

Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі

МАТЭМАТЫКА

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

*Дарушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь*

Мінск
«Адукацыя і выхаванне»
2013

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"

УДК 51(075.3=161.3)
ББК 22.1я721
Л27

Рэцэнзенты: кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (кандыдат фізіка-матэматычных навук дацэнт *Ю. Д. Чурбанаў*); метадыст вышэйшай катэгорыі аддзела агульнаадукацыйных дысцыплін дзяржаўнай установы дадатковай адукацыі дарослых «Віцебскі абласны інстытут развіцця адукацыі» *Т. Т. Талькова*; настаўнік матэматыкі вышэйшай катэгорыі дзяржаўнай установы адукацыі «Міёрская сярэдняя школа № 1» *І. А. Ханецкая*

Латоцін, Л. А.
Л27 Матэматыка : вучэб. дапам. для 10-га кл. устаноў агул. сярэд. адукацыі з беларус. мовай навучання / Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі. — Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2013. — 408 с. : іл.

ISBN 978-985-471-592-6.

Папярэдняе выданне пад назвай «Матэматыка, 11» выйшла ў 2007 г.

УДК 51(075.3=161.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-471-592-6


- © Латоцін Л. А.,
Чабатарэўскі Б. Д., 2007
- © Латоцін Л. А.,
Чабатарэўскі Б. Д., 2013,
са змяненнямі
- © Афармленне. РУП «Выдавецтва
“Адукацыя і выхаванне”», 2013

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"

Дарагія сябры!

У дзясятым класе вы працягнеце вывучэнне матэматыкі, а таксама пачнеце вывучэнне геаметрыі прасторы — стэрэаметрыі. Вы пазнаёміцеся з адным з найважнейшых паняццяў матэматыкі — паняццем вытворнай, якое мае самыя шырокія прымяненні. Вам трэба будзе засвоіць многія формулы і алгарытмы. Важна, каб вы іх не толькі запамнілі, але за фармальнымі дзеяннямі не забывалі іх сэнс, усведамлялі, на вырашэнне якіх пытанняў гэтыя дзеянні скіраваныя.

Арганізацыя вучэбнага дапаможніка такая самая, як і ў папярэдніх класах. Кожны параграф пачынаецца з абмеркавання таго пытання, што абазначана ў назве параграфа. Найбольш важнае вылучана спецыяльнымі шрыфтамі. Новыя паняцці вылучаюцца **паўтлустым шрыфтам**, правілы і сцверджанні — **паўтлустым курсівам**, а паняцці і факты, на якія варта звярнуць увагу, але не абавязкова запамінаць, — *курсівам*. Матэрыял, не прызначаны для абавязковага кантролю, размешчаны паміж спецыяльнымі знакамі ► ◄.

Пасля тлумачальнага тэксту ідуць кантрольныя пытанні, пазначаныя знакам . Яны прызначаны для праверкі таго, як вы засвоілі змест тлумачальнага тэксту. Калі на тое ці іншае пытанне вы не змаглі адказаць, трэба вярнуцца да тлумачальнага тэксту і з яго дапамогай паспрабаваць адказаць на гэтае пытанне.

Практыкаванні, што ідуць пасля кантрольных пытанняў, падзелены на тры групы.

Практыкаванні першай групы прысвечаны тым пытанням, якія абмяркоўваліся ў тлумачальным тэксце. Яны маюць у асноўным трэніровачны характар, хаця сярод іх могуць сустрацца і больш складаныя.

Другую групу пасля раздзяляльнай гарызантальнай рысы складаюць разнастайныя практыкаванні на паўтарэнне. Пры іх выкананні вам трэба будзе прымяняць веды, набытыя раней, у тым ліку і ў папярэдніх класах.

Задачы трэцяй групы, якія ідуць пасля трох раздзяляльных зорчак, з'яўляюцца ў чымсьці нестандартнымі. Яны патрабуюць творчых падыходаў, самастойнасці ў разважаннях. Разам з тым для іх рашэння ў вас дастаткова ведаў.

Жадаем вам поспехаў!

Аўтары

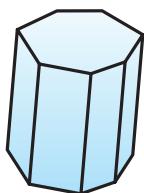
I

раздзел

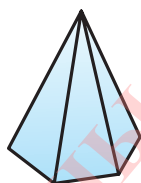
Уводзіны ў стэрэаметрыю

1. Прасторовыя фігуры

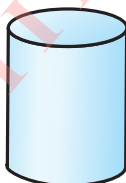
Вы ведаеце, што геаметрычныя фігуры падзяляюцца на **плоскія** і **прасторовыя** ў залежнасці ад таго, усе ці не ўсе пункты фігуры належаць адной плоскасці. Плоскія фігуры вы вивучалі ў ранейшых класах, там вы пазнаёміліся і з некаторымі прасторавымі фігурамі — прызмай (рыс. 1), пірамідай (рыс. 2), цыліндрам (рыс. 3), конусам (рыс. 4), шарам (рыс. 5). Раздзел геаметрыі, у якім вивучаюцца плоскія фігуры, называецца *планіметрыяй*, а раздзел, у якім вивучаюцца прасторавыя фігуры, — *стэрэаметрыяй*.



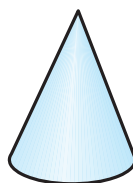
Рыс. 1



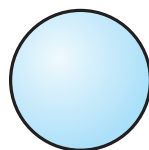
Рыс. 2



Рыс. 3



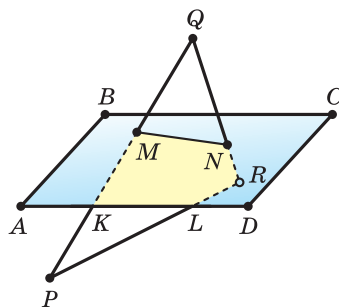
Рыс. 4



Рыс. 5

Тую ці іншую прасторавую фігуру даводзіцца выяўляць на плоскасці ліста ў сшытку ці на плоскасці дошкі. Адпаведны рысунак выконваюць так, каб ён ствараў такое ўражанне, як і сама фігура, што выяўляецца. Пры гэтым лініі, якія не бачныя, робяць *штырхавымі*.

На рысунку 6 выяўлены паралелаграм $ABCD$ і трохвугольнік



Рыс. 6

PQR , якія перасякаюцца па адрэзку MN . Частка QMN трохвугольніка PQR знаходзіцца над паралелеграмамі $ABCD$, частка $PMNR$ — пад гэтым паралелеграмамі. Пры гэтым частка PKL чатырохвугольніка $PMNR$ бачная, а частка $KMNR$ — нябачная. Звяртаем увагу на тое, што пункты K і L трохвугольніка PQR не належаць паралелеграмаму $ABCD$, а значыць, і яго старане AD .

На рысунку 7 паказана трохвугольная піраміда $DABC$, якую перасякае плоскасць па чатырохвугольніку $MNOP$. Пры гэтым у піраміды нябачным з'яўляецца кант AB , а ў сячэння $MNOP$ — яго стараны NO і MP .

Вяяўленне прасторавай фігуры на рысунку называюць **відарысам фігуры**.

Важным класам прасторавых фігур з'яўляюцца мнагаграннікі, пад якімі разумеюць целы, абмежаваныя плоскімі многавугольнікамі. Гэтыя многавугольнікі называюцца **гранямі** мнагагранніка, іх вяршыні — **вяршынямі** мнагагранніка, а стараны — **кантамі** мнагагранніка.

Адрэзак, што злучае дзве вяршыні мнагагранніка, якія не належаць адной грані, называецца **дыяганаллю** мнагагранніка (рыс. 8).

Мнагаграннік называецца **выпуклым**, калі ён размешчаны па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. На рысунку 9 паказаны нявыпуклы мнагаграннік.

Мы будзем вывучаць найпрасцейшыя выпуклыя мнагаграннікі — прызмы і піраміды.

Прызмай называецца мнагаграннік, дзве грані якога — роўныя n -вугольнікі, а астатнія n граней — паралелеграмы.

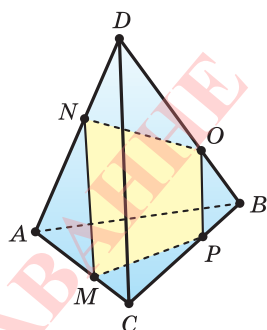


Рис. 7

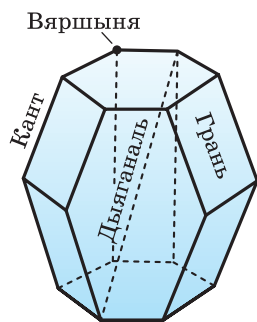


Рис. 8

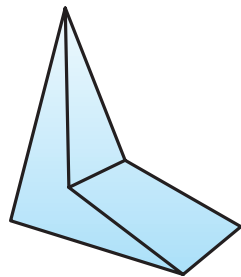
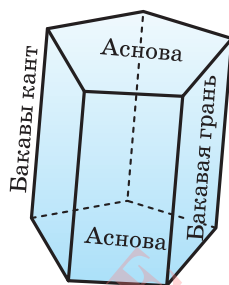


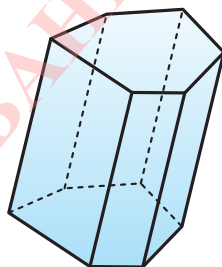
Рис. 9

Роўныя грані-многовугольнікі прызмы называюцца яе **асновамі**, а астатнія грані — **бакавымі** **гранямі**. Канты бакавых граней, якія не належаць асновам, называюцца **бакавымі кантамі** **прызмы** (рыс. 10).



Рыс. 10

У залежнасці ад колькасці старон асновы прызмы адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырохвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. прызмы. На rysunku 11 паказана шасцівугольная прызма.



Рыс. 11

Прызмы падзяляюцца на *прамыя* і *нахіленыя* ў залежнасці ад таго, перпендыкулярныя ці не перпендыкулярныя кантам асновы бакавыя канты прызмы.

Звычайна пры выяўленні прамой прызмы яе бакавыя канты праводзяць вертыкальна (рыс. 12). Бакавыя грані прамой прызмы з'яўляюцца прамавугольнікамі.

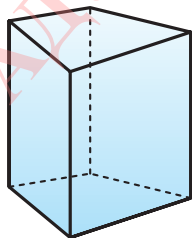
Праямая прызма называецца **правільнай**, калі яе асновы з'яўляюцца правільнымі многовугольнікамі.

Прызма, асновамі якой з'яўляюцца паралелаграмы, называецца **паралелепіпедам**.

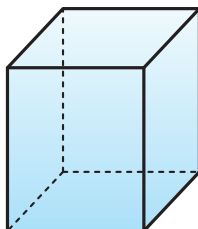
Паралелепіпед, як прызма, можа быць і прамым (рыс. 13), і нахіленым (рыс. 14).

Прамы паралелепіпед, асновы якога з'яўляюцца прамавугольнікамі, называецца **прамавугольным паралелепіпедам**.

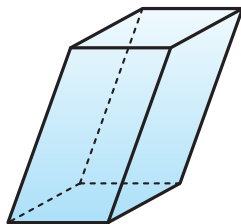
Усе грані прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляюцца прамавугольнікамі.



Рыс. 12



Рыс. 13



Рыс. 14

Тры канты прамавугольнага паралелепіеда, якія з'ягаюцца ў адной вяршыні, называюцца **вымярэннямі** прамавугольнага паралелепіеда.

Прамавугольны паралелепіед, вымярэнні якога роўныя, называецца **кубам**.

Усе грані куба — роўныя адзін аднаму квадраты.

Пірамідай называецца мнагаграннік, адна грань якога — многавугольнік, а астатнія з'яўляюцца трохвугольнікамі з агульнай вяршыняй.

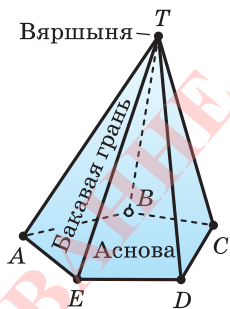
На rysunku 15 паказана піраміда $TABCDE$. Многавугольнік $ABCDE$ называюць **асновай піраміды**, трохвугольныя грані ATB , BTC , CTD , DTE , ETA — **бакавымі гранямі**, а агульную вяршыню T бакавых граней — **вяршыняй піраміды**.

У залежнасці ад колькасці старон асновы піраміды адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырхвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. піраміды. Піраміда на rysunku 15 — **пяцівугольная**, а на rysunku 16 — **трохвугольная**.

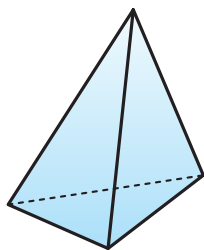
Правільнай пірамідай называецца піраміда, аснова якой — правільны многавугольнік, а адрэзак, што злучае яе вяршыню з цэнтрам асновы, перпендыкулярны да любой прамой, праведзенай у плоскасці асновы праз гэты цэнтр.

Вышыня бакавой грані правільнай піраміды, апущаная з вяршыні піраміды, называецца **апафемай** піраміды.

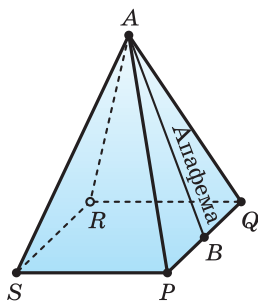
На rysunku 17 выяўлена правільная чатырхвугольная піраміда $APQRS$, адрэзак AB — адна з яе апафем.



Рыс. 15



Рыс. 16



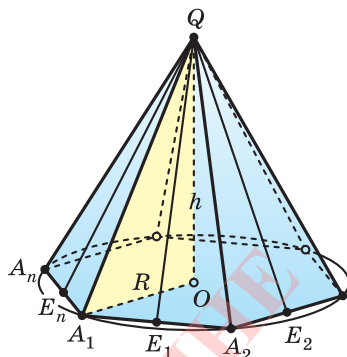
Рыс. 17

Тэарэма 1. У правільнай піраміды роўныя яе:

а) бакавыя канты; б) бакавыя грані; в) апафемы.

Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда і пункт O — цэнтр яе асновы (рыс. 18).

а) Адрэзкі OA_1, OA_2, \dots, OA_n роўныя, бо з'яўляюцца радыусамі апісанай каля асновы акружнасці. Прамавугольныя трохвугольнікі $OQA_1, OQA_2, \dots, OQA_n$ маюць пары роўных катэтаў, таму яны роўныя, а значыць, роўныя і іх гіпатэнузы: $QA_1 = QA_2 = \dots = QA_n$.



Рыс. 18

б) Паколькі бакавыя канты піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя адзін аднаму, то яе бакавыя грані — раўнабокія трохвугольнікі, асновы якіх роўныя адна адной, бо многавугольнік $A_1A_2...A_n$ — правільны. Таму бакавыя грані роўныя адна адной па трох старонах.

в) Паколькі бакавыя грані піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя адна адной, то роўныя і іх вышыні, праведзеныя з вяршыні Q , г. зн. роўныя апафемы піраміды $QA_1A_2...A_n$.

Тэарэма 2. *Плошча бакавой паверхні правільнай піраміды роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.*

Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правильная піраміда (гл. рыс. 18). Плошча S яе бакавой паверхні складаецца з плошчаў бакавых граней-трохвугольнікаў, якія з'яўляюцца роўнымі адзін аднаму раўнабокмі трохвугольнікамі з апафемамі QE_1, QE_2, \dots, QE_n , роўнымі адна адной. Таму

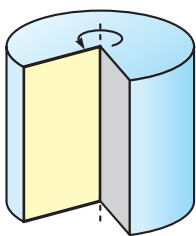
$$\begin{aligned} S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \\ &+ \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2} QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = \\ &= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a, \end{aligned}$$

дзе p — паўперыметр асновы піраміды, a — апафема піраміды.

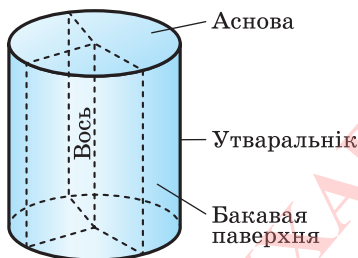
Яшчэ адзін клас прасторавых фігур складаюць цэлыя вярчэння, да якіх адносяцца цыліндр, конус, шар.

Цыліндрам называецца цэла, атрыманае вярчэннем прамавугольніка вакол адной з яго старон (рыс. 19). Пры

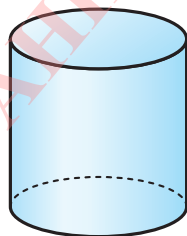
гэтым вярчэнні адна старана прамавугольніка застаецца нерухомай, яе называюць *воссю цыліндра*. Старана, супрацьлеглая восі, утварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй цыліндра*, а саму старану — *утваральнікам цыліндра*. Яшчэ дзве стараны прамавугольніка ўтвараюць паверхні, якія з'яўляюцца роўнымі кругамі, гэтыя кругі называюць *асновамі цыліндра* (рыс. 20). На рысунку 21 паказаны відарыс цыліндра.



Рыс. 19

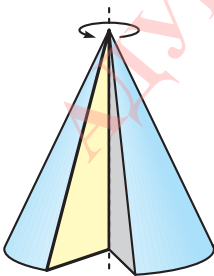


Рыс. 20

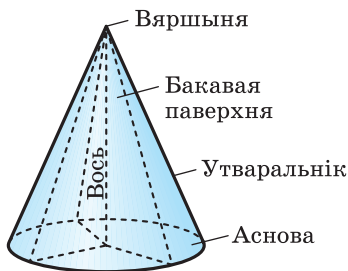


Рыс. 21

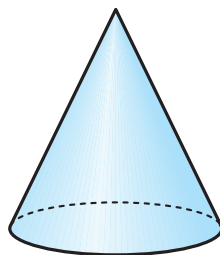
Конусам называецца цела, атрыманае вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол аднаго з яго катэтаў (рыс. 22), які называюць *воссю конуса*. Другі катэт апісвае круг, які называюць *асновай конуса*, нерухомую вяршыню, якая не належыць аснове, называюць *вяршыняй конуса*. Гіпатэнузу пры вярчэнні ўтварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй конуса*, саму гіпатэнузу называюць *утваральнікам конуса* (рыс. 23). На рысунку 24 паказаны відарыс конуса.



Рыс. 22



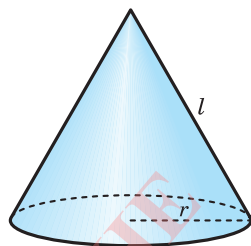
Рыс. 23



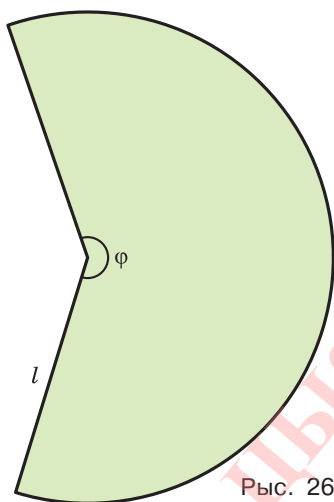
Рыс. 24

Тэарэма 3. Плошча бакавой паверхні конуса роўная здабытку паўакружнасці яго асновы і ўтваральніка.

Доказ. Няхай ёсць конус, радыус асновы якога роўны r , а ўтваральнік — l (рыс. 25). Разгорнем бакавую паверхню конуса на плоскасць, у выніку ўтворацца сектар, радыус якога роўны ўтваральніку l (рыс. 26). Знойдзем цэнтральны вугал φ гэтага сектара, улічыўшы, што яму адпавядае дуга акружнасці, роўная даўжыні акружнасці асновы конуса, г. зн. роўная $2\pi r$. Паколькі даў-



Рыс. 25



Рыс. 26

жыня ўсёй акружнасці, звязанай з сектарам, роўная $2\pi l$ і гэтай даўжыні адпавядае поўны вугал, роўны 360° , то

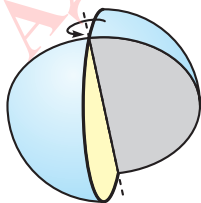
$$\varphi = \frac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^\circ \cdot r}{l}.$$

Цяпер знойдзем плошчу S сектара з радыусам l і вуглом φ :

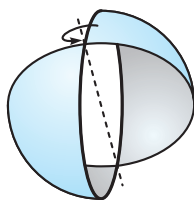
$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l.$$

Улічыўшы, што выраз πr выяўляе даўжыню паўакружнасці асновы конуса, можам сцвярджаць, што плошча бакавой паверхні конуса роўная здабытку паўакружнасці яго асновы і ўтваральніка.

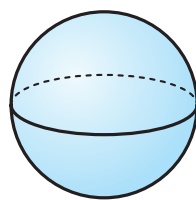
Шарам называецца цела, атрыманае вярчэннем круга вакол свайго дыяметра (рыс. 27). Пры гэтым вярчэнні акружнасць апісвае паверхню, якую называюць *сферай* (рыс. 28). На рысунку 29 паказаны відарыс шара.



Рыс. 27



Рыс. 28



Рыс. 29

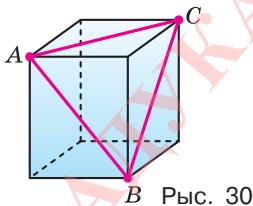


1. Якія геаметрычныя фігуры называюцца плоскімі; прасторавымі?
2. Што называюць відарысам фігуры?
3. Якое цела называюць мнагаграннікам?
4. Што называюць гранямі мнагагранніка; кантамі мнагагранніка; вяршынямі мнагагранніка?
5. Які мнагаграннік называецца прызмай?
6. Што называюць асновамі прызмы; бакавымі гранямі прызмы; бакавымі кантамі прызмы?
7. Якая прызма называецца прамой прызмай; нахіленай прызмай?
8. Якая прызма называецца правільнай прызмай?
9. Якая прызма называецца паралелепіпедам?
10. Які прамы паралелепіпед называецца прамавугольным паралелепіпедам?
11. Якія канты прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго вымярэннямі?
12. Які мнагаграннік называецца пірамідай?
13. Што называюць асновай піраміды; бакавымі гранямі піраміды; вяршыняй піраміды?
14. Якая піраміда называецца правільнай пірамідай?
15. Які адрэзак называецца апафемай правільнай піраміды?
16. Сфармулюйце ўласцівасць бакавых кантаў правільнай піраміды; бакавых граней правільнай піраміды; апафем правільнай піраміды.
17. Якое цела называецца цыліндрам?
18. Якое цела называецца конусам?
19. Якое цела называецца шарам?

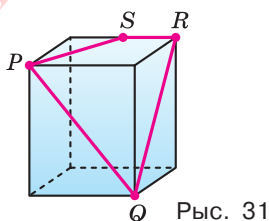
1. Дакажыце, што бакавыя грані прамой прызмы з'яўляюцца прамавугольнікамі.

2. Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — ломаная выяўлена на рысунку:

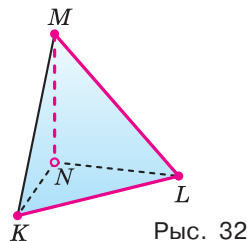
- а) 30; б) 31; в) 32; г) 33; д) 34; е) 35.



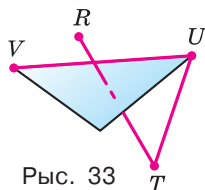
Рыс. 30



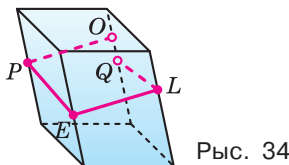
Рыс. 31



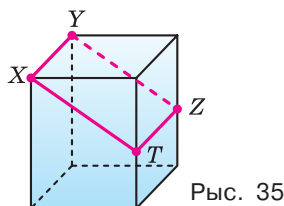
Рыс. 32



Рыс. 33



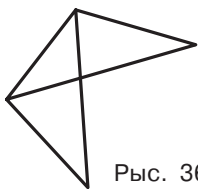
Рыс. 34



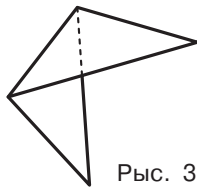
Рыс. 35

3. Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — фігура выяўлена на rysunku:

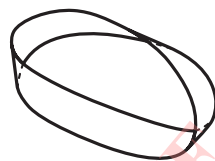
- а) 36; б) 37; в) 38.



Рыс. 36



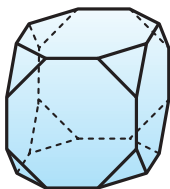
Рыс. 37



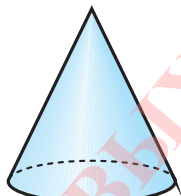
Рыс. 38

4. Вызначыце, ці з'яўляецца мноаграннікам цела, выяўленае на rysunku:

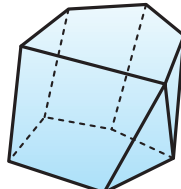
- а) 39; б) 40; в) 41; г) 42; д) 43; е) 44.



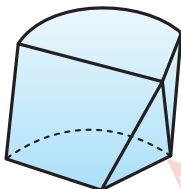
Рыс. 39



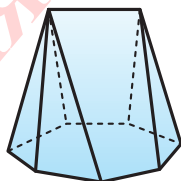
Рыс. 40



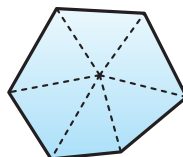
Рыс. 41



Рыс. 42



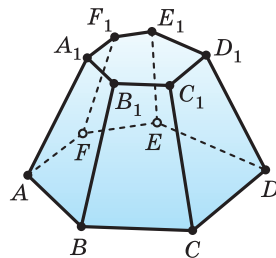
Рыс. 43



Рыс. 44

5. На rysunku 45 выяўлены мноаграннік $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Назавіце:

- а) грані з агульным кантам CD ;
 б) грані з агульным кантам DD_1 ;
 в) грані з агульнай вяршыняй E ;
 г) грані з агульнай вяршыняй C_1 ;
 д) канты з агульнай вяршыняй A ;
 е) канты з агульнай вяршыняй F_1 .



Рыс. 45

6. На рисунку 46 виявлена п'ятикутна призма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ і її діагональ UX_1 . Назавіть інші діагоналі цього многогранника.

7. На рисунку 47 виявлена чотирикутна призма. Назавіть:

- основи призми;
- бокові грані з кантами EE_1 ;
- грані з кантами DE .

8. Докажіть, що бокова поверхня прямої призми рівна задовгодку периметра її основи і бокового канта.

9. Основа прямого паралелепіпеда з боковими кантами 8 м з'являється ромб з діагоналями 10 м і 24 м. Знайдіть площу поверхню паралелепіпеда.

10. Стара основа правильної трикутної призми рівна 6 см, а боковий кант — 11 см. Знайдіть площу поверхню призми.

11. Основа прямої призми з'являється трикутник зі сторонами 30 мм і 50 мм і кутом між ними 120° , а найбільша з площ бокових граней рівна 3500 мм^2 . Знайдіть площу поверхню призми.

12. Основа прямої призми з'являється рівнобедрена трапеція з основами 25 см і 15 см і висотою 12 см. Знайдіть бокову поверхню призми, улічючи, що її боковий кант рівний 20 см.

13. Стара основа правильної n -кутної призми рівна a , а її боковий кант — h . Знайдіть бокову і загальну поверхню призми, улічючи, що:

- $n = 3, a = 5, h = 10$;
- $n = 4, a = 10, h = 30$;
- $n = 6, a = 18, h = 32$;
- $n = 5, a = 16, h = 25$.

14. Стара основа ABC правильної трикутної піраміди $MABC$ рівна 6 см, а відрізок, що з'являється в вершину M піраміди з центром O основи, — 8 см (рис. 48). Знайдіть:

- бокові канти піраміди;

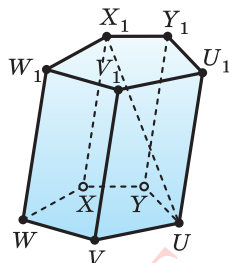


Рис. 46

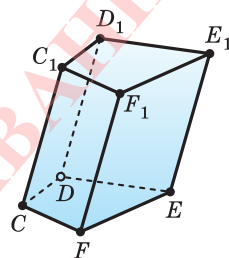


Рис. 47

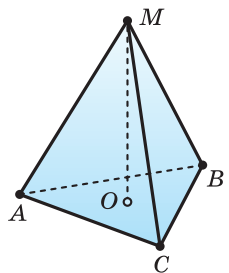


Рис. 48

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

15. Бакавая паверхня правільнай трохвугольнай піраміды роўная $30\,420\text{ мм}^2$, а яе бакавы кант — 169 мм . Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

16. Апафема правільнай трохвугольнай піраміды роўная 15 см , а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 12 см . Знайдзіце:

а) бакавы кант і старану асновы піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

17. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 12 см , а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 16 см . Знайдзіце:

а) бакавыя кант і апафему піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

18. Бакавая паверхня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 240 см^2 , а яе бакавы кант — 12 см . Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

19. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 30 см , а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 24 см . Знайдзіце:

а) бакавы кант і старану асновы піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

20. Дакажыце, што колькасць вяршынь любой прызмы — лік цотны, а колькасць яе кантаў — лік, кратны трым.

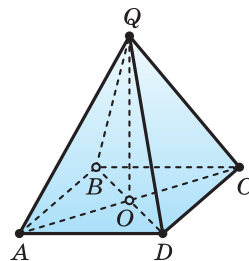
21. Асновай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ са стараной, роўнай 10 см , адна з дыяганалей якога роўная 16 см . Адрэзак, што злучае вяршыню Q піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 14 см (рыс. 49). Знайдзіце:

а) бакавыя канты піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

22. Асновай піраміды $REFGH$ з'яўляецца паралелаграм $EFGH$ са старанамі 10 см і 18 см і плошчай 90 см^2 . Адрэ-



Рыс. 49

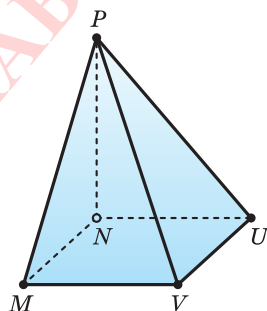
зак, што злучае вяршыню R піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 6 см. Знайдзіце:

- а) бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

23. Асновай піраміды з'яўляецца паралелаграм са старанамі 8 м і 10 м і меншай дыяганаллю — 6 м. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 4 м. Знайдзіце:

- а) бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

24. Асновай піраміды $PMNUV$ з'яўляецца квадрат $MNUV$ (рыс. 50). Бакавы кант PN перпендыкулярны да кожнай прамой плоскасці асновы, што праходзіць праз пункт N , вуглы M і U граней PMV і PUV прамыя, а вуглы M і U граней PMN і PUN роўныя 45° кожны. Найбольшы бакавы кант роўны 24 см. Знайдзіце:



Рыс. 50

- а) іншыя бакавыя канты піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

25. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 10 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — $\sqrt{69}$ см. Знайдзіце:

- а) бакавы кант і апафему піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

26. Бакавая паверхня правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 150 см^2 , а яе бакавы кант — 10 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

27. Апафема правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 30 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 24 см. Знайдзіце:

- а) бакавы кант і старану асновы піраміды;
- б) бакавую паверхню піраміды;
- в) поўную паверхню піраміды.

28. Основай піраміды з'яўляецца ромб са стараной 15 см і меншай дыяганаллю 18 см. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей, перпендыкулярны ім і роўны 12 см. Знайдзіце вышыні граней піраміды.

29. Дакажыце, што бакавая паверхня цыліндра роўная здабытку даўжыні акружнасці яго асновы і ўтваральніка.

30. Знайдзіце бакавую паверхню цыліндра, радыус асновы і ўтваральнік якога адпаведна роўныя:

- а) 7 см і 12 см; в) 1 м і 12 дм;
б) 12 см і 7 см; г) 0,7 м і 1,2 м.

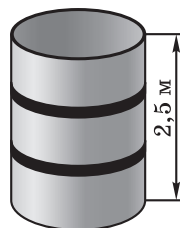
31. Плошча бакавой паверхні цыліндра роўная 300π см², а ўтваральнік роўны 6 см. Знайдзіце плошчу асновы цыліндра.

32. Плошча бакавой паверхні цыліндра роўная 90π м², а ўтваральнік роўны 5 м. Знайдзіце поўную паверхню цыліндра.

33. Дыяметр асновы цыліндра роўны 1 м, яго ўтваральнік роўны даўжыні акружнасці асновы. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні цыліндра.

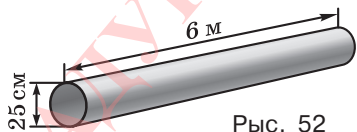
34. Утваральнік цыліндра на 12 см большы за радыус яго асновы, а поўная паверхня роўная 128π см². Знайдзіце радыус асновы і ўтваральнік цыліндра.

35. Вызначыце, колькі спатрэбіцца фарбы, каб пафарбаваць з двух бакоў бак цыліндрычнай формы (рыс. 51) вышынёй 2,5 м з дыяметрам асновы 1,2 м, улічыўшы, што пласт фарбы мае таўшчыню 0,1 мм.



Рыс. 51

36. Вызначыце, колькі ліставой бляхі спатрэбіцца на выраб трубы (рыс. 52) даўжынёй 6 м і дыяметрам 25 см, улічыўшы, што на швы расходуюцца 2,5 % плошчы бакавой паверхні трубы.



Рыс. 52

37. З квадрата, дыяганаль якога роўная d , утворана цыліндрычная паверхня. Знайдзіце плошчу асновы адпаведнага цыліндра.

38. Адзін цыліндр утвораны вярчэннем прамавугольніка з вымярэннямі a і b вакол стараны даўжынёй a , другі —

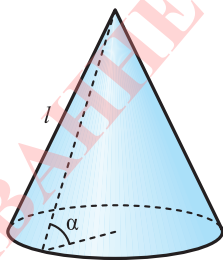
в'ярчэннем вакол стараны даўжынёй b . Дакажыце, што бакавыя паверхні гэтых цыліндраў роўныя, і вызначыце адносіну іх поўных паверхняў.

39. Адрэзак, што злучае вяршыню конуса з цэнтрам яго асновы, роўны 35 мм, а радыус яго асновы — 12 мм. Знайдзіце ўтваральнік конуса.

40. Адрэзак, што злучае вяршыню конуса з цэнтрам яго асновы, роўны 63 см, а дыяметр яго асновы — 32 см. Знайдзіце бакавую паверхню конуса.

41. Утваральнік конуса роўны l і ўтварае з радыусам асновы вугал α (рыс. 53). Знайдзіце плошчу асновы конуса, улічыўшы, што:

- а) $l = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$;
- б) $l = 24$ дм, $\alpha = 45^\circ$;
- в) $l = 5$ м, $\alpha = 60^\circ$.



Рыс. 53

42. Утваральнік конуса роўны l і ўтварае з радыусам асновы вугал α . Знайдзіце поўную паверхню конуса, улічыўшы, што:

- а) $l = 18$ см, $\alpha = 30^\circ$;
- б) $l = 20$ дм, $\alpha = 45^\circ$;
- в) $l = 2,4$ м, $\alpha = 60^\circ$.

43. Знайдзіце вугал разгорткі бакавой паверхні конуса, утваральнік якога роўны 5 м, а дыяметр асновы — 6 м.

44. Знайдзіце даўжыню дугі сектара разгорткі бакавой паверхні конуса, улічыўшы, што ўтваральнік конуса роўны 12 см і ўтварае з радыусам яго асновы вугал у 60° .

45. Знайдзіце радыус асновы і даўжыню адрэзка, што злучае вяршыню конуса з цэнтрам яго асновы, улічыўшы, што разгорткай яго бакавой паверхні з'яўляецца сектар, радыус якога роўны 36 см, а цэнтральны вугал — 120° .

46. Знайдзіце бакавую паверхню конуса, радыус асновы і ўтваральнік якога адпаведна роўныя:

- а) 11 см і 8 см;
- б) 8 см і 11 см;
- в) 3 м і 18 дм;
- г) 2,7 м і 1,2 м.

