = 1$.

718. Прямая, проходящая через середину диагонали MO четырехугольника $MNOP$ параллельно прямой NP, пересекает прямую NO в точке A, а прямая, проходящая через середину диагонали NP параллельно прямой MO, пересекает прямую MP в точке B. Докажите, что прямая AB параллельна прямой OP.

719. Разделите прямой угол на три доли.

720. Постройте равнобедренный треугольник по его:
а) высоте, проведенной к основанию, и углу при вершине;
б) основанию и высоте, проведенной к боковой стороне.

721. Постройте треугольник по его:
а) двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них;
б) двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне;
в) стороне, высоте и биссектрисе, проведенным из вершин этой стороны;
г) стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон;
д) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;
е) стороне, медиане и высоте, проведенным к другой стороне;
ж) двум медианам и углу между ними;
з) трем медианам;
и) двум медианам и высоте, проведенным к разным сторонам;
к) стороне и двум медианам, проведенным к другим сторонам;
л) стороне, проведенной к ней высоте и противолежащему углу;
м) стороне, противолежащему углу и сумме (разности) двух других сторон.

722. Постройте прямоугольный треугольник по его:
а) гипотенузе и сумме катетов;
б) гипотенузе и разности катетов;
в) острому углу и сумме катетов;
г) острому углу и разности катетов;
д) катету и разности гипотенузы и другого катета;
е) острому углу и сумме прилежащего катета и гипотенузы;
ж) острому углу и периметру.

723. Постройте треугольник по его:
а) острому углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон;
б) углу, прилежащей к нему стороне и разности двух других сторон;
в) двум углам и сумме противолежащих сторон;
г) двум углам и разности противолежащих сторон;
д) двум углам и периметру;
е) высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.

724. Постройте окружность данного радиуса, которая:
а) проходит через две данные точки;
б) проходит через данную точку и касается данной окружности;
в) проходит через данную точку и отсекает на данных пересекающихся прямых равные отрезки;
г) касается данной окружности и отсекает на данных пересекающихся прямых равные отрезки;
д) касается двух данных окружностей.

725. Постройте окружность, которая:
а) касается трех данных равных окружностей;
б) касается трех данных прямых;
в) касается двух данных прямых и проходит через данную точку;
г) касается двух данных параллельных прямых и данной окружности;
д) касается двух данных параллельных прямых и третьей прямой, пересекающей первые две;
е) описана около данной равнобедренной трапеции.

726. Есть окружность. Постройте:
а) хорду, имеющую данную длину и проходящую через данную точку;
б) секущую, проходящую через данную точку вне круга, из которой высекается хорда данной длины;
в) такую точку данной прямой, что расстояния от этой точки до точек касания, проведенных из этой точки касательных, равны данному отрезку.

727. Постройте прямую, проходящую через данную:
а) внутри угла точку и отсекающую на его сторонах равные отрезки;
б) точку, а две данные параллельные прямые высекают из нее отрезок, равный данному отрезку;
в) точку и равноудаленную от двух данных точек.

728. Постройте прямую, которая:
а) образует с одной стороной данного угла угол данной величины, а сам угол высекает из прямой отрезок данной длины;
б) параллельна основанию данного треугольника, а ее отрезок внутри треугольника равен сумме отрезков боковых сторон, заключенных между прямой и основанием;
в) параллельна основанию треугольника, чтобы ограниченный ею отрезок на одной стороне до вершины был равен ограниченному ей отрезку на другой стороне до основания;
г) проходит через данную точку, а расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из двух данных точек, равно длине данного отрезка;
д) проходит через точку пересечения двух данных окружностей, причем они высекают на прямой равные хорды.

729. Постройте треугольник по:
а) его двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них;
б) его стороне и проведенными к ней медиане и высоте;
в) его стороне, прилежащему углу и высоте, проведенной к ней;
г) его стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной к другой стороне;
д) его двум углам и высоте, проведенной к одной из противолежащих сторон;

е) его углу и проведенным из другой вершины высоте и биссектрисе;
ж) его стороне, проведенной к ней медиане и углу между этой медианой и высотой, выходящей из той же вершины;
з) сумме и разности двух его сторон и высоте, проведенной к третьей стороне;
и) его углу и двум высотам к сторонам этого угла;
к) его углу, высоте, проведенной из другой вершины, и периметру;
л) двум его сторонам и разности противолежащих им углов.

730. Постройте окружность данного радиуса, которая:
а) проходит через данную точку и касается данной прямой;
б) касается данной окружности и данной прямой;
в) проходит через данную точку и высекает из данной прямой хорду данной длины;
г) касается данной окружности и высекает из данной прямой хорду данной длины;
д) касается двух данных пересекающихся прямых;
е) касается одной из данных пересекающихся прямых и высекает на другой хорду данной длины;
ж) высекает из данных пересекающихся прямых хорды данной длины.

731. Постройте точку, которая:
а) находится на данном расстоянии от данной прямой и равноудалена от двух данных точек;
б) находится на данном расстоянии от данной прямой и равноудалена от двух пересекающихся прямых;
в) находится в плоскости данного треугольника, отстоит от одной прямой на данный отрезок дальше, чем от другой, и на данный отрезок ближе, чем до третьей;
г) находится на данной прямой и равноудалена от данной точки этой прямой и от другой данной прямой;
д) находится на данной прямой и разность расстояний ее до двух данных пересекающихся прямых равна данному отрезку;
е) находится на данной прямой и разность расстояний ее до двух данных точек наибольшая.

732. Постройте точку, из которой:
а) один из данных отрезков виден под одним данным углом, а другой — под другим;
б) стороны данного треугольника видны под равными углами.

733. Постройте касательную к данной окружности, которая образует данный угол с данной прямой.

734. Прямая, проведенная через вершину M прямоугольника $MNKP$, пересекает диагональ NP и прямые KP и NK в точках A, B и C

соответственно. Найдите отрезок MA, учитывая, что отрезки MC и MB соответственно равны p и q.

735. Постройте параллелограмм по его:
а) двум смежным сторонам и диагонали;
б) стороне и двум диагоналям;
в) диагоналям и углу между ними;
г) стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и диагонали;
д) сторонам и одному из углов;
е) сторонам и высоте;
ж) диагоналям и высоте;
з) стороне, сумме диагоналей и углу между ними;
и) стороне, разности диагоналей и углу между ними;
к) стороне, сумме диагонали с другой стороной и одному из углов;
л) стороне, разности диагонали с другой стороной и одному из углов;
м) периметру, диагонали и углу между этой диагональю и стороной;
н) одному из его углов и двум высотам;
о) сторонам и углу между диагоналями;
п) углу и двум диагоналям.