47. Плошча бакавой паверхні конуса роўная 540π см², а ўтваральнік роўны 9 дм. Знайдзіце плошчу асновы конуса.

48. Плошча бакавой паверхні конуса роўная 80π м², а ўтваральнік роўны 10 м. Знайдзіце поўную паверхню конуса.

49. Дыяметр асновы конуса роўны 10 м, яго ўтваральнік роўны даўжыні акружнасці асновы. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні конуса.

50. Утваральнік конуса на 24 см большы за радыус яго асновы, а поўная паверхня роўная 576π см². Знайдзіце радыус асновы і ўтваральнік конуса.

51. Адзін конус утвораны вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі a і b вакол катэта даўжынёй a , другі — вярчэннем вакол катэта даўжынёй b . Вывядзіце, ці роўныя бакавыя паверхні гэтых конусаў, і знайдзіце адносіну іх поўных паверхняў.

52. Дыяганалі прамавугольніка перасякаюцца пад вуглом 60° . Якія вуглы ўтварае дыяганаль прамавугольніка з яго старанамі?

53. Дыяганалі ромба адносяцца як 3 : 4, а яго перыметр роўны 60. Знайдзіце плошчу ромба.

54. У квадрат умежаны круг, а ў круг — правільны шасцівугольнік. Знайдзіце адносіну плошчаў гэтых фігур.

55. У акружнасць з радыусам 65 умежаны прамавугольнік, адна старана якога большая за другую ў 2,4 раза. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

56. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1$;

в) $\frac{5x-2}{8} - \frac{3x-1}{4} \geq -\frac{2}{3}$;

б) $\frac{7x+1}{9} - \frac{4x-5}{5} < 1$;

г) $\frac{5x-1}{4} - \frac{8x-3}{5} \leq -\frac{3}{2}$.

57. Рашыце няроўнасць:

а) $x^2 - 2x - 3 < 0$;

в) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$;

б) $2x^2 - 5x - 3 > 0$;

г) $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

58. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$;

в) $\frac{4x+3}{2x-1} \geq 1$;

б) $\frac{3-0,5x}{2-4x} > 0$;

г) $\frac{3-4x}{3x+5} \leq -1$.

59. Аўтамабіль ехаў спачатку са скорасцю 63 км/г, а затым павялічыў яе і з большай скорасцю праехаў 54 км. Знайдзіце большую скорасць руху аўтамабіля, улічыўшы,

што на ўвесь шлях было затрачана 3 г, а сярэдняя скорасць на ўсім шляху аказалася роўнай 67 км/г.

60. Ёсць дзве каробкі для пакавання цукерак. У адной умяшчаецца 54 цукеркі, у другой — па 4 цукеркі ў адным радзе, а ўсяго ў абедзвюх каробках — 10 радоў. Знайдзіце колькасці радоў у другой каробцы, улічыўшы, што ўсе цукеркі з абедзвюх каробак умяшчаюцца дакладна ў трэцюю каробку, у якой радоў столькі сама, колькі іх разам у першай і другой каробках, а ў адным радзе ўкладваецца 7 цукерак.

61. На адрэзку AB даўжынёй 40 см выбраны пункт K , і на адрэзках-частках KA і KB пабудаваны прамавугольнікі $KACD$ і $KBFE$, у першым з якіх старана AC роўная 40 см, а плошча другога — 360 см^2 (рыс. 54). Знайдзіце вымярэнні прамавугольніка $KBFE$, улічыўшы, што калі на адрэзку AB пабудавалі трэці прамавугольнік $ABGH$ з плошчай, роўнай суме плошчаў прамавугольнікаў $KACD$ і $KBFE$, то яго другое вымярэнне аказалася роўным 34 см.

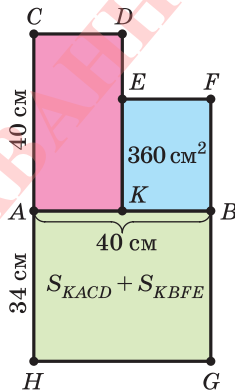


Рис. 54

* * *

62. Колькі агульных пунктаў могуць мець контуры двух чатырохвугольнікаў?

63. Адлегласць ад цэнтра апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці да стараны AB роўная d . На старане BC выбраны такі пункт D , што $BD = 0,5 AB$. Знайдзіце CD , улічыўшы, што $\angle B = 60^\circ$.

64. Знайдзіце суму

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \ddots}}}} + \frac{1}{2007}$$

2. Прамыя і плоскасці

Нашы прасторавыя ўяўленні падказваюць, што прамыя і плоскасці ў прасторы могуць размяшчацца па-рознаму.

Дзве прамыя плоскасці могуць мець толькі адзін агульны пункт, такія прамыя называюцца *перасякальнымі*. На рысунку 55 паказаны перасякальныя прамыя a і b і іх адзіны агульны пункт T .

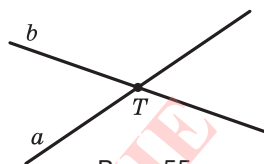


Рис. 55

Дзве прамыя плоскасці могуць не мець агульных пунктаў. Тады іх называюць *паралельнымі*. На рысунку 56 паказаны паралельныя прамыя c і d . У прасторы дзве прамыя могуць быць размяшчаны так, што яны не ляжаць у адной плоскасці, г. зн. няма такой плоскасці,

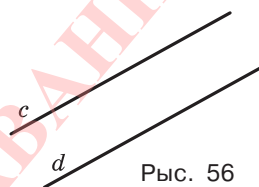


Рис. 56

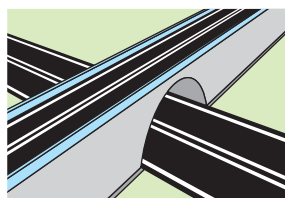


Рис. 57

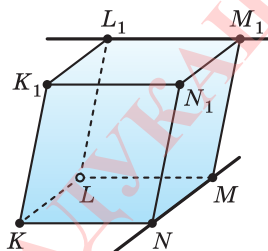


Рис. 58

якой бы яны абедзве належалі. Такія прамыя называюцца *скрыжавальнымі*. Уяўленне пра такія прамыя даюць дзве дарогі, з якіх адна праходзіць па эстакадзе, а другая — пад эстакадай (рис. 57). Такімі з'яўляюцца прамыя, што праходзяць праз канты MN і L_1M_1 паралелепіпэда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рис. 58).

Якім можа быць узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці?

Праяма можа ляжаць у плоскасці (рис. 59). Калі праяма не ляжыць у плоскасці, то яна можа перасякаць яе ў пэўным пункце (рис. 60) або не мець з плоскасцю ні аднаго агульнага пункта (рис. 61). У апошнім выпадку



Рис. 59

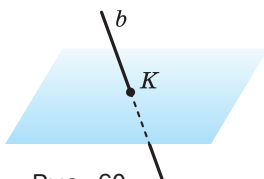


Рис. 60

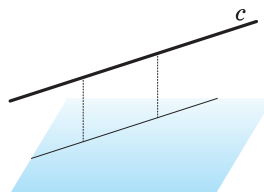


Рис. 61

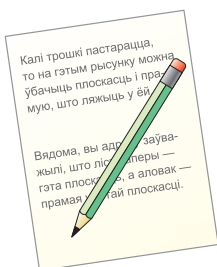


Рис. 62

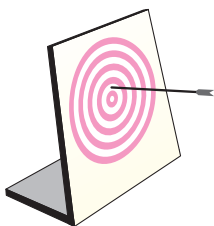


Рис. 63

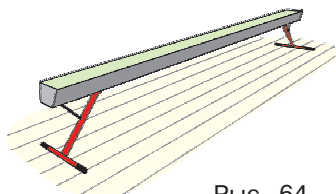


Рис. 64

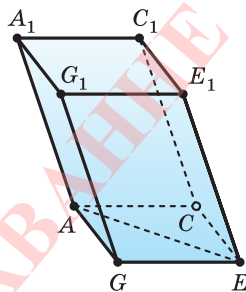


Рис. 65

прамая і плоскасць называюцца *паралельнымі*. Уяўленне пра прамую, што ляжыць у плоскасці, дае аловак, які ляжыць на сталае (рис. 62), пра перасякальныя прамую і плоскасць — страла, выпушчаная з лука, якая патрапіла ў плоскую мішэнь (рис. 63), пра прамую, якая не перасякае плоскасць, — падлога ў спартыўнай зале і гімнастычнае бярвяно (рис. 64). Указаныя віды ўзаемнага размяшчэння прамой і плоскасці можна прасачыць і на відарысе паралелепіпеда (рис. 65). Прамая, якой належыць дыяганаль AE грані $ACEG$, ляжыць у плоскасці гэтай грані. Прамая, якая праходзіць праз кант AA_1 , перасякае плоскасць грані $ACEG$. Прамая, якая змяшчае кант A_1C_1 , паралельная плоскасці грані $ACEG$.

Як могуць размяшчацца ў прасторы дзве плоскасці?

Плоскасці могуць перасякацца па прамой (рис. 66) або не мець агульных пунктаў (рис. 67). У адпаведнасці з гэтым іх называюць *перасякальнымі* або *паралельнымі*. Уяўленне пра перасякальныя плоскасці даюць сталёныя і бакавіна стала (рис. 68), пра паралельныя плоскасці — падлога і столь у памяшканні (рис. 69). На відарысе паралелепіпеда, што на рысунку 65, перасякальнымі з'яўляюцца

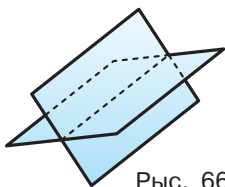


Рис. 66

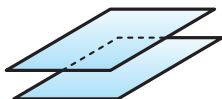


Рис. 67

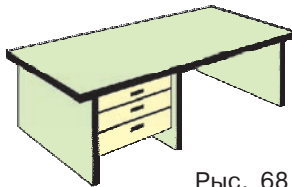


Рис. 68

ца плоскасці граней AGG_1A_1 і $AGEC$, паралельнымі — плоскасці граней AGG_1A_1 і CEE_1C_1 .

Знак \parallel выкарыстоўваюць не толькі для абазначэння паралельнасці прамых, а і паралельнасці прамой і плоскасці і дзвюх плоскасцей. Калі ўлічыць, што прамыя абазначаюцца малымі лацінскімі літарамі a , b , c , ..., а плоскасці — малымі грэчаскімі літарамі α , β , γ , ..., то запісы $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ азначаюць, што паралельныя прамыя a і b , прамая c і плоскасць α , плоскасці α і β .

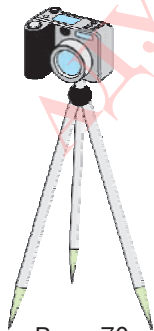
Тэорыя ўзаемнага размяшчэння прамых і плоскасцей у прасторы грунтуецца на наступных аксіёмах.

Аксіёма 1. *Калі тры пункты не ляжаць на адной прамой, то праз іх праходзіць адзіная плоскасць.*

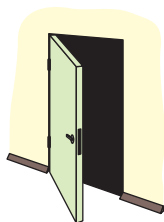
Аксіёма 2. *Калі два пункты прамой ляжаць у плоскасці, то кожны пункт гэтай прамой належыць плоскасці. У гэтым выпадку гавораць, што прамая ляжыць у плоскасці.*

Аксіёма 3. *Калі дзве плоскасці маюць агульны пункт, то яны маюць і агульную прамую, якая праходзіць праз гэты пункт.*

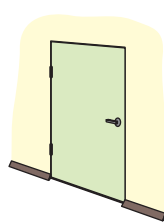
Уласцівасць плоскасці, якую фіксуе аксіёма 1, часта выкарыстоўваецца на практыцы. Вастры ножак штатыва фотаапарата (рыс. 70) належаць адной плоскасці, і таму становішча фотаапарата ўстойлівае. Дзверы, замацаваныя на дзвюх петлях, не займаюць пэўнае становішча (рыс. 71), а калі дадаць трэці пункт мацавання — замок, становішча дзвярэй фіксуецца (рыс. 72). Калі ножкі табурэта няправільна падрэзаныя, то табурэт стаіць на трох ножках, а чацвёртая ножка вісіць над падлогай (рыс. 73).



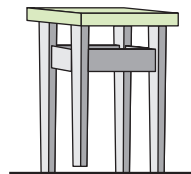
Рыс. 70



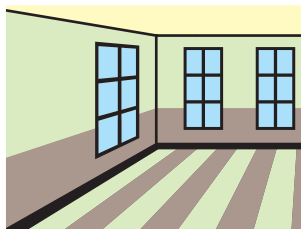
Рыс. 71



Рыс. 72



Рыс. 73



Рыс. 69

Уласцівасць плоскасці, якую выражае аксіёма 2, выкарыстоўваюць для праверкі роўнасці рысавальнай лінейкі. Лінейку прыкладваюць краем да паверхні стала: калі край прамалінейны, то ён усімі сваімі пунктамі прылягае да паверхні стала (рыс. 74), а калі няроўны, то паміж краем лінейкі і паверхняй стала ёсць шчыліна (рыс. 75 і 76).

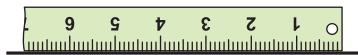


Рис. 74

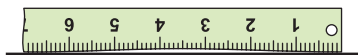


Рис. 75

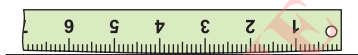


Рис. 76

Уласцівасць плоскасці, зафіксаваная аксіёмай 3, выяўляецца пры перасячэнні дзвюх сумежных сцен пакоя (рыс. 77).



Рис. 77

Адзначым, што ў стэрэаметрыі праўдзяцца ўсе аксіёмы планіметрыі і ўсе доказы ў ёй сцверджанні. У прыватнасці, прыметы роўнасці і прыметы падобнасці трохвугольнікаў праўдзяцца і для трохвугольнікаў, што ляжаць у розных плоскасцях.

У адпаведнасці з аксіёмай 1 плоскасць вызначаецца трыма сваімі пунктамі A, B, C , таму іншы раз плоскасць абазначаюць трыма вялікімі лацінскімі літарамі: плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B, C , абазначаюць ABC .

Прыклад. На кантах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 прызмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ выбраны пункты A, B, C , прычым прамая, якую вызначаюць пункты B і C , не паралельная канту K_1N_1 (рыс. 78). Плоскасці ABC і KNN_1 маюць агульны пункт A . У адпаведнасці з аксіёмай 3 яны маюць агульную прамую. Пабудуем яе.

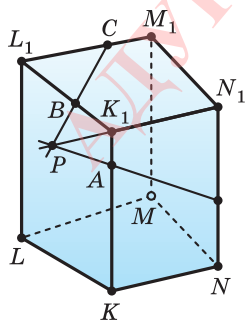


Рис. 78

Пункт A належыць грані KK_1N_1N , а пункты B, C — грані $K_1L_1M_1N_1$, і гэтая грані перасякаюцца па прамой K_1N_1 . Гэтая прамая і прамая BC ляжаць у адной плоскасці і не паралельныя. Таму яны перасякаюцца ў пэўным пункце.

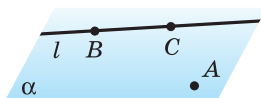
Знойдзем яго, прадоўжыўшы адрэзкі BC і K_1N_1 , — атрымаем пункт P .

Пункт P належыць прамым BC і K_1N_1 , значыць, ён належыць як плоскасці ABC , так і плоскасці KK_1N_1 . Гэтым самым плоскасцям належыць і пункт A . Значыць, прмая, што вызначаецца пунктамі P і A , належыць і плоскасці ABC , і плоскасці KK_1N_1 . Іншымі словамі, плоскасці ABC і KK_1N_1 перасякаюцца па прамой PA .

Тэарэма. 4. Праз прамую і пункт па-за ёй праходзіць адзіная плоскасць.



Рыс. 79



Рыс. 80

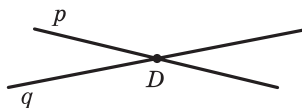
Доказ. Няхай ёсць прмая l і пункт A , які не належыць прамой l (рыс. 79). Выберам на прамой l два пункты — B і C . Пункты A, B, C не ляжаць на адной прамой, таму па аксіёме 1 праз іх праходзіць пэўная плоскасць α (рыс. 80). Плоскасць α у адпаведнасці з аксіёмай 2 праходзіць і праз прамую l , бо два яе пункты B і C належаць плоскасці α .

Дапусцім, што праз прамую l і пункт A праходзіць яшчэ і плоскасць β . Тады плоскасць β праходзіць як праз пункт A , так і праз пункты B і C . Паколькі па аксіёме 1 праз тры розныя пункты праходзіць адзіная плоскасць, то плоскасць β супадае з плоскасцю α . Значыць, праз прамую l і пункт A па-за ёй праходзіць адзіная плоскасць.

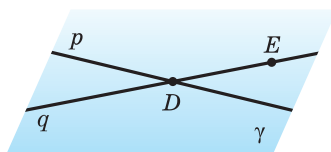
Тэарэма 5. Праз дзве перасякальныя прамыя праходзіць адзіная плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве перасякальныя прамыя p і q і D — іх агульны пункт (рыс. 81).

Выберам на прамой q які-небудзь пункт E , адрозны ад пункта D (рыс. 82). У адпаведнасці з тэарэмай 4 праз прамую p і пункт E праходзіць адзіная плоскасць γ . Плоскасць γ праходзіць і праз прамую q , бо два пункты D і E прамой q належаць плоскасці γ .



Рыс. 81



Рыс. 82

Тэарэма 5 знаходзіць сваё прымяненне на практыцы. Калі цесляру трэба распілаваць брус пад пэўным вуглом, ён, каб намеціць плоскасць распілу, праводзіць у двох сумежных гранях бруса перасякальныя прамыя PQ і PS (рыс. 83).

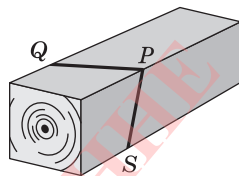


Рис. 83

- ?**
1. Якія дзве прамыя плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
 2. Якія прамыя называюцца скрыжавальнымі?
 3. Як могуць размяшчацца дзве прамыя ў прасторы?
 4. Якія прмая і плоскасць называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
 5. Як могуць размяшчацца ў прастору прмая і плоскасць?
 6. Якія дзве плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
 7. Як могуць размяшчацца ў прастору дзве плоскасці?
 8. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, што праходзіць праз тры пункты, і прывядзіце прыклады мадэлей, што ілюструюць гэтую ўласцівасць.
 9. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, два пункты якой належаць плоскасці, і прывядзіце прыклады мадэлей, што ілюструюць гэтую ўласцівасць.
 10. Сфармулюйце ўласцівасць пра агульную прамую дзвюх плоскасцей і прывядзіце прыклады мадэлей, што ілюструюць гэтую ўласцівасць.
 11. Як абазначаюцца пункты; прамыя; плоскасці?
 12. Назавіце спосабы задання плоскасці.
- 65.** Колькі агульных пунктаў могуць мець:
- a) дзве прамыя;
 - b) прмая і плоскасць;
 - c) дзве плоскасці?
- 66.** Ці могуць мець адзіны агульны пункт:
- a) дзве прамыя;
 - b) прмая і плоскасць;
 - c) дзве плоскасці;
 - d) тры плоскасці?
- 67.** Чатыры пункты не належаць адной плоскасці. Вызначыце:
- a) ці могуць тры з іх належаць адной прамой;
 - b) колькі плоскасцей можна правесці праз іх.

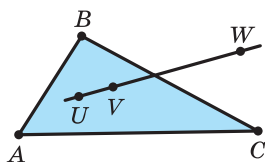


Рис. 84

68. Колькі ўтвараецца ліній пры папарным перасячэнні трох плоскасцей?

69. Пункты U і V з'яўляюцца пунктамі трохвугольніка ABC , а пункт W належыць прамой UV (рыс. 84). Ці належыць пункт W плоскасці ABC ?

70. Дакажыце, што:

а) прамая a , якая перасякае ў розных пунктах дзве перасякальныя плоскасці k і l , належыць плоскасці гэтых прамых;

б) калі пэўны пункт A належыць прамой k , якая належыць плоскасці α , то пункт A належыць плоскасці α ;

в) калі два пункты A і B належаць як прамой l , так і плоскасці α , то прамая l ляжыць у плоскасці α ;

г) калі плоскасці α і β перасякаюцца па прамой l і пункт A належыць як плоскасці α , так і плоскасці β , то пункт A належыць прамой l .

71. На рысунку 85 выяўлены відарыс паралелепіпеда $NOPQDEFC$. Назавіце:

а) прамая, перасякальныя з прамой CD ;

б) прамая, перасякальныя з прамой FP ;

в) прамая, паралельныя прамой CD ;

г) прамая, паралельныя прамой FP ;

д) прамая, скрываючыя з прамой CD ;

е) прамая, скрываючыя з прамой FP .

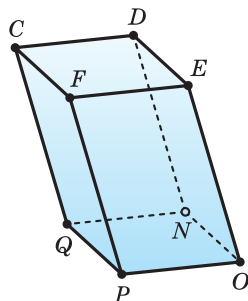


Рис. 85

72. На рысунку 86 выяўлены відарыс прызмы $ABCDEFPPQRSTU$, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:

а) прамая, перасякальныя з плоскасцю ABC ;

б) прамая, перасякальныя з плоскасцю UTF ;

в) прамая, якія ляжаць у плоскасці PTR ;

г) прамая, якія належаць плоскасці CDR ;

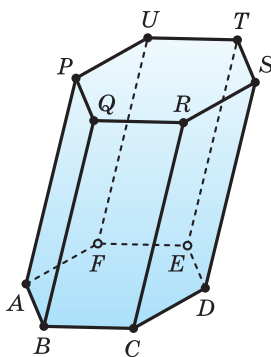


Рис. 86

д) прамыя, паралельныя плоскасці FEC ;

е) прамыя, паралельныя плоскасці AQB .

73. На rysunku 85 выяўлены відарыс паралелепіпеда $NOPQDEFC$. Назавіце:

а) плоскасці, перасякальныя з прамой CQ ;

б) плоскасці, перасякальныя з прамой OP ;

в) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NO ;

г) плоскасці, якім належыць прамая DN ;

д) плоскасці, паралельныя прамой CF ;

е) плоскасці, паралельныя прамой EO .

74. На rysunku 86 выяўлены відарыс прызмы $ABCDEF PQRSTU$, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:

а) плоскасці, перасякальныя з плоскасцю UQR ;

б) плоскасці, перасякальныя з прамой FT ;

в) плоскасці, паралельныя плоскасці ACE ;

г) плоскасці, паралельныя плоскасці ETS .

75. Выкарыстаўшы рысунак 87, назавіце:

а) пункты, якія ляжаць у плоскасцях LMQ і NME ;

б) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NR ;

в) пункт перасячэння прамой BC з плоскасцю KLN ;

г) пункты перасячэння прамых PL і ND з плоскасцю OPR ;

д) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці KON і KLM ;

е) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RDQ і MNK ;

ж) пункт перасячэння прамых AB і LM ;

з) пункт перасячэння прамых RQ і BD ;

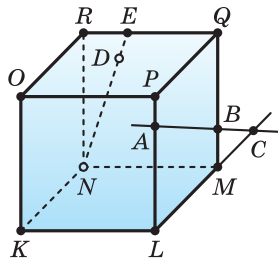
і) пункт перасячэння прамых BQ і MC .

76. Пункты A, B, C, D не ляжаць у адной плоскасці. Ці могуць:

а) якія-небудзь тры з іх ляжаць на адной прамой;

б) прамыя AB і CD перасякацца?

77. Дакажыце, што праз тры дадзеныя пункты, што ляжаць на адной прамой, праходзіць плоскасць. Колькі ёсць такіх плоскасцей?



Рыс. 87

78. Дакажыце, што калі дзве сумежныя вяршыні чатырохвугольніка і пункт перасячэння яго дыяганалей належаць пэўнай плоскасці, то чатырохвугольнік цалкам ляжыць у гэтай плоскасці.

79. Ці праўдзівае сцверджанне:

а) прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна перасякае дзве яго стараны ва ўнутраных пунктах;

б) прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна перасякае дзве яго стараны?

80. Ці могуць дзве плоскасці мець:

а) толькі адзін агульны пункт;

б) толькі два агульныя пункты;

в) толькі адну агульную прамую;

г) толькі дзве агульныя прамыя?

81. Дакажыце, што любая прамая, якая:

а) праходзіць праз вяршыню A трохвугольнай піраміды $ABCD$ і перасякае прамую CD , належаць плоскасці ACD ;

б) не праходзіць праз вяршыню B трохвугольнай піраміды $ABCD$ і перасякае як прамую BC , так і прамую BD , належаць плоскасці BCD .

82. Плоскасць β праходзіць праз дзве сумежныя вяршыні трапецыі і пункт перасячэння яе дыяганалей. Дакажыце, што дзве іншыя вяршыні трапецыі ляжаць у плоскасці β .

83. Ёсць тры пункты A , B , C , якія не ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія:

а) праходзяць праз пункт A і перасякаюць прамую BC , ляжаць у адной плоскасці;

б) не праходзяць праз пункт A і перасякаюць абедзве прамыя AB і AC , ляжаць у адной плоскасці.

84. Ці можна сцвярджаць, што прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна:

а) праходзіць праз вяршыню трохвугольніка;

б) перасякае дзве стараны трохвугольніка;

в) перасякае ў розных пунктах дзве стараны трохвугольніка;

г) перасякае дзве прамыя, на якіх ляжаць стараны трохвугольніка;

д) перасякае тры прамыя, на якіх ляжаць стараны трохвугольніка?

85. Ёсць прамая a і пункт K , не прыналежны ёй. Дакажыце, што ўсе прамыя, што праходзяць праз пункт K і перасякаюць прамую a , ляжаць у адной плоскасці.

86. Ці праўда, што:

- а) праз любыя два пункты праходзіць адзіная прамая;
- б) праз любыя тры пункты праходзіць адзіная плоскасць;
- в) праз любыя прамую і пункт праходзіць адзіная плоскасць;

г) тры папарна перасякальныя прамыя ляжаць у адной плоскасці;

д) праз любыя дзве перасякальныя прамыя праходзіць адзіная плоскасць?

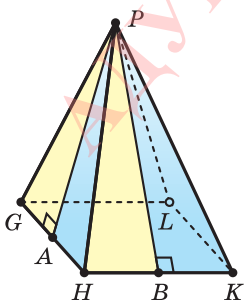
87. Чатырохвугольная піраміда $PGHKL$ на рысунку 88 — правільная, а PA і PB — вышыні яе граней PGH і PHK . Дакажыце, што трохвугольнікі PGA і PHB роўныя.

88. Бакавая паверхня прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай роўная 12 см^2 . Знайдзіце дыяганаль бакавой грані, улічывшы, што дыяганаль асновы роўная $\sqrt{2} \text{ см}$.

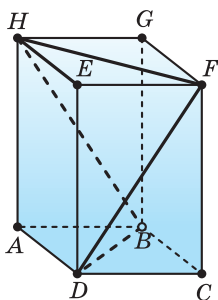
89. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDHGFE$ з'яўляецца квадрат $ABCD$ са стараной 6 см , а бакавы кант AH паралелепіпеда роўны 8 см (рыс. 89). Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $HFDBH$.

90. Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы $IJKPML$ (рыс. 90) адносіцца да бакавога канта як $2 : 3$. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічывшы, што даўжыня ломанай $IPLKMI$ роўная $16 + 4\sqrt{13} \text{ дм}$.

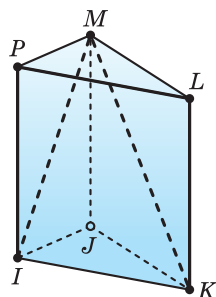
91. Пункты A і B дзеляць канты QD і QE правільнай чатырохвугольнай піраміды $QCDEF$ з усімі роўнымі кантамі ў адносіне $5 : 7$, калі лічыць ад вяршыні Q . Знайдзі-



Рыс. 88



Рыс. 89



Рыс. 90

це поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што даўжыня ломанай $ABQFA$ роўная 70 см.

92. Плошча бакавой паверхні прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ з квадратнай асновай роўная 2640 мм^2 . Знайдзіце канты паралелепіпеда, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік NKK_1 , роўны 5 мм.

93. Дыяганаль бакавой грані прамавугольнага паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай роўная 52 см, а радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік CC_1D , роўны 8 см. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.

94. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны 8 см, а яе бакавая паверхня — $16\sqrt{15} \text{ см}^2$. Знайдзіце старану асновы піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у бакавую грань, роўны $2\sqrt{0,6}$ см.

95. Асновай прамой трохвугольнай прызмы з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, радыусы акружнасцей, умежаных у яго і апісаных каля яго, адпаведна роўныя 4 см і 10 см. Знайдзіце паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 16 см.

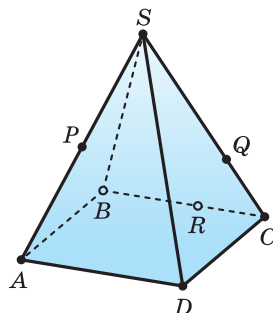
96. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабокая трапецыя, у якую можна ўмежыць акружнасць. Бакавая старана трапецыі роўная 12 см і ўтварае з асновай вугал у 30° . Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што яе поўная паверхня роўная 336 см^2 .

97. Пункты M і N належаць кантам SS_1 і RR_1 прызмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Дакажыце, што прамая MN належыць плоскасці RSS_1 .

98. Прамая a ляжыць у адной з перасякальных плоскасцей β і перасякае другую плоскасць γ . Дакажыце, што прамая a перасякае лінію перасячэння плоскасцей β і γ .

99. Пункты P , Q і R належаць адпаведна кантам SA , SC і BC піраміды $SABCD$ (рыс. 91). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць PQR перасякае плоскасць:

- а) SBC ; в) ABC ; д) SDC .
б) SAB ; г) SBD ;



Рыс. 91

100. Выкарыстаўшы рысунак 92, на якім пункты B і C належаць кантам PK і PT трохвугольнай піраміды $KPTU$, а пункт A ляжыць на прамой, што праходзіць праз кант KU :

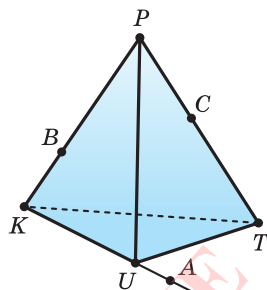


Рис. 92

а) назавіце прамыя, якім належаць пункт A ;

б) назавіце прамыя, якім належаць пункт U ;

в) дакажыце, што прамая AB ляжыць у плоскасці KPU ;

г) устанавіце, якой грані піраміды належаць прамая BC ;

д) устанавіце, якой грані піраміды належаць прамая KT ;

е) назавіце прамыя, праз якія праходзіць плоскасць KPT .

101. Пункт M — унутраны пункт канта AJ трохвугольнай піраміды AJK , пункт N ляжыць на прамені AK за пунктам K . Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой MN з плоскасцю IJK ;

б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IMN і IJK .

102. Выкарыстаўшы рысунак 93, на якім E — пункт канта AI чатырохвугольнай піраміды $AIJKL$, пункт F належаць канту AK , а пункт G ляжыць на прамені AK за пунктам K :

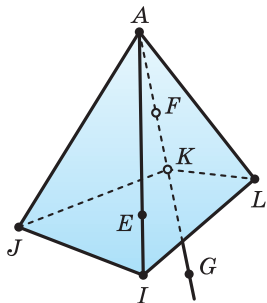


Рис. 93

а) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IAJ і JAK ;

б) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці AJG і KAL ;

в) дакажыце, што прамая EF ляжыць у плоскасці IAK ;

г) дакажыце, што прамыя EF і FG ляжаць у адной плоскасці;

д) назавіце плоскасці, якім належаць прамая JL .

103. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў TZ і YZ піраміды $RTXYZ$. Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой AB і плоскасці RXY ;

б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RAB і RXY .

104. На адрэзку MN як на старане ў розных плоскасцях пабудаваны два чатырохвугольнікі $MNAB$ і $MNCD$, на адрэзках NA і NC выбраны ўнутраныя пункты R і S

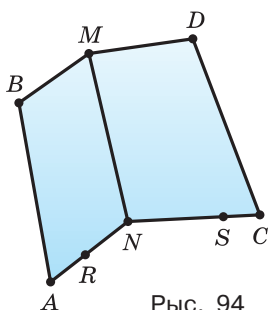


Рис. 94

адпаведна (рис. 94). Зробіце такі рисунки у шпальці:

а) побудуйте пункт, у якому пряма MR перетинає площину ABC ;

б) побудуйте пункт перетинання прямої CD з площиною ARS ;

в) докажите, що пряма RS належить площині CAN .

105. На рисунку 95 виявлена чотирикутна призма $CDEF C_1 D_1 E_1 F_1$, пункт P вибрано на промені $D_1 E_1$ за пунктом E_1 , а пункт R — на кінці $C_1 F_1$. Використайте цей рисунок:

а) докажите, що пряма PR належить площині $C_1 D_1 F_1$;

б) докажите, що пряма PR перетинає пряму $E_1 F_1$;

в) назвіть пряму, по якій площина $C_1 D_1 F_1$ перетинає площину $DD_1 E$;

г) назвіть пряму, по якій площина $C_1 D_1 F_1$ перетинає площину PRF ;

д) назвіть пункт, у якому пряма PR перетинає площину DEE_1 ;

е) назвіть пункт, у якому пряма PR перетинає площину $FF_1 E_1$.

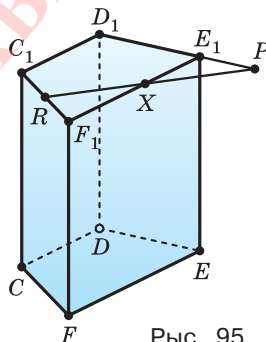


Рис. 95

106. Пункти A і B — внутрішні пункти ребер KM і KQ призми $KMOQ K_1 M_1 O_1 Q_1$. Побудуйте:

а) пункт, у якому пряма AB перетинає площину $M_1 M O$;

б) пряму, по якій площина ABO_1 перетинає площину MOO_1 .

107. Пункти A , B , C з'являються серединами ребер $T_1 U_1$, $U_1 V_1$, $V_1 W_1$ паралелепіпеда $TUVW T_1 U_1 V_1 W_1$. Побудуйте:

а) пункт, у якому пряма AB перетинає площину $WW_1 V_1$;

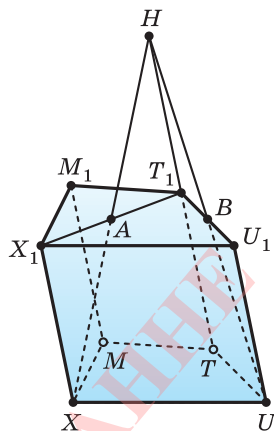
б) пряму, по якій площина ABC перетинає площину $WW_1 V_1$.

108. Діагоналі KM і LN основи $KLMN$ піраміди $AKLMN$ перетинаються в пункті O , пункт B — внутрішній пункт відрізка KO , а пункт C лежить на промені LN за пунктом N . Побудуйте:

а) пункт, у якому пряма BC перетинає площину ALM ;

б) пряму, по якій перетинаються площини ABC і ALM .

109. Ёсць прызма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На прамені TT_1 за пунктам T_1 выбраны пункт H , праз які праведзены прамыя HU і HX (рыс. 96). Выкарыстаўшы гэта:



Рыс. 96

а) дакажыце, што прамыя HU і T_1U_1 перасякаюцца ў пэўным пункце B ;

б) назавіце пункт, у якім прамая HU перасякае плоскасць $M_1T_1X_1$;

в) дакажыце, што прамыя HX і T_1X_1 перасякаюцца ў пэўным пункце A ;

г) дакажыце, што прамая HX і плоскасць $M_1T_1U_1$ перасякаюцца ў пункце A ;

д) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і T_1TU ;

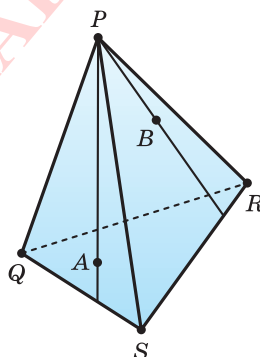
е) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і MTX .

110. Ёсць паралелепіпед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой EE_1 з лініяй перасячэння плоскасцей BC_1D і C_1CE ;

б) лінію перасячэння плоскасцей BC_1D і EDD_1 .

111. Пункты A і B ляжаць у гранях PQS і PRS трохвугольнай піраміды $PQRS$ (рыс. 97). Зрабіце такі рысунак у шшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая AB перасякае:

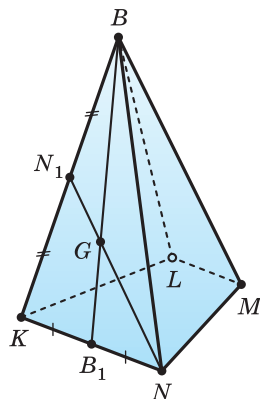


Рыс. 97

а) плоскасць QRS ;

б) плоскасць PQR .

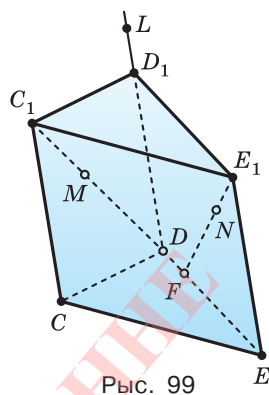
112. Медыяны BB_1 і NN_1 грані BKN чатырхвугольнай піраміды $BKLMN$ перасякаюцца ў пункце G (рыс. 98). Зрабіце такі рысунак у шшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая MG перасякае плоскасць BLN .



Рыс. 98

113. Пункт M выберыце на дыяганалі DC_1 грані трохвугольнай прызмы

$CDEC_1D_1E_1$, пункт N — на адрэзку E_1F , дзе F — унутраны пункт канта DE , пункт L — на прамені DD_1 за пунктам D_1 (рыс. 99). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць MNL перасякае плоскасць ECC_1 .



Рыс. 99

114. Выберыце пункты A і B адпаведна на кантах MX і MY чатырохвугольнай піраміды $MXYZV$, а пункт C — на прамені YZ за пунктам Z . Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і XYZ .

115. У трохвугольніку са старанамі 4, 5, 6 праведзены бісектрысы сярэдняга па велічыні вугла і бісектрыса вугла, сумежнага з ім. Вызначыце адлегласць паміж асновамі гэтых бісектрыс.

116. Знайдзіце стораны прамавугольнага трохвугольніка, у якім бісектрыса:

а) прамога вугла дзеліць гіпатэнузу на адрэзкі даўжынямі m і n ;

б) вострага вугла дзеліць катэт на адрэзкі даўжынямі m і n , $m > n$.

117. У раўнабокім трохвугольніку косінус вугла пры аснове роўны 0,28. Знайдзіце вышыні гэтага трохвугольніка, улічыўшы, што яго перыметр роўны 16 см.

118. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y + 2 = 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14, \\ x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + xy + 3 = 0, \\ 3x - y + 7 = 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{x+3y}{y-1} - \frac{y-x}{2x} = 2, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

119. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + xy - y^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

120. Рашыце няроўнасць:

а) $x^2 + x - 6 < 0$;

д) $\frac{5}{x} - \frac{3}{3-x} \leq 0$;

б) $\frac{x-1}{x+5} \leq 0$;

е) $\frac{4}{6-x} \geq \frac{6}{x}$;

в) $(x+2)(5-x) > x+2$;

ж) $\frac{x-1}{x+5} \leq \frac{5}{x}$;

г) $\frac{2x-1}{3x+2} \geq 3$;

з) $\frac{2x-1}{3x+2} \geq \frac{x-2}{2x+3}$.

121. На адрэзку MN выбралі такі пункт A , што $AM - AN = 2$ м, і затым на атрыманых адрэзках-частках як на катэтах пабудавалі такія прамавугольныя трохвугольнікі, што пры іх вярчэнні вакол адрэзка MN утварыліся конусы, плошча асновы аднаго з якіх аказалася роўнай 42 м^2 , а аб'ём другога — 198 м^3 . Трэці конус з вышынёй, роўнай адрэзку MN , і аб'ёмам, роўным супольнаму аб'ёму першага і другога конусаў, мае аснову плошчай $55,5 \text{ м}^2$ (рыс. 100). Знайдзіце вышыні гэтых конусаў, улічывшы, што аб'ём V конуса знаходзіцца па формуле $V = \frac{1}{3} S_{\text{асн.}} \cdot H$, дзе H — вышыня конуса, а $S_{\text{асн.}}$ — плошча яго асновы.

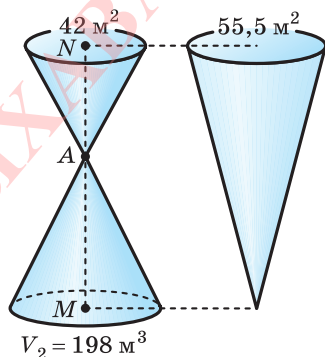


Рис. 100

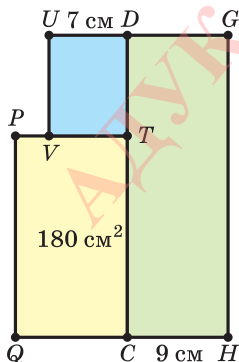


Рис. 101

122. На адрэзку CD выбраны такі пункт T , што $TC - TD = 9$ см, і на атрыманых частках TD і TC пабудавалі такія прамавугольныя $TDUV$ і $TCQP$, што шырыня TV першага з іх роўная 7 см, а плошча другога — 180 см^2 (рыс. 101). Знайдзіце вымярэнні другога прамавугольніка, улічывшы, што калі на адрэзку CD пабудавалі трэці прамавугольнік $CDGH$ з плошчай, роўнай супольнай

плошчы першага і другога прамавугольнікаў, то яго шырыня CH аказалася роўная 9 см.

123. Веласіпедыст спачатку ехаў са скорасцю 18 км/г, а затым знізіў яе і з меншай скорасцю праехаў 39 км. Знайдзіце час руху веласіпедыста з той і другой скорасцю, улічыўшы, што сярэдняя скорасць руху на ўсім шляху аказалася роўнай 15 км/г і з меншай скорасцю ён ехаў на 1 г больш.

* * *

124. Вызначыце, які з лікаў большы: $2007^{2009} \cdot 2009^{2007}$ ці 2008^{4016} .

125. Лікі α і β ёсць карані ўраўненняў $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 0$) і $x^2 - px - q = 0$ адпаведна. Дакажыце, што паміж лікамі α і β ёсць корань ураўнення $x^2 - 2px - 2q = 0$.

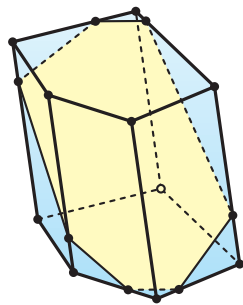
126. Кожную грань куба падзялілі на 16 квадратаў, і ў атрыманыя квадраты запісалі такія лікі, што сума кожнага з гэтых лікаў і чатырох лікаў, якія запісаны ў сумежных квадратах, роўная 13. Дакажыце, што не ўсе запісаныя лікі з'яўляюцца цэлымі.

3. Пабудаванні сячэнняў мнагаграннікаў

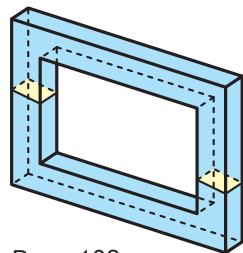
Пры вывучэнні стэрэаметрыі даводзіцца праставава фігуры паказваць на плоскіх рысунках. Часта на рысунку трэба паказаць узаемнае размяшчэнне дзвюх фігур. Калі адна з фігур — мнагаграннік, а другая — плоскасць, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе тая частка мнагагранніка, якая належыць разглядаанай плоскасці, або, іншымі словамі, *сячэнне мнагагранніка плоскасцю*. Плоскасць пры гэтым называюць *сечнай плоскасцю*.

Сечная плоскасць перасякае паверхню мнагагранніка па адрэзках, а сячэннем мнагагранніка плоскасцю з'яўляецца адзін або некалькі многавугольнікаў.

На рысунку 102 паказана сячэнне пяцівугольнай прызмы, якое з'яўляецца сямівугольнікам. Сячэнне «рамы» плоскасцю на рысунку 103 складаецца з двух чатырохвугольнікаў.



Рыс. 102



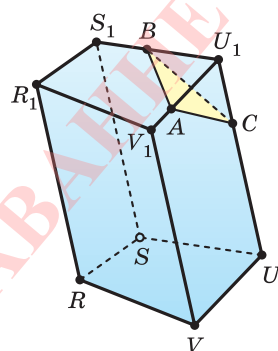
Рыс. 103

таксама належыць гэтым абедзвюм плоскасцям. Таму плоскасць β перасякае плоскасць LOM па прамой AX , а грань LOM — па адрэзку AB , дзе B — пункт перасячэння прамых AX і OM .

Гэтаксама знойдзем пункты Y і D і адрэзак AD , па якім плоскасць β перасякае грань OLK , а затым пункты Z і C і адрэзкі DC і BC . Чатырохвугольнік $ABCD$ — шуканае сячэнне.

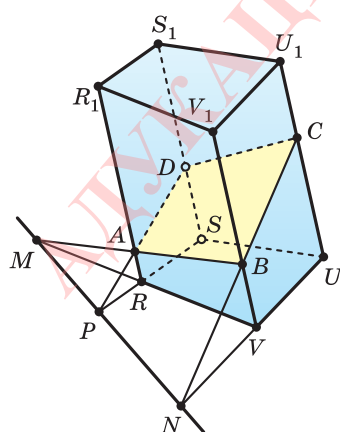
Задача 3. Пункты A, B, C — пункты на розных кантах чатырохвугольнай прызмы. Знойдзем сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

Пабудаванне шуканага сячэння залежыць ад таго, на якіх кантах прызмы ляжаць пункты A, B, C . Найбольш проста будаваць сячэнне ў тым выпадку, калі пункты A, B, C ляжаць на кантах, што выходзяць з адной вяршыні. Шуканае сячэнне у гэтым выпадку — трохвугольнік ABC (рыс. 106).



Рыс. 106

Калі пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 107, то будаваць сячэнне больш складана. Тут спачатку пабудуем след сечнай плоскасці ABC на плоскасці ніжняй асновы. Для гэтага знойдзем пункты M і N перасячэння прамых AB і BC , якія ляжаць у сечнай плоскасці, з плоскасцю $RSUV$: M — прамых AB і RV , N — прамых BC і UV . Прамая MN — агульная прамая сечнай плоскасці і плоскасці ніжняй асновы.



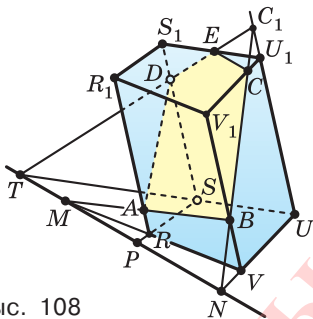
Рыс. 107

Пункт P перасячэння прамой RS са следам MN належыць і сечнай плоскасці, і плоскасці грані RR_1S_1S . Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць і пункт A , атрымліваем, што прамая PA — след сечнай плоскасці на плоскасці RR_1S_1S . Значыць, плоскасць ABC перасякае грань RR_1S_1S па адрэзку AD , а грань UU_1S_1S — па адрэзку CD . Шуканым сячэннем з'яўляецца чатырохвугольнік $ABCD$.

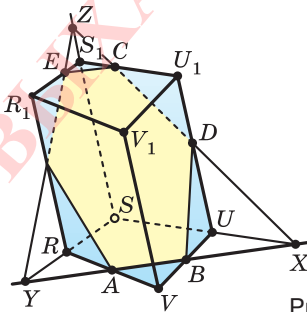
Бачым, што новым элементам у гэтым рашэнні ў параўнанні з задачай 2 з'яўляецца пабудаванне следу сечнай плоскасці на плоскасці асновы.

На рысунку 108 паказаны выпадак, калі шуканым сячэннем з'яўляецца пяцівугольнік. Тут выкарыстаны пункт C_1 перасячэння прамой UU_1 з сечнай плоскасцю. Сляды сечнай плоскасці на бакавых гранях піраміды будуюцца гэтаксама, як і ў папярэднім выпадку.

Рысунак 109 паказвае, што шуканым сячэннем чатырохвугольнай прызмы можа быць і шасцівугольнік. След AB сечнай плоскасці на плоскасці асновы дазваляе паслядоўна знайсці пункты X і Y яго перасячэння з плоскасцямі SUU_1S_1 і RSS_1R_1 , след XC сечнай плоскасці на плоскасці SUU_1S_1 , пункт Z перасячэння прамой SS_1 з сечнай плоскасцю і след ZY сечнай плоскасці на плоскасці RSS_1R_1 .



Рыс. 108



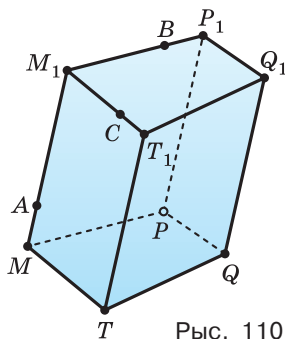
Рыс. 109



1. Якая фігура называецца сячэннем мнагакрапінніка? Якой фігурай можа быць гэтае сячэнне?
2. Якая прамая называецца следам адной плоскасці на другой?
3. Якім можа быць сячэнне плоскасцю чатырохвугольнай прызмы?

127. Пункты A , B , C ляжаць на кантах MM_1 , M_1P_1 , M_1T_1 прызмы $MPQTMM_1P_1Q_1T_1$ (рыс. 110). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

128. Выявіце куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ і пазначце пункты B і C на кантах SU і RU . Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю BCT_1 .



Рыс. 110

129. Выявіце куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і пазначце сярэдзіны A , B і C кантаў NM , NO і NN_1 . Выкарыстаўшы атрыманы рысунак:

- а) пабудуйце сячэнне куба плоскасцю ABC ;
- б) дакажыце, што трохвугольнік ABC правільны;
- в) знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , прыняўшы кант куба роўным 1 м.

130. Выявіце куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ і пазначце сярэдзіны A і B яго кантаў NQ і QR . Дакажыце, што сячэнне куба плоскасцю ABQ_1 ёсць раўнабокi трохвугольнік, і знайдзіце кант куба, улічыўшы, што перыметр гэтага трохвугольніка роўны a .

131. Канты UX , UZ , UU_1 прамавугольнага паралелепіпеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ адпаведна роўныя 6 см, 6 см, 8 см. Дакажыце, што сячэнне паралелепіпеда плоскасцю XU_1Z ёсць раўнабокi трохвугольнік, і знайдзіце вышыні гэтага трохвугольніка.

132. Выявіце прамавугольны паралелепіпед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую T_1Q_1 і вяршыню R . Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што канты RT і RQ роўныя адзін аднаму і роўныя l , а радыус акружнасці, апісанай каля чатырохвугольніка RQQ_1R_1 , роўны a .

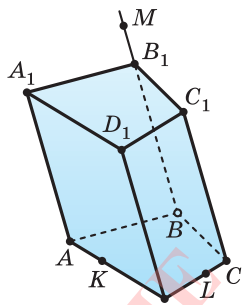
133. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы $CDEFC_1D_1E_1F_1$ роўная 12 см, а яе бакавы кант — 6 см. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю, якой належаць старана асновы і супрацьлеглая вяршыня другой асновы.

134. Кант асновы правільнай трохвугольнай піраміды і яе бакавы кант адпаведна роўныя k і l . Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, што праходзіць праз дзве вяршыні асновы і сярэдзіну бакавога канта.

135. Выявіце куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ і пазначце сярэдзіну C яго канта SS_1 . Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, што праходзіць праз прамую RT і пункт C . Знайдзіце медыяны трохвугольніка RTC , улічыўшы, што кант куба роўны 40 мм.

136. Выявіце куб $IJKLI_1J_1K_1L_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю IKJ_1 . Знайдзіце кант куба, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S .

137. Пункты K і L выбраны на кантах DA і DC прызмы $ABCD$, а пункт M — на прамені BB_1 за пунктам B_1 (рыс. 111). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю KLM .



Рыс. 111

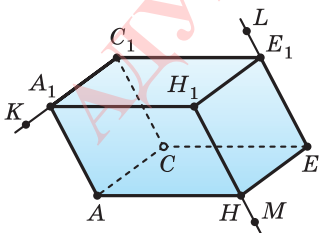
138. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскасцю KLM , улічыўшы, што пункты K, L, M ляжаць адпаведна на праменах C_1A_1, EE_1, H_1H за пунктамі A_1, E_1, H (рыс. 112).

139. Выявіце прызму $RSXYR_1S_1X_1Y_1$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны A, B, C кантаў RY, RR_1, VV_1 .

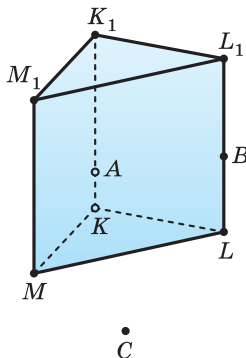
140. Пункты A і B ляжаць на кантах KK_1 і LL_1 трохвугольнай прызмы $KLMK_1L_1M_1$, а пункт C — на плоскасці KLM (рыс. 113). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

141. Пункты A і B ляжаць адпаведна на кантах KK_1 і MM_1 прызмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а пункт C — на плоскасці грані $KMOQ$ (рыс. 114). Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC .

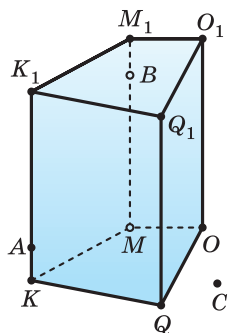
142. Выявіце піраміду $ABCD$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB, AC, AD . Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што ўсе канты гэтай піраміды роўныя l .



Рыс. 112



Рыс. 113



Рыс. 114

143. На рисунку 115 точки U, V, W вибрані на кантах AB, BC, AD піраміди $ABCD$. Зробіть такі рисунок у шпальтці і побудуйте сяченне піраміди площиною UVW .

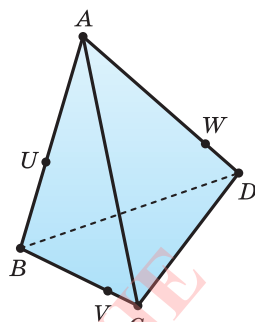


Рис. 115

144. Побудуйте сяченне чотирикутної призми $RSTVR_1S_1T_1V_1$ площиною ABC , улічуйте, що точки A, B, C вибрані відповідно на кантах RS, RV, TT_1 .

145. Побудуйте сяченне трикутної піраміди $MNOP$ площиною ABC , улічуйте, що точки A, B, C вибрані відповідно на кантах MN, OP, PN .

146. Точка C — середина канта JL правильної трикутної піраміди $IJKL$, багаторіч якої рівна багаторіч основи. Побудуйте сяченне піраміди площиною IKC і знайдіть радіуси окружностей, обмежених у цьому сяченні і описаних навколо нього.

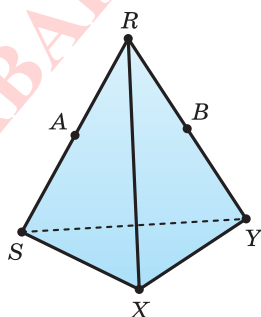


Рис. 116

147. На рисунку 116 показана правильна піраміда $RSXY$, у якої грань основи рівна багаторічній грані. На кантах RS і RY позначені їх середини A і B . Зробіть такі рисунок у шпальтці і побудуйте сяченне піраміди площиною ABX . Покажіть, що трикутник ABX рівносторонній, і знайдіть його периметр і площу, улічуйте, що кант піраміди рівний a .

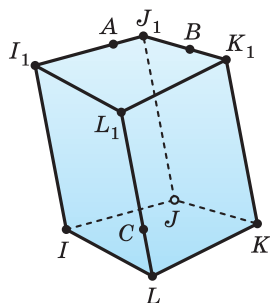


Рис. 117

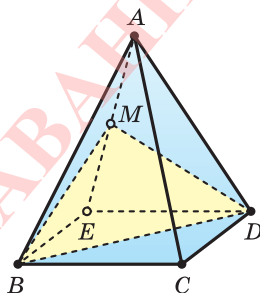
148. На рисунку 117 виявлена призма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на кантах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 вибрані точки A, B, C . Зробіть такі рисунок у шпальтці і побудуйте сяченне призми площиною ABC .

149. Виявіть призму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і на її кантах NN_1, MP, OP виберіть точки C, D, E . Побудуйте сяченне призми площиною CDE .

150. Ёсць правільная прызма $XYZX_1Y_1Z_1$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю XY_1Z_1 , улічыўшы, што поўная паверхня прызмы роўная S .

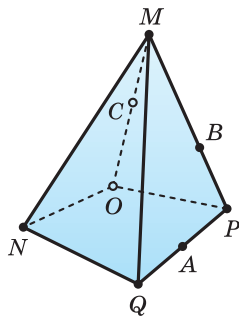
151. Ёсць такая правільная трохвугольная прызма, што плоскасць, якая праходзіць праз старану яе асновы і супрацьлеглую вяршыню другой асновы, дзеліць поўную паверхню прызмы ў адносіне $2 : 3$. Знайдзіце гэтую паверхню, улічыўшы, што кант асновы роўны a .

152. На рысунку 118 выяўлена правільная піраміда $ABCDE$ і на канце AE пазначана яго сярэдзіна M . Трохвугольнік BMD ёсць сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якой належаць прамая BD і пункт M . Знайдзіце вышыні трохвугольніка BMD , улічыўшы, што ўсе канты піраміды роўныя 20 мм.



Рыс. 118

153. Пункт A — сярэдзіна бакавога канта KE правільнай чатырохвугольнай піраміды $KCDEF$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз прамую DF і пункт A . Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S .



Рыс. 119

154. Зрабіце ў спытку рысунак, падобны рысунку 119, на якім выяўлена чатырохвугольная піраміда $MNOPQ$ і адзначаны пункты A, B, C на кантах PQ, PM, OM адпаведна. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз пункты A, B, C .

155. Выявіце чатырохвугольную піраміду $STUVW$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз пункты A, B, C на кантах ST, TW, VW .

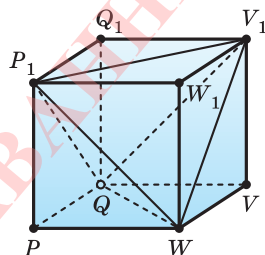
156. Ёсць піраміда $RMNOP$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Сячэннем гэтай піраміды плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню R і прамую NP , з'яўляецца трохвугольнік RNP . Знайдзіце бакавую паверхню пірамі-

ды, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, роўны R .

157. Выявіце правільную піраміду $TUVWX$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню T і прамую UW . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, улічыўшы, што плошча пабудаванага сячэння роўная плошчы асновы, а кант асновы роўны l .

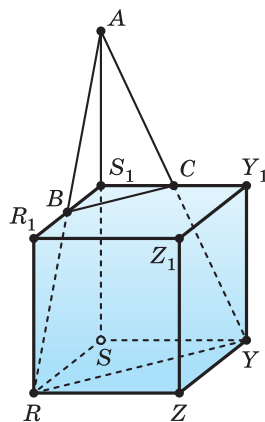
158. Піраміда V_1P_1QW мае сваімі вяршынямі вяршыні куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рыс. 120). Знайдзіце поўную паверхню гэтай піраміды, улічыўшы, што кант куба роўны 1 м.

159. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ABTV_A B_1 T_1 V_1$ плоскасцю $AB_1 T$. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са стараной a , а плошча пабудаванага сячэння роўная S .



Рыс. 120

160. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $IJKL I_1 J_1 K_1 L_1$ плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню I і прамую $J_1 L_1$. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са стараной a , а вугал $J_1 I L_1$ роўны γ .



Рыс. 121

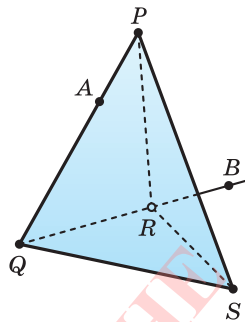
161. Чатырохвугольнік $RBCY$ — сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз прамую RY і пункт A на прамені SS_1 за пунктамі S_1 (рыс. 121). Дакажыце, што гэтае сячэнне ёсць раўнабокая трапецыя, і знайдзіце яе плошчу, улічыўшы, што аснова паралелепіпеда ёсць квадрат $RSYZ$ са стараной s , вышыня RR_1 паралелепіпеда роўная h , а вяршыня S_1 дзеліць адрэзак SA папалам.

162. Выявіце куб $KPTVK_1 P_1 T_1 V_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую $K_1 T$ і такі пункт A праменя $V_1 T_1$, што вяршыня T_1 дзеліць адрэзак $V_1 A$ у адно-

сіне $2 : 1$, калі лічыць ад пункта V_1 . Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што кант куба роўны 2 м.

163. Выявіце трохвугольную піраміду $CDEF$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў FC , FD , FE . Знайдзіце плошчу грані піраміды, улічыўшы, што ўсе яе грані — роўныя адзін аднаму правільныя трохвугольнікі, а плошча сячэння роўная 120 см^2 .

164. Пункт A ляжыць на канце PQ трохвугольнай піраміды $PQRS$, пункт B — на прамені QR за пунктам R , а пункт C — на плоскасці QRS (рыс. 122). Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю ABC .



Рыс. 122

165. Кант асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы роўны a , а плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз канцы кантаў, што выходзяць з адной вяршыні, роўная Q . Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

166. Плошча сячэння правільнай чатырохвугольнай піраміды $RUSVW$ плоскасцю RUV роўная Q . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

167. Знайдзіце $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, улічыўшы, што:

а) $\cos \alpha = \frac{21}{29}$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{45}{28}$; ж) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{39}{52}$;

б) $\sin \alpha = \frac{12}{37}$; д) $\cos \alpha = \frac{11}{61}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{33}{56}$.

в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$; е) $\sin \alpha = \frac{60}{61}$;

168. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3x + 2$; в) $y = 3x - 2$;

б) $y = -3x + 2$; г) $y = -3x - 2$.

Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графіка з восямі каардынат.

169. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = x + 2$; в) $y = -\sqrt{3}x + 3$;

б) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1$; г) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Знайдзіце вугал, што ўтварае верхняя паўпрамая з дадатным кірункам восі абсцыс.

170. Знайдзіце вугал паміж прамымі, што з'яўляюцца графікамі функцый $y = 2x - 1$ і $y = -3x + 2$.

171. Побудуйце графік функцыі:

а) $y = x^2 + 2x - 3$; в) $y = |x^2 + 2x - 3|$;

б) $y = \frac{x-2}{3-2x}$; г) $y = \left| \frac{x-2}{3-2x} \right|$.

Знайдзіце прамежкі, на якіх функцыя нарастае і на якіх спадае.

172. Побудуйце графік функцыі:

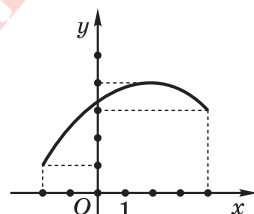
а) $y = 2(x - 2)^2 - 2$; в) $y = x^2 + 4x - 5$;

б) $y = \frac{2}{3(1-x)} + 1$; г) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$.

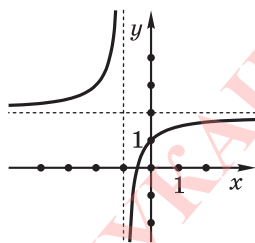
Знайдзіце прамежкі, на якіх функцыя прымае дадатныя значэнні і на якіх — адмоўныя.

173. Запішыце абсяг вызначэння і абсяг значэнняў функцыі, графік якой выяўлены на рысунку:

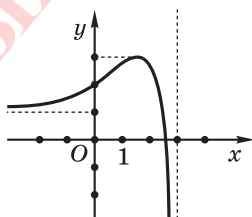
- а) 123; в) 125;
б) 124; г) 126.



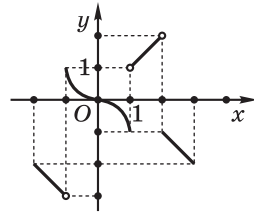
Рыс. 123



Рыс. 124



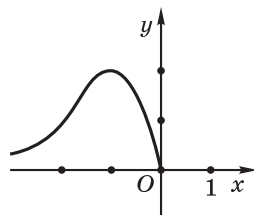
Рыс. 125



Рыс. 126

174. Нарысуйце графік цотнай і няцотнай функцый, улічывшы, што для адмоўных значэнняў аргумента ён паказаны на рысунку:

- а) 127; в) 129;
б) 128; г) 130.



Рыс. 127

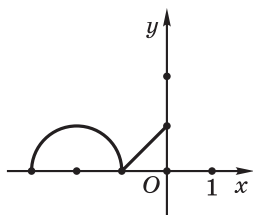


Рис. 128

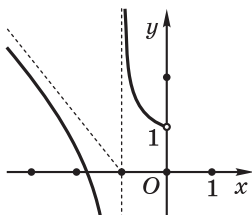


Рис. 129

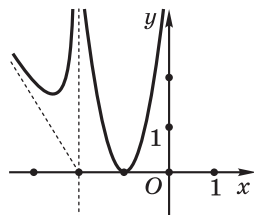


Рис. 130

175. Выкарыстаўшы графікі функцый $y = f(x)$ і $y = g(x)$, прыведзеныя на рысунках 131 і 132 адпаведна, пабудуйце графік функцы:

а) $y = f(x) + 2$;

г) $y = -0,5g(x)$;

ж) $y = f(x) + g(x)$;

б) $y = g(x) - 1$;

д) $y = f(0,5x)$;

з) $y = f(x) - g(x)$.

в) $y = 2f(x)$;

е) $y = g(-2x)$;

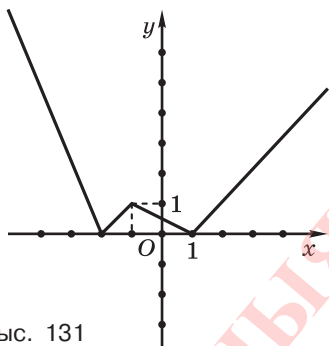


Рис. 131

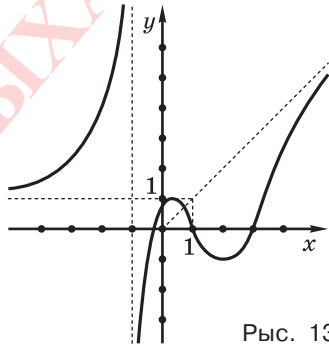
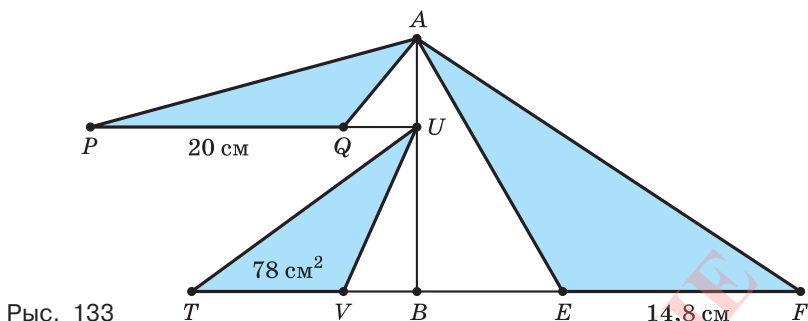


Рис. 132

176. Ёсць два многавугольнікі, сумы ўнутраных вуглоў якіх адрозніваюцца на 720° , а разам гэтыя вуглы складаюць 2520° . Якія гэта многавугольнікі?

177. Веласіпедыст спачатку ехаў са скорасцю 21 км/г, а затым знізіў яе і з меншай скорасцю праехаў 35 км. Знайдзіце меншую скорасць руху веласіпедыста, улічыўшы, што з ёй ён ехаў на 1,5 г больш, а сярэдняя скорасць на ўсім шляху аказалася роўнай 16 км/г.

178. На адрэзку AB выбралі такі пункт U , што $UB - UA = 6$ см, і на атрыманых частках UA і UB як на вышынях пабудавалі такія трохвугольнікі APQ і UTV , што аснова PQ першага з іх роўная 20 см, а плошча другога — 78 см^2 (рыс. 133). Знайдзіце даўжыню адрэзка AB , улічыўшы, што



Рыс. 133

калі на ім як на вышыні пабудавалі трэці трохвугольнік AEF з плошчай, роўнай супольнай плошчы трохвугольнікаў APQ і UTV , то яго аснова EF аказалася роўнай 14,8 см.

179. Ёсць дзве каробкі для пакавання цукерак. Умяшчальнасць першай каробкі роўная 30 цукеркам, а ў другой каробцы цукеркі ўкладваюцца ў 3 рады і ў адным радзе змяшчаецца на 3 цукеркі больш. Знайдзіце ўмяшчальнасць другой каробкі, улічыўшы, што ўсе цукеркі з абедзвюх каробак дакладна ўкладваюцца ў трэцюю каробку, у якой у адным радзе ўкладваецца 6 цукерак, і радоў столькі, колькі іх разам у першай і другой каробках.

* * *

180. Улічыўшы, што $a + b + c = 2$ і $a^3 + b^3 + c^3 = 8$, знайдзіце суму $a^5 + b^5 + c^5$.

181. Дакажыце, што калі дадатныя лікі a, b, m, n праўдзяць няроўнасць $ab > am + bn$, то яны праўдзяць і няроўнасць $\sqrt{a+b} > \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

182. Сярод парабал $y = x^2 + px + q$ ёсць такія, якія перасякаюць восі каардынат у трох розных пунктах. Дакажыце, што ўсе акружнасці, вызначаныя гэтымі тройкамі пунктаў, маюць агульны пункт.

II

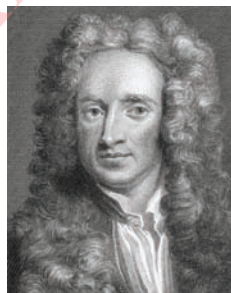
раздзел

Вытворная і яе прымяненні

4. Вытворная

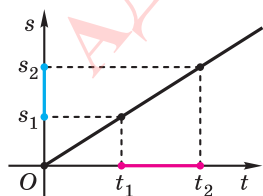
Уявім, што мы селі ў машыну і паехалі. Зразумела, што з цягам часу t змяняецца (павялічваецца) пакрыты шлях s , змяняецца і скорасць v , г. зн. шлях s і скорасць v з'яўляюцца функцыямі часу t .

Наш вопыт сведчыць, што шлях і скорасць звязаныя паміж сабой. Напрыклад, пры раўнамерным руху шлях, скорасць і час звязаныя залежнасцю $s = vt$. Агульны спосаб апісання сувязі паміж гэтымі велічынямі вынайшаў англійскі фізік і матэматык Ісак Ньютан (1643—1727) (рыс. 134). Адкрыццё Ньютана дало магчымасць апісаць многія працэсы, што вывучаюцца фізікай, хіміяй, біялогіяй, тэхнічнымі навукамі, бо сувязі паміж велічынямі, што характарызуюць гэтыя працэсы, аналагічныя сувязям паміж шляхам, скорасцю і часам.