736. Постройте прямоугольник по его:
а) диагонали и углу между диагоналями;
б) стороне и сумме диагоналей;
в) диагонали и сумме смежных сторон;
г) его диагонали и разности смежных сторон;
д) стороне и углу между диагоналями;
е) стороне и сумме диагонали с другой стороной;
ж) стороне и разности диагонали с другой стороной.

737. Постройте ромб по:
а) его стороне и одному из углов;
б) его диагонали и одному из углов;
в) его стороне и диагонали;
г) его диагоналям;
д) его диагонали и высоте;
е) его углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла;
ж) его углу и высоте;
з) сумме его диагоналей и углу между диагональю и стороной;
и) одному из его углов и сумме диагонали со стороной;
к) одному из его углов и разности диагонали со стороной;
л) его стороне и сумме диагоналей;
м) его стороне и разности диагоналей;
н) сумме его диагоналей и углу между диагональю и стороной;
о) его стороне и радиусу вписанной окружности.

738. Постройте квадрат по его диагонали.

739. Через вершину параллелограмма проведите прямую так, чтобы расстояние до нее от противоположной вершины было равно сумме или разности расстояний до этой прямой от двух других вершин параллелограмма, учитывая, что прямая через внутреннюю точку параллелограмма:

а) проходит; б) не проходит.

740. Постройте трапецию по:

а) ее основанию, прилежащему углу и двум боковым сторонам;

б) разности ее оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали;

в) четырем сторонам;

г) основанию, двум диагоналям и высоте;

д) двум основаниям и двум диагоналям;

е) трем сторонам и диагонали;

ж) трем сторонам и высоте;

з) боковой стороне, высоте и диагонали;

и) основанию, прилежащим углам и высоте;

к) основанию, диагоналям и углу между ними;

л) боковой стороне, диагонали и углу между диагоналями;

м) основаниям и двум диагоналям;

н) диагоналям, средней линии и углу;

о) диагоналям, углу между ними и сумме (разности) двух соседних сторон.

741. Постройте четырехугольник по его:

а) трем сторонам и двум диагоналям;

б) четырем сторонам и углу;

в) трем сторонам, диагонали и углу;

г) двум смежным сторонам, диагоналям и углу между ними;

д) двум противолежащим сторонам, углу и диагоналям;

е) трем сторонам и двум соседним углам;

ж) двум смежным сторонам, двум соседним углам и углу между диагоналями;

з) двум противолежащим сторонам и трем углам;

и) трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне;

к) двум противоположным сторонам и углу между ними;

л) сторонам и углу между двумя противоположными сторонами;

м) диагоналям, углу между ними и двум противоположным углам;

н) сторонам и отрезку, соединяющему середины диагоналей.

742. Впишите:

а) в данный прямоугольный треугольник такой квадрат, который бы имел с треугольником общий угол;

б) в данный треугольник такой ромб, который бы имел с треугольником общий угол;

в) в данный треугольник такой квадрат, одна сторона которого лежала бы на стороне треугольника;

г) в данную окружность треугольник с двумя данными углами.

743. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

744. Постройте угол, который:

а) равен данному углу, вписан в одну из данных окружностей и описан около другой;

б) вписан в данную окружность, опирается на данную дугу и высекает на данной прямой отрезок данной длины.

745. Постройте отрезок, который:

а) равен и параллелен данному и концы которого принадлежат разным пересекающимся прямым;

б) равен и параллелен данному и концы которого принадлежат данным окружностям;

в) делится пополам данной точкой и концы которого принадлежат данным окружностям;

г) является кратчайшим из отрезков, проходящих через данную точку и имеющих концами точки на двух данных прямых.

746. Постройте треугольник по его:

а) двум сторонам и радиусу описанной окружности;

б) стороне, проведенной к ней высоте и радиусу описанной окружности;

в) стороне, прилежащему к ней углу и радиусу описанной окружности;

г) двум углам и радиусу описанной окружности;

д) стороне, проведенной к ней медиане и радиусу описанной окружности;

е) высоте, углу и радиусу описанной окружности;

ж) стороне, высоте, проведенной к другой стороне, и радиусу описанной окружности;

з) высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности;

и) двум углам и радиусу вписанной окружности;

к) стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности;

л) стороне, высоте, проведенной к другой стороне, и радиусу вписанной окружности;

м) высоте, углу, из которого она проведена, и радиусу вписанной окружности;

н) стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;

о) углу и радиусам описанной и вписанной окружностей;

п) двум углам и радиусу вневписанной окружности, расположенной против третьего угла;
р) углу, радиусу вневписанной окружности, расположенной против этого угла, и высоте, проведенной из другого угла;
с) углу, радиусу описанной окружности и сумме (разности) двух сторон, из которых одна расположена против данного угла;
т) радиусу вписанной окружности, его углу и отрезку, который равен сумме стороны против этого угла и еще одной стороны, уменьшенной на третью сторону.

747. Постройте прямоугольный треугольник по его:
а) катету и радиусу вписанной окружности;
б) гипотенузе и радиусу вписанной окружности;
в) радиусам описанной и вписанной окружностей;
г) острому углу и радиусу описанной окружности.

748. Постройте равнобедренный треугольник по его:
а) боковой стороне и радиусу описанной окружности;
б) основанию и радиусу описанной окружности;
в) углу, прилежащему к основанию, и радиусу описанной окружности;
г) высоте, проведенной к основанию, и радиусу описанной окружности;
д) высоте, проведенной к основанию, и радиусу вписанной окружности;
е) основанию и радиусу вписанной окружности;
ж) углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

749. Постройте четырехугольник по трем его:
а) сторонам и радиусу описанной окружности;
б) двум противолежащим сторонам, углу и радиусу описанной окружности;
в) двум смежным сторонам, углу, прилежащему к одной из них, и радиусу описанной окружности;
г) двум соседним углам, стороне, прилежащей к одному из них, и радиусу описанной окружности;
д) двум противоположным сторонам, диагонали и радиусу описанной окружности;
е) двум диагоналям, стороне и радиусу описанной окружности;
ж) двум смежным сторонам, углу, прилежащему к одной из них, и радиусу вписанной окружности;
з) двум противоположным углам, стороне и радиусу вписанной окружности;
и) трем углам и радиусу вписанной окружности.