Рыс. 134.
Ісак Ньютан

Паняцце вытворнай абагульняе паняцце скорасці. Пры раўнамерным руху пройдзены цэламу шляху s прама прапарцыянальны часу руху t (рыс. 135), прычым скорасць — гэта каэфіцыент прапарцыянальнасці, які паказвае шлях, пройдзены за адзінку часу. Для знаходжання скорасці можна шляху $s_2 - s_1$, пройдзены за час $t_2 - t_1$, падзяліць на гэты час:



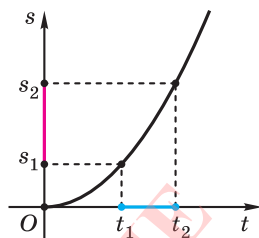
Рыс. 135

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Висветлім, што такое ёсць скорасць адвольнага руху, законы якога самыя разнастайныя.

Няхай цела рухаецца па законе, графік якога выяўлены на рысунку 136. За час $t_2 - t_1$ ад моманту t_1 да моманту t_2 яно пройдзе шлях $s_2 - s_1$. Тады адносіна $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ дае сярэднюю скорасць \bar{v} руху цела на часовым прамежку $[t_1; t_2]$:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$



Рыс. 136

Для вызначэння скорасці цела ў момант t , якую называюць *імогненнай скорасцю*, паступім так. Выберам часовы прамежак $[t; t_1]$, знойдзем на ім сярэднюю скорасць \bar{v} і пачнём памяншаць прамежак $[t; t_1]$, набліжаючы t_1 да t .

Калі закон руху цела выяўляецца формулай $s = \frac{gt^2}{2}$, то

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\frac{g}{2}(t_1^2 - t^2)}{t_1 - t} = \frac{g(t_1 - t)(t_1 + t)}{2(t_1 - t)} = \frac{g}{2}(t_1 + t).$$

Калі цяпер змяншаць прамежак часу $[t; t_1]$, набліжаючы значэнне t_1 да пункта t , то сума $t_1 + t$ набліжаецца да $t + t$, г. зн. да $2t$, а выраз $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ набліжаецца да $\frac{g}{2} \cdot 2t$, г. зн. да gt . Лік gt ёсць значэнне імогненнай скорасці ў момант t . Атрымалі добра вядомую вам формулу

$$v = gt,$$

што выражае залежнасць скорасці ад часу пры свабодным падзенні цела.

Дзеянне, падобнае да пераходу ад сярэдняй скорасці на прамежку $[t; t_1]$ да імогненнай скорасці ў пункце t , называецца *дзеяннем лімітавага пераходу*. Гавораць, што пры імогненні t_1 да t выраз $\frac{g}{2}(t_1 + t)$ імогнецца да gt , і запісваюць:

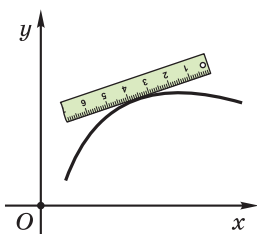
$$\frac{g}{2}(t_1 + t) \xrightarrow{t_1 \rightarrow t} gt, \quad \text{або} \quad \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{g}{2}(t_1 + t) = gt.$$

Імогненная скорасць у момант t ёсць ліміт сярэдняй скорасці пры сцягванні прамежку, на якім яна вымяраецца, у пункт, г. зн.

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$



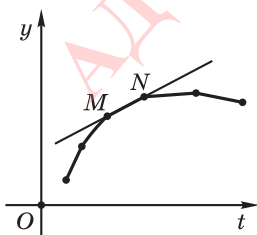
Рыс. 137.
Готфрыд Лейбніц



Рыс. 138



Рыс. 139.
П'єм Лапіталь



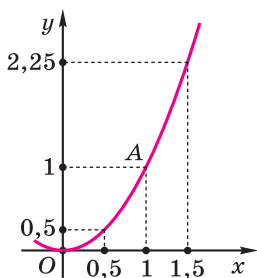
Рыс. 140

Да падобных вывадаў прыйшоў і нямецкі матэматык Готфрыд Лейбніц (1646—1716) (рыс. 137), рашаючы задачу пра правядзенне датычнай да адвольнай крывой.

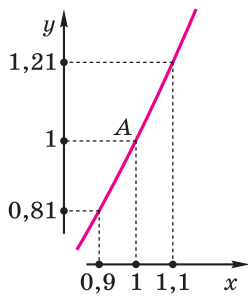
Нагляднае ўяўленне пра датычную дае край лінейкі, прыкладзенай у выбраным пункце да вырабленай з дроту крывой (рыс. 138).

Калі мы нажніцамі выразаем з паперы крывалінейную фігуру, то гэтая лінія ўяўляе сабой ломаную з вельмі маленькіх звёнаў. Менавіта так разглядалі крывую стваральнікі матэматычнага аналізу. У першым падручніку па аналізе, напісаным 300 гадоў таму П'ємам Лапіталем (1661—1704) (рыс. 139), датычная азначаецца так: «Калі прадоўжыць адно з маленькіх звёнаў ломанай, з якіх складзена крывая лінія, то гэтая прадоўжаная прамая называецца датычнай да крывой» (рыс. 140).

Паглядзім у мікраскоп на парабалу $y = x^2$ у вакольнасці пункта $A(1; 1)$. На рысунку 141, дзе гэтая парабала паказана без павелічэння, выразна бачна скрыўленасць лініі, на рысунку 142, на якім вакольнасць пункта A павялічана ў 10 разоў, скрыўленне ледзь прыкмет-



Рыс. 141

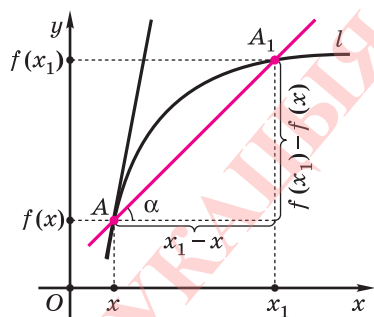


Рыс. 142

нае, а на rysyнкy 143, дзе вакольнасць пункта A павялічана ў 100 разоў, частак парабалы візуальна не адрозніваецца ад адрэзка прамой, якая і ёсць датычная да парабалы ў пункце A .

Удакладнім гэтае ўяўленне пра датычную да крывой. Няхай ёсць пэўная крывая l і пункт A на ёй (rys. 144). Выберам на крывой другі пункт A_1 і правядзём прамую AA_1 , якую называюць *сечнай*. Будзем набліжаць пункт A_1 да пункта A . Пры гэтым сечная будзе паварочвацца вакол пункта A і імкнуцца да пэўнага гранічнага становішча, якое і ёсць датычная да крывой у пункце A .

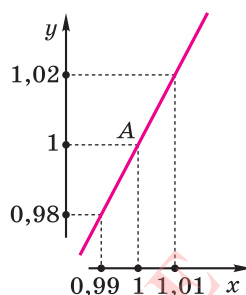
Правядзём апісаны працэс на дакладную мову формул. Няхай крывая l ёсць графік пэўнай функцыі $y = f(x)$ (rys. 145). Няхай абсцысы пунктаў A і A_1 адпаведна роўныя x і x_1 , тады іх ардынаты роўныя $f(x)$ і $f(x_1)$. Датычная да крывой l у пункце A ёсць пэўная прамая, якая праходзіць праз пункт A .



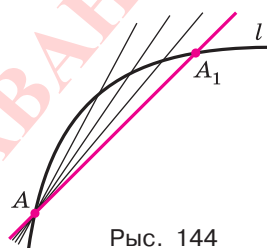
Рыс. 145

Каб знайсці вуглавы каэфіцыент a , будзем набліжаць x_1 да x . Тады пункт A_1 будзе набліжацца да пункта A , а сечная AA_1 — да датычнай у пункце A . Іншымі словамі, вуглавы каэфіцыент a ёсць ліміт выразу $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ пры імкненні x_1 да x :

$$a(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$



Рыс. 143



Рыс. 144

Становішча датычнай залежыць ад вуглавога каэфіцыента a . Знойдзем спачатку вуглавы каэфіцыент a_1 сечнай AA_1 . Ён роўны тангенсу вугла α , які ўтварае прамая AA_1 з дадатным кірункам восі абсцыс. Як паказвае рысунак 145,

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Мы атрымалі тую самую задачу, што і пры знаходжанні скорасці: выканаць лімітавы пераход у выразе $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ пры імкненні x_1 да x . Гэты лімітавы пераход ёсць новае матэматычнае дзеянне, якое выконваецца над функцыяй і называецца *дыферэнцаваннем функцыі*, або *знаходжаннем вытворнай функцыі*.

Матэматычны аналіз, які быў створаны Ньютанам і Лейбніцам у другой палавіне XVII ст., каля двух стагоддзяў развіваўся на аснове інтуітыўнага паняцця вытворнай як скорасці змянення функцыі. Строгае матэматычнае азначэнне вытворнай стала магчымым толькі ў канцы XIX ст. пасля ўдакладнення асноўных паняццяў матэматычнага аналізу — рэчаіснага ліку, функцыі, ліміту.

Вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x называецца ліміт адносіны $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ пры імкненні x_1 да x .

Рознасць $x_1 - x$ значэнняў аргумента называюць *прырашчэннем аргумента* і абазначаюць Δx (чытаецца *дэльта ікс*), а рознасць $f(x_1) - f(x)$ адпаведных значэнняў функцыі $y = f(x)$ называюць *прырашчэннем функцыі* і абазначаюць Δy .

Тады сярэдняя скорасць змянення функцыі ёсць выраз $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Сцягванне прамежку $[x_1; x]$ у пункт x азначае імкненне Δx да нуля. Вытворную функцыі $y = f(x)$ абазначаюць y' , або f' .

Уведзеныя абазначэнні дазваляюць так перафармуляваць азначэнне вытворнай.

Вытворнай функцыі называецца ліміт адносіны прырашчэння функцыі да прырашчэння аргумента, калі прырашчэнне аргумента імкнецца да нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Улічыўшы азначэнне вытворнай, атрымаем, што

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = s'(t),$$

$$a(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x),$$

г. зн. што імгненная скорасць v у момант t цела, якое рухаецца па законе $s = s(t)$, роўная значэнню вытворнай $s'(t)$ у момант t , а вуглавы каэфіцыент a датычнай $y = ax + b$ да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $(x; f(x))$ роўны зна-

чэнню вытворнай $f'(x)$ у пункце з абсцысай x . Зразумела, што значэнне вытворнай залежыць ад выбару значэння x , і таму вытворная дадзенай функцыі — таксама функцыя з аргументам x .

Знаходжанне вытворнай патрабуе выканання лімітавага пераходу. Яго сутнасць заключаецца ў вызначэнні таго, як сябе паводзіць функцыя $y = f(x)$ пры набліжэнні аргумента x да пэўнага значэння a . Разгледзім, напрыклад, функцыю $y = 3 - x^2$ і будзем набліжаць аргумент x да ліку 3, аформіўшы вылічэнні табліцай.

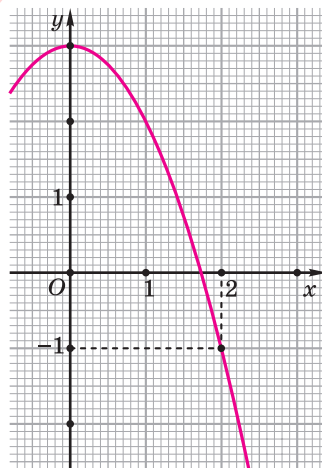
x	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
y	-6	-3,25	-1,41	-1,0401	-1,004001	-1,00040001

Можна заўважыць, што пры набліжэнні значэння аргумента x да ліку 2 значэнне функцыі набліжаецца да ліку -1, а гэта ёсць значэнне функцыі для значэння аргумента, роўнага 2 (рыс. 146). Так паводзяць сябе ўсе функцыі, якія ў пункце $x = a$ не маюць разрыву: ліміт функцыі пры імкненні аргумента да ліку a з абсягу вызначэння роўны значэнню функцыі ў пункце a , г. зн.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Гэты факт адлюстроўвае найважнейшую ўласцівасць элементарных функцый ва ўсіх пунктах з абсягу вызначэння, які будзем называць *прынцыпам непарыўнасці*. Яго на мове прырашчэнняў можна запісаць так:

калі $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$.



Рыс. 146



1. Як звязаны паміж сабой сярэдняя скорасць руху на малым праемежку $[t; t_1]$ і імгненная скорасць руху ў момант t ?
2. Як звязаны паміж сабой вуглавы каэфіцыент сечнай, якая праходзіць праз пункты крывой $y = f(x)$ з абсцысамі x і x_1 , і вуглавы каэфіцыент датычнай да гэтай крывой у пункце з абсцысай x ?
3. Што называецца прырашчэннем аргумента і як гэтае прырашчэнне абазначаецца?

4. Што называецца прырашчэннем функцыі і як гэтае прырашчэнне абазначаецца?

5. Што называецца вытворнай функцыі $y = f(x)$ і як яна абазначаецца?

6. Як знаходзіцца імгненная скорасць v цела ў момант t , калі яно рухаецца па законе $s = s(t)$?

7. Як вуглавы каэфіцыент a датычнай $y = ax + b$ да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $(x; f(x))$ звязаны са значэннямі функцыі $f(x)$?

183. Цела рухаецца па законе $s = 3t - 1$. Знайдзіце сярэднюю скорасць \bar{v} на часовым прамежку:

- а) $[0; 1]$; б) $[0; 5]$; в) $[-3; 3]$; г) $[t_1; t_2]$.

184. Цела рухаецца па законе $s = t^2 + 3t$. Знайдзіце сярэднюю скорасць \bar{v} на часовым прамежку:

- а) $[0; 1]$; б) $[-1; 1]$; в) $[2; 5]$; г) $[t_1; t_2]$.

185. Цела рухаецца па законе $s = \frac{2}{t+1}$. Знайдзіце сярэднюю скорасць \bar{v} на часовым прамежку:

- а) $[0; 1]$; б) $[0; 3]$; в) $[1; 9]$; г) $[t_1; t_2]$.

186. На рысунку 147 выяўлены графік залежнасці шляху s ад часу t . Знайдзіце сярэднюю скорасць руху на часовым прамежку:

- а) $[0; 4]$; б) $[0; 2]$; в) $[0; 1]$; г) $[0; 0,5]$; д) $[3; 4]$;
е) $[2; 4]$; ж) $[1; 2]$; з) $[1,5; 2]$; і) $[2; 3]$; к) $[2; 2,5]$.



Рыс. 147

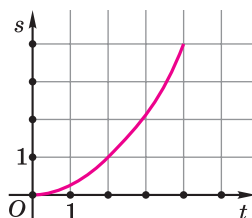
187. Пункт рухаецца прамалінейна па законе $s = 3t + 2$. Знайдзіце:

- а) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[2; 2,2]$;
б) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[3; 4]$;
в) імгненную скорасць пры $t = 2$;
г) імгненную скорасць пры $t = 3$.

188. Пункт рухаецца прамалінейна па законе $s = t^2$. Знайдзіце:

- а) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[1; 2]$;
б) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[1; 1,2]$;
в) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[1; 1,02]$;
г) сярэднюю скорасць руху на прамежку $[2; 2,02]$;
д) імгненную скорасць пры $t = 1$;
е) імгненную скорасць пры $t = 2$.

189. На рисунку 148 выяўлена графікам залежнасць шляху ад часу. Знайдзіце:



Рыс. 148

а) сярэдняю скорасць руху на прамежку $[0; 4]$;

б) сярэдняю скорасць руху на прамежку $[2; 4]$;

в) сярэдняю скорасць руху на прамежку $[3; 4]$;

г) сярэдняю скорасць руху на прамежку $[3,5; 4]$;

д) імгненную скорасць пры $t = 2$;

е) імгненную скорасць пры $t = 3$.

190. Улічыўшы, што на рисунку 149 выяўлены графік залежнасці перамяшчэння x ад часу t :

а) вызначыце, на якіх прамежках сярэдняя скорасць руху была найбольшай;

б) вызначыце, у якім пункце імгненная скорасць руху была найбольшай;

в) прывядзіце прыклады прамежкаў часу, на якіх сярэднія скорасці аднолькавыя;

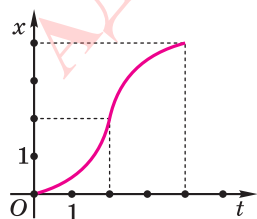
г) прывядзіце прыклады момантаў часу, у якія імгненныя скорасці аднолькавыя.

191. Па графіку залежнасці шляху s ад часу t , выяўленым на рисунку 150, знайдзіце скорасць руху ў момант t , роўны:

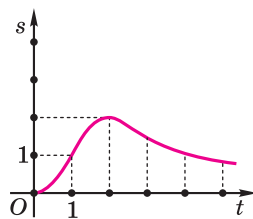
а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = 2$; г) $t = 3$.

192. Пабудуйце графік залежнасці скорасці ад часу, улічыўшы залежнасць шляху ад часу, выяўленую на рисунку 150.

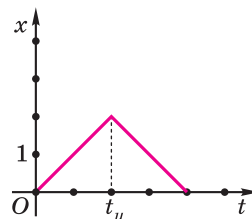
193. Пабудуйце графік залежнасці скорасці ад часу, улічыўшы залежнасць перамяшчэння x цела ад часу t пры пругкім ударе, выяўленую на рисунку 151.



Рыс. 149



Рыс. 150



Рыс. 151

194. Побудуйте графік функції $y = x^2$. Знайдіть коефіцієнт сечний, що проходить через точки цього графіка з абсцисами:

- а) -1 і 0 ; в) -1 і 3 ; д) 0 і 3 ;
 б) -1 і 1 ; г) 0 і 1 ; е) 1 і 3 .

195. На рисунку 152 виведені графік певної функції і його точки B , B_1 , B_2 , B_3 . Визначте коефіцієнт сечний:

- а) BB_1 ; в) BB_3 ; д) B_1B_3 ;
 б) BB_2 ; г) B_1B_2 ; е) B_2B_3 .

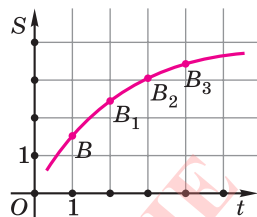


Рис. 152

196. На рисунках 153—158 виведені графіки трьох функцій і трьох їх вивірних. Запишіть пари номерів рисунка, перший компонент кожної з яких вказує графік функції, другий — графік її вивірної.

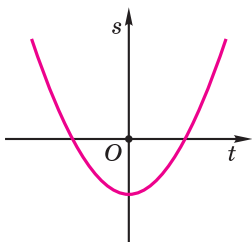


Рис. 153

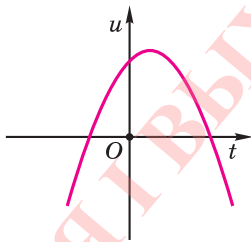


Рис. 154

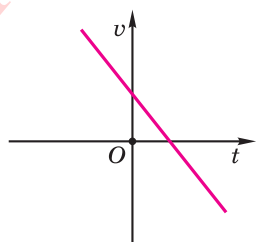


Рис. 155

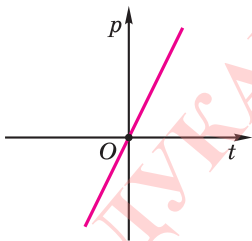


Рис. 156

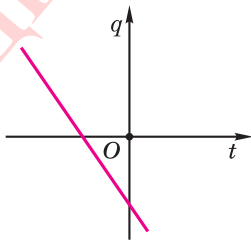


Рис. 157

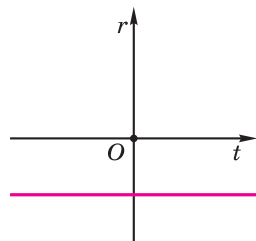


Рис. 158

197. На рисунку 159 показаний спосіб побудови графіка швидкості за графіком шляху. Апішіть цей спосіб і, використовуючи його, побудуйте графік вивірної функції, заданої графіком, що на рисунку:

- а) 160; б) 161; в) 162.

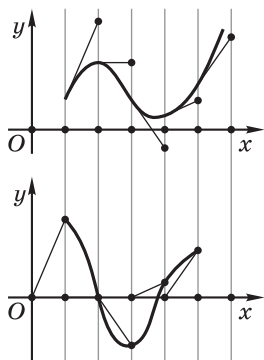


Рис. 159

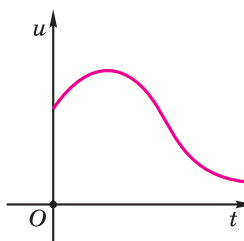


Рис. 160

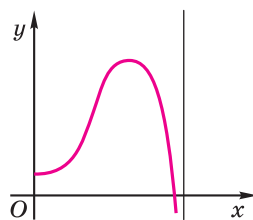


Рис. 161

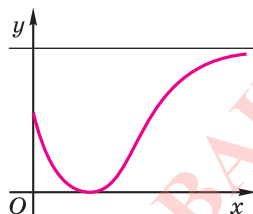


Рис. 162

198. Побудуйте прикладний графік вивірної функції, яка задана графіком, що на рисунку:

а) 163;

б) 164.

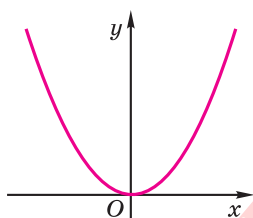


Рис. 163

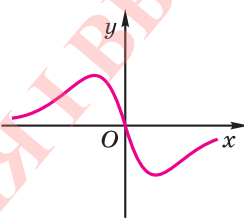


Рис. 164

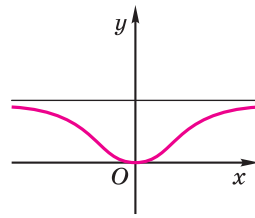


Рис. 165

199. Нарисуйте прикладний графік функції, графік вивірної якої вилучений на рисунку:

а) 165;

б) 166.

200. Для функції $y = 2x + 5$ знайдіть:

а) x_1 і Δy , улічуйте, що $x = 3$ і $\Delta x = 0,2$;

б) x_1 і Δy , улічуйте, що $x = 4$ і $\Delta x = 0,06$;

в) Δy , улічуйте, що $x = 4$ і $\Delta x = 0,1$;

г) Δy , улічуйте, що $x = 7$ і $\Delta x = 0,01$.

201. Для функції $y = x^2$ знайдіть приращення Δx і Δy , улічуйте, що:

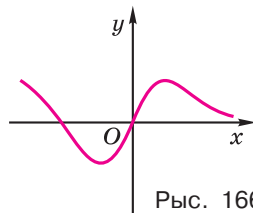


Рис. 166

а) $x_1 = 2,5$ і $x = 2$;

в) $x_1 = -1,2$ і $x = -1$;

б) $x_1 = 3,9$ і $x = 3,75$;

г) $x_1 = -2,7$ і $x = -2,5$.

202. Для функції $y = x^2 - x$ знайдіть Δy , улічуйте, що:

а) $x = 1,5$ і $\Delta x = 2,5$;

в) $x = 4$ і $\Delta x = 3$;

б) $x = 1,5$ і $\Delta x = 3,5$;

г) $x = -7$ і $\Delta x = 1,2$.

203. Їсть функція $y = \frac{1}{x}$. Знайдіть Δy і $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, улічуйте, що:

а) $x = 9$, $\Delta x = 0,06$;

в) $x = 4,02$, $\Delta x = -0,02$;

б) $x = 4,96$, $\Delta x = 0,04$;

г) $x = 6$, $\Delta x = -0,02$.

204. Знайдіть середню швидкість росту функції $y = x^2 - 4x$ на проміжку:

а) $[0; 1]$;

б) $[0; 0,5]$;

в) $[0; 0,1]$;

г) $[0; 0,01]$.

Знайдіть витвірну цю функції в точці $x = 0$.

205. Визначте, у якій з функцій f_1 або f_2 більша швидкість росту на проміжку визначення їх графіка, що на рисунку:

а) 167;

б) 168;

в) 169.

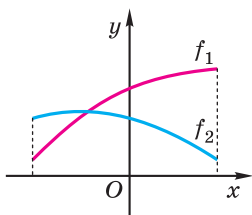


Рис. 167

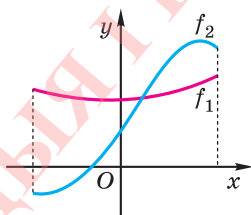


Рис. 168

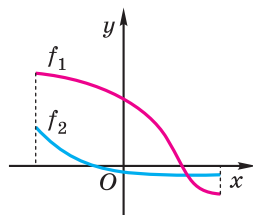


Рис. 169

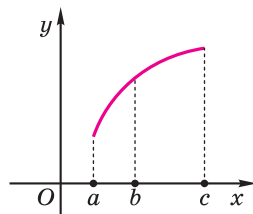


Рис. 170

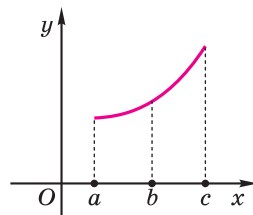


Рис. 171

206. Визначте, на якому з проміжків $[a; b]$ або $[b; c]$ більша швидкість росту функції, графік якої визначений на рисунку:

а) 170;

б) 171.

207. Виразіть прирост функції в точці x через x і Δx , улічуйте, що:

а) $y = 5 - 3x$;

в) $f(x) = 3x^2$;

б) $y = 2\sqrt{x}$;

г) $f(x) = 2x - x^2$.

208. Знайдзіце $f(x + \Delta x)$, $f(x + \Delta x) - f(x)$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,
улічыўшы, што:

а) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

б) $f(x) = ax + b$;

г) $f(x) = x^3$.

209. Дакажыце:

а) прымету нарастання: функцыя f нарастае на прамежку I тады і толькі тады, калі для любых двух значэнняў x і $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) з прамежку I праўдзіцца ўмова $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$;

б) аналагічную прымету спадання функцыі на прамежку I , папярэдне сфармуляваўшы яе.

210. Карыстаючыся прыметамі нарастання і спадання функцыі (гл. практыкаванне 209), знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $f(x) = 2x + 3$;

в) $g(x) = 7 - 5x$;

б) $p(x) = x^2$;

г) $g(x) = 3 - x^2$.

211. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $y = 2x - 3$ у пункце:

а) 1; б) 3; в) x_0 .

212. Дакажыце, што значэнне вытворнай лінейнай функцыі $y = kx + b$ у любым пункце x роўнае вуглавому каэфіцыенту прамой, якая з'яўляецца графікам гэтай функцыі. Якое ўраўненне вызначае датычную да графіка функцыі $y = kx + b$, што праходзіць праз пункт з абсцысай x_0 ?

213. Для функцыі $y = \frac{x^2}{2}$ вылічыце значэнні $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у пункце $x = \frac{1}{2}$ пры Δx , роўным:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{32}$; д) $\frac{1}{100}$; е) $\frac{1}{1000}$.

214. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $y = x^2 - x$ у пункце:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0 .

215. Для функцыі $y = \frac{1}{x}$ вызначыце, да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля, у пункце:

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0 .

216. Спрасціце выраз:

а) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; в) $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}{a - b}$;
б) $\frac{a^3 + b^3}{a^3b - ab^3}$; г) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 - b^2}$.

217. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1}{1 - 25x^2} + \frac{1}{25x^2 - 10x + 1}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$;
б) $\frac{y}{9 - 4y^2} + \frac{1}{4y + 6}$; г) $\frac{m + 2}{m^2 - 2m} - \frac{m - 2}{m^2 + 2m}$.

218. Пазбаўдзецца ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$.

219. Спрасціце выраз:

а) $\left(\frac{1 - x^{-0,5}}{1 + x^{-0,5}} + \frac{1 + x^{-0,5}}{1 - x^{-0,5}} \right) : \frac{1 + x}{1 - x}$;
б) $\left(\frac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a - b} \right) (a^{0,5} + b^{0,5})$;
в) $\left(\frac{ab^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} + \frac{a^{0,5}b}{a^{0,5} - b^{0,5}} \right) : \frac{-1}{a^{-0,5}b^{-0,5}}$;
г) $\frac{x + \sqrt{x^2 - xy}}{x - \sqrt{x^2 - xy}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - xy}}{x + \sqrt{x^2 - xy}}$.

220. Знайдзіце перыметр раўнабокага трохвугольніка з асновай 12 і вуглом пры вяршыні ў 120° .

221. Дыяганалі паралелаграма перасякаюцца пад вуглом 60° і адносяцца як 5 : 8, а яго плошча роўная $160\sqrt{3}$. Знайдзіце перыметр паралелаграма.

222. Знайдзіце вышыні раўнабокага трохвугольніка з асновай 18 і бакавой старонай 15.

223. Два целы рухаюцца ў адным кірунку — адно са скорасцю 6 м/с, другое са скорасцю 21 м/с і даганяе першае. Пасля абсалютна няпругкага сутыкнення яны працягваюць рухацца разам як адна сістэма са скорасцю 12 м/с. Знайдзіце імпульсы цел, улічыўшы, што маса першага цела на 1 кг большая.

224. Два целы масамі 3 кг і 8 кг рухаюцца ў адным кірунку так, што скорасць другога цела на 18 м/с боль-

шая. Знайдзіце гэтыя скорасці, улічыўшы, што калі б трэцяе цела мела імпульс, роўны супольнаму імпульсу першага і другога цел, і рухалася са скорасцю, роўнай суме скарасцей першага і другога цел, то яго маса была б роўнай 7 кг.

* * *

225. Рашыце сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

226. Калі ў трохвугольніку ABC правялі вышыні AM , BN , CK , то аказалася, што трохвугольнікі ABC і MNK падобныя. Знайдзіце магчымыя значэнні вуглоў A , B , C .

227. Унутраны пункт Q выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ з плошчай S злучылі з вяршынямі і пабудавалі пункты M , N , K , L , у якіх перасякаюцца медыяны трохвугольнікаў QAB , QBC , QCD , QDA адпаведна. Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $MNKL$.

5. Правілы знаходжання вытворных

У адпаведнасці з азначэннем $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ пры знаходжанні вытворнай можна карыстацца наступным прадпісаннем.

- Знайсі прырашчэнне Δy функцыі $y = f(x)$ на прамежку $[x; x + \Delta x]$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

- Падзяліць прырашчэнне функцыі Δy на прырашчэнне аргумента Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Знайсі ліміт выразу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ пры імкненні Δx да нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Дзеянне знаходжання вытворнай функцыі называецца *дыферэнцаваннем функцыі*.

Функцыя, якая мае вытворную, называецца *дыферэнцавальнай функцыяй*.

Тэарэма 1. Праўдзяцца наступныя формулы дыферэнцавання:

$$c' = 0; \quad (ax^2)' = 2ax;$$

$$(ax + b)' = a; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Доказ. Знайдзем вытворную пастаяннай функцыі $y = c$. Будзем мець:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Таму
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Мы палічылі, што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, бо выраз 0 не залежыць ад Δx .

Знайдзем вытворную функцыі $y = ax + b$. Будзем мець:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (a(x + \Delta x) + b) - (ax + b) = \\ &= ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a. \end{aligned}$$

Таму
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a.$$

Знайдзем вытворную функцыі $y = ax^2$. Будзем мець:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = \\ &= ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2 = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x. \end{aligned}$$

Таму
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax.$$

Мы палічылі, што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax$, бо выраз $2ax$ не залежыць ад Δx , а выраз $a\Delta x$ імкнецца да нуля, калі Δx імкнецца да нуля.

Знайдзем вытворную функцыі $y = \frac{1}{x}$. Будзем мець:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

Таму
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Мы палічылі, што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}$, бо выраз $x + \Delta x$ імкнецца да x , калі Δx імкнецца да нуля.

► **Прыклад 1.** Знойдзем вытворную функцыі $y = x^3$. Будзем мець:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Таму

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Мы палічылі, што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$, бо выраз $3x^2$ не залежыць ад Δx , а выраз $3x\Delta x + (\Delta x)^2$ імкнецца да нуля, калі Δx імкнецца да нуля.

Такім чынам, $(x^3)' = 3x^2$.

Прыклад 2. Знойдзем вытворную функцыі $y = \sqrt{x}$. Будзем мець:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Таму
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Мы палічылі, што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, бо выраз $\sqrt{x + \Delta x}$ імкнецца да \sqrt{x} , калі Δx імкнецца да нуля.

Такім чынам, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ◀

Тэарэма 2. Калі функцыі u і v дыферэнцавальныя, то вытворныя іх сумы, здабытку, дзелі вызначаюцца формуламі:

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказ. Знайдзем правила знаходження витворнай суми функцій. Няхай $y = u(x) + v(x)$. Тады

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) = \\ &= (u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x)).\end{aligned}$$

Цяпер улічым, што $u(x + \Delta x) - u(x)$ ёсць прырашчэнне Δu функцыі $u(x)$, а $v(x + \Delta x) - v(x)$ ёсць прырашчэнне Δv функцыі $v(x)$. Таму:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Delta u + \Delta v; \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Паколькі функцыі u і v дыферэнцавальныя, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Значыць,

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Знайдзем правила знаходження витворнай здабытку функцій. Няхай $y = u(x)v(x)$. Тады

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Цяпер улічым, што прырашчэнне $u(x + \Delta x) - u(x)$ функцыі $u(x)$ можна запісаць як $u(x) + \Delta u$, а прырашчэнне $v(x + \Delta x) - v(x)$ функцыі $v(x)$ — як $v(x) + \Delta v$. Таму

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u(x) + \Delta u)(v(x) + \Delta v) - u(x)v(x) = u(x)v(x) + u(x)\Delta v + \\ &+ v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Значыць,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Паколькі функцыі u і v дыферэнцавальныя, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v',$$

а ў адпаведнасці з прынцыпам непарыўнасці

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0.$$

$$\text{Таму} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v(x) + v'u(x) + u' \cdot 0 = u'v + v'u.$$

Знайдзем правила знаходження витворнай дзелі функцый. Няхай $y = \frac{u}{v}$. Тады $u = yv$. Выкарыстаўшы формулу для витворнай здабытку, атрымаем:

$$u' = y'v + yv'.$$

З гэтай формулы выразім y' і ўлічым, што $y = \frac{u}{v}$:

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Вынік 1. Канстанту можна выносіць за знак дыферэнцавання:

$$(cu)' = cu'.$$

Сапраўды, прымяніўшы формулу для вытворнай здабытку, атрымаем:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu'.$$

Вынік 2. $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}.$

Вынік 3. $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$

Сапраўды, прымяніўшы формулу для вытворнай сумы і вынік 1, атрымаем:

$$(ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' = a(x^2)' + b(x)' + c' = a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b.$$

Прыклад 3. Знойдзем вытворную функцыі $z = \frac{1}{t} + t^2$.
Маем:

$$z' = \left(\frac{1}{t} + t^2\right)' = \left(\frac{1}{t}\right)' + (t^2)' = -\frac{1}{t^2} + 2t = 2t - \frac{1}{t^2}.$$

Вынік 4. Вытворная рознасці дыферэнцавальных функцый роўная рознасці іх вытворных:

$$(u - v)' = u' - v'.$$

Сапраўды, з улікам тэарэмы 2 і выніку 1 маем:

$$(u - v)' = (u + (-v))' = u' + (-1 \cdot v)' = u' + (-1) \cdot v' = u' - v'.$$

Прыклад 4. Знойдзем вытворную функцыі $y = 5x^2 - \frac{4-x}{x^2}$.
Маем:

$$\begin{aligned} y' &= (5x^2)' - \left(\frac{4-x}{x^2}\right)' = 5(x^2)' - \frac{(4-x)' \cdot x^2 - (4-x) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \\ &= 10x - \frac{(-1) \cdot x^2 - (4-x) \cdot 2x}{x^4} = 10x - \frac{x(-x-8+2x)}{x^4} = \\ &= 10x - \frac{x-8}{x^3} = \frac{10x^4 - x + 8}{x^3}. \end{aligned}$$

Вынік 5. Калі n — цэлы лік, то:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

► Сапраўды, калі n роўнае 0, 1 або 2, то, як устаноўлена ў тэарэме 1, $1' = 0$, $x' = 1$ і $(x^2)' = 2x$. Гэтыя вынікі можна выявіць як $0 \cdot x^{-1}$, $1 \cdot x^0$ і $2 \cdot x^1$.