Ответы

$$\frac{8\sqrt{3}\,R^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\mathrm{tg}\,\alpha + 4\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^3}$$

Раздел 1

9. $\sqrt{386}$ см. **10.** б) 21 см. **11.** 12 см. **12.** $25\frac{2}{3}$ см. **13.** 26 см. **14.** 15 см. **15.** 2 см. **16.** 45° и 135°. **18.** $128\sqrt{21}$ см². **19.** а) $16\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{19}$ см². **20.** $80\sqrt{2}$ см². **21.** 556 см². **22.** 4 см. **23.** а) $3al+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $4al+2a^2$; в) $3a^2\sqrt{3}+6al$. **24.** 960 см². **25.** 3 см. **26.** 18 144 см². **27.** 1,5 см. **28.** а) 4464 см², 9828 см³; б) $32\sqrt{3}+24\sqrt{11}+8\sqrt{33}$ см², $48\sqrt{11}$ см³; в) $72\left(1+2\sqrt{2}\right)$ см², $216\sqrt{2}$ см³; г) $2a^2\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\right)$, $a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; д) $\frac{l^2}{2}\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **29.** 90 см², $35\sqrt{3}$ см³. **30.** $3\sqrt{30}$ м, $6\sqrt{5}$ м, $72\sqrt{15}$ м², $13{,}5\sqrt{165}$ м³. **31.** а) 400 см², $500\sqrt{3}$ см³; б) $300\sqrt{3}$ см², $500\sqrt{2}$ см³. **32.** $2d^2\cdot\sin\varphi\cdot\left(\sin\varphi+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\varphi}\right)$. **33.** $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\left(1+\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\beta\right)}$. **34.** а) 15 840; б) 8100 см; в) $74\,800\sqrt{3}$; г) $3{,}2\sqrt{5}$. **35.** $\approx 3{,}7$ кг. **36.** $12\sqrt{6}$ см². **37.** 2310 см³. **38.** 300 см³. **39.** $240\sqrt{2}$ см³. **40.** а) $729\sqrt{2}$ см³; б) $\frac{h^3\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$. **41.** $432\sqrt{3}$ см³. **42.** а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ м³; б) $1728\sqrt{2}$ см³. **43.** а) $18{,}75\sqrt{3}$ см³; б) $96\sqrt{2}$. **46.** $\frac{a^3}{4}$. **47.** $\left(\frac{l^3\sin\beta\cdot\cos^2\beta}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **48.** $\frac{Q^2\sin 2\beta}{2a}$. **49.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **50.** 72 см³. **51.** $192\sqrt{3}$ см³. **52.** а) 45 см², $\frac{15\sqrt{15}}{4}$ см³; б) $2a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **53.** $16\sqrt{3}$ см³. **54.** $\frac{l^3\operatorname{tg}\varphi}{4}$. **55.** а) $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$; б) $18\sqrt{39}$ см³. **56.** $\frac{ab}{8}\sqrt{3\left(4a^2-b^2\right)}$. **58.** 1080 см³. **59.** $\frac{S_{\text{перп}}\cdot S_{\text{бок}}}{P}$. **60.** $1296\sqrt{11}$ см³. **61.** 105 см³. **62.** $16\sqrt{11}$ см³. **63.** 1 м, 2 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м. **66.** 6,12 дм³. **67.** 37 дм², 6,5 дм³. **68.** 1050 см³. **69.** $2\sqrt{3}+\sqrt{39}$ см², 2,25 см³. **70.** $\sqrt{\frac{S_1\cdot S_2\cdot S_0}{2}}$ см³. **74.** $\sqrt{3}$; 2. **75.** а) 5 м; б) 29 см; в) 125. **76.** а) 12 см; б) $6\sqrt{3}$ см; в) $144\sqrt{3}$ см². **77.** а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$, $4\pi a^2$. **78.** а) $20\sqrt{2}$ см; б) 200π см²; в) 800π см²; г) 1200π см². **80.** $2\sqrt{10\pi}$ м. **81.** 256 см². **82.** 8 см. **83.** rh. **84.** а) 5 дм; б) 6 см. **85.** $\cos\varphi$. **86.** $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$. **87.** $S\sqrt{2}$. **88.** $\frac{S}{\pi}$. **89.** 6 см, 18 см. **90.** $\approx 3{,}3$ м². **91.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **92.** 300π дм². **93.** 20 см или 100 см. **94.** $\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $\frac{d^2}{4\pi}\left(2\pi\sin\varphi+\cos\varphi+1\right)$. **96.** $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi\left(S_1+S_2\right)}}$. **97.** $1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

98. $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$. **99.** $\frac{2\pi a^2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$. **100.** h^2. **104.** $128\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$ см². **106.** 45°. **107.** $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg}\alpha}{2}$.

113. а) 108π см³; б) $\frac{10\sqrt{3\pi}}{3\pi}$ см; в) 3 см. **115.** ≈ 208 м. **116.** ≈ 1513 т. **117.** π^2 м², $\frac{\pi^2}{4}$ м³.

118. $\frac{S}{2}\sqrt{\pi Q}$. **119.** ≈ 106,8 кг. **122.** $\frac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}$. **123.** $\frac{\pi m^3 \cos\alpha \sin^2\alpha}{8}$. **124.** 4 : 1.

125. $\frac{3\pi a^3}{4}$. **126.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; д) $\frac{n\sin\frac{360°}{n}}{2\pi}$.

127. $\frac{\pi m^3}{8}\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Раздел 2

134. а) $4\sqrt{6}$ см; б) 45°. **135.** а) $b^2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{4}$. **136.** а) 60°; б) $a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$. **138.** 37 см, $25\sqrt{2}$ см. **139.** 10 см, 12 см. **140.** 26 см. **141.** $64\sqrt{3}$ см².

142. 12 см. **144.** $72\left(\sqrt{7}+1\right)$ см². **145.** 189 см². **146.** а) $\frac{65}{8}\operatorname{tg}\alpha$; б) $4\operatorname{tg}\beta$. **147.** 790 см².

148. 6912 см². **149.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48\left(\sqrt{2}+1\right)$ см². **150.** $72\left(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ см².

151. $192\sqrt{2}$ см². **152.** а) $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$; б) $\arccos\frac{6H^2-a^2}{6H^2+2a^2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{H\sqrt{3}}{a}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{2H\sqrt{3}}{a}$; д) $\arccos\frac{6H^2-a^2}{12H^2+a^2}$. **153.** а) $\frac{l\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}$; б) $\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

в) $\arccos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; г) $2\arcsin\left(\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **154.** $3a^2$. **158.** 20 см². **159.** 12 см, $\sqrt{\frac{407}{3}}$ см.

160. 24 см, 56 см. **161.** $\sqrt{7}$ дм. **162.** 16 см². **163.** 24 м², 30°.

164. $\frac{\left|a^2-b^2\right|}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$. **165.** а) 6 дм³; б) 4,95 м³. **166.** $64\left(\sqrt{26}+1\right)$ см², $426\frac{2}{3}$ см³.

167. $63\sqrt{3}$ см², $36\sqrt{3}$ см³. **168.** 50 см³. **169.** $\frac{h^3}{3}\operatorname{tg}^2\alpha$, $\frac{h^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\left(1+\cos\alpha\right)$, $\frac{h^2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\left(1+\sin\alpha+\cos\alpha\right)$. **170.** а) $180\sqrt{3}$ см³; б) $\frac{b^3\sqrt{3}}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\frac{b^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{1-2\cos 2\alpha}$; г) $\frac{l^3\sqrt{3}}{4}\sin\varphi\cos^2\varphi$; д) $\frac{2}{3}R^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$; е) $\frac{l^3}{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{1+2\cos\beta}$; ж) $\frac{a^3}{24}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}$. **171.** $52\sqrt{419}$ см³. **172.** $2520\sqrt{3}$ см³, $36\sqrt{1333}$ см². **173.** а) $\frac{3380\sqrt{3}}{9}$ см³; б) $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{12}\operatorname{tg}\varphi$; в) 360 см³. **174.** а) 48 см³; б) $\frac{c^3}{24}\sin 2\varphi\operatorname{tg}\alpha$; в) $\frac{1}{6}abc$. **175.** $1400\sqrt{3}$ см³. **176.** $27\sqrt{11}$ см³. **177.** 576 см³.

179. 1260 дм³. **180.** ≈ 127 г. **181.** а) $\frac{4}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\sin\alpha}$; в) $\frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-2\cos\alpha}}$; г) $\frac{4r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}}{3\cos\alpha}$; д) $\frac{2H^3}{3}\operatorname{ctg}^2\beta$; е) $\frac{m^3}{6}\sqrt{\frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; ж) $\frac{l^3}{3}\cos\varphi\sin 2\varphi$.

182. $\operatorname{arctg}\frac{12V}{b^3\sin\alpha}$. **183.** 29 : 356. **184.** 123 : 472. **185.** 1 : 9. **186.** 17 : 105. **187.** 9 см, 11 см, $\frac{868}{3}$ см³. **188.** $156\sqrt{2}$ см³. **189.** а) $\frac{1}{12}\left|m^3-n^3\right|\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi$; б) $\frac{7a^3\sqrt{47}}{192}$. **191.** 51 см.

192. а) 108π см²; б) 72π см²; в) 36π см². **194.** а) 144π см²; б) $2\pi m^2\sin\varphi$; в) $\pi a^2\left(3+2\sqrt{3}\right)$. **195.** а) $0{,}9\pi$ м²; б) $25\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ см²; в) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$.

196. $16\pi\sqrt{2}$ см². **197.** а) ≈ 255°; б) ≈ 312°; в) $\frac{360°\cdot r}{l}$. **198.** 4π м², $4\sqrt{2}$ м. **199.** 30°.

200. arccos 0,6. **201.** $\frac{1}{\pi}\sqrt{S_0^2-S_1^2}$. **202.** $100\sqrt{6}$ см². **203.** а) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$; б) $2h^2$; в) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$; г) 2000 см²; д) $\frac{\pi R^2d^2}{H^2}$. **204.** а) m^2; б) $m^2\sqrt{2}$; в) $m^2\sqrt{3}$; г) $2m^2$. **205.** $-\frac{1}{3}$.

206. $H\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $H\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **207.** $0{,}75l$. **208.** 3 см. **209.** 60 см². **210.** а) 15 см; б) 16 см. **211.** 296π см². **213.** а) 12; б) 36 дм². **215.** а) $\frac{2\pi\cdot 10^4}{3}$ см³; б) $27\,000\pi$ см³; в) $\frac{1}{3}\cdot 85\pi\sqrt{3}$ см³; г) $24\,696\,\pi\operatorname{tg}65°$; д) ≈ 1164 дм³; е) 310,4 см³. **216.** а) 144π см³; б) 9 см; в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. **217.** $\frac{\pi}{3}bc^2\sin^2\alpha$. **218.** а) $\frac{\pi H^3}{12}$; б) 100π см³ или 120π см³; в) $\frac{P^2}{3\pi^2l^3}\sqrt{\pi^2l^4-P^2}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q\left(P^2-Q^2\right)}{\pi}}$. **220.** а) 1404π см³; б) $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$; в) $\frac{\pi Q^2}{a}$.

221. 375 см^3. **222.** 1 : 7 : 19. **223.** а) $\frac{H}{2}\left(2-\sqrt[3]{4}\right)$; б) $\frac{H}{2}\left(2-\sqrt[3]{3}\right)$. **224.** 12π м^3 и 84π м^3.

225. 14 см. **226.** $\frac{\pi c^3}{3}\sin^2 2\alpha$. **227.** 500π см^3. **228.** $1+\sqrt{3}$. **229.** а) $72\sqrt{3}$ см^2;

б) $6\left(3+4\sqrt{17}\right)$ см^2; в) $18\left(3\sqrt{3}+\sqrt{43}\right)$ см^2; г) $\frac{15\sqrt{2}}{8}\left(12\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{125-7\sqrt{5}}\right)$ см^2.

230. $\frac{\pi a^3}{24}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **231.** $\frac{\pi a^3}{24}\operatorname{tg}\beta\sin^3\varphi$. **232.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(29+7\sqrt{73}\right)$ см^2;

б) $\left(14{,}5+14\sqrt{41}\right)$ см^2; в) $\frac{3}{4}\left(7\sqrt{91+58\sqrt{3}}\right)$ см^2; г) $\frac{5\sqrt{5}}{8}\left(29\sqrt{2+2\sqrt{5}}+14\sqrt{57\sqrt{5}-32}\right)$ см^2.