Няхай роўнасць $(x^k)' = kx^{k-1}$ праўдзіцца. Тады

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = \\ &= kx^k + x^k = (k+1)x^k,\end{aligned}$$

г. зн. праўдзіцца і роўнасць $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$. Цяпер з улікам прынцыпу матэматычнай індукцыі можна зрабіць вывад пра тое, што формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ праўдзіцца пры ўсіх натуральных значэннях зменнай n .

Калі n — адмоўны цэлы лік, г. зн. $n = -m$, дзе m — натуральны лік. Тады, выкарыстаўшы азначэнне адмоўнай ступені і формулу для вытворнай дзелі, атрымаем:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1} \cdot 1}{x^{2m}} = \\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.\end{aligned}$$

Формула дыферэнцавання $(x^n)' = nx^{n-1}$ праўдзіцца і для дробавых паказчыкаў. Пераканаемся ў гэтым для выпадку $n = \frac{1}{2}$, г. зн. для функцыі $y = \sqrt{x}$. З аднаго боку, мы ведаем, што $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, з другога боку, па формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$ атрымліваем:

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \blacktriangleleft$$

Прыклад 5. Знойдзем вытворную функцыі $s = 7t^4 - \frac{3}{t^5}$.
Маем:

$$\begin{aligned}s' &= \left(7t^4 - \frac{3}{t^5}\right)' = (7t^4)' - (3t^{-5})' = 7 \cdot 4t^3 - 3 \cdot (-5)t^{-6} = \\ &= 28t^3 + \frac{15}{t^6} = \frac{28t^9 + 15}{t^6}.\end{aligned}$$

Разгледзім функцыю $z = (6x - 7)^{47}$. Мы можам знайсці вытворную гэтай функцыі, выявіўшы яе мнагачленам со-

рак сёмай ступені, які мае 48 складаемых. Аднак можна дасягнуць мэты і больш проста, звярнуўшы ўвагу на тое, што функцыя $z = (6x - 7)^{47}$ можна разглядаць як кампазіцыю функцый $y = 6x - 7$ і $z = y^{47}$.

► Няхай ёсць функцыі $y = f(x)$ і $z = g(y)$. Функцыю $h = g(f(x))$ называюць *складанай функцыяй*, утворанай з функцый g і f . Для вылічэння значэння складанай функцыі $h = g(f(x))$ у адвольным пункце x спачатку вылічваюць значэнне y «унутранай» функцыі f у гэтым пункце, а потым значэнне z функцыі g у пункце y . Так, каб знайсці значэнне функцыі $z = (6x - 7)^{47}$ пры $x = 1$, спачатку знаходзім, што $6 \cdot 1 - 7 = -1$, а затым, што $(-1)^{47} = -1$.

Тэарэма 3. *Калі функцыя f мае вытворную ў пункце x , а функцыя g — вытворную ў пункце $y = f(x)$, то складаная функцыя $h = g(f(x))$ таксама мае вытворную ў пункце x і*

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Доказ. Няхай функцыя f мае вытворную ў пункце x , а функцыя g — вытворную ў пункце $y = f(x)$. Няхай $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$, $\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) = g(y + \Delta y) - g(y) = \Delta g$.

Будзем лічыць, што $\Delta f \neq 0$ у пэўнай вакольнасці пункта x . Тады

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Няхай $\Delta x \rightarrow 0$. Тады, паколькі f — дыферэнцавальная функцыя, па прынцыпе непарыўнасці атрымаем, што $\Delta y \rightarrow 0$.

Значыць, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$, бо $\Delta x \rightarrow 0$, а $\frac{\Delta g}{\Delta y} \rightarrow g'(y)$, бо $\Delta y \rightarrow 0$.

Таму, $h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.

Прыклад 6. Знайдзем вытворныя функцый $z = (5x - 7)^{47}$ і $h = \sqrt{5t^8 - 3t^2}$. Маем:

$$\begin{aligned} z' &= ((5x - 7)^{47})' = 47(5x - 7)^{46} \cdot (5x - 7)' = \\ &= 47(5x - 7)^{46} \cdot 5 = 235(5x - 7)^{46}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h' &= \left(\sqrt{5t^8 - 3t^2} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (5t^8 - 3t^2)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5t^8 - 3t^2}} \cdot (40t^7 - 6t) = \frac{20t^7 - 3t}{\sqrt{5t^8 - 3t^2}}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Мы ведаем, што аперацыя дыферэнцавання ставіць у адпаведнасць дадзенай функцыі $f(x)$ новую функцыю — яе вытворную, функцыю $f'(x)$. У матэматыцы важнай з'яўляецца адваротная задача: для дадзенай функцыі $f(x)$ знайсці такую функцыю $F(x)$, вытворная якой і ёсць $f(x)$. Такую функцыю $F(x)$ называюць першаіснай для функцыі $f(x)$.

Прыклад 7. Функцыі $F_1(x) = 3x^4 + 7$ і $F_2(x) = 3x^4$ з'яўляюцца першаіснымі для функцыі $f(x) = 12x^3$ на мностве \mathbf{R} рэчаісных лікаў, бо

$$F_1'(x) = (3x^4 + 7)' = 3(x^4)' + 0 = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3 = F_2'(x) = f(x)$$

для ўсіх значэнняў зменнай x з \mathbf{R} .



1. Што называецца вытворнай функцыі і па якой схеме яна знаходзіцца?

2. Чаму роўная вытворная канстанты; лінейнай функцыі; функцыі $y = \frac{1}{x}$?

3. Чаму роўная вытворная сумы функцый; здабытку функцый; дзелі функцый?

228. Карыстаючыся азначэннем, знайдзіце значэнні вытворнай функцыі:

а) $h(x) = x^2$ у пунктах 2 і 5;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$ у пунктах 1 і 4.

229. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $f(x) = x^3 - x + 2$ у пункце з абсцысай:

а) -2; б) -1; в) 0.

230. Для функцыі $f(x) = \sqrt{x}$ знайдзіце:

а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(25)$; г) $f'(x)$.

231. Карыстаючыся азначэннем, знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = 2x^2 + 3x$;

д) $y = \frac{1}{x^3}$;

і) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $y = 2x^3$;

е) $y = \frac{x}{x+1}$;

к) $y = \sqrt{x+1}$;

в) $y = x^3 + x$;

ж) $y = \frac{x}{x+2}$;

л) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

г) $y = \frac{2}{x}$;

з) $y = -\frac{1}{2x^2}$;

м) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

232. Знайдіть витворную функцію:

а) $y = 3x^2$; д) $y = \frac{2}{x}$; і) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$;
б) $y = 4x^4$; е) $y = \frac{1}{2x}$; к) $y = \sqrt{2x}$;
в) $y = \frac{x^2}{2}$; ж) $y = 3\sqrt{x}$; л) $y = -\sqrt{3x}$;
г) $y = \frac{x^3}{3}$; з) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$; м) $y = x + \frac{1}{x}$.

233. Знайдіть значення витворнай функції $f(x) = \frac{1+2x}{1+3x}$ у пунктах з абсцисай:

а) -1 ; б) 0 ; в) 1 .

234. Для функції $g(y) = \frac{1}{y^2}$ знайдіть:

а) $g'(1)$; б) $g'(-1)$; в) $g'(2)$; г) $g'(y)$.

235. Знайдіть витворную функцію:

а) $y = (c^2 - 1)(c^2 + 1)$; ж) $y = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}$;
б) $y = (c + \sqrt{c})^2$; з) $y = \frac{1}{c^3 + 1}$;
в) $y = \frac{3}{c - 2}$; і) $y = \left(c + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right)(c^2 + c + 1)$;
г) $y = \frac{c}{c - 1}$; к) $y = \left(c^4 - \frac{1}{c^4}\right)\left(c^3 + \frac{1}{c^3}\right)$;
д) $y = \frac{c^2}{c + 1}$; л) $y = \left(c + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)(c^2 - 3c - 8)$;
е) $y = \frac{c - 2}{2c^2 - 1}$; м) $y = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt{c - 1}}$.

236. Їсть функції: $g(y) = 2 - y^2$; $h(y) = \sqrt{y}$; $f(y) = \frac{y}{y - 3}$.

Задіть формулай функцію:

а) $g(h(y))$; в) $g(f(y))$; д) $h(f(y))$;
б) $h(g(y))$; г) $f(g(y))$; е) $f(h(y))$.

237. Запишіть функції, кампазіційай якіх з'яўляецца функція:

а) $p = \sqrt{9 - z^2}$; в) $p = \sqrt{z^2 - 0,25}$; д) $p = \sqrt{2 - \sqrt{d}}$;
б) $p = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$; г) $p = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 7}}$; е) $p = \sqrt{\frac{1}{d} + 1}$;

$$\text{ж)} p = \frac{1}{\sqrt{3-d}-1}; \quad \text{з)} p = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-d}}}.$$

238. Знайдзіце такую функцыю f , што $f(g(x)) = x$, улічыўшы, што:

$$\text{а)} g(x) = x^2 \text{ і } x \geq 0; \quad \text{г)} g(x) = 2x;$$

$$\text{б)} g(x) = \sqrt{x}; \quad \text{д)} g(x) = 3x + 2;$$

$$\text{в)} g(x) = \frac{1}{x}; \quad \text{е)} g(x) = x^2 + 1, x \leq 0.$$

239. Знайдзіце вытворную функцыі:

$$\text{а)} (2y - 7)^{14}; \quad \text{е)} \sqrt{5y - 8}; \quad \text{л)} (5e - 2)^{13} - (3e + 7)^{20};$$

$$\text{б)} (3 + 5y)^{10}; \quad \text{ж)} \sqrt{7 - 4y}; \quad \text{м)} (3e - 1)^{15} + (2e + 3)^4;$$

$$\text{в)} (7y - 1)^{-3}; \quad \text{з)} \sqrt{4a^2 - 1}; \quad \text{н)} \sqrt{6e - 8} - \sqrt{4e^2 - 3};$$

$$\text{г)} \left(\frac{1}{3}y + 2\right)^{-5}; \quad \text{і)} \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + 7}; \quad \text{о)} \sqrt{9 + 2e} - \sqrt{0,5e^2 - 2};$$

$$\text{д)} \sqrt{2y + 3}; \quad \text{к)} \sqrt{9a^2 - 16}; \quad \text{п)} \sqrt{7 - 3a^3}.$$

240. Знайдзіце вытворную функцыі:

$$\text{а)} y = (m - 3)^7; \quad \text{д)} y = (m + 1)^2 - 3m; \quad \text{і)} y = \sqrt{-m};$$

$$\text{б)} y = (3m - 4)^9; \quad \text{е)} y = \frac{1}{(3m + 1)^3}; \quad \text{к)} y = \sqrt{5m - 1};$$

$$\text{в)} y = (1 - 2m)^4; \quad \text{ж)} y = \frac{2}{(3m + 2)^3}; \quad \text{л)} y = \sqrt{(m + 2)^5};$$

$$\text{г)} y = (1 - m)^5; \quad \text{з)} y = \sqrt[3]{5m^2}; \quad \text{м)} y = \sqrt[3]{2m - 7}.$$

241. Вылічыце вытворную:

$$\text{а)} z = (\sqrt{x} + 1)^5; \quad \text{в)} z = \sqrt{1 + \sqrt{x}}; \quad \text{д)} z \sqrt[3]{2x^3 - 1};$$

$$\text{б)} z = \sqrt{x^5 + 1}; \quad \text{г)} z = ((x + 1)^4 - 2)^3; \quad \text{е)} z = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}.$$

242. Выведзіце формулу $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$ і вылічыце з яе дапамогай вытворную:

$$\text{а)} y = (\sqrt{b} + 1)^2; \quad \text{в)} y = \left(b + \frac{1}{b} - \sqrt{b}\right)^2;$$

$$\text{б)} y = (b^3 + 2b^2 + b - 1)^2; \quad \text{г)} y = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2.$$

243. З функцій $y = \frac{1}{2}x^2 + x$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = -\frac{4}{\sqrt{x+1}}$ виберіть ту, у якій при нульовому значенні аргумента найбільша значення.

244. Визначте, у якій з двох пунктів x_1 і x_2 функція $y = 3x^2$ має найбільше значення, врахувавши, що:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

245. Знайдіть найбільшу функцію:

а) d^{10} ; е) $\frac{5}{z^{11}}$; л) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$;

б) $2d^7$; ж) $\frac{1}{3z^{-3}}$; м) $\frac{3}{\sqrt{b}}$;

в) d^{-5} ; з) $\frac{6}{z^7}$; н) $g^7 - 3g^2 - g + 5$;

г) $3d^{-3}$; і) $8\sqrt{b}$; о) $2g^{10} - g^8 + 3g^3$;

д) $\frac{1}{z^4}$; к) $3\sqrt{b^{-3}}$; п) $2g^6 - \frac{1}{g}$.

246. Знайдіть найбільшу функцію:

а) $7h^5 + 2\sqrt{h}$; л) $\frac{1}{h\sqrt{h}} + \sqrt{h^3}$;

б) $\frac{1+2t}{3-5t}$; м) $\frac{3t-2}{4-6t}$;

в) $(n+1)\sqrt{n}$; н) $\frac{n-1}{\sqrt{n}}$;

г) $\frac{2f}{1+f^2}$; о) $(3+f^2)(2-\sqrt{f})$;

д) $\frac{1}{g^2} - 3g^4$; п) $(i^3+i^2)(\sqrt{2i}-\sqrt{i})$;

е) $\frac{h}{3} - \frac{7}{2h^2}$; р) $h\sqrt{h} - \frac{2}{\sqrt{h}} - \frac{3}{h^2}$;

ж) $\frac{3t-2}{5t+8}$; с) $\frac{1-7t}{1-9t}$;

з) $(2n-1)\sqrt{n}$; т) $\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$;

і) $\frac{\sqrt{f}}{4+f}$; у) $\left(2 - \frac{f}{3} + \sqrt{f^3}\right)(7-f^2)$;

к) $\frac{\sqrt{x+7}}{4+x}$; ф) $\frac{3v^2 - \sqrt{v}}{2v+v^3}$.

247. Дакажыце, што $|x'| = \begin{cases} 1, & \text{калі } x > 0, \\ \text{не існуе,} & \text{калі } x = 0, \\ -1, & \text{калі } x < 0. \end{cases}$

248. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $p = \sqrt{9 - z^2}$; г) $p = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 7}}$; ж) $p = \frac{1}{\sqrt{3 - d - 1}}$;

б) $p = \frac{1}{\sqrt{4 - z^2}}$; д) $p = \sqrt{2 - \sqrt{d}}$; з) $p = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d}}}$.

в) $p = \sqrt{z^2 - 0,25}$; е) $p = \sqrt{\frac{1}{d} + 1}$;

249. Знайдзіце абсяг значэнняў функцыі:

а) $y = 2x^2 - 4x + 3$; в) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = (x^2 - 6x + 10)^{-1}$; г) $y = \frac{3x - 2}{x + |2x - 1|}$.

250. Дакажыце, што абсягам значэнняў функцыі $y = \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + x + 1}$ з'яўляецца прамежак $\left(1; \frac{23}{3}\right]$.

251. Дакажыце, што функцыя $y = x^2 - 6x + 3$ пры $x > 3$ нарастае і пры $x < 3$ спадае.

252. Дакажыце, што функцыя $y = \frac{x}{x^2 + 1}$:

а) на прамежку $[-1; 1]$ нарастае;

б) на кожным з прамежкаў $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$ спадае.

253. Знайдзіце прамежкі, на якіх захоўвае свой знак функцыя:

а) $y = -2x^2 - 6x + 10$; б) $y = \frac{x^2 - 7x - 2}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x - 8}{x + 2}$.

254. На адрэзку AB пункт M выбраны так, што $MB = 40$ см. На атрыманых адрэзках-частках MA і MB як на асновах пабудаваны такія трохвугольнікі MAP і MBR , што плошча першага роўная 645 см^2 , а яго вышыня на 21 см большая. Знайдзіце вышыні гэтых трохвугольнікаў, улічывшы, што калі на адрэзку AB пабудавалі трохвугольнік ABT з плошчай, роўнай супольнай плошчы трохвугольнікаў MAP і MBR , то яго вышыня аказалася роўнай 31 см.

* * *

255. На старанах AB і AC трохвугольніка ABC па-за ім пабудаваны квадраты $ABFD$ і $ACGL$. Знайдзіце адрэзак DL , улічыўшы, што медыяна AM роўная a .

256. Улічыўшы, што няроўнасць $x^2 + px + q > 0$, дзе p і q — цэлыя лікі, праўдзіцца пры ўсіх цэлых значэннях зменнай x , дакажыце, што праўдзіцца і няроўнасць $p^2 < 4q$.

257. Ці можна, карыстаючыся толькі дзеяннямі складання, аднімання і множання, з мнагачленаў $f(x)$ і $g(x)$ атрымаць выраз x , улічыўшы, што:

- а) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 + 2$; в) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2 - 2$;
 б) $f(x) = 2x^2 + x$, $g(x) = 2x$;

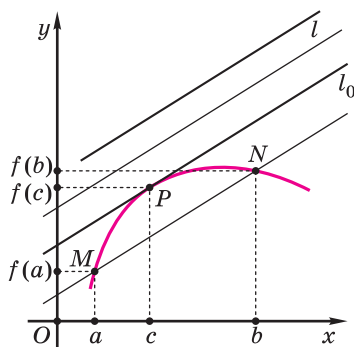
6. Даследаванне функцыі з дапамогай вытворнай

Мы ўжо ўмеем чытаць графік функцыі, г. зн. усталяваць уласцівасці функцыі па яе графіку. Цяпер ставіцца адваротная задача — навучыцца будаваць графік функцыі, вызначыўшы патрэбныя для гэтага яе ўласцівасці. Гэта становіцца магчымым, калі выкарыстаць вытворную.

Тэарэма 4. *Калі функцыя $f(x)$ мае вытворную $f'(x)$ у кожным пункце прамежку $[a; b]$, то знайдзецца такі пункт c , $a < c < b$, што $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Да гэтай тэарэмы можна прыйсці, выкарыстаўшы геаметрычны сэнс датычнай да графіка функцыі $f(x)$.

Няхай функцыя $f(x)$ мае вытворную ў кожным пункце прамежку $[a; b]$. Праз пункты $M(a, f(a))$ і $N(b, f(b))$ яе графіка правядзём прамую (рыс. 172). Няхай l — якая-небудзь прамая, паралельная прамой MN , і якая не мае агульных пунктаў з графікам функцыі $f(x)$. Гэтую прамую будзем перамяшчаць паралельна самой сабе ў кірунку да графіка функцыі да моманту,



Рыс. 172

пакуль яна не датыкнецца да графіка ў пэўным яго пункце P . Няхай l_0 ёсць становішча прамой l у гэты момант і c — абсцыса пункта P . Тады

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha,$$

дзе α — вугал, які ўтварае прамая l_0 з дадатным кірункам восі абсцыс. Але датычная l паралельная сечнай MN , значыць, вугал α роўны вуглу нахілу сечнай MN , г. зн.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Устаноўленая тэарэма называецца *тэарэмай Лагранжа*.

Жазэф Луі Лагранж (1736—1813) — французскі матэматык і механік (рыс. 173). Ён самастойна вывучаў матэматыку, зрабіў значныя адкрыцці ў механіцы, матэматычным аналізе, матэматычнай картаграфіі, астраноміі і інш.



Рыс. 173.
Жазэф Лагранж

Тэарэма 5. *Калі функцыя $f(x)$ у кожным пункце прамежку $(a; b)$ мае вытворную і калі гэтая вытворная дадатная, то на прамежку $(a; b)$ функцыя $f(x)$ нарастае, а калі гэтая вытворная адмоўная, то на прамежку $(a; b)$ функцыя $f(x)$ спадае.*

Доказ. Няхай функцыя $f(x)$ у кожным пункце прамежку $(a; b)$ мае вытворную $f'(x)$. Выберам два якія-небудзь лікі x_1 і x_2 з прамежку $(a; b)$, прычым $x_1 < x_2$. У адпаведнасці з тэарэмай Лагранжа знойдзецца такі лік c , $x_1 < c < x_2$, што

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Адзначым, што лік c належыць прамежку $(x_1; x_2)$, а значыць, і прамежку $(a; b)$.

Калі $f'(x) > 0$ на прамежку $(a; b)$, то $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Паколькі $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, а гэта азначае, што на прамежку $(a; b)$ функцыя $f(x)$ нарастае.

Гэтаксама калі $f'(x) < 0$ на прамежку $(a; b)$, то на гэтым прамежку функцыя $f(x)$ спадае.

Тэарэма 5 дае прыметы нарастання і спадання функцыі.

Рисунак 174 паказвае, што калі вытворная $f'(x_0)$ функцыі ў пункце x_0 дадатная, то датычная да графіка ўтварае востры вугал з дадатным кірункам восі абсцыс, і ў пэўнай вакольнасці пункта x_0 функцыя $f(x)$ нарастае. А калі вытворная $f'(x_0)$ функцыі ў пункце x_0 адмоўная, то датычная да графіка ўтварае тупы вугал з дадатным кірункам восі абсцыс, і, як бачна з рысунка 175, у пэўнай вакольнасці гэтага пункта функцыя $f(x)$ спадае.

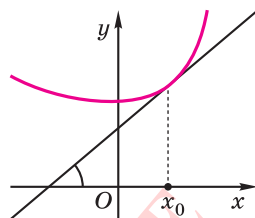


Рис. 174

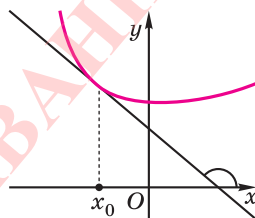


Рис. 175

Прыклад 1. Знойдзем прамежкі нарастання і спадання функцыі $y = 3x^2 - x^3$ і пабудуем яе графік.

Функцыя $y = 3x^2 - x^3$ вызначаная на мностве \mathbf{R} рэчаісных лікаў.

Знойдзем яе вытворную:

$$y'(x) = 6x - 3x^2.$$

Вызначым прамежкі, на якіх вытворная дадатная, на якіх — адмоўная:

$$6x - 3x^2 > 0 \equiv x(2 - x) > 0 \equiv 0 < x < 2;$$

$$6x - 3x^2 < 0 \equiv x(2 - x) < 0 \equiv x < 0 \text{ або } x > 2.$$

Значыць, на прамежку $(0; 2)$ функцыя $y = 3x^2 - x^3$ нарастае, а на прамежках $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$ — спадае.

Знойдзем значэнні функцыі пры значэннях аргумента 0 і 2:

$$y(0) = 3 \cdot 0^2 - 0^3 = 0;$$

$$y(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 4.$$

Знойдзем нулі функцыі:

$$\begin{aligned} 3x^2 - x^3 &= 0 \equiv x^2(3 - x) = 0 \equiv \\ &\equiv x = 0 \text{ або } x = 3. \end{aligned}$$

Адзначым на каардынатнай плоскасці пункты $(0; 0)$, $(2; 4)$, $(3; 0)$ і нарысуюм графік функцыі, улічыўшы, што на прамежках $(-\infty; 0)$ функцыя спадае, на прамежку $(0; 2)$ — нарастае, на прамежку $(2; +\infty)$ — зноў спадае (рыс. 176).

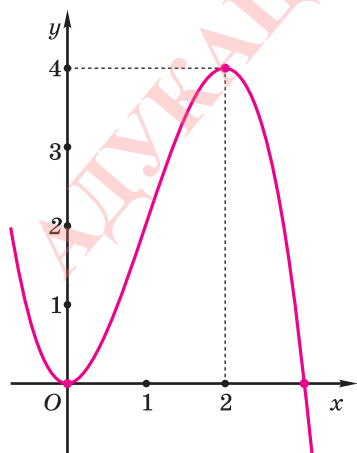


Рис. 176

Разгледжаны прыклад паказвае, што пры даследаванні функцыі важна знайсці пункты, у якіх нарастанне функцыі змяняецца яе спаданнем і наадварот.

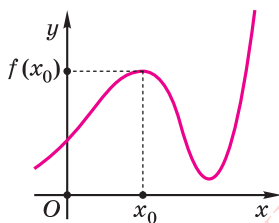
Пункт x_0 называецца *пунктам максімуму функцыі $f(x)$* , калі для ўсіх значэнняў зменнай x з пэўнай вакольнасці пункта x_0 праўдзіцца няроўнасць $f(x) \leq f(x_0)$ (рыс. 177 і 178).

Пункт x_0 называецца *пунктам мінімуму функцыі $f(x)$* , калі для ўсіх значэнняў зменнай x з пэўнай вакольнасці пункта x_0 праўдзіцца няроўнасць $f(x) \geq f(x_0)$ (рыс. 179 і 180).

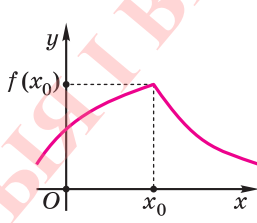
Значэнне функцыі ў пункце максімуму называецца *максімумам функцыі*, у пункце мінімуму — *мінімумам функцыі*.

Пункты максімуму і мінімуму разам называюць *пунктамі экстрэмуму*, а значэнні функцыі ў гэтых пунктах — *экстрэмумамі функцыі*.

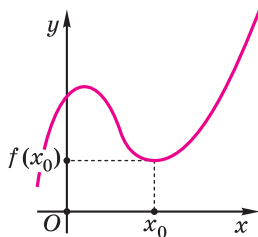
Свой экстрэмум функцыя можа мець у такіх унутраных пунктах яе абсягу вызначэння, у якіх вытворная роўная нулю або не існуе (рыс. 181 і 182). Гэтыя пункты называюцца *крытычнымі пунктамі*.



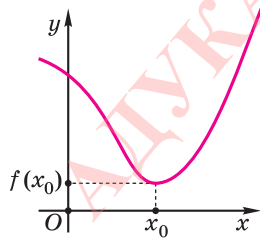
Рыс. 177



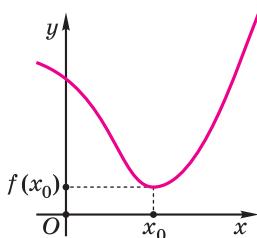
Рыс. 178



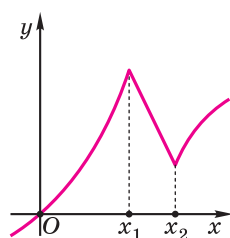
Рыс. 179



Рыс. 180



Рыс. 181



Рыс. 182

Тэарэма 6. Калі пункт x_0 з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі і ў гэтым пункце існуе вытворная, то яна роўная нулю.

Да гэтай тэарэмы можна прыйсці, выкарыстаўшы механічны сэнс вытворнай. Будзем разглядаць дадзеную функцыю $y = f(x)$ як закон руху матэрыяльнага пункта A па восі ардынату y у залежнасці ад часу x . Няхай у момант x_0 функцыя дасягае свайго экстрэмуму, г. зн. у момант x_0 пункт A займае на восі y самае высокае (самае нізкае) становішча. Шлях y у момант x_0 перастае нарастаць (спадаць), таму яго скорасць становіцца роўнай нулю, г. зн. $f'(x) = 0$.

Тэарэма 6 называецца *тэарэмай Ферма*.

П'ер Ферма (1601—1665) (рыс. 183) — французскі матэматык, юрыст па прафесіі, адзін са стваральнікаў тэорыі лікаў, развіваў метады каардынаты, працаваў таксама ў галіне матэматычнага аналізу.

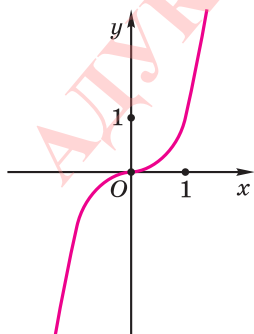


Рыс. 183.
П'ер Ферма

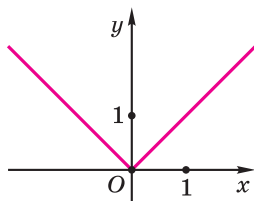
Сцверджанне, адваротнае тэарэме Ферма, не праўдзіца. Напрыклад, вытворная функцыі $y = x^3$ у пункце 0 ператвараецца ў нуль, але ў гэтым пункце функцыя не мае экстрэмуму (рыс. 184).

Свой экстрэмум функцыя можа мець у пункце, у якім яна не мае вытворнай. Напрыклад, функцыя $y = |x|$ у пункце 0 мае мінімум, але вытворнай у гэтым пункце не мае (рыс. 185).

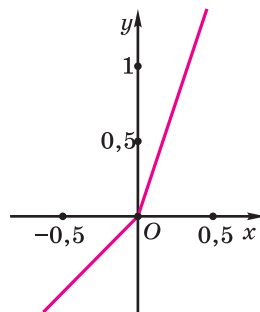
Функцыя ў пэўным пункце можа не мець вытворнай, і гэты пункт можа не быць пунктам экстрэмуму. Напрыклад, як бачна з графіка функцыі $y = |x| + 2x$, выяўленага на рысунку 186, гэтая функцыя ў пункце 0 не мае вытворнай і разам з гэтым не мае і экстрэмуму.



Рыс. 184



Рыс. 185



Рыс. 186

Такім чынам, крытычны пункт ёсць пункт магчымага экстрэмуму, але пытанне пра тое, ці сапраўды дадзены крытычны пункт з'яўляецца пунктам экстрэмуму, патрабуе дадатковага даследавання.

Тэарэма 7. *Калі пры пераходзе праз крытычны пункт вытворная функцыі мяняе свой знак з плюса на мінус, то гэты крытычны пункт ёсць пункт максімуму, а калі з мінуса на плюс — то пунктам мінімуму.*

Доказ. Няхай пункт x_0 — крытычны пункт дыферэнцавальнай функцыі $y = f(x)$.

Няхай $f'(x) > 0$ на прамежку $(a; x_0)$, а $f'(x) < 0$ на прамежку $(x_0; b)$. Тады ў адпаведнасці з тэарэмай 5 функцыя $f(x)$ на $(a; x_0)$ нарастае, а на $(x_0; b)$ спадае. Таму для ўсіх x з прамежку $(a; b)$ праўдзіцца няроўнасць $f(x) \leq f(x_0)$, г. зн. пункт x_0 ёсць пункт максімуму.

Няхай $f'(x) < 0$ на прамежку $(a; x_0)$, а $f'(x) > 0$ на прамежку $(x_0; b)$. Тады ў адпаведнасці з тэарэмай 5 функцыя $f(x)$ на $(a; x_0)$ спадае, а на $(x_0; b)$ нарастае. Таму для ўсіх x з прамежку $(a; b)$ праўдзіцца няроўнасць $f(x) \geq f(x_0)$, г. зн. пункт x_0 ёсць пункт мінімуму.

Тэарэма 7 дае прыметы максімуму і мінімуму функцыі.

Прыклад 2. Знойдзем экстрэмуму функцыі $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$.

Вытворная функцыі роўная $x^3 - 3x^2 - 4x$. Яна вызначаная ва ўсіх пунктах абсягу вызначэння функцыі і ператвараецца ў нуль у пунктах $-1, 0, 4$.

Паколькі $x^3 - 3x^2 - 4x < 0$ пры $x < -1$ і $x^3 - 3x^2 - 4x > 0$ пры $-1 < x < 0$, то ў пункце -1 функцыя мае мінімум. Знойдзем яго: $\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{3}{4}$.

Паколькі пры пераходзе праз пункт 0 вытворная $x^3 - 3x^2 - 4x$ мяняе свой знак з плюса на мінус, то гэты пункт ёсць пункт максімуму, які роўны $\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3 - 2 \cdot 0^2$, г. зн. роўны 0 . Гэтаксама ўстанавім, што пункт 4 ёсць пункт мінімуму, які роўны $\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 4^3 - 2 \cdot 4^2$, г. зн. роўны -32 .

Вынікі даследавання зручна звесці ў табліцу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\searrow	$-\frac{3}{4}$ min	\nearrow	0 max	\searrow	-32 min	\nearrow

Графік функції виявлено на рисунку 187.



1. Сформулюйте тезарэму Лагранжа.
2. Сформулюйте прымету нарастання функцыі; прымету спадання функцыі.
3. Які пункт абсягу вызначэння функцыі называецца пунктам максімуму; пунктам мінімуму; пунктам экстрэмуму?
4. Які лік называецца максімумам функцыі; мінімумам функцыі; экстрэмумам функцыі?
5. Якія пункты абсягу вызначэння функцыі называюцца крытычнымі пунктамі?
6. Сформулюйте прымету максімуму функцыі; прымету мінімуму функцыі.

258. Дайце азначэнне нарастальнай на прамежку функцыі і, выкарыстаўшы яго, дакажыце, што функцыя $y = x^2 - 4x + 1$ нарастае на прамежку $[2; +\infty)$ і спадае на прамежку $(-\infty; 2]$. Пабудуйце графік гэтай функцыі і ўстанавіце знак вытворнай $f'(x)$ ва ўказаных прамежках нарастання і спадання.

259. Дакажыце, што функцыя $y = x^3 + 4x$ нарастае на ўсёй каардынатнай прамой з дапамогай:

- а) няроўнасцей;
- б) вытворнай.

260. Па графіку функцыі G , выяўленам на рисунку 188, вызначыце:

- а) прамежкі, на якіх вытворная G' дадатная;

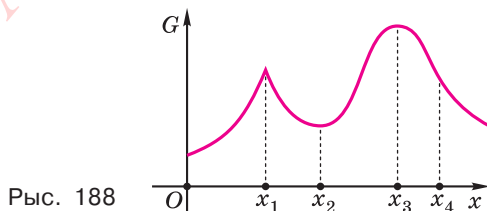


Рис. 188

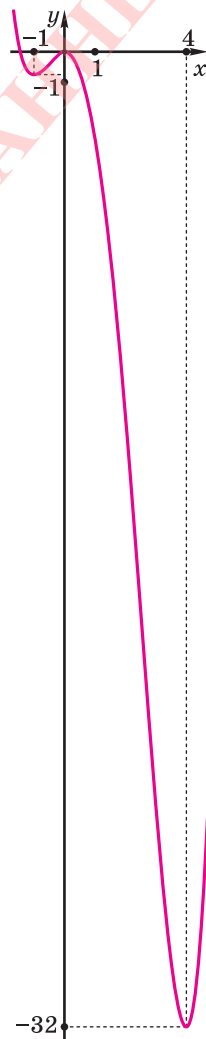


Рис. 187

- б) прамежкі, на якіх вытворная G' адмоўная;
 в) пункты, у якіх вытворная роўная нулю;
 г) пункты, у якіх вытворная не існуе.

261. Знайдзіце прамежкі, у якіх дадатная вытворная функцыі:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

262. Вызначыце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $p(y) = 3y + 1$; г) $q(y) = -\frac{1}{4}y - 2$; ж) $p(h) = \frac{2}{3-h}$;
 б) $p(y) = \frac{1}{3}y - 1$; д) $p(h) = \frac{2}{h}$; з) $q(h) = 2 - \frac{4}{0,5h-1}$.
 в) $q(y) = -4y + 2$; е) $q(h) = -\frac{1}{3h}$;

263. Вызначыце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $k = x^2$; д) $f = x^3 - 27x$;
 б) $p = (x - 1)^2$; е) $n = x^2(x - 3)$;
 в) $t = 5x^2 - 3x + 1$; ж) $g = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;
 г) $h = x^2 - 2x + 5$; з) $d = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$.