233. а) $\frac{RH\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$; б) $\frac{RH\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **234.** $\frac{l\sqrt{3}}{6}$. **237.** 2 : 3 : 4.

Раздел 3

241. а) 160π см; б) $3\pi\sqrt{91}$ см. **242.** а) 160π см; б) 24π см. **244.** а) 180π см^2; б) $3\sqrt{3}$ см. **245.** а) 18 см; б) 24 см. **246.** 40π дм. **247.** б) $20\sqrt{10}$ см. **248.** а) $3\pi\sqrt{3}$ см; б) $5\pi\sqrt{2}$ см. **249.** а) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi R^2}{8}$. **252.** $0{,}6R$. **253.** а) 982 км; б) 983 км; в) 952 км; г) 1025 км. **254.** а) ≈ 44 км; б) ≈ 63 км; в) ≈ 83 км. **255.** 10 см. **256.** $\frac{240}{13}\pi$ см.

257. 216π см^2. **258.** а) $2R\sin 2\varphi$, $2R\cos\varphi$; б) $\frac{\pi R^2}{3}\sin^2 2\varphi$. **261.** 3 см. **262.** 8 см.

263. 12 см. **265.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **268.** а) 144π см^2; б) 16π дм^2; в) 8π м^2; г) 48π см^2.

270. а) 36 м^2; б) 900π см^2. **271.** а) 9 см; б) 10 м. **272.** ≈ 1356 см^2.

273. а) $\approx 127{,}5$ млн км^2; б) $\approx 36\,724$ км; в) $\approx 15\,930$ км; г) $\approx 23\,567$ км.

276. а) $2\pi r\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $r\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **277.** $r\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\beta}{2}\right)$. **278.** 13 см.

279. а) 1820π см^2; б) 240π м^2 или 660π м^2. **280.** а) $\pi r^2\left(2-\sqrt{2}\right)$; б) $\pi r^2\left(2-\sqrt{3}\right)$; в) $4\pi h^2$. **282.** а) 256π см^2, $\frac{2048\pi}{3}$ см^3; б) 3 см, 113,04 см^2; в) 4 см, $\frac{256\pi}{3}$ см^3.

285. 1000. **286.** а) $3\sqrt[3]{10}$ см; б) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}}$ см. **287.** 18 см.

288. На $\approx 4{,}3$ мм увеличится. **290.** а) Нет; б) будет.

291. Шар, конус. **292.** $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2R}{3}$. **295.** а) $\frac{\pi R^3}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$; б) $\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **296.** а) 27 : 5; б) 45π см^3, 243π см^3. **297.** ≈ 23,6 м^3. **298.** а) 2904π см^3; б) $\frac{\pi r^3}{8}$. **299.** 5 : 16.

300. 152 604 мм^3. **301.** ≈ 901 см^3. **302.** $\frac{\pi r^3}{3}$, $\frac{2\pi r^3}{3}$, $\frac{\pi r^3}{3}$. **303.** а) $\frac{2\pi r^3}{3}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$; б) $\frac{2\pi h^3}{3\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **304.** 3528π см^3. **310.** $8r^3$. **311.** 10,5 см. **312.** $\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **314.** 15 552 см^3.

315. $0,4r\sqrt{5}$. **316.** $8R^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **317.** $0,2r\sqrt{10}$. **318.** $16r^3$. **320.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

321. $2\sqrt{2}:1$. **323.** а) $\frac{\pi b^3\sqrt{3}}{54}$; б) $\frac{4\pi a^3}{3}\cos^3\delta\,\mathrm{tg}^3\frac{\delta}{2}$ **324.** а) $R\,\mathrm{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. **325.** $\frac{2\pi r(l-r)}{l}$.

326. $R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; $R\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **327.** $\frac{l}{2\sin\alpha}$. **329.** $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **330.** а) $\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}}$, $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\frac{5a}{4\sqrt{3}}$. **331.** 384 см^3. **332.** а) $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{3}+2\sqrt{b^2-a^2}}\right)^3$; б) $\frac{\pi a^3}{6}\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}$. **333.** а) $\frac{a}{2\sin\alpha}\left(3\cos^2\alpha+1\right)$; б) $13\left(13-3\sqrt{17}\right)$ см. **334.** $\frac{128}{9}$ см^3.

335. а) $\frac{4\pi a^3b^2}{3\left(\sqrt{2a^2-b^2}\right)^3}$; б) $\frac{\pi a^3}{48}$. **336.** $\frac{3R^2}{4}\sin\alpha\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **337.** $\frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\beta+\cos\beta}\right)^3$.

338. а) $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$, $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$; б) $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$, $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$. **339.** а) 400π дм^2, $\frac{4000\pi}{3}$ дм^3; б) $\frac{16\pi a^2}{3\cos^2\alpha}$, $\frac{32\pi a^3\sqrt{3}}{27\cos^3\alpha}$. **340.** 676π см^2, $\frac{8788\pi}{3}$ см^3. **341.** $\frac{2425\pi}{4}$ см^2, $\frac{12\,125\pi\sqrt{97}}{48}$ см^3. **342.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **343.** $\frac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

348. $\frac{4\pi R^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)$. **349.** $3V\cos^2\frac{\alpha}{4}$. **358.** а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **360.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **361.** а) $24R^2$; б) $12R^2\sqrt{3}$; в) $24R^2\sqrt{3}$. **365.** $a^2\sqrt{2}$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **366.** $\sqrt{3}:1$. **367.** 90°.

368. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **369.** а) $\frac{q^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{q^2\sqrt{2}}{9}$. **371.** а) $l=\frac{h\sqrt{6}}{2}$; б) $k=\frac{1}{3}l$.

372. а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **377.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **378.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

Раздел 4

380. а) $a+b$ или $|a-b|$; б) $\frac{a+b}{2}$. **381.** а) 40°; б) 118°; в) 40°; г) 88°; д) 40°, 80°, 240°; е) 55°. **383.** а) $\frac{\alpha+\beta}{2}$ или $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$; б) $\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}$, или $\frac{|\alpha-\beta+2\gamma|}{2}$, или $\frac{|-\alpha+\beta+2\gamma|}{2}$, или $\frac{|\alpha+\beta-2\gamma|}{2}$. **385.** а) 8; б) 10; в) 12; г) 15; д) 7; е) 20. **386.** а) 10; б) 15; в) 25; г) 54. **387.** 7. **388.** а) 7 или 8; б) 5; в) $4\sqrt{6}$. **389.** $9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-3\sqrt{6}$ см.

390. $\sqrt{2}:1$. **391.** а) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{m}{2\sin(\alpha+\beta)}$; в) $\frac{ab}{2h}$. **393.** а) $\frac{5\sqrt{13}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{130}}{3}$; в) $1{,}3\sqrt{61}$; г) $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **395.** $\frac{a+b-c}{2}$; $\frac{a-b+c}{2}$, $\frac{-a+b+c}{2}$, $\frac{a+b+c}{2}$.

404. г) $\left(\left(h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}\right)\left(h_a^{-1}+h_b^{-1}-h_c^{-1}\right)\left(h_a^{-1}-h_b^{-1}+h_c^{-1}\right)\left(-h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}\right)\right)^{-0{,}5}$; ж) $l_a=bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)$. **410.** а) $\frac{|\alpha-\beta|}{2}$; б) $|90°-2\alpha|$. **413.** $\frac{kl}{h}$, $\frac{h^2-kl}{h}$.

415. а) $r_a=\frac{S}{p-a}$, где S — площадь, а p — полупериметр треугольника; б) $p-a$, где p — полупериметр; в) p, где p — полупериметр. **418.** а) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; в) $-2-\sqrt{3}$.

422. $\frac{a^2}{2h}$, $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $\frac{4h^2+b^2}{8h}$. **423.** $2\sqrt{Rr}$. **424.** а) $\sqrt{d^2-(R-r)^2}$; б) $\sqrt{d^2-(R+r)^2}$.

425. $\frac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$. **426.** 6. **428.** 120°. **431.** $|\alpha-\beta|$. **434.** $180°-2\alpha$, $180°-2\beta$, $2(\alpha+\beta)-180°$. **441.** $\frac{2}{3}r$. **442.** $\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}$. **443.** а) $\frac{3r}{8}$; б) $\frac{r}{6}$. **445.** а) $R\left(2\sqrt{3}-3\right)$; б) $R\left(\sqrt{2}+1\right)$. **448.** а) $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; б) $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$, $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

$\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$, $2R$. **449.** а) $\frac{a\left|b^2+c^2-a^2\right|}{4S}$, где S — площадь треугольника; б) $\frac{c\left|a^2+b^2-c^2\right|}{8S}$, где S — площадь треугольника; в) $\sqrt{\frac{p-a}{p}bc}$, где p — полупериметр; г) $\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$, где p — полупериметр; д) $\frac{a}{p}\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$, где p — полупериметр.

450. $7-4\sqrt{3}:1$. **451.** $\frac{m}{2R}\sqrt{4R^2-n^2}+\frac{n}{2R}\sqrt{4R^2-m^2}$, $\left|\frac{m}{2R}\sqrt{4R^2-n^2}-\frac{n}{2R}\sqrt{4R^2-m^2}\right|$.

452. а) $\frac{|a-b|}{2}$; б) $\frac{a+b}{2}$ или $\frac{|a-b|}{2}$; в) $a+b$. **453.** а) $180°-\frac{\alpha+\beta}{2}$ или $\frac{\alpha+\beta}{2}$; б) $\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}-180°$; в) $180°-\frac{\alpha+\gamma}{2}$. **455.** а) $\sqrt{ab+\frac{ac^2-bd^2}{a-b}}$, $\sqrt{ab+\frac{ad^2-bc^2}{a-b}}$; б) $\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(-a+b+c+d)}$.

457. а) $2(a^2-b^2+c^2-d^2)$; б) $4\sqrt{m^2n^2-S^2}$.

458. $0{,}5\left(\sqrt{2a^2b^2+2\left(a^2+b^2\right)m^2-a^4-b^4-m^4}+\sqrt{2c^2d^2+2\left(c^2+d^2\right)m^2-c^4-d^4-m^4}\right)$.

459. $\frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{2a^2b^2+2\left(a^2+b^2\right)k^2-a^4-b^4-k^4}+\sqrt{2c^2d^2+2\left(c^2+d^2\right)k^2-c^4-d^4-k^4}+\right.$ $\left.+\sqrt{2a^2d^2+2\left(a^2+d^2\right)l^2-a^4-d^4-l^4}+\sqrt{2b^2c^2+2\left(b^2+c^2\right)l^2-b^4-c^4-l^4}\right)$.

462. а) $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$, $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$; б) $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр. **481.** $2{,}5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **482.** а) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$.

484. а) 52° и 88°; б) 10°. **485.** а) 40°; б) 80°. **486.** 99°30′. **487.** 110°. **488.** а) 81°; б) 76°30′.

489. а) $128\frac{4}{7}°$; б) 22. **491.** 37 см. **492.** 50 см, 72 см. **493.** 18,5 см. **494.** 84 см.

495. 4 : 25. **496.** 12 см. **497.** 13 см. **498.** а) 7,5 см; б) $40\frac{1}{12}$ см. **500.** 35 см. **501.** $2\sqrt{15}$ см.

502. 1 : 3. **503.** 4 см. **504.** 12 см, 27 см. **505.** $2\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см. **506.** а) 5 см; б) 9 м или 21 м. **507.** а) 3 см; б) 9 см, 12 см, 15 см. **508.** а) $a \pm r$ при $a \geqslant r$ и 0, $a + r$ при $a < r$; б) $d \pm (r_1 + r_2)$ при $d \geqslant r_1 + r_2$ и 0, $r_1 + r_2 - d$ при $d < r_1 + r_2$; в) наименьшее расстояние $d - r$ при $d \geqslant r$ и 0 при $d < r$, наибольшего расстояния не существует.

510. $3+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{3}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **512.** а) $H\sqrt{\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{4}}$; г) $\dfrac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$;

д) $\dfrac{a\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{2\cos\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}}$; е) $4\operatorname{tg}7^\circ30'$; ж) $2\sqrt{2}$ см. **513.** 5 см, 4 см. **514.** $\dfrac{R}{3}$. **516.** а) 4 м;

б) 60°. **518.** а) $\dfrac{4(3\sqrt{3}-2)}{\sqrt{69}}$ см; б) 10,5 см; в) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$. **519.** а) $\dfrac{b}{2\sin\alpha}$; б) $\dfrac{l^2}{2h}$.