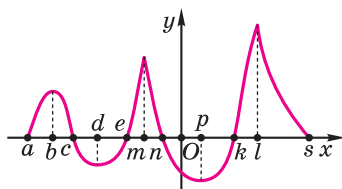
264. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $y = -2x^2 + 3x + 5$; ж) $y = -x^3 + 3x + 2$;
 б) $y = (x + 1)^2$; з) $y = x^3 + 3x + 1$;
 в) $y = 2x^2 - x$; і) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$;
 г) $y = 6 - x - x^2$; к) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
 д) $y = x^3 + x$; л) $y = x^4 - 4x^3 + 10$;
 е) $y = x^3 - 12x + 1$; м) $y = x^4 - 2x^2 + 24x + 1$.

265. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$; ж) $y = \frac{x}{x^2+1}$;
 б) $y = 3x^5 - 5x^3 - 30x$; з) $y = \frac{x-2,5}{x^2-4}$;
 в) $y = x + \frac{1}{x}$; і) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;
 г) $y = x - \frac{1}{x}$; к) $y = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$;
 д) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; л) $y = x - \sqrt{x}$;
 е) $y = \frac{x}{x^2-1}$; м) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

266. Па графіку функцыі f , выяўленым на рысунку 189, вызначыце:



Рыс. 189

а) прамежкі, на якіх вытворная f' дадатная, і прамежкі, на якіх яна адмоўная;

б) пункты, дзе вытворная роўная нулю;

в) пункты, дзе вытворная не існуе.

267. Па графіку вытворнай функцыі f , выяўленым на рысунку 190, вызначыце:

а) прамежкі нарастання і спадання функцыі f ;

б) пункты максімуму і мінімуму функцыі f ;

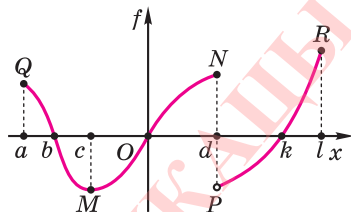
в) пункты, у якіх вытворная функцыі f не існуе.

268. Вышыня, на якой у момант часу t знаходзіцца цела, кінутае вертыкальна ўверх, роўная $h(t)$. Вызначыце, чаму роўная вытворная $h'(t)$ у момант, калі цела дасягнула найбольшай вышыні.

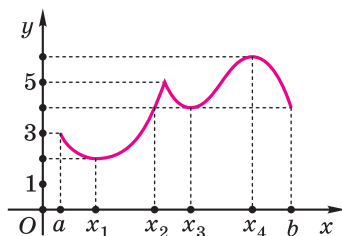
269. На рысунку 191 выяўлены графік функцыі $y(x)$. Укажыце:

а) пункты максімуму і мінімуму функцыі $y(x)$;

б) найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y(x)$ на прамежку $[a; b]$.



Рыс. 190

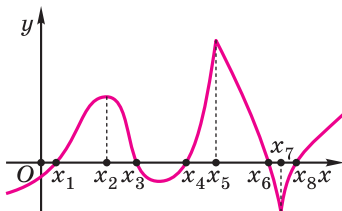


Рыс. 191

270. Нарысуйце графік такой функцыі f , у якой на прамежку $[a; b]$ які-небудзь мінімум большы за адзін з яе максімаў.

271. Па графіку функцыі $y(x)$, выяўленым на рысунку 192, укажыце пункты, у якіх вытворная функцыі $y(x)$:

а) роўная нулю; б) не існуе.



Рыс. 192

272. Знайдзіце пункт, у якім вытворная функцыі $y = x^5$ ператвараецца ў нуль. Ці мае функцыя ў гэтым пункце экстрэмум?

273. Знайдзіце пункты, у якіх функцыя f можа мець экстрэмум, улічыўшы, што:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 7$;

г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$;

б) $f(x) = 10 + 2x - x^2$;

д) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$;

е) $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

274. Устаноўце, колькі пунктаў экстрэмуму можа мець:

а) квадратная функцыя $y = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$;

б) кубічная функцыя $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, дзе $a \neq 0$.

275. Даследуйце на экстрэмум функцыю:

а) $y = 3 - x^2$;

д) $y = 12x - x^3$;

б) $y = 1 - x - x^2$;

е) $y = x^3 - 6x^2$;

в) $y = 1 - x - x^2$;

ж) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 5$;

г) $y = 2x^2 - x + 5$;

з) $y = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 1$.

276. Знайдзіце пункт экстрэмуму функцыі $y = ax^2 + bx + c$, дзе $a \neq 0$, і значэнне гэтай функцыі ў пункце экстрэмуму. Устаноўце, пры якім знаку каэфіцыента a гэты пункт з'яўляецца пунктам максімуму, а пры якім — пунктам мінімуму функцыі.

277. З дапамогай вытворнай знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = x^2 - 8x + 1$;

б) $y = 2x^2 - 8x - 1$.

278. Вызначыце, ці мае экстрэмум функцыя:

а) $y = \frac{1}{x^2}$;

в) $y = (x - 2)^2$;

б) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

г) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

279. Ці праўда, што функцыя y не мае пунктаў экстрэмуму, калі:

а) $y = \sqrt[5]{x^2}$;

б) $y = \sqrt[5]{x^3}$?

280. Знайдзіце крытычныя пункты функцыі f і ўстанавіце, якія з іх з'яўляюцца пунктамі максімуму, а якія — пунктамі мінімуму, улічыўшы, што:

а) $f(t) = 2t - 7$;

в) $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t$;

б) $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}t$;

г) $f(t) = 4 - 2t + 7t^2$;

$$\text{д) } f(t) = \frac{t}{3} + \frac{3}{t};$$

$$\text{ж) } f(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^4;$$

$$\text{е) } f(t) = \frac{t}{8} + \frac{2}{t};$$

$$\text{з) } f(t) = 2t^3 + 6t^2 - 18t + 120.$$

281. Знайдіть критичні точки функції g і встановіть, які з їх з'являються точками максимуму, а які — точками мінімуму, улічуючи, що:

$$\text{а) } g(z) = \sqrt{z};$$

$$\text{в) } g(z) = \sqrt{z^2 + 2z};$$

$$\text{б) } g(a) = \sqrt{a^2 + 1};$$

$$\text{г) } g(a) = \begin{cases} -2a & \text{при } a \leq -2, \\ a^2 & \text{при } -2 < a < 2, \\ 6 - a & \text{при } a \geq 2. \end{cases}$$

282. Знайдіть прамежки настання, прамежки спадання і екстремуми функції:

$$\text{а) } p(x) = 4x^2 - 6x;$$

$$\text{д) } n(h) = \frac{3h-1}{1-4h};$$

$$\text{б) } q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;$$

$$\text{е) } t(h) = \frac{h-3}{2h+4};$$

$$\text{в) } p(x) = x^3 + 3x^2;$$

$$\text{ж) } n(h) = \frac{(h-2)(8-h)}{h^2};$$

$$\text{г) } q(x) = 1 + x - x^3;$$

$$\text{з) } t(h) = \frac{16}{h(4-h^2)}.$$

283. Знайдіть прамежки настання, прамежки спадання і екстремуми функції:

$$\text{а) } p(t) = 6t^5 + 15t^4 + 10t^3;$$

$$\text{в) } p(t) = \frac{t^2}{t^2+3};$$

$$\text{б) } q(t) = t^4(t-12)^2;$$

$$\text{г) } q(t) = \frac{t^2-2t+2}{t-1}.$$

284. Знайдіть прамежки настання і спадання, точки екстремуму функції:

$$\text{а) } y = 4 + x - 3x^3; \quad \text{в) } y = \frac{4}{(x-2)^2}; \quad \text{д) } y = \frac{x-1}{2x+1};$$

$$\text{б) } y = 3x^3 - x + 3; \quad \text{г) } y = -\frac{3}{(3-x)^2}; \quad \text{е) } y = \frac{2-x}{3x-1}.$$

285. Знайдіть прамежки настання і спадання і точки екстремуму функції:

$$\text{а) } y = x + \frac{1}{x}; \quad \text{б) } y = \frac{x}{4} + \frac{16}{x}; \quad \text{в) } y = \frac{x-1}{2} + \frac{8}{x-1} - 1;$$

$$\text{г) } y = \frac{1+x}{1+4x^2}; \quad \text{д) } y = \frac{x^2}{x^2-4}; \quad \text{е) } y = 2x - \sqrt{x}.$$

286. Выворная квадратнага трохчлена $y = ax^2 + bx + c$ у пунктах 3 і 8 роўная адпаведна 10 і 5. Знайдзіце пункт экстрэмуму функцыі y і вызначыце, з'яўляецца ён пунктам максімуму або мінімуму.

287. Функцыя $y = (x - a)(x^2 - 1)$ мае мінімум у пункце $x = \frac{1}{9}$. Вызначыце, у якім пункце ў яе максімум.

288. Вызначыце, пры якіх значэннях параметра a функцыі $y = -x^3 + 3ax + 5$ і $y = x^2 + (a + 1)x$ маюць мінімум у адным пункце.

289. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання, пункты экстрэмуму і нарысуйце эскіз графіка функцыі:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = 2x^3 + 3x^2 - 1; & \text{в) } y = 0,5x^4 - 4x^2; \\ \text{б) } y = x^3 + 3x - 2; & \text{г) } y = x^4 - 8x^2 + 9. \end{array}$$

290. Дакажыце, што функцыя $y = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}$ нарастае на ўсёй лікавай прамой. Выкарыстаўшы гэта, дакажыце, што пры $x \geq 0$ праўдзіцца няроўнасць $\frac{x^5}{5} + x \geq \frac{2}{3}x^3$.

291. Рашыце няроўнасць:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x+3}{x(x-1)} > 1; & \text{в) } \sqrt{3x-1} < 5; \\ \text{б) } \frac{x^2+3}{x-1} < 2; & \text{г) } \sqrt{5-2x} > 2. \end{array}$$

292. Вызначыце, пры якіх значэннях зменнай a не мае рашэнняў сістэма:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 7x - 2ay = 5, \\ (4 - 3a)x + 4ay = 7; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} (a+1)x + 4y = 2a + 4, \\ 2x + (a-1)y = 3a^2 - 22. \end{cases} \end{array}$$

293. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс вугла паміж дыяганалямі прававугольнага, у якога адно вымярэнне ў тры разы большае за другое.

294. Дакажыце, што ў прававугольным трохвугольніку з вуглом у 15° квадрат гіпатэнузы роўны пачацвяронаму здабытку катэтаў.

295. Два целы, супольная маса якіх роўная 36 кг, рухаюцца па адной прамой роўнапаскорана, першае пад уздзеяннем сілы ў 42 Н, другое з паскарэннем 5 м/с. Знайдзі-

це паасобныя масы цел, улічыўшы, што трэцяе цела масай 19 кг, на якое дзейнічае сіла, роўная суме сіл, што дзейнічаюць на першае і другое целы, рухаецца з паскарэннем, роўным суме паскарэнняў першага і другога цел.

296. Два целы рухаюцца па адной прамой роўнапаскорана так, што іх паскарэнні разам складаюць 24 м/с^2 . На першае цела дзейнічае сіла, роўная 42 Н, а маса другога цела роўная 49 кг. Знайдзіце паасобныя паскарэнні цел, улічыўшы, што трэцяе цела, маса якога роўная супольнай масе першага і другога цел, пад уздзеяннем сілы, роўнай суме сіл, што дзейнічаюць на першае і другое целы, рухаецца з паскарэннем 17 м/с^2 .

* * *

297. З лікаў ад 1 да 50 утварылі 10 груп па пяць лікаў у кожнай групе. Вызначыце, якой можа быць найбольшая і якой найменшая сума сярэдніх па велічыні лікаў з гэтых 10 груп.

298. З вяршыні A трохвугольніка ABC апущаны перпендыкуляры BM і CN на прамыя, што дзеляць папалам вуглы C і B . Знайдзіце адрэзак MN , улічыўшы, што $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

299. На дошцы выпісаны лікі $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$. Ці можна паставіць паміж імі знакі «+» і «-» так, каб утвораны выраз меў значэнне 0? Колькі лікаў трэба закрэсліць, каб з астатніх пры пэўнай расстаноўцы знакаў «+» і «-» можна было ўтварыць выраз са значэннем 0?

7. Прымяненні вытворнай

У папярэднім параграфе мы разгледзелі адно з найважнейшых прымяненняў вытворнай да даследавання функцый. Разгледзім задачу пра вызначэнне найбольшага і найменшага значэнняў функцыі на пэўным прамежку.

Няхай пэўная непарыўная функцыя f разглядаецца на прамежку $[a; b]$ і на ім не мае крытычных пунктаў. Тады на гэтым прамежку функцыя або нарастае, або спадае. Значыць, свае найбольшае і найменшае значэнні на прамежку $[a; b]$ функцыя прымае ў канцах a і b .

Няхай цяпер пэўная непарыўная функцыя f разглядаецца на прамежку $[a; b]$, на якім яна мае некалькі крытычных пунктаў. Гэтыя пункты раздзяляюць прамежак $[a; b]$ на такія прамежкі, унутры якіх крытычных пунктаў ужо няма. Таму найбольшае і найменшае значэнні гэтай функцыя на тым ці іншым такім прамежку прымае ў яго канцах, г. зн. у крытычных пунктах або ў пунктах a і b . Значыць, каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні непарыўнай функцыі на прамежку $[a; b]$, дастаткова вылічыць яе значэнні ў крытычных пунктах і на канцах a і b , а затым з гэтых значэнняў выбраць найбольшае і найменшае.

Прыклад 1. Знойдзем найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 53$ на прамежку $[-3; 2]$.

Знойдзем крытычныя пункты:

$$y' = 6x^2 - 6x - 36 = 0;$$

$$x = -2 \text{ або } x = 3.$$

Паколькі прамежку $[-3; 2]$ належыць толькі крытычны пункт -2 , то вылічым значэнні функцыі ў гэтым пункце і на канцах -3 і 2 :

$$y(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 53 = 80;$$

$$y(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot (-2) + 53 = 97;$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 53 = -15.$$

З атрыманых лікаў $80, 97, -15$ выбіраем найбольшы і найменшы:

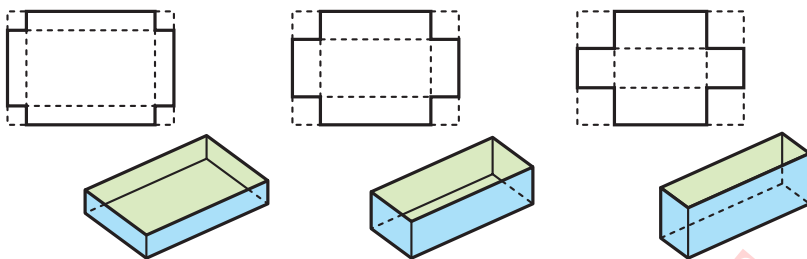
$$y_{\text{найб.}} = 97; \quad y_{\text{найм.}} = -15.$$

$$[-3; 2] \quad [-3; 2]$$

У жыцці часта паўстае *задача адшукання найлепшага, або аптымальнага, рашэння*. У тых выпадках, калі задачу ўдаецца сфармуляваць на мове матэматыкі, яна зводзіцца да *знаходжання найбольшага або найменшага значэння пэўнай функцыі*.

Прыклад 2. З прававугольнага ліста бляхі, выразаючы квадратныя вугалкі, можна вырабіць адкрытыя скрынкі рознай умяшчальнасці (рыс. 193). Знойдзем старану выразанага вугалка, пры якой з ліста памерамі 10×16 атрымаецца скрынка найбольшай умяшчальнасці.

Няхай a — старана выразанага вугалка. Тады кожная старана прававугольніка паменшыцца на $2a$. Значыць,



Рыс. 193

вымярэнні скрынкі роўныя a , $10 - 2a$, $16 - 2a$, і для ўмяшчальнасці V скрынкі атрымаем:

$$V = a(10 - 2a)(16 - 2a), \text{ або } V = 4a^3 - 52a^2 + 160a.$$

Лёгка ўгледзець, што зменная a прымае значэнні з прамежку $[0; 5]$ і ў канцах гэтага прамежку зменная V сваім значэннем мае лік 0.

Знаходзім крытычныя пункты функцыі V :

$$V' = 12a^2 - 104a + 160 = 0;$$

$$a = 2 \text{ або } a = 6\frac{2}{3}.$$

Значэнне зменнай a , роўнае $6\frac{2}{3}$, не належыць абсягу вызначэння. Пры $a = 2$ функцыя V мае найбольшае значэнне, знойдзем яго:

$$V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144.$$

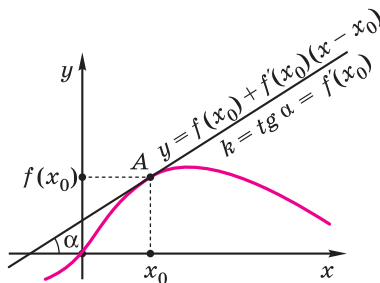
Наступная тэарэма дае рашэнне задачы пра датычную да графіка функцыі.

Тэарэма 8. *Датычная да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $A(x_0; f(x_0))$ вызначаецца ўраўненнем*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказ. Няхай ёсць графік функцыі $y = f(x)$, на якім выбраны пэўны пункт $A(x_0; f(x_0))$ (рыс. 194). Знойдзем ураўненне датычнай да гэтага графіка ў пункце A .

Як было ўстаноўлена ў параграфе 4, вуглавы каэфіцы-



Рыс. 194

ент a датычнай $y = ax + b$ у пункце $A(x_0; f(x_0))$ да графіка функцыі $y = f(x)$ роўны значэнню вытворнай у гэтым пункце, г. зн. роўны $f'(x_0)$. Таму ўраўненне датычнай выглядае так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Паколькі датычная праходзіць праз пункт A , то яго каардынаты праўдзяць гэтае ўраўненне:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Таму

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

і значыць,

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

або

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

У выніку атрымаем ураўненне датычнай:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прыклад 3. Дакажам, што датычная да парабалы $y = x^2$ у пункце M з абсцысай x_0 , $x_0 \neq 0$ перасякае вось абсцыс у пункце $A\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ (рыс. 195).

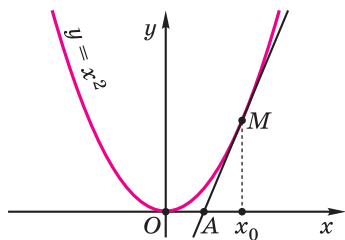
Паколькі $y(x_0) = x_0^2$ і $y'(x_0) = 2x_0$, то ўраўненне датычнай запішацца як

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \text{ або } y = 2x_0x - x_0^2.$$

Пункт A , у якім датычная перасякае вось абсцыс, мае ардынату, роўную нулю, г. зн. праўдзіцца роўнасць $0 = 2x_0x - x_0^2$.

$$\text{Адсюль } x = \frac{x_0}{2}.$$

Устаноўлены факт абгрунтоўвае такі спосаб пабудавання датычнай да парабалы ў пункце M з абсцысай x_0 : знайсці сярэдзіну A адрэзка восі абсцыс з канцамі O і x_0 ; правесці прамую MA , якая і з'яўляецца шуканай датычнай.



Рыс. 195

Вытворную можна выкарыстаць для *набліжаных вылічэнняў*. Няхай трэба знайсці набліжанае значэнне функцыі $y = f(x)$ у пункце x , прычым у пункце x_0 , блізкім да пунк-

та x , значення функції знаходиться проста (рис. 196). Графік функції $y = f(x)$ у вільній точці x_0 близько до прямої $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — дотичної до графіка в точці x_0 . Тому правдивіше наближена рівність $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Коли різниця $x - x_0$ абзацувати Δx , то тоді $x = x_0 + \Delta x$ і атриману наближану рівність можна записати у вигляді:

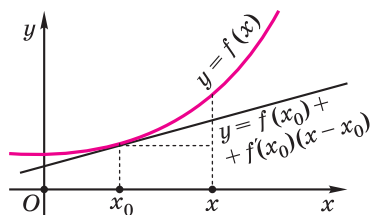


Рис. 196

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (1)$$

Прыклад 4. Разгледзім ступенную функцыю $y = x^n$. Выбраўшы пэўнае значэнне x_0 зменнай x і прымяніўшы формулу (1), атрымаем

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + x_0^{n-1} \Delta x.$$

Знойдзем $2,997^5$. Тут $x = 2,997$ і $n = 5$. У якасці x_0 зручна ўзяць 3. Тады $2,997^5 = (3 - 0,003)^5 \approx 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot (-0,003) = 241,785$. Вылічэнні з дапамогай калькулятара даюць значэнне 241,7874, г. зн. рэлятыўная хібнасць складае $\left| \frac{241,7874 - 241,785}{241,785} \right| \cdot 100 \%$, г. зн. 0,00099 %.

$$\begin{aligned} \text{Знойдзем } \sqrt[5]{30}. \text{ Тут у якасці } x_0 \text{ зручна ўзяць } 30. \text{ Тады} \\ \sqrt[5]{30} = 30^{\frac{1}{5}} = (32 - 2)^{\frac{1}{5}} \approx 32^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} \cdot 32^{\frac{1}{5}-1} \cdot (-2) = 2 - \frac{2}{5} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} = \\ = 2 - \frac{2}{5} \cdot \left(32^{\frac{1}{5}} \right)^{-4} = 2 - \frac{2}{5} \cdot (2)^{-4} = 2 - \frac{1}{40} = 1,975. \end{aligned}$$

Вылічэнні з дапамогай калькулятара даюць значэнне 1,97435, г. зн. рэлятыўная хібнасць складае $\left| \frac{1,97435 - 1,975}{1,975} \right| \cdot 100 \%$, г. зн. 0,033 %.



1. Сфармулюйце прымету нарастання функцыі; прымету спадання функцыі.
2. Сфармулюйце прымету максімуму функцыі; прымету мінімуму функцыі.

3. Сформулюйте алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на заданому проміжку.

4. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці.

5. Як можна побудувати дотичну до параболы $y = x^2$ у точці з заданою абсцисою?

6. Запишіть рівняння, яке дозволяє знаходити наближене значення функції у заданій точці.

300. Нарисуйте графік функції $f(x) = -x^2 + 4x$. Знайдіть її найбільше значення на проміжку:

а) $[0; 1]$; б) $[1; 2]$; в) $[1; 3]$.

301. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на проміжку $[a; b]$, улічуючи, що:

а) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, $a = 0$, $b = 1$;

б) $f(x) = x^2 + 4x - 2$, $a = -3$, $b = 1$;

в) $f(x) = x^3 + 3x$, $a = 0$, $b = 2$;

г) $f(x) = x^3 - 3x$, $a = -1$, $b = 3$;

д) $f(x) = \frac{4}{x} + x - 3$, $a = 1$, $b = 4$;

е) $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x$, $a = 0$, $b = 4$.

302. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на проміжку $[a; b]$, улічуючи, що:

а) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ і $[a; b] = [-4; 4]$;

б) $f(x) = (3x^2 - 6x + 4)^2$ і $[a; b] = [0; 3]$;

в) $f(x) = (x^4 - 1)^3$ і $[a; b] = [-1; 2]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ і $[a; b] = [0; 2]$.

303. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на проміжку A , улічуючи, що:

а) $f(x) = 1,5x^2 + \frac{81}{x}$, $A = [1; 4]$;

б) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$, $A = [-5; -2,5]$.

304. Їсть функція f . Парафнайце її найбільше значення на проміжку A з найменшим значенням на проміжку B , улічуючи, що:

а) $f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$, $A = [-4; 0]$, $B = [3; 4]$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$, $A = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $B = [2; 3]$.

305. Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні функцыі:

а) $f(t) = t^4 - 8t^2 - 9$ на прамежку $[-1; 1]$ і на прамежку $[0; 3]$;

б) $g(x) = 3x^5 - 5x^3 - 9$ на прамежку $[0; 2]$ і на прамежку $[2; 3]$;

в) $u(a) = \frac{a^2+4}{a}$ на прамежку $[-4; -1]$ і на прамежку $[1; 3]$;

г) $v(c) = \frac{c^2+4}{c}$ на прамежку $[-3; -2]$ і на прамежку $[1; 5]$.

306. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x)$ на прамежку $[a; b]$, улічыўшы, што:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, $[a; b] = [-1; 1]$;

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[a; b] = [-1; 2]$;

в) $f(x) = 7 + 4x^3 - x^4$, $[a; b] = [-1; 3]$;

г) $f(x) = 5x - \frac{5}{3}x^3$, $[a; b] = [0; 2]$;

д) $f(x) = \frac{2x^2-9x-2}{x^2-5x-6}$, $[a; b] = [0; 2]$;

е) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[a; b] = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$;

ж) $f(x) = \sqrt{x} - x$, $[a; b] = [0; 4]$;

з) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[a; b] = [0; 9]$;

і) $f(x) = 7x^3 + 9x^2 - 3x + 6$, $[a; b] = [-1; 1]$;

к) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 13$, $[a; b] = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

307. Дакажыце, што калі $|x| \leq 2$, то $|x^3 - 3x| \leq 2$.

308. Дакажыце, што ўраўненне $f(x) = 0$ мае адзіны карань на прамежку A і на прамежку B , улічыўшы, што:

а) $f(x) = x^3 - 27x + 2$, $A = [-1; 1]$, $B = [4; 6]$;

б) $f(x) = x^4 - 4x - 9$, $A = [-2; 0]$, $B = [2; 3]$;

в) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 8$, $A = [-2; -1]$, $B = [1; 2]$;

г) $f(x) = -1 + 3x^2 - x^3$, $A = [-2; 0]$, $B = [2; 3]$.

309. Вызначыце, пры якіх значэннях параметра a ураўненне $4x^3 - 3x = a$ мае толькі адзін карань.

310. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення:

а) $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$; в) $12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5 = 0$;

б) $5x^3 - 5x - 3 = 0$; г) $x^4 + x^3 = 10$.

311. Знайдзіце такі дадатны лік, пры якім:

- а) сума яго і адваротнага яму ліку найменшая;
- б) сума яго і квадрата адваротнага яму ліку найменшая;
- в) рознасць яго і яго куба найбольшая.

312. Выявіце лік:

а) 16 сумай двух такіх неадмоўных лікаў, каб іх здабытак быў найбольшы;

б) 36 здабыткам двух такіх неадмоўных лікаў, каб іх сума была найменшай.

313. Дакажыце, што:

а) здабытак двух дадатных лікаў, сума якіх роўная s , мае найбольшае значэнне, калі множнікі роўныя адзін аднаму;

б) сума двух дадатных лікаў, здабытак якіх роўны p , мае найменшае значэнне, калі складаемыя роўныя адзін аднаму.

314. Плошча прамавугольніка роўная 64 см^2 . Вызначыце, якую даўжыню павінны мець яго стораны, каб перыметр быў найменшы.

315. Выявіце лік:

а) 10 сумай двух такіх дадатных лікаў, каб сума іх квадратаў была найменшай;

б) 8 сумай двух такіх дадатных лікаў, каб сума іх кубаў была найменшай.

316. З усіх прамавугольнікаў, якія маюць перыметр 20 см, знайдзіце той, у якім дыяганаль найменшая.

317. Кавалак дроту даўжынёй 48 м згінаюць так, каб утварыўся прамавугольнік. Вызначыце, якімі павінны быць стораны прамавугольніка, каб яго плошча была найбольшая.

318. Выявіце лік:

а) 8 сумай двух такіх дадатных лікаў, што сума куба аднаго складаемага і квадрата другога найменшая з магчымых;

б) 54 сумай трох такіх дадатных лікаў, што два з іх прапарцыянальныя лікам 1 і 2, а здабытак усіх складаемых найбольшы з магчымых.

319. Ёсць 200 м драцяной сеткі. Вызначыце памеры абгароджанага гэтай сеткай прамавугольнага загону найбольшай плошчы, абмежаванага з аднаго боку ракой.

320. Трэба выгарадзіць прамавугольную пашу плошчай 1 км^2 і падзяліць яе на два прамавугольныя ўчасткі. Вызначыце найменшае значэнне даўжыні агароджы такой пашы.

321. На двох будівничих площах узводзяцца два аднапавярховыя склады агульнай плошчай 600 м^2 . Улічыўшы, што кошт будавання склада прама прапарцыянальна квадрату яго плошчы і будаўніцтва 1 м^2 на другой пляцоўцы каштуе на 40% даражэй, чым на першай, вызначыце, якой павінна быць плошча кожнага склада, каб кошт будаўніцтва быў найменшы.

322. Пункт M — сярэдзіна адрэзка AB . Знайдзіце пункт X на гэтым адрэзку, для якога здабытак даўжынь адрэзкаў AX , MX і XB найбольшы.

323. Вызначыце стораны прамавугольніка найбольшай плошчы, які можна ўмежыць у трохвугольнік з асновай a і вышыняй h .

324. З усіх прамавугольнікаў, умежаных у паўкруг так, што адна старана прамавугольніка ляжыць на дыяметры паўкруга, знайдзіце прамавугольнік найбольшай плошчы.

325. Стораны AB , BC і CD трапецыі $ABCD$ роўныя 1 кожная і старана AD большая за старану BC . Вызначыце, якім павінен быць вугал CDA , каб плошча трапецыі была найбольшай.

326. З прамавугольнага ліста бляхі памераў $a \times b$, выразаючы квадратныя вугалкі, трэба вырабіць адкрытую скрынку. Вызначыце, якой павінна быць старана выразанага квадрата, каб аб'ём скрынкі быў найбольшым.

327. Трэба вырабіць скрынку без накрыўкі з прамавугольнай асновай і аб'ёмам V , адносіна старон асновы якой была б роўна k . Вызначыце, якімі павінны быць памеры скрыні, каб яе паверхня была найменшай, улічыўшы, што:

- а) $k = 1$, $V = 32$; б) $k = 2$, $V = 36$.

328. Аб'ём V прамой чатырохвугольнай прызмы з квадратнай асновай роўны 8 см^3 . Вызначыце, якой павінна быць старана a асновы і вышыня h прызмы, каб плошча яе паверхні была найменшай, улічыўшы, што аб'ём V прызмы і яе бакавая паверхня S вызначаюцца формуламі $V = S_{\text{асн.}} \cdot h$ і $S = Ph$, дзе $S_{\text{асн.}}$ — плошча асновы, P — перыметр асновы (рыс. 197).

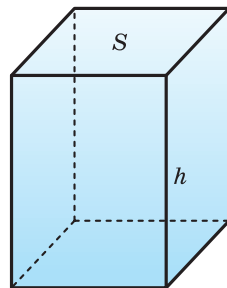


Рис. 197

329. Паверхня каробкі без верхняй накрыўкі ў форме прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай роўная 300 см^2 . Вызначыце памеры каробкі, улічыўшы, што яе аб'ём найбольшы з магчымых.

330. Бак цыліндрычнай формы павінен умяшчаць V літраў вады. Вызначыце, якімі павінны быць памеры такога бака, каб яго паверхня без накрыўкі была найменшай, улічыўшы, што бакавая паверхня цыліндра $S_{\text{бак.}}$ і яго аб'ём V вызначаюцца формуламі $S_{\text{бак.}} = 2\pi rh$ і $V = \pi r^2 h$, дзе r — радыус асновы цыліндра, а h — яго вышыня (рыс. 198).

331. Вызначыце, якую найменшую плошчу поўнай паверхні можа мець цыліндр, аб'ём якога роўны V (гл. рыс. 198).

332. Знайдзіце, якую найменшую паверхню можа мець цела з аб'ёмам Q , якое ўяўляе сабой прамы кругавы цыліндр, завершаны зверху паўшарам (рыс. 199), улічыўшы, што аб'ём V і бакавая паверхня $S_{\text{бак.}}$ цыліндра вызначаюцца формуламі $V = S_{\text{асн.}} h$ і $S_{\text{бак.}} = Ch$, дзе $S_{\text{асн.}}$ — плошча асновы цыліндра, C — даўжыня акружнасці гэтай асновы, а аб'ём V і паверхня S шара — формуламі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ і $S = 4\pi R^2$, дзе R — радыус шара.

333. Лодка знаходзіцца на возеры на адлегласці 3 км ад бліжэйшага пункта А берага. Пасажыр лодкі хоча патрапіць у пункт B , які знаходзіцца на беразе на адлегласці 5 км ад A (участак AB берага лічым прамалінейным). Лодка рухаецца са скорасцю 4 км/г, а пасажыр, выйшаўшы з лодкі, можа за гадзіну прайсці 5 км. Да якога пункта берага павінна прыстаць лодка, каб пасажыр патрапіў у B за найкарацейшы час?

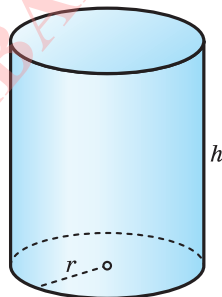
334. Укажыце пункты, у якіх нельга правесці датычную да графіка функцыі:

а) $y = |x - 3|$;

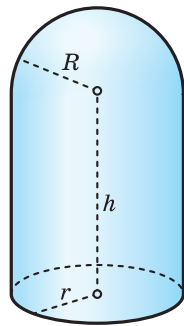
в) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

б) $y = |x - 1| + |x + 2|$;

г) $y = |x^2 - x|$.



Рыс. 198



Рыс. 199

335. Знайдіть тангенс вугла нахилу дотичної до графіка функції f у пункті A , улічуйте, що:

а) $f(x) = x^2$, $A(-4; 16)$; в) $f(x) = x^3$, $A(-2; -8)$;

б) $f(x) = \frac{4x-x^2}{4}$, $A(0; 0)$; г) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $A(1; -2)$.

336. Визначте, у якому пункті кривої $y = -\frac{1}{2}x^2$ дотична нахилена до осі x під кутом:

а) 45° ; б) 135° .

337. Визначте, у якому пункті графіка функції $g = \sqrt{c}$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом:

а) 45° ; б) 60° .

338. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = 2x^2$ у пункті:

а) $x = 1$; б) $x = -1$; в) $x = \frac{1}{2}$; г) $x = -\frac{1}{4}$.

339. Напишіть рівняння дотичної до параболы $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ у пункті перетинання її з оссю ординат.

340. Знайдіть рівняння дотичної до гіперболы $y = \frac{1}{x+1}$ у пункті $x = 0$ і нарисуйте гэтую гіперболу і дотичную.

341. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ у пункті з абсцисой:

а) $x = 0$; б) $x = 1$.

342. На параболі $y = x^2 - 4x$ знайдіть пункт, у якому дотична до параболы паралельна осі абсцис.

343. Визначте, у якому пункті дотична до кубічної параболы $y = x^3$ паралельна прямою $y = 3x - 5$.

344. Визначте, у яких пунктах графіка функції $y = \frac{x}{x^2+1}$ дотична:

а) паралельна осі абсцис;

б) складає з оссю абсцис вугал 45° ;

в) паралельна прямою $y = \frac{2}{9}x + 1$;

г) перпендикулярна прямою $y = 8x + 3$.

345. Побудуйте ї спытку параболы $y = 2x - x^2$ і $y = x^2 - 4$ і дотичныя да іх у пунктах перетинання. Знайдіть рівняння гэтых дотичных. Визначте вугал паміж дотичными.

346. Знайдзіце пункт перасячэння ліній $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ і запішыце ўраўненні датычных да гэтых ліній, праведзеных праз пункт перасячэння. Вызначыце вугал паміж гэтымі датычнымі.

347. Знайдзіце:

а) каардынаты пункта парабалы $y = x^2 - x$, у якім датычная праходзіць праз пункт $M(2; 0,25)$;

б) датычную да крывой $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$, якая праходзіць праз пункт $N(-2; 3)$.