520. а) $\dfrac{r^2+h^2}{2h}$. **522.** а) $2\sqrt{6}$ см; б) $\dfrac{5a}{2\sqrt{3}}$. **523.** $2R\sin\alpha$. **524.** а) $\dfrac{2a^2}{3}$; б) $\dfrac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$;

в) $\dfrac{5}{\sin 2\delta}$; г) $0{,}75a$; д) $\dfrac{a}{\sin 2\beta}$; е) $\dfrac{a^2}{4h}+\dfrac{h}{2}$. **525.** $\dfrac{a}{2\sin\alpha\sin 2\beta}$. **527.** а) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ см;

б) $\dfrac{ah}{1+\sqrt{1+\dfrac{12h^2}{a^2}}}$; в) $a(\sqrt{13}-2\sqrt{3})$; г) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5+\cos\alpha}}{\sqrt{3}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **528.** а) 2 см; б) 3 см; в) $\dfrac{l}{6}$.

529. а) $\dfrac{h}{3}$; б) $\dfrac{h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. **530.** а) $\dfrac{a\sqrt{37}}{42}$, $\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}$. **531.** $\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\alpha}{4}+45^\circ\right)$.

532. а) $\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}{1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{3}{4}(\sqrt{5}-1)$ см; в) $4(2\sqrt{3}-3)$ см; г) $\dfrac{\sqrt{10}}{8}(\sqrt{5}-1)$ см;

д) $\dfrac{9}{8}(\sqrt{41}-3)$ см. **533.** $8\sqrt{3}$ см и 12 см или $8\sqrt{2}$ см и 16 см.

534. $\dfrac{a\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\cos\alpha\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+\cos^2 2\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+\cos^2\alpha}}$. **536.** 10 см, 26 см.

537. 1 : 3. **538.** 4 м^2, 16 м^2. **539.** $\dfrac{\sqrt{S(m^2+n^2)}}{2mn}$. **541.** $\dfrac{kl(k+l+2)}{2(k+1)(l+1)(k+l+2)}$.

542. б) 42 см^2, 12 см^2, 30 см^2. **543.** $\dfrac{1}{mn+1}$. **544.** $\dfrac{1}{6}$. **545.** а) 18 см^2; б) 10,5 см^2, или 14 см^2, или $\dfrac{5}{4}(5+\sqrt{73})$ см^2; в) 270 см^2; г) 756 см^2; д) 72 см^2. **546.** 1 см. **547.** 8 см, 26 см, 30 см. **549.** $2(a^2+b^2+ab)$. **551.** $4\sqrt{\dfrac{m}{m+n}}$ см. **552.** $\dfrac{n-1}{n}S$. **553.** $1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

554. $\dfrac{m^2+n^2+4mn}{(2m+n)^2}Q$. **555.** $in : jn : (i+j)\ m+(m+n)k$. **556.** 4 см. **557.** $\dfrac{1}{6}$.

559. $1:\left(\sqrt{2}-1\right)$. **560.** $2\sqrt{SQ}$. **563.** а) 8316 см^2; б) 150 см^2 или 42 см^2; в) 156 см^2.

564. 3 см. **565.** а) 8 см, 12 см или 2 см, 6 см; б) 8 см или 11,25 см. **566.** $4\sqrt{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$ см.

568. а) 24; б) $\sqrt{\frac{m+n+2l}{2}\cdot\frac{m+n-2l}{2}\cdot\frac{m-n+2l}{2}\cdot\frac{-m+n+2l}{2}}$.

570. $m^2 : mn : n^2 : mn$. **571.** $4{,}8+1{,}2\sqrt{31}$. **574.** 8 м^2, 10 м^2, 15 м^2, 12 м^2. **577.** 546 см^2, $\sqrt{1621}$ см или 126 см^2, $\sqrt{181}$ см. **578.** $2\pi R^2\left(18\sqrt{3}-31\right)$. **579.** 15 см^2. **580.** а) $12r^2\sqrt{3}$; б) $18r^2\sqrt{3}$. **581.** 1 : 2. **582.** $0{,}6\pi r^2$. **583.** πS. **584.** а) $36\pi\left(1+\sqrt{2}\right)$ см^2;

б) $\pi r^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$; в) ≈ 208 см^2. **585.** $36\sqrt{15}$ см^2. **586.** $\frac{4\left(2+\sqrt{10}+\sqrt{17}\right)}{15\pi}$.

587. а) $\frac{29\sqrt{3}+18\sqrt{73}}{4}$ см^2; б) $58+7\sqrt{81}$ см^2; в) $1{,}5\left(29\sqrt{3}+7\sqrt{91}\right)9$ см^2.

588. а) 120 см^2; б) 1536 см^2; в) $4R^2\sin 2\alpha$; г) $\frac{16R^2}{\sin^2\alpha}$. **589.** а) 3 : 4; б) 3 : 2. **592.** 3 : 4.

593. а) 3500π см^2; б) 0; в) 588π см^2; г) $\frac{\pi R^2}{4}$. **595.** $\pi\left(3r^2-d^2\right)$. **596.** πd^2, $1{,}5\pi d^2$.

597. а) 36π см^2; б) 194π см^2; в) 34π см^2; г) $r\left(3-2\sqrt{2}\right)$; д) 32π см^2; е) $16\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

ж) $\frac{\pi a^2}{3}$; з) $\frac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}$; и) $\frac{\pi l^3}{3}$. **598.** а) $\frac{25\pi}{3}$ см^2; б) $\frac{8\pi a^2}{3}$; в) $37{,}5\pi$ см^2; г) $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$.

603. $259{,}2\pi$ см^2. **604.** $\frac{R\pm\sqrt{R^2-2m}}{2}$, $\frac{\pi R^2}{2}$. **605.** а) $2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\frac{h^3\sqrt{2(\cos\beta-\cos\alpha)}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. **606.** $8r^3\sin^3\alpha\cos\alpha$. **607.** $\frac{8r^3\sqrt{3}}{\sin\alpha}$. **608.** $6r^3\sqrt{3}$.

610. а) $2R^3\sin\alpha\cdot\sqrt{3\left(4\cos^2\alpha-3\right)}$; б) $2R^3\sqrt{3}\cdot\sin\alpha\cos^2\alpha$. **611.** а) 224 см^3;

б) $\frac{3\sqrt{3}H}{8}\left(4R^2-H^2\right)$; в) $\frac{8R^3\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{\left(2+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^3}}$. **612.** а) $\frac{\pi a^3}{4}$; б) $1{,}5\pi a^3\sqrt{3}$; в) $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$;

г) $\pi R^3\cos\alpha\sin 2\alpha$. **613.** $r^2h\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **614.** а) 480,2 см^3; б) $\frac{4}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$; в) 16 см^3.

615. а) $\frac{9V\sqrt{3}}{16\pi}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$; б) $\frac{128}{3}R^3\sin^6\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{3}\right)$; в) $2R^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$;

г) $\dfrac{8\sqrt{3}\,r^3\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha+4\operatorname{ctg}\alpha)^3}$; д) $\dfrac{H^2\sqrt{3}}{4}(2r-H)$. **616.** а) $9000\sqrt{3}$ см^3; б) $\dfrac{H^2\sqrt{3}(2R-H)}{4}$.

617. а) $6000\sqrt{3}$ см^3; б) $\dfrac{H^2\sqrt{3}(2R-H)}{12}$. **618.** а) $\dfrac{\pi a^3}{24}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{\pi a^3}{24}\sin^2\varphi\operatorname{tg}\theta$.

619. 32 см^2. **620.** $\dfrac{r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4}$. **621.** $l^3\sin\alpha\cos^2\alpha\sin 2\beta$. **622.** 2592π дм^3. **623.** а) $3\pi r^3$;

б) $\dfrac{8\pi r^3}{3}$; в) $\dfrac{\pi r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. **624.** $\dfrac{\pi a^3}{12}\left(2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}+1\right)$. **625.** $S_{ш}=\dfrac{6}{7}S_{ц}$. **627.** а) 4 : 1;

б) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{r_1}+\dfrac{r_1}{r}+1\right)$. **628.** а) $\dfrac{\pi D^3}{6}$; б) 972 см^3; в) $504\pi\sqrt{14}$ см^3. **629.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$.

630. а) $11{,}7\sqrt{3}$ см; б) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **631.** 216. **633.** $\approx 2{,}5$ т. **635.** б) 167. **636.** $\approx 5{,}9$ дм^3.

637. а) ≈ 340 г; б) ≈ 29 кг. **638.** ≈ 422 г. **639.** $\dfrac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ м^3. **640.** $\dfrac{7}{250}$.

641. а) 3744π см^3; б) $\dfrac{125\,000\pi}{3}$ см^3. **642.** а) $\dfrac{419\pi R^3}{1296}$;

б) $\dfrac{\pi}{6}\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)\left(R+\sqrt{R^2-r^2}+\dfrac{7}{4}r^2\right)$ или $\dfrac{\pi}{6}\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)\left(R-\sqrt{R^2-r^2}+\dfrac{7}{4}r^2\right)$.

643. $\dfrac{100\pi}{3}$ см^3, $\dfrac{400\pi}{3}$ см^3. **644.** $\dfrac{117\pi}{8}$ см^3. **645.** а) $\dfrac{\pi R^3}{3}$; б) 2943,5 см^3;

в) $\approx 1\,635\,417$ см^3. **647.** а) 410 м^3; б) 6,1. **650.** 6,56 м. **651.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$. **652.** 936π см^3.

655. а) $\left(5\pm5\sqrt{3};\,0;\,0\right)$, $\left(0;\,4\pm\sqrt{66};\,0\right)$, $\left(0;\,0;\,-3\pm\sqrt{59}\right)$. **656.** $(1+2y;\,y;\,y-0{,}4)$,

где y — любое число. **657.** $\dfrac{\sqrt{94}}{2}$. **658.** а) 2 : 27; б) 7 : 9.

659. Сфера с центром Q (2; 3; 1) и радиусом 4. **660.** Сфера с центром Q (2; −1; 3) и радиусом 5. **681.** Сфера с центром O (0; 0; 0) и радиусом $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

682. Сфера с центром O (0; 0; 0) и радиусом a. **683.** $3x+y=0$.

684. а) Пересекаются; б) скрещиваются; в) параллельные; г) совпадают.

685. а) Пересекаются; б) не имеют общих точек; в) касаются.

686. а) $9\sqrt{2}$; б) $\sqrt{34}$. **687.** а) $2x-4y-4z-1=0$; б) $2x-9z+84=0$.

688. а) $\dfrac{2\sqrt{70}}{7}$; б) $\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$. **689.** а) (3; 0; −1), (1; −4; 3); б) (−3; 3; 2), (−1; −1; −2).

690. а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{19}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{19}{5}}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{\frac{19}{20}}$; е) $\sqrt{\frac{51}{20}}$. **691.** а) 1; б) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{5}{\sqrt{7}}$; е) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **692.** а) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$; б) $\frac{2\sqrt{57}}{19}$; в) $\frac{2\sqrt{93}}{31}$; г) $\frac{\sqrt{345}}{115}$; д) $\frac{2}{\sqrt{153}}$; е) $\frac{\sqrt{30}}{20}$. **693.** а) $\arccos 0{,}7$; б) $\arccos\frac{4}{\sqrt{35}}$; в) $\arccos\sqrt{\frac{5}{8}}$; г) $\arccos\frac{11}{2\sqrt{35}}$; д) $\arccos\frac{5}{14}$; е) $\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}$. **694.** а) $\arcsin 0{,}6$; б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{35}}$; в) $\arcsin 0{,}2$; г) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$; д) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{35}}$; е) $\arcsin 0{,}2$; ж) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{35}}$; з) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$.

695. а) $\arccos\frac{9}{17}$; б) $\arccos\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{323}}$; в) $\arccos\frac{3}{\sqrt{85}}$; г) $\arccos\sqrt{\frac{3}{323}}$; д) $\arccos\frac{11}{5\sqrt{5}}$; е) $\arccos\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}$. **696.** а) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$; д) 0; е) 1,6; ж) 1,2; з) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич
Горбунова Ирина Владимировна
Цыбулько Оксана Евгеньевна

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 11 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Редакторы: Т. И. Жуковская, О. И. Орсич
Художественные редакторы: П. В. Баранов, И. А. Гринь
Компьютерная вёрстка: П. В. Баранов
Корректоры: Т. В. Басалыга, Т. Б. Михайлова

Подписано в печать 05.11.2020. Формат 70×100 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,7. Уч.-изд. л. 13,00.
Тираж 120 248 экз. Заказ

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство «Белорусская Энциклопедия имени Петруся Бровки»
Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/1 от 08.07.2013.
Пер. Калинина, 16, 220012, г. Минск, Республика Беларусь.

ОАО «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, г. Минск, Республика Беларусь.