348. Да гіпербалы $y = \frac{1}{x}$ праведзена адвольная датычная. Дакажыце, што плошча трохвугольніка, утворанага гэтай датычнай і восямі каардынат, роўная 2.

349. Вылічыце набліжана:

а) $\sqrt[3]{1,012}$; б) $\sqrt[5]{30}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[5]{9,02}$.

350. Знайдзіце набліжанае значэнне функцыі $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ пры:

а) $x = 2,0057$; б) $x = 1,974$.

351. Знайдзіце набліжанае значэнне функцыі $f(x)$ у пункце x_0 , улічыўшы, што:

а) $f(x) = 2x^5$, $x_0 = 1,003$; в) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1,97$;

б) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, $x_0 = 2,04$; г) $f(x) = 5\sqrt{x}$, $x_0 = 4,02$.

352. Знайдзіце набліжанае значэнне функцыі f у пунктах x_1 і x_2 , улічыўшы, што:

а) $f(x) = 2x^4 - x$, $x_1 = 2,017$ і $x_2 = 0,94$;

б) $f(x) = x^5 - 2x^2$, $x_1 = 1,994$ і $x_2 = 0,95$;

в) $f(x) = 3x^3 - x$, $x_1 = 4,03$ і $x_2 = 0,92$;

г) $f(x) = x^2 + 4x$, $x_1 = 5,08$ і $x_2 = 1,97$.

353. Вылічыце набліжана $\sqrt{1,06}$ і, даказаўшы няроўнасці $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ пры дадатных x , ацаніце хібнасць вылічэння.

354. Набліжанае значэнне $\sqrt{2}$ можна вылічыць, калі выкарыстаць выяўленне ліку 2 здабыткам $4\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ або сумай

1 + 1. Визначьте, у яким випадку атримане набліженне больш дакладнае.

355. Знайдзіце набліжанае значэнне выразу:

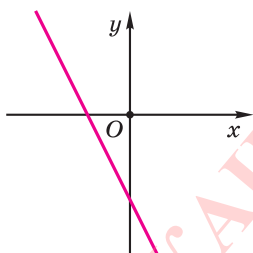
- а) $\sqrt{1,004}$; в) $\sqrt{0,994}$; д) $\sqrt{26}$; ж) $\sqrt{15,84}$;
 б) $\sqrt{25,011}$; г) $\sqrt{0,991}$; е) $\sqrt{49,021}$; з) $\sqrt{81,75}$.

356. Знайдзіце набліжанае значэнне выразу:

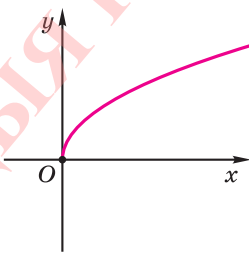
- а) $\frac{1}{1,003^{20}}$; в) $\frac{1}{0,9994^{13}}$; д) $\frac{2}{0,994^{60}}$;
 б) $\frac{1}{0,998^{40}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$; е) $\frac{2}{1,0015^{70}}$.

357. З рысункаў 200—211 укажыце той, на якім выяўлены графік функцыі, зададзенай формулай:

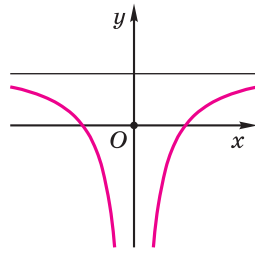
- а) $y = x^3 + 1$; д) $y = \sqrt{x}$; і) $y = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{7}{2}$;
 б) $y = 4x - x^2$; е) $y = 1 - \frac{1}{x^2}$; к) $y = -2x + 4$;
 в) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; ж) $y = x + \frac{1}{x}$; л) $y = -2x - 4$;
 г) $y = 3x^2$; з) $y = x + 5$; м) $y = -2$.



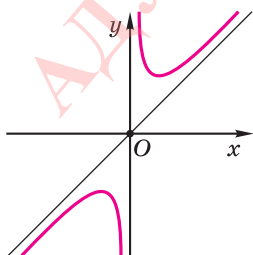
Рыс. 200



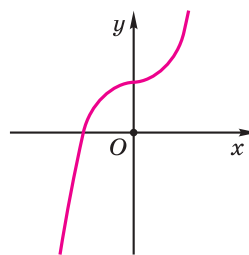
Рыс. 201



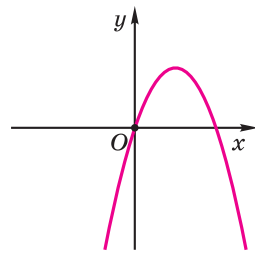
Рыс. 202



Рыс. 203



Рыс. 204



Рыс. 205

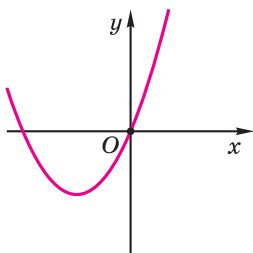


Рис. 206

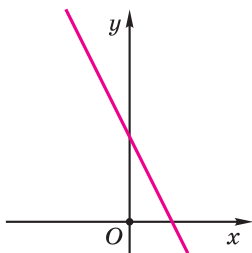


Рис. 207

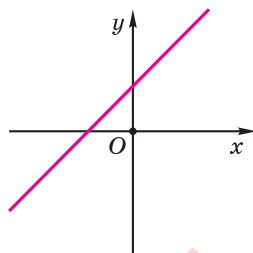


Рис. 208

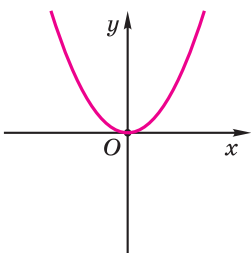


Рис. 209

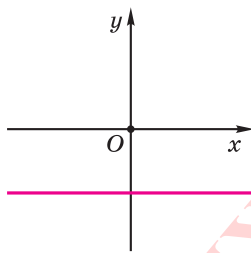


Рис. 210

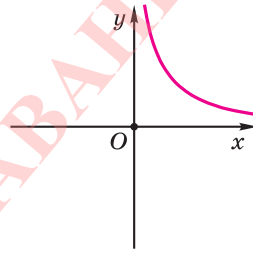


Рис. 211

358. Визначьте, що буде витворнай площы круга як функцы радыуса. Як патлумачыць гэты вынік?

359. Дакажыце, што трохвугольнік ABC , у якім $AB = 2AC \cos A$, з'яўляецца раўнабокім.

360. Меншая старана трохвугольніка роўная 11 см, а рознасць дзвюх іншых — 4 см. Знайдзіце косінусы вуглоў гэтага трохвугольніка, улічыўшы, што сярэдні па велічыні вугал роўны 60° .

361. З двух участкаў супольнай плошчай у 121 га было сабрана 6300 ц пшаніцы. Ураджайнасць на першым участку склала 56 ц/га, на другім — 49 ц/га. Знайдзіце, які ўраджай сабраны з першага ўчастка.

362. Ураджайнасці пшаніцы з двух участкаў плошчамі 65 га і 50 га ў суме склалі 117 ц/га. Визначыце, колькі збожжа сабралі з кожнага ўчастка, улічыўшы, што сярэдняя ўраджайнасць на полі, якое складаецца з гэтых участкаў, аказалася роўнай 57 ц/га.

* * *

363. Знайдзіце ўсе рашэнні сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 1 \leq 0, \\ 2y^2 + 2y - x \leq 0. \end{cases}$$

364. На старанах AB і AD прамавугольнага $ABCD$ адзначаны такія пункты F і G , што трохвугольнік CFG — правільны. Знайдзіце плошчу трохвугольніка AFG , улічыўшы, што плошчы трохвугольнікаў CBF і CDG роўныя адпаведна S_1 і S_2 .

365. У аднакругавым турніры ўдзельнічаюць 8 каманд, з якіх 4 выходзяць у фінал. Якую найменшую колькасць ачкоў павінна набраць каманда, каб забяспечыць сабе выхад у фінал, калі за перамогу даецца 2 ачкі, за нічыю — 1 ачко, а за паражэнне — 0?

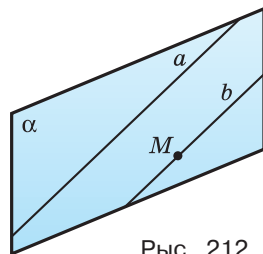
8. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы

Дзве прамыя прасторы называюцца **паралельнымі прамымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не маюць агульных пунктаў.

На плоскасці праз дадзены пункт можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай. Гэтае сцверджанне праўдзіцца і ў прасторы.

Тэарэма 1. *Праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай прамой.*

Доказ. Няхай ёсць прамая a і пункт M па-за ёй (рыс. 212). Па тэарэме 4 з параграфу 2 праз прамую a і пункт M праходзіць адзіная плоскасць — плоскасць α . У плоскасці α праз пункт M праходзіць адзіная прамая — прамая b , паралельная прамой a . Прамая b — шуканая прамая, і яна адзіная.



Рыс. 212

На плоскасці калі адна з паралельных прамых перасякае іншую прамую, то і другая таксама перасякае яе. Аналагічнае сцверджанне праўдзіцца і ў прасторы.

Тэарэма 2. *Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае плоскасць, то і другая прамая перасякае гэтую плоскасць.*

Доказ. Няхай ёсць дзве паралельныя прамыя b і c і адна з іх — прамая b — перасякае плоскасць β у пункце M (рыс. 213).

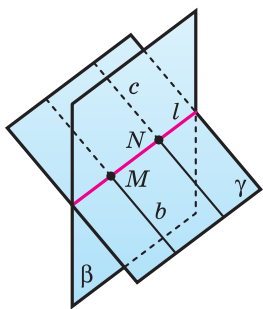


Рис. 213

Паколькі прамыя b і c паралельныя, то яны ляжаць у адной плоскасці, няхай гэта плоскасць γ . Плоскасці β і γ маюць агульны пункт M , таму па аксіёме 3 яны маюць агульную прамую l . Гэтая прамая ляжыць у плоскасці γ і перасякае прамую b у пункце M , таму яна перасякае паралельную ёй прамую c у пэўным пункце N . Паколькі прамая l ляжыць і ў плоскасці β , то пункт N належыць гэтай плоскасці. Значыць,

пункт N — агульны пункт плоскасцей β і γ .

Застаецца даказаць, што прамая c з плоскасцю β не мае іншых агульных пунктаў. Дапусцім, што гэта не так. Няхай прамая c мае з плоскасцю β яшчэ адзін агульны пункт K . Тады па аксіёме 2 прамая c ляжыць у плоскасці β . Атрымліваецца, што прамая c — агульная прамая плоскасцей β і γ . Але такой прамой з'яўляецца прамая l . Значыць, прамая c супадае з прамой l , што немагчыма, бо прамая b паралельная прамой c і перасякае прамую l .

Вы ведаеце, што калі на плоскасці дзве прамыя паралельныя трэцяй, то яны паралельныя і адна адной. Дакажам, што такое сцверджанне праўдзіцца і ў прасторы.

Тэарэма 3. *Калі дзве розныя прамыя паралельныя трэцяй прамой, то яны паралельныя і адна адной.*

Доказ. Няхай прамыя m і n паралельныя прамой p (рис. 214). Дакажам, што прамая m паралельная прамой n , г. зн. што прамыя m і n ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

На прамой m выберам адвольна пункт A , праз яго і прамую n правядзём плоскасць α . Дакажам, што прамая m ляжыць у гэтай плоскасці. Дапусцім, што гэта не так. Улічыўшы, што прамая m мае з плоскасцю α агульны пункт, трэба пагадзіцца, што прамая m перасякае плоскасць α . Тады па тэарэме 2 гэтую плоскасць перасякае прамая p , бо яна паралельная прамой m , і прамая n , якая паралельная прамой p . Але такое

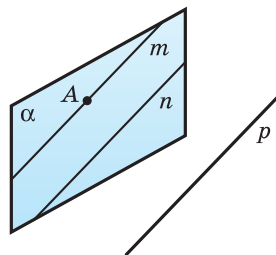
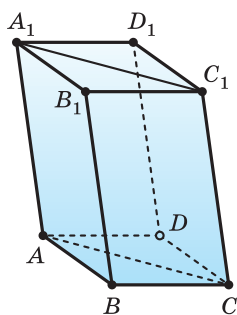


Рис. 214

немагчыма, бо прамая n ляжыць у плоскасці α . Значыць, прамая m разам з прамой n ляжыць у плоскасці α .

Прамыя m і n не перасякаюцца. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. што прамыя m і n перасякаюцца ў пэўным пункце B . Атрымліваецца, што праз пункт B праходзяць дзве розныя прамыя m і n , паралельныя прамой p , што супярэчыць тэарэме 1.

Выкарыстаўшы тэарэму 3, можна даказаць важныя сцверджанні пра паралелепіпед.



Рыс. 215

Тэарэма 4. У паралелепіпеда:

а) супрацьлеглыя грані роўныя;

б) усе яго дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Доказ. Няхай ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 215).

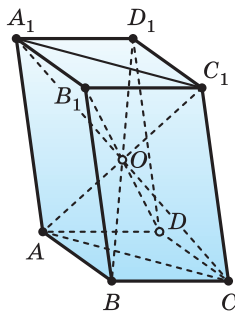
а) Дакажам, напрыклад, роўнасць супрацьлеглых граней $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Адрэзкі AB і $A_1 B_1$, а таксама BC і $B_1 C_1$ роўныя як супрацьлеглыя стораны паралелаграмаў $ABB_1 A_1$ і $BCC_1 B_1$ адпаведна. Адрэзкі AA_1 і CC_1 паралельныя і роўныя адзін аднаму, бо кожны з іх паралельны адрэзку BB_1 і роўны яму. Значыць, чатырохвугольнік $ACC_1 A_1$ — паралелаграм. А таму адрэзкі AC і $A_1 C_1$ роўныя адзін аднаму як супрацьлеглыя стораны гэтага паралелаграма.

Паколькі $AB = A_1 B_1$, $BC = B_1 C_1$ і $AC = A_1 C_1$, то трохвугольнікі ABC і $A_1 B_1 C_1$ роўныя. Таму роўныя вуглы ABC і $A_1 B_1 C_1$. Значыць, роўныя адзін аднаму і паралелаграмы-грані $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

б) Дакажам, што ўсе дыяганалі паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Чатырохвугольнік $AA_1 C_1 C$ — паралелаграм, бо яго супрацьлеглыя стораны AA_1 і CC_1 роўныя і паралельныя адна адной з-за таго, што кожны з адрэзкаў AA_1 і CC_1 роўны адрэзку DD_1 і паралельны яму (рыс. 216). Таму дыяганалі AC_1 і CA_1 пунктам перасячэння O дзеляцца папалам.

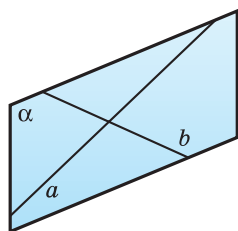


Рыс. 216

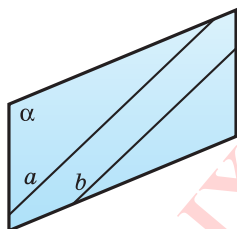
Чатырохвугольнік DCB_1A_1 — таксама паралелаграм, таму яго дыяганаль DB_1 перасякае другую дыяганаль CA_1 у яе сярэдзіне, г. зн. у пункце O .

Нарэшце, чатырохвугольнік ABC_1D_1 — паралелаграм, таму яго дыяганаль BD_1 перасякае другую дыяганаль AC_1 у яе сярэдзіне O .

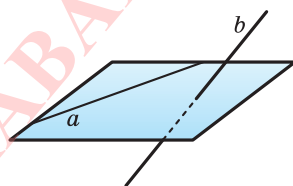
Калі дзве прамыя перасякаюцца (рыс. 217) або паралельныя (рыс. 218), то яны ляжаць у адной плоскасці. Дзве прамыя, якія не ляжаць у адной плоскасці, называюцца **скрыжавальнымі** (рыс. 219). Дакажам *прымету скрыжавальнасці прамых*.



Рыс. 217



Рыс. 218



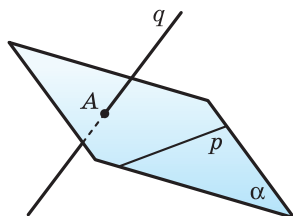
Рыс. 219

Тэарэма 5. *Калі з дзвюх прамых адна належыць пэўнай плоскасці, а другая перасякае гэтую плоскасць у пункце, не прыналежным першай прамой, то такія прамыя з'яўляюцца скрыжавальнымі.*

Доказ. Няхай прамая p ляжыць у плоскасці α , а прамая q перасякае гэтую плоскасць у пункце A , што не належыць прамой p (рыс. 220). Дакажам, што прамыя p і q скрыжоўваюцца.

Дапусцім, што прамыя p і q ляжаць у пэўнай плоскасці β . Тады плоскасці β належаць прамая p і пункт A , які належыць прамой q , і, значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α . Атрымалі, што плоскасці α належыць прамая q , якая па ўмове ёй не належыць. Гэтая супярэчнасць азначае, што зробленае дапушчэнне непраўдзівае.

Мы ведаем, што *вуглом паміж перасякальнымі прамымі* называецца велічыня аднаго з чатырох утвораных пры гэтым вуглоў, які не большы за 90° (рыс. 221).



Рыс. 220

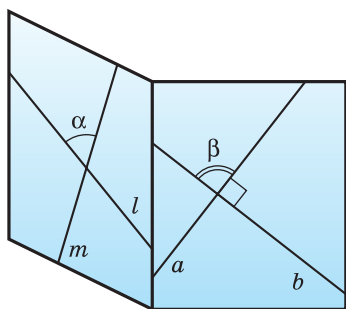


Рис. 221

Вуглом паміж скрыжавальнымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, якія паралельныя дадзеным скрыжавальным прамым.

Дакажам, што гэтае азначэнне карэктнае, г. зн. не залежыць ад выбару пункта, праз які праходзяць прамыя, паралельныя дадзеным скрыжавальным прамым.

Тэарэма 6. Вугал паміж перасякальнымі прамымі роўны вуглу паміж паралельнымі ім перасякальнымі прамымі.

Доказ. Няхай прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O , прамыя a_1 і b_1 — у пункце O_1 і $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 222).

Ад пункта O на прамой a адкладзём роўныя адрэзкі OA і OB , а на прамой b — адрэзак OC , роўны адрэзку OA . Праз пункты A і B правядзём прамыя, паралельныя прамой OO_1 , яны перасякуць прамую a_1 у пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Праз пункт C правядзём прамую, паралельную прамой OO_1 , яна перасячэ прамую b_1 у пункце C_1 .

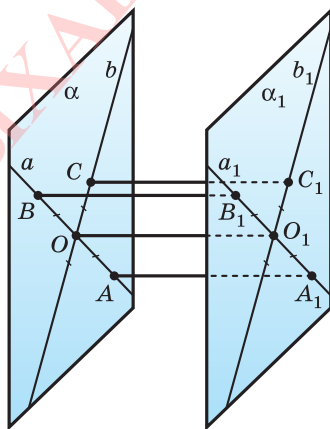


Рис. 222

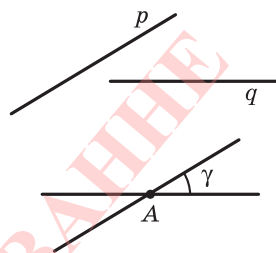
Чатырохвугольнік OO_1A_1A з'яўляецца паралелаграмам, бо яго супрацьлеглыя стораны OA і O_1A_1 паралельныя і роўныя. Таму $AA_1 = OO_1$ і $AA_1 \parallel OO_1$. Гэтаксама, паколькі чатырохвугольнік OO_1B_1B — паралелаграм, то $BB_1 = OO_1$ і $BB_1 \parallel OO_1$, а паколькі OO_1C_1C — паралелаграм, то $CC_1 = OO_1$ і $CC_1 \parallel OO_1$.

Паколькі кожны з адрэзкаў AA_1 , BB_1 , CC_1 роўны і паралельны адрэзку OO_1 , то яны роўныя і паралельныя адзін аднаму. Таму чатырохвугольнікі AA_1C_1C і BB_1C_1C абодва з'яўляюцца паралелаграмамі і, значыць, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$.

Цяпер па прымеце роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах можна сцвярджаць, што $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ і $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а таму $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ і $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

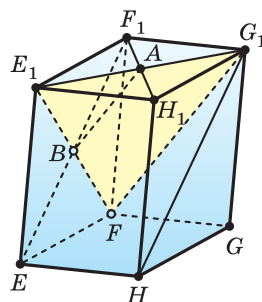
Такім чынам мы даказалі, што вуглы, утвораныя пры перасячэнні прамых a і b , такія самыя, як і пры перасячэнні прамых a_1 і b_1 .

На рысунку 223 паказана, як можна знайсці вугал паміж скрыжавальнымі прамымі: выбраць адвольна пункт A прасторы і праз яго правесці прамую, паралельную дадзеным скрыжавальным прамым. Зразумела, што пункт A можа быць выбраны і на адной з скрыжавальных прамых.



Рыс. 223

Прыклад. На рысунку 224 пункты A і B — пункты перасячэння дыяганалей граней $E_1F_1G_1H_1$ і EE_1F_1F паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Пабудуем вугал паміж скрыжавальнымі прамымі AB і HG_1 . Для гэтага ў плоскасці E_1FG_1 , якой належаць пункт G_1 і прамая AB , праз пункт G_1 паралельна прамой AB правядзём прамую. Гэта прамая G_1F . Вугал FG_1H — шуканы вугал паміж скрыжавальнымі прамымі AB і HG_1 .

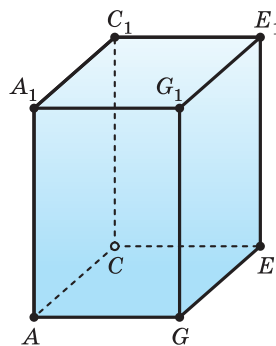


Рыс. 224

Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным нулю.

Правыя, вугал паміж якімі роўны 90° , называюцца **перпендыкулярнымі прамымі**.

Перпендыкулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі, а могуць быць і скрыжавальнымі. Напрыклад, перпендыкулярныя прамыя AC і AG , якія праходзяць праз адпаведныя канты прававугольнага паралелепіпеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рыс. 225), перасякаюцца, а перпендыкулярныя прамыя AC і EE_1 скрыжоўваюцца.



Рыс. 225



1. Сфармулуйце сцверджанне пра прамыя, што праходзяць праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой.
2. Якія дзве прамыя прасторы называюцца паралельнымі; перасякальнымі; скрыжавальнымі?
3. Сфармулуйце сцверджанне пра паралельныя прамыя, з якіх адна перасякае дадзеную плоскасць.
4. Сфармулуйце сцверджанне пра прамыя, паралельныя іншай прамой.
5. Сфармулуйце ўласцівасць супрацьлеглых граней прамавугольнага паралелепіпеда; дыяганалей прамавугольнага паралелепіпеда.
6. Сфармулуйце прымету скрыжавальных прамых.
7. Які вугал называюць вуглом паміж перасякальнымі прамымі; скрыжавальнымі прамымі; паралельнымі прамымі?
8. Як пабудаваць вугал паміж скрыжавальнымі прамымі?
9. Якія прамыя называюць перпендыкулярнымі?

366. Вызначыце, ці перасякаюцца прамыя, на якіх ляжаць асновы двух трохвугольнікаў, што маюць агульную сярэднюю лінію.

367. Паралелаграм $MNKL$ і трохвугольнік NAK не ляжаць у адной плоскасці. Прамая a праходзіць праз пункт P прамой AK і паралельная прамой NK . Дакажыце, што прмая a паралельная прамой ML .

368. Паралелаграмы $MNLK$ і $MNXY$ не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што чатырохвугольнік $KLXY$ з'яўляецца паралелаграмам.

369. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $PMNKL$. На прамой PL выбраны пункт D , праз які праведзена прмая l , паралельная прамой LK . Дакажыце, што прамыя MN і l паралельныя.

370. На адрэзку AB , канец A якога належыць плоскасці α , выбраны пункт C , і праз пункты B і C праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α адпаведна ў пунктах B_1 і C_1 . Знайдзіце адрэзак CC_1 , улічыўшы, што:

- а) пункт C — сярэдзіна адрэзка AB і $BB_1 = 14$ см;
- б) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 50$ см.

371. Ёсць паралелаграм $MNOP$ і трапецыя $MNEK$ з асновай EK , прычым гэтыя чатырохвугольнікі не ляжаць у адной плоскасці.

а) Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых OP і EK .

б) Знайдзіце перыметр трапецыі, улічыўшы, што ў яе можна ўмежыць акружнасць, а яе асновы MN і EK адпаведна роўныя 45 см і 55 см.

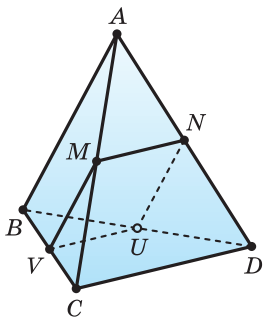


Рис. 226

372. Пункты M, N, U, V — відповідно середина канта AC, AD, BD, BC трикутної піраміди $ABCD$ (рис. 226). Знайдіть периметр чотирикутника $MNUV$, улічуйте, що $AB = 20$ см, $CD = 30$ см.

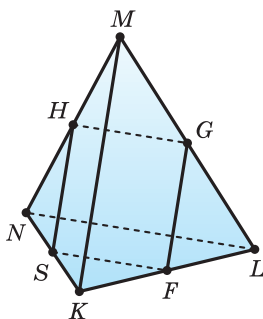


Рис. 227

373. Пункти H, G, F, S — середина канта MN, ML, LK, KN трикутної піраміди $KLMN$ (рис. 227). Знайдіть периметр чотирикутника $HGFS$, улічуйте, що $LK = 18$ мм, $MN = 22$ мм.

374. Докажіть, що середина старон просторавага чотирикутника (рис. 228) з'являюцца вершинами паралелограма.

375. Адрезак PE — агульная медыяна трикутнікаў QPS і TPA , а пункти K, L, M, N — середина адрезкаў PS, PA, ET, EQ (рис. 229). Докажіть, що прамыя KL і MN паралельныя.

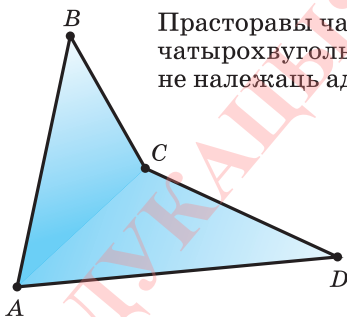


Рис. 228

Просторава чотирикутник — чотирикутник, вершини якого не належать одній площині.

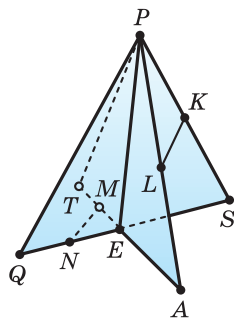


Рис. 229

376. Визначте, чи може кожна з двох скривавальних прамых быць паралельнай трэцяй прамой.

377. Докажіть, што калі AB і CD — скривавальныя прамыя, то AD і BC — таксама скривавальныя прамыя.

378. Пункти M, N, P — адпаведна середина кантаў HE, HF, HG трикутної піраміды $EFGH$, а пункт K

ляжыць на адрэзку FN . Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых:

- а) NH і EF ; в) MN і EF ; д) KN і EG ;
б) PK і FG ; г) MP і EG ; е) MH і FG .

379. Праз пункт M па-за прамой a праведзены дзве прамыя, якія з прамой a не маюць агульных пунктаў. Дакажыце, што прынамсі адна з гэтых прамых і прамая a з'яўляюцца скрыжавальнымі.

380. Прамая m перасякае прамую k і не перасякае прамую l , паралельную прамой k . Дакажыце, што l і m — скрыжавальныя прамыя.

381. Праз вяршыню P ромба $PQRS$ праведзена прамая a , паралельная дыяганалі QS , а праз вяршыню R — прамая b , якая не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце, што:

- а) прамыя a і RS перасякаюцца;
б) a і b скрыжоўваюцца.

382. Прамая m перасякае старану AB трохвугольніка ABC . Вызначыце ўзаемнае размяшчэнне прамых m і BC , улічыўшы, што:

а) прамая m ляжыць у плоскасці ABC і не перасякае адрэзак AC ;

б) прамая m не ляжыць у плоскасці ABC .

383. Пункты M і N выбраны на скрыжавальных прамых a і b адпаведна. Праз прамую a і пункт N праведзена плоскасць α , а праз прамую b і пункт M — плоскасць β . Вызначыце:

а) ці ляжыць прамая b у плоскасці α ;

б) ці перасякаюцца плоскасці α і β і калі перасякаюцца, то па якой прамой.

384. Прамыя XU і VT — паралельныя, а прамыя XU і VT — скрыжавальныя. Знайдзіце вугал паміж прамымі XU і VT , улічыўшы, што:

а) $\angle YXU = 40^\circ$; б) $\angle YXU = 135^\circ$; в) $\angle YXU = 90^\circ$.

385. Прамая l паралельная старане BC паралелаграма $ABCD$ і не ляжыць у яго плоскасці. Дакажыце, што l і CD — скрыжавальныя прамыя, і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што адзін з вуглоў паралелаграма роўны:

а) 58° ; б) 133° .

386. Прямая m параллельная диагонали FH ромба $EFGH$ и не лежащая в плоскости ромба. Докажите скрещивальность прямых:

а) m и EG и найдите угол между ними;

б) m и EH и найдите угол между ними, учитывая, что $\angle EFG = 128^\circ$.

387. Стороны AB и CD просторавага чатырохвугольніка $ABCD$ роўныя. Докажите, что прямые AB и CD утворюють роўныя углы з прямой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзкаў BC і AD .

388. Точки P, Q, R, S — середины ребра AB, BB_1, AD и диагонали B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основе якого лежить квадрат со стороной 1 м, а высота ребра BB_1 7 м (рис. 230). Вызначыце, у колькі разоў старана PQ чатырохвугольніка $PQSR$ большая за яго старану QS .

389. Точки M и N — середины ребра PC и PD трехугольной пирамиды $PCDE$, а точки U и V — середины отрезка EM и EN (рис. 231). Вызначыце, ці з'яўляюцца паралельнымі прамыя MN і UV .

390. Диагонали граней $L_1 K_1 M_1 N_1$ и $LL_1 N_1 N$ куба $LKMNL_1 K_1 M_1 N_1$ перасякаюцца ў пунктах A і B адпаведна, сярэдзінамі кантаў MM_1 і MN з'яўляюцца пункты F і G адпаведна. Докажите, что прямые AS и FG параллельныя.

391. $LKML_1 K_1 M_1$ — правильная трехугольная призма, даўжыня кожнага канта якой роўная 1 м. Диагонали граней $LL_1 M_1 M$ і $MM_1 K_1 K$ перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рис. 232). Знайдзіце периметр і плошчу чатырохвугольніка $XL_1 K_1 Y$.

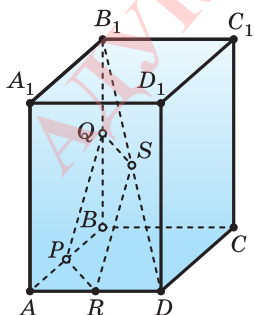


Рис. 230

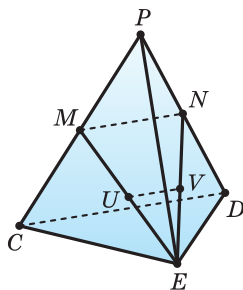


Рис. 231

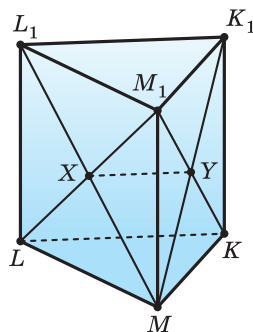
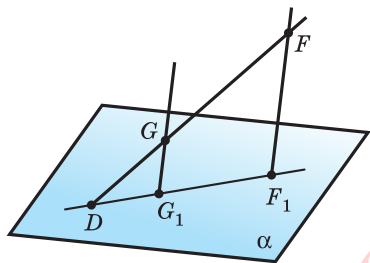


Рис. 232

392. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ , а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ , улічыўшы, што $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

393. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

394. Адрэзак XY мае з плоскасцю β адзіны агульны пункт X . Праз пункт Y і сярэдзіну Z адрэзка XY праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць β у пунктах Y_1 і Z_1 адпаведна. Знайдзіце даўжыню адрэзка YY_1 , улічыўшы, што $ZZ_1 = 10$ см.

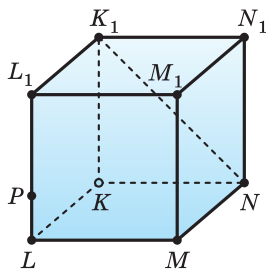


Рыс. 233

395. Канец D адрэзка DF належаць плоскасці α , праз другі яго канец F і яго пункт G праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах F_1 і G_1 (рыс. 233). Знайдзіце даўжыню адрэзка GG_1 , улічыўшы, што $FF_1 = 32$ см і $DG : GF = 3 : 5$.

396. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR , які не перасякае плоскасць γ . Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E , перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1 , улічыўшы, што $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

397. Пункт P выбраны на канце LL_1 куба $LKMNLK_1L_1M_1N_1$ (рыс. 234). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт перасячэння з плоскасцю M_1N_1M прамой q , якая праходзіць праз пункт P і паралельная прамой NK_1 .



Рыс. 234

398. На канце HX трохвугольнай піраміды $HXYZ$ выбраны такі пункт

S , што $HS : SX = 2 : 5$, і праз яго праведзена прамая q , паралельная медыяне HP грані HYZ . Знайдзіце медыяну HP , улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой q , размешчанага ўнутры піраміды, роўная 35 см.

399. Праз вяршыні D і Q трохвугольніка PDQ са стараной PQ , роўнай 20 см, праведзена плоскасць α , якой не належыць вяршыня P . Улічыўшы, што прамая x паралельная прамой PQ і перасякае старану PD у такім пункце C , што $PC : CD = 2 : 3$:

а) дакажыце, што прамая x перасякае плоскасць α ;

б) знайдзіце адлегласць ад пункта C да пункта перасячэння прамой x з плоскасцю α .

400. На канце GH трохвугольнай піраміды $FGHK$ з роўнымі адзін аднаму кантамі выбраны такі пункт T , што $HT : TG = 1 : 3$, і праз яго праведзена прамая h , якая паралельная медыяне HM бакавой грані KHF і перасякае паверхню піраміды ў пункце R . Знайдзіце кант піраміды, улічыўшы, што $TR = 6$ см.

401. Праз пункт перасячэння медыян грані MNK трохвугольнай піраміды $JMNK$ з роўнымі адзін аднаму кантамі праведзена прамая b , якая паралельная прамой MJ , а на канце MJ пазначана яго сярэдзіна Z . Знайдзіце плошчу трохвугольніка NZJ , улічыўшы, што адрэзак прамой b , размешчаны ўнутры піраміды, роўны m .

402. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = t^4 - t^2$;

г) $y = 3t^4$;

б) $y = 2t^2 - 3t + 5$;

д) $y = \frac{t^6}{2}$;

в) $y = 5t^4 - 7t^2 - t$;

е) $y = t^5 + 2t^3 - \frac{1}{2t}$.

403. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = \sqrt[3]{s}$;

б) $y = s\sqrt{s}$;

в) $y = \frac{1}{s\sqrt{s}}$;

г) $y = s^2 + \sqrt[3]{s^2}$.

404. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $y = 6x^5$;

в) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x + 2$.

б) $y = 5 + x^2 - 4x$;

405. У залежності ад зменнай a знайдзіце экстрэмуны функцыі:

а) $y = x(a + 1)^2$;

в) $y = x^4 + ax^2 + 6$;

б) $y = x + \frac{a}{x}$;

г) $y = x^3 + ax + 1$.

406. Дакажыце, што прмая AM , якая змяшчае медыяну трохвугольніка ABC , аднолькава адлеглая ад пунктаў B і C .

407. У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса AL . Улічыўшы, што $AB > AC$, устанавіце:

а) які з вуглоў — ALB ці ALC — большы;

б) які з адрэзкаў — BL ці CL — большы.

408. У трохвугольнікаў ABC і MNK роўныя перыметры і роўныя пары вуглоў A і M , а таксама B і N . Ці можна сцвярджаць, што гэтыя трохвугольнікі роўныя?

409. У трохвугольнікаў ABC і MNK роўныя асновы AB і MN , а таксама вышыні і медыяны, праведзеныя да іх. Ці можна сцвярджаць, што гэтыя трохвугольнікі роўныя?

410. На катэтах прамавугольнага трохвугольніка ABC па-за ім пабудаваны квадраты $CAMN$ і $CBFE$. З пунктаў M і F на прамую AB апущаны перпендыкуляры MK і FG . Дакажыце, што $AK = BG$ і $MK + FG = AB$. Паспрабуйце зрабіць гэта рознымі спосабамі.

411. Вышыня, праведзеная да бакавой стараны раўнабокага трохвугольніка, дзеліць яе на адрэзкі 2 см і 3 см, калі лічыць ад асновы. Знайдзіце плошчу гэтага трохвугольніка і радыус умежанай у яго акружнасці.

412. Сярэдняя лінія трапецыі роўная 4 м, вышыня — 3 м. Знайдзіце дыяганалі трапецыі, улічыўшы, што яны роўныя.

413. Знайдзіце вышыню трапецыі, улічыўшы, што яе дыяганалі роўныя 15 см і 20 см, а сярэдняя лінія — 12,5 см.

414. З аднаго поля сабралі 1296 ц жыта, з другога — 672 ц. Знайдзіце ўраджайнасць на кожным полі, улічыўшы, што сярэдняя ўраджайнасць аказалася роўнай 41 ц/га, а плошча першага поля на 6 га большая.

415. На адрэзку AB выбралі такі пункт O , што $OB : OA = 9 : 8$, і на адрэзках-частках OA і OB як на катэтах пабудавалі прамавугольныя трохвугольнікі OAC і OBD з плош-

чамі 744 мм^2 і 1296 мм^2 адапаведна (рыс. 235). Знайдзіце катэты гэтых трохвугольнікаў, улічыўшы, што трэці прамавугольны трохвугольнік ABE , пабудаваны на адрэзку AB як на катэце з плошчай, роўнай супольнай плошчы трохвугольнікаў OAC і OBD , мае другі катэт даўжынёй 40 мм .

416. На адрэзку MN выбралі такі пункт A , што $AM : AN = 11 : 7$, і на адрэзках-частках AM і AN як на вышынях пабудавалі прамавугольныя паралелепіпеды з аб'ёмамі 1804 см^3 і 644 см^3 адпаведна (рыс. 236). Знайдзіце плошчы асноў гэтых паралелепіпедаў, улічыўшы, што плошча асновы трэцяга паралелепіпеда, пабудаванага на адрэзку MN як на вышыні з аб'ёмам, роўным супольнаму аб'ёму першага і другога паралелепіпедаў, аказалася роўнай 34 см^2 .

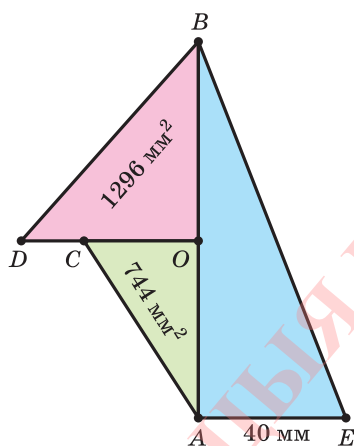


Рис. 235

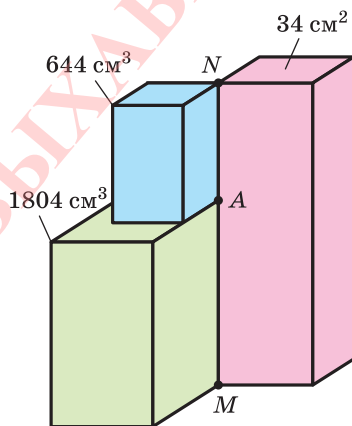


Рис. 236

417. Пункт M — сярэдзіна медыяны SK трохвугольніка ABC . Акружнасці, умежаныя ў трохвугольнікі AMK і BMK , роўныя. Знайдзіце стораны AC і BC , улічыўшы, што $AB = 8$ і $CK = 6$.

418. Колькі ёсць квадратных ураўненняў $x^2 - tx - n = 0$, дзе t і n — натуральныя лікі, якія маюць дадатны корань, што не большы за:

- a) 5; б) 2010?

419. На яку найменшую колькасць випуклих чатырхвугольнікаў можна разрэзаць выпуклы 17-вугольнік?

9. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы

У прасторы агульных пунктаў у прамой і плоскасці можа быць ні аднаго, адзін або больш за адзін.

Калі ў прамой і плоскасці агульных пунктаў больш за адзін, то, як сцвярджае аксіёма 2, сама прамая належыць плоскасці (рыс. 237).

Праяма і плоскасць могуць мець адзіны агульны пункт. Няхай α — пэўная плоскасць (рыс. 238). Выберам пункт A на плоскасці α і пункт M па-за плоскасцю α . Пункты A і M вызначаюць адзіную прамую l , якая не мае з плоскасцю α іншых агульных пунктаў, акрамя пункта A . Сапраўды, калі дапусціць адваротнае, то па аксіёме 2 прамая l будзе ляжаць у плоскасці α , а значыць, у гэтай плоскасці будзе ляжаць і пункт M , што супярэчыць яго выбару.

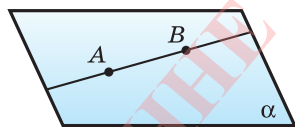


Рис. 237

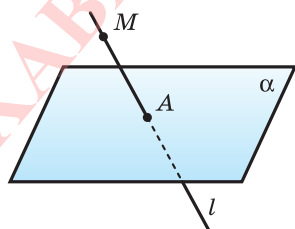


Рис. 238

Праяма і плоскасць, якія маюць адзіны агульны пункт, называюцца **перасякальнымі**.

Праяма і плоскасць могуць не мець агульных пунктаў. У гэтым выпадку гавораць, што прамая a **паралельная** плоскасці α , і пішуць $a \parallel \alpha$. Дакажам *прымету паралельнасці прамой і плоскасці*.

Тэарэма 7. *Калі прамая паралельная якой-небудзь прамой, што ляжыць у плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.*

Доказ. Няхай прамая l паралельная прамой k , што належыць плоскасці β (рыс. 239). Трэба даказаць, што прамая l не мае агульных пунктаў з плоскасцю β . Дапусцім, што гэта не так, г. зн. што прамая l перасякае плоскасць β у пэўным пункце U . Гэты пункт не можа ляжаць

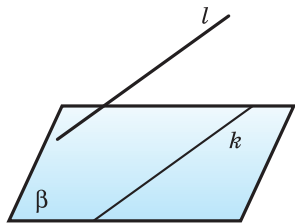
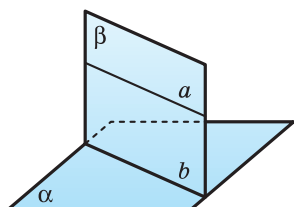


Рис. 239

на прямою k , бо $k \parallel l$. Тады па прымеце скрыжавальнасці прамых атрымліваем, што прамыя k і l — скрыжавальныя. А гэта супярэчыць таму, што прамыя k і l паралельныя. Значыць, прамая l і плоскасць β не могуць мець агульных пунктаў, г. зн. $l \parallel \beta$.

Дакажам уласцівасць прамой, паралельнай плоскасці.

Тэарэма 8. *Лінія перасячэння плоскасцей, з якіх адна праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, паралельная гэтай прамой.*

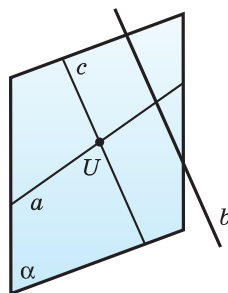


Рыс. 240

Доказ. Няхай прамая a , паралельная плоскасці α , належыць плоскасці β і прамая b — лінія перасячэння плоскасцей α і β (рыс. 240). Тады прамыя a і b абедзве ляжаць у плоскасці β і не перасякаюцца, бо ў адваротным выпадку прамая a перасякала б плоскасць β . Значыць, прамыя a і b паралельныя.

Прыклад 1. Дакажам, што праз кожную з двюх скрыжавальных прамых праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой прамой.

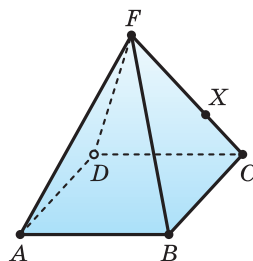
Няхай прамыя a і b — скрыжавальныя (рыс. 241). На прамой a выберам адвольна пункт U і праз яго правядзём прамую c , паралельную прамой b . Прамыя a і c перасякаюцца, таму праз іх праходзіць адзіная плоскасць α . Плоскасць α паралельная прамой b , бо прамая b не ляжыць у плоскасці α і паралельная прамой c , што ляжыць у плоскасці α .



Рыс. 241

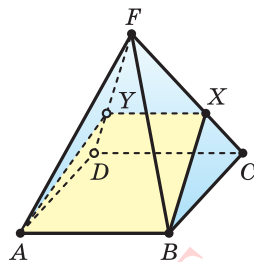
Прыклад 2. Пабудуем сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды $FABCD$ плоскасцю α , якая праходзіць праз кант AB і пункт X на канце FC (рыс. 242).

Вызначым, па якой лініі перасякае паверхню піраміды плоскасць α , якой належаць прамая AB і пункт X . Плос-



Рыс. 242

касць α і грань FAB маюць агульны адрэзак AB , па ім плоскасць α і перасякае грань FAB . Грань FBC мае з плоскасцю α агульныя пункты B і X , таму адрэзак BX — агульная частка грані FBC і плоскасці α (рыс. 243). Плоскасць α і грань FCD маюць агульны пункт X , таму лініяй перасячэння плоскасцей α і FCD з'яўляецца прамая, якая праходзіць праз пункт X . Цяпер звернем увагу на тое, што адрэзкі AB і CD як супрацьлеглыя стораны квадрата $ABCD$ паралельныя. Таму прамая AB паралельная плоскасці FCD . Па тэарэме 8 плоскасць α , якая праходзіць праз прамую AB , перасякае плоскасць FCD па прамой, паралельнай AB . Такім чынам, плоскасць α перасякае грань FCD па адрэзку XY , які паралельны кантам AB і CD . Грань FAD мае з плоскасцю α агульныя пункты A і Y , таму плоскасць α перасякае грань FAD па адрэзку AY .



Рыс. 243

Атрымалі, што плоскасць α перасякае піраміду $FABCD$ па трапецыі $ABXY$.



1. Сфармулюйце прымету паралельнасці прамой і плоскасці.
2. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, паралельнай плоскасці.

420. Дакажыце, што прамая s , якая перасякае прамыя a і b адной плоскасці, таксама ляжыць у гэтай плоскасці.

421. Дакажыце, што калі стораны AB і BC паралелаграма $ABCD$ перасякаюць плоскасць, то прамыя AD і DC таксама перасякаюць гэтую плоскасць.

422. Сярэдняя лінія трапецыі ляжыць у плоскасці β . Вывядзіце, якія стораны трапецыі перасякаюць плоскасць β .

423. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну стараны AB трохвугольніка ABC паралельна старане BC . Дакажыце, што плоскасці α належыць сярэдзіна стараны AC .

424. Ёсць прамая a , паралельная плоскасці α , і пункт T , прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a , ляжыць у плоскасці α .

425. Адна аснова трапецыі паралельная плоскасці β , а вяршыня другой ляжыць у гэтай плоскасці. Дакажыце, што:

- другая аснова трапецыі ляжыць у плоскасці β ;
- сярэдняя лінія трапецыі паралельная плоскасці β .

426. Трохвугольнікі ABC і ABD ляжаць у розных плоскасцях. Дакажыце, што любая прамая, паралельная прамой CD , перасякае гэтыя плоскасці.

427. Пункты P і Q ляжаць у плоскасці α , а пункт R не ляжыць у ёй. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз сярэдзіны адрэзкаў PR і QR , паралельная плоскасці α .

428. Па-за плоскасцю прамавугольнага $UVXY$ выбраны пункт Z . Дакажыце, што прамая UV паралельная плоскасці XYZ .

429. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T . Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC .

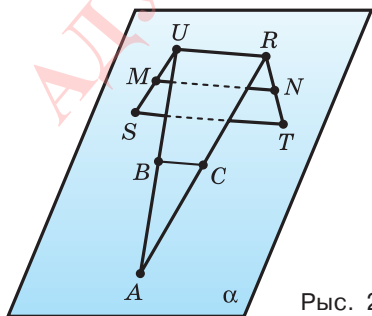
430. Дакажыце, што калі дадзеная прамая не ляжыць у перасякальных плоскасцях і паралельная лініі іх перасячэння, то яна паралельная і гэтым плоскасцям.

431. Улічыўшы, што плоскасць α праходзіць праз аснову ST трапецыі $SURT$ і не праходзіць праз вяршыню R , а пункт A ляжыць у плоскасці α (рыс. 244):

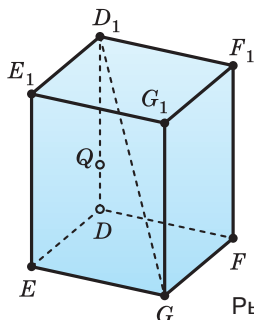
- дакажыце, што сярэдняя лінія MN трапецыі паралельная плоскасці α ;
- устанавіце, ці паралельная плоскасці α сярэдняя лінія BC трохвугольніка UAR .

432. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $IJKL$. Дакажыце, што прамая KL паралельная плоскасці IDJ .

433. На канце DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбраны пункт Q (рыс. 245). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце



Рыс. 244



Рыс. 245

пункт пересечения с поверхней куба прямой s , которая проходит через пункт Q и параллельная прямой D_1G .

434. Есть параллелепипед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на канце SS_1 якого выбраны пункт B (рис. 246). Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, что проходит через пункты B , Q , P_1 .

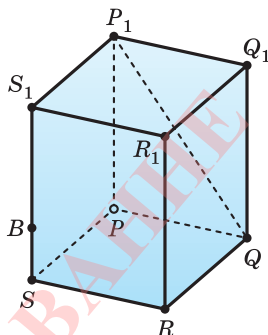


Рис. 246

435. Пункт A не лежит в плоскости параллелограмма $MNPQ$, а пункт B — середина отрезка NA . Докажите, что плоскость MBQ пересекает прямую AP .

436. На рисунку 247 выявлена четырехугольная пирамида, основой которой является трапеция $MNKL$ с параллельными сторонами KL и MN . Постройте такой рисунок в тетрадь и построьте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через пункт B ребра SL и прямую MN . Какой фигурой является сечение?

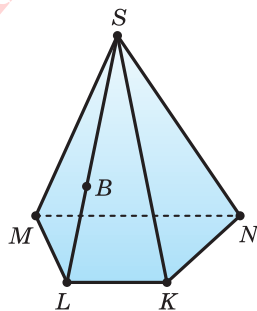


Рис. 247

437. Прямая a параллельна каждой из двух плоскостей, которые пересекаются по прямой AB . Докажите, что прямые a и AB параллельны.

438. Докажите, что если три плоскости, которые не пересекаются по одной прямой, попарно пересекаются, то линии их пересечения либо параллельны, либо имеют общий пункт.

439. Сторона RT треугольника RST параллельна плоскости γ , а стороны RS и ST пересекаются с этой плоскостью в пунктах M и N . Докажите, что треугольники RST и MSN подобны.

440. На отрезке AB выбраны такие пункты C , что $AB : BC = 4 : 3$. Через канец B отрезка AB проведена плоскость α . Параллельно этой плоскости построены отрезок CD , длиной 24 см. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некотором пункте E , и найдите отрезок BE .

441. Пункты D и E на сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны так, что $DE = 5$ см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость, про-

ведзена праз пункты B і C , аказалася паралельнай адрэзку DE . Знайдзіце даўжыню адрэзка BC .

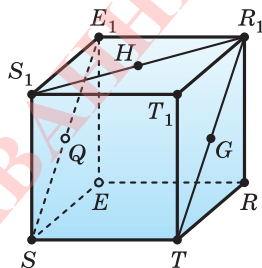
442. Аснова LM трапецыі $KLMN$ роўная 48 см. Па-за плоскасцю трапецыі выбраны пункт O і адзначана сярэдзіна P адрэзка LO . Дакажыце, што плоскасць KNP перасякае адрэзак OM у пэўным пункце H , і знайдзіце адрэзак PH .

443. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскасцю, што праходзіць праз кант EE_1 і пункт A , выбраны на канце CC_1 .

444. Улічыўшы, што пункты Q, H, G — сярэдзіны дыяганалей SE_1, S_1R_1, R_1T адпаведных граней куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рыс. 248):

а) устанавіце, ці паралельная прамая QH плоскасці SS_1T_1 ;

б) дакажыце, што прамая HG паралельная плоскасці E_1ER .



Рыс. 248

445. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $TPQUV$ роўныя паміж сабой, пункты B, C, D — сярэдзіны кантаў TP, TV, TU . Праз пункт B праведзена прамая p , паралельная прамой CD . Пабудуйце пункт A перасячэння прамой p з плоскасцю TQU і знайдзіце плошчу асновы піраміды, улічыўшы, што плошча чатырохвугольніка $ABCD$ роўная S .

446. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя a . Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b , якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ . Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

447. Праз пункт перасячэння медыян грані MPQ трохвугольнай піраміды $MNPQ$ праведзена прамая, паралельная медыяне PA грані MNP . Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка гэтай прамой, улічыўшы, што $PA = m$.

448. Усе канты правільнай трохвугольнай прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$ роўныя адзін аднаму, а пункт S — сярэдзіна дыяганалі XZ_1 грані XX_1Z_1Z (рыс. 249). Зрабіце такі рысунак у сшытку і:

а) побудуйте пункт пересічення з гранню XX_1Y_1Y прямою p , яка проходить праз пункт S і паралельна медіані Z_1T грані $X_1Y_1Z_1$;

б) знайдіть площу бакавої поверхні призми, улічуйте, що довжина відрізка прямою p , розміщеного всередині призми, дорівнює 10 см.

449. Усе ребро трикутної призми $XYZX_1Y_1Z_1$ рівні між собою, Q — пункт пересічення медіан грані XYZ . Знайдіть довжину відрізка прямою, що проходить праз середину відрізка X_1Q і паралельно прямою ZQ , улічуйте, що площа бакавої поверхні призми дорівнює S .

450. Улічуйте, що пункти N і M — середини діагоналей BC_1 і BD відповідних граней прямокутного паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:

а) докажите, що відрізок MN паралельно площині, у якій лежить ребро CDD_1C_1 ;

б) знайдіть довжину відрізка MN , улічуйте, що $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

451. Пункти E, F, G — середини ребер LN, LK, MK трикутної піраміди $MNKL$. Побудуйте пункт H , у якому площина EFG перетинає ребро MN , і докажите, що відрізки EG і FH перетинаються і пунктом пересічення дорівнюють.

452. Є правильна трикутна піраміда $MNPQ$, довжина багатого ребра якої дорівнює 6 см, а основою з'являється трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть периметр сечення піраміди площиною, яка паралельна NP і проходить праз середину ребра PQ і середню лінію трикутника MNP .

453. На рисунку 250 зображена правильна трикутна піраміда $IJKL$. Чотирикутник $XYZT$ — сечення піраміди площиною, яка проходить праз середини X і Y ребер

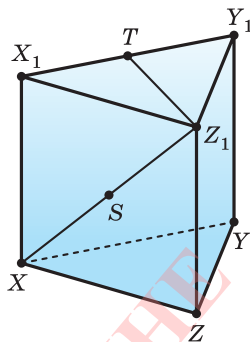


Рис. 249

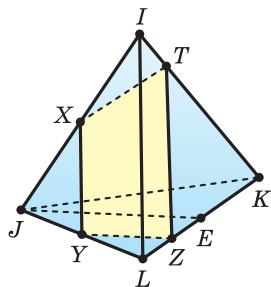


Рис. 250

JI і JL і паралельная медыяне JE грані JKL . Знайдзіце даўжыню адрэзкаў XY і ZT , улічыўшы, што $IK = 48$ см.

454. Пункт Q ёсць сярэдзіна канта FA чатырохвугольнай піраміды $FABCD$, асновай якой з'яўляецца трапецыя $ABCD$ з паралельнымі старанамі BC і AD . Знайдзіце адрэзак, па якім плоскасць QBC перасякае грань FAD , улічыўшы, што кант BC і сярэдняя лінія трапецыі адпаведна роўныя 30 см і 40 см.

455. Пункты A , B , C ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў LN , LK , MK трохвугольнай піраміды $LMNK$, усе канты якой роўныя адзін аднаму, а плошча грані роўная $16\sqrt{3}$ см². Знайдзіце перыметр сячэння гэтай піраміды плоскасцю ABC .

456. Пункты A , B , C — адпаведна сярэдзіны кантаў FE , GH , GK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць паралелаграм $GHEK$. Пабудуйце адрэзак, па якім плоскасць ABC перасякае дыяганальнае сячэнне FHK піраміды.

457. Пункт A — сярэдзіна канта FK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць трапецыя $GHEK$, $KG \parallel HE$. Пабудуйце пункт P , у якім плоскасць AEN перасякае прамую FG . Дакажыце, што адрэзкі PE і HA перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі $GHEK$ роўная $\frac{3}{2} HE$.

458. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FMNKL$, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы, а плошча бакавой паверхні роўная S . Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і паралельная медыяне FR грані FLK .

459. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см, а бакавы кант — 78 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх супрацьлеглых старон асновы і паралельная якому-небудзь бакавому канту, і знайдзіце плошчу сячэння.

460. Знайдзіце вытворную функцыі:

$$\text{а) } y = \sqrt[3]{s^5}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{s}}; \quad \text{в) } y = \sqrt{s} - \frac{1}{s}; \quad \text{г) } y = \frac{s^2 + 2s}{\sqrt{s}}.$$

461. Дакажыце, што функцыя:

а) $y = x + 4x^3$ нарастае на ўсёй каардынатнай прамой;

б) $y = \frac{1-x}{x+2}$ спадае на прамежках $(-\infty; -2)$ і $(-2; +\infty)$.

462. Вызначыце, вытворная якой функцыі роўная:

а) 0; в) $-2x$; д) $3x^2$;

б) $-\frac{1}{2}$; г) $2x - 1$; е) $-3x^2 - 5$.

463. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 см і 4 см. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс яго вострых вуглоў. Параўнайце вынікі і зрабіце высновы. Якія залежнасці тут праяўляюцца?

464. Улічыўшы, што $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ і α — тупы вугал, знайдзіце $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

465. Два цёлы рухаюцца ў адным кірунку — адно са скорасцю 30 м/с, другое са скорасцю 44 м/с і даганяе першае. Пасля абсалютна няпругкага сутыкнення яны працягваюць рухацца разам як адна сістэма са скорасцю 39 м/с (рыс. 251). Знайдзіце масы цёлы, улічыўшы, што імпульс сістэмы роўны $1092 \text{ г} \cdot \text{м/с}$.

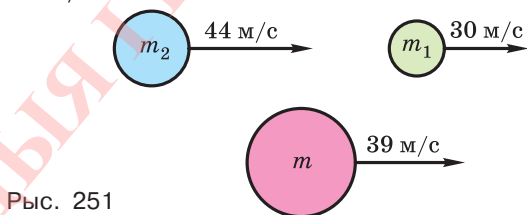


Рис. 251

466. Два цёлы рухаюцца ў адным кірунку — адно са скорасцю 30 м/с, другое са скорасцю 43 м/с і даганяе першае. Пасля абсалютна няпругкага сутыкнення яны працягваюць рухацца разам як адна сістэма са скорасцю 38 м/с. Знайдзіце масы цёлы, улічыўшы, што імпульс першага цёла на $388 \text{ г} \cdot \text{м/с}$ меншы.

467. Калі скласці імпульс аднаго цёла масай 9 г з імпульсам другога цёла масай 30 г, то атрымаецца $840 \text{ г} \cdot \text{м/с}$. Знайдзіце скорасці цёлы, улічыўшы, што калі б трэцяе цёла мела такія імпульс і рухалася са скорасцю, роўнай супольнай скорасці першага і другога цёлы, то яго маса была б роўнай 20 г.

468. Імпульс першага цела масай 9 г меншы за імпульс другога цела масай 27 г на $495 \text{ г} \cdot \text{м/с}$. Знайдзіце скорасці цел, улічыўшы, што калі б трэцяе цела мела імпульс, роўны супольнаму імпульсу першага і другога цел, і рухалася са скорасцю, роўнай суме скарасцей гэтых цел, то яго маса была б роўнай 19 г.

* * *

469. Знайдзіце суму квадратаў каранёў ураўнення

$$(x^2 + 2x)^2 + 2010 = 2007(x^2 + 2x).$$

470. На старане BC трохвугольніка ABC адзначаны такі пункт K , што $KC = AB = 1$. Знайдзіце адрэзак BK , улічыўшы, што $\angle KAB = 90^\circ$ і $\angle KAC = 30^\circ$.

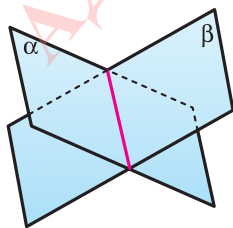
471. На дошцы выпісаны ўсе натуральныя лікі ад 1 да 2010. Дазваляецца ўзяць некалькі лікаў, сума якіх кратная 7, выкрасліць іх і запісаць на дошцы дзель ад дзялення гэтай сумы на 7. Ці можа пасля некалькіх такіх дзеянняў на дошцы застацца толькі лік 1?

10. Узаемае размяшчэнне плоскасцей у прастору

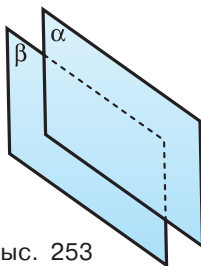
Дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У першым выпадку, у адпаведнасці з аксіёмай 3, плоскасці маюць агульную прамую, г. зн. перасякаюцца па гэтай прамой (рыс. 252). У другім выпадку плоскасці не перасякаюцца (рыс. 253).

Плоскасці, якія не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі плоскасцямі**.

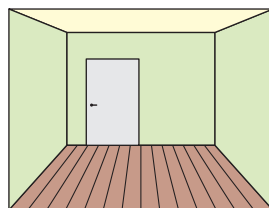
Уяўленне пра паралельныя плоскасці даюць паверхні столі і падлогі або паверхні супрацьлеглых сцена пакоя (рыс. 254). Наступная тэарэма дае прымету паралельнасці плоскасцей.



Рыс. 252



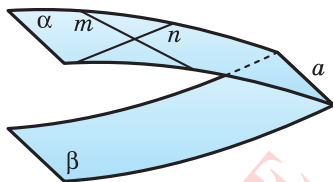
Рыс. 253



Рыс. 254

Тэарэма 9. *Плоскасць, якая праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя другой плоскасці, паралельная гэтай самай плоскасці.*

Доказ. Няхай плоскасць α праходзіць праз перасякальныя прамыя m і n , якія абедзве паралельныя плоскасці β (рыс. 255). Дакажам, што плоскасць α паралельная плоскасці β .



Рыс. 255

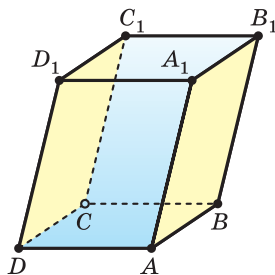
Дапусцім, што плоскасць α перасякае плоскасць β па пэўнай прамой a . Тады па тэарэме 8 прамая a паралельная і прамой m , і прамой n . Значыць, па тэарэме 3 прамыя m і n паралельныя адна адной. Але гэта супярэчыць умове пра іх перасякальнасць. Значыць, плоскасць α паралельная плоскасці β .

Вынік 1. *Калі дзве перасякальныя прамыя адной плоскасці адпаведна паралельныя двом перасякальным прамым другой плоскасці, то такія плоскасці паралельныя.*

Гэты вынік атрымліваецца з тэарэмы 9 з улікам прыметы паралельнасці прамой і плоскасці.

Вынік 2. *Супрацьлеглыя грані паралелепіпеда паралельныя, г. зн. ляжаць у паралельных плоскасцях.*

Напрыклад, грань AA_1B_1B паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рыс. 256) змяшчае прамыя AB і AA_1 , а грань DD_1C_1C — прамыя DC і DD_1 . Паколькі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграмы, то $AB \parallel DC$ і $AA_1 \parallel DD_1$, і, значыць, плоскасці AA_1B_1B і DD_1C_1C паралельныя.



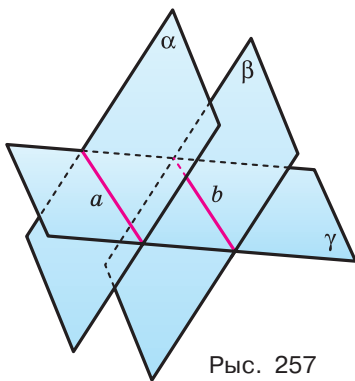
Рыс. 256

Дакажам уласцівасці паралельных плоскасцей.

Тэарэма 10. *Лініі перасячэння двух паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю паралельныя адна адной.*

Доказ. Няхай плоскасць γ перасякае паралельныя плоскасці α і β па прамых a і b (рыс. 257). Дакажам, што прамыя a і b паралельныя.

Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя a і b маюць агульны пункт Q . Тады пункт Q належыць плоскасці α , бо

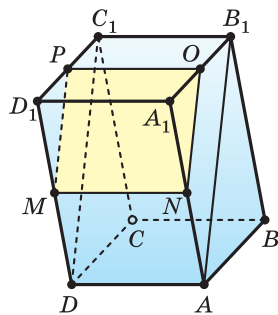


Рыс. 257

прамая a належыць плоскасці α , пункт Q належыць і плоскасці β , бо прмая b належыць плоскасці β . Атрымліваецца, што плоскасці α і β маюць агульны пункт Q , але гэта немагчыма, бо па ўмове плоскасці α і β паралельныя. Значыць, прамыя a і b не могуць мець агульнага пункта. А паколькі яны ляжаць у адной плоскасці, менавіта плоскасці γ , то яны паралельныя.

Прыклад 1. Паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перасечаны плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны M , N , O яго кантаў DD_1 , AA_1 , $A_1 B_1$ адпаведна. Вызначым, якая фігура атрымаецца ў сячэнні.

Плоскасць MNO перасякае грані $AA_1 D_1 D$ і $AA_1 B_1 B$ па адрэзках MN і NO (рыс. 258), пры гэтым $MN \parallel A_1 D_1$, бо MN — сярэдняя лінія прававугольнага $AA_1 D_1 D$. Паколькі плоскасць MNO праходзіць праз прамую MN , паралельную плоскасці $A_1 B_1 C_1 D_1$, то лінія перасячэння гэтых плоскасцей — прмая OP — паралельная MN . Чатырохвугольнік $MNOP$ — шуканае сячэнне.



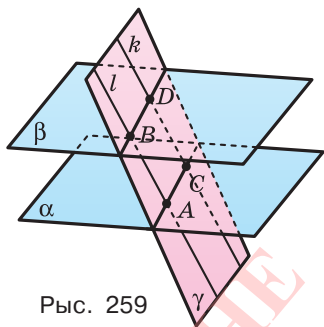
Рыс. 258

Улічым цяпер, што плоскасці граней $DD_1 C_1 C$ і $AA_1 B_1 B$ паралельныя. З тэарэмы 10 вынікае, што прамыя NO і MP , па якіх плоскасці $DD_1 C_1 C$ і $AA_1 B_1 B$ перасякае плоскасць MNO , паралельныя. А паколькі $MN \parallel OP$ і $NO \parallel MP$, то чатырохвугольнік $MNOP$ — паралелаграм.

Тэарэма 11. Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя адзін аднаму.

► **Доказ.** Няхай паралельныя плоскасці α і β высякаюць з паралельных прамых k і l адрэзкі AB і CD (рыс. 259). Дакажам, што гэтыя адрэзкі роўныя.

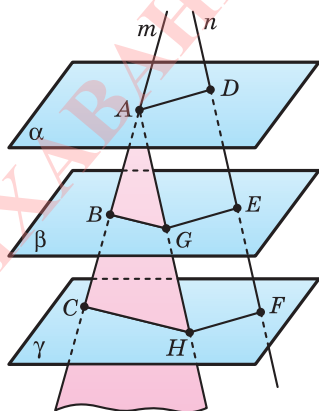
Плоскасць γ , якой належаць паралельныя прамыя k і l , перасякае паралельныя плоскасці па паралельных прамых AC і BD . У выніку атрымліваецца чатырохвугольнік $ABDC$, у якім супрацьлеглыя стораны паралельныя. Значыць, гэты чатырохвугольнік — паралелаграм, таму яго супрацьлеглыя стораны AB і CD роўныя.



Рыс. 259

Прыклад 2. Дакажам, што адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

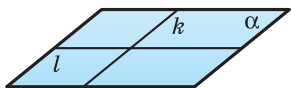
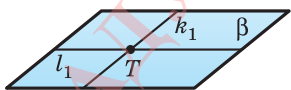
Няхай паралельныя плоскасці α , β , γ высякаюць з прамой m адрэзкі AB і BC , а з прамой n адрэзкі DE і EF (рыс. 260). Дакажам, што $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Рыс. 260

Праз пункт A правядзём прамую, паралельную прамой n , няхай яна перасякаецца з плоскасцямі β і γ у пунктах G і H адпаведна. У трохвугольніку ACH ад-

рэзак BG паралельны старане CH . Таму $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}$. Але $AG = DE$ і $GH = EF$ у адпаведнасці з тэарэмай 11. Значыць, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. \blacktriangleleft



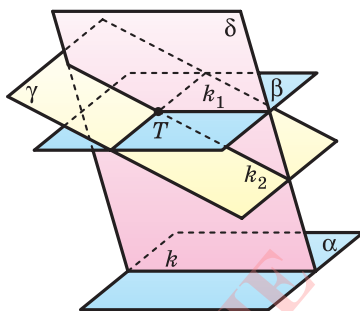
Рыс. 261

Тэарэма 12. Праз дадзены пункт па-за дадзенай плоскасцю праходзіць адзіная плоскасць, паралельная дадзенай.

Доказ. Няхай ёсць плоскасць α і пункт T па-за ёй (рыс. 261). У плоскасці α правядзём якія-небудзь перасякальныя прамыя k і l , а праз пункт T — прамыя k_1 і l_1 , паралельныя прамым k і l ад-

паведна. Плошасць β , вызначаная прамымі k_1 і l_1 , з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей, паралельная плоскасці α і праходзіць праз пункт T .

Дакажам адзінасць плоскасці β . Дапусцім, што ёсць яшчэ адна плоскасць γ , якая праходзіць праз пункт T і паралельная плоскасці α (рыс. 262). Праз пункт T і прамую k правядзём плоскасць δ . Яна перасякае плоскасць β па прамой k_1 , а плоскасць γ па прамой k_2 , якія абедзве па тэарэме 10 паралельныя прамой k . Але такое немагчыма, бо на плоскасці праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой праходзіць адзіная прамая.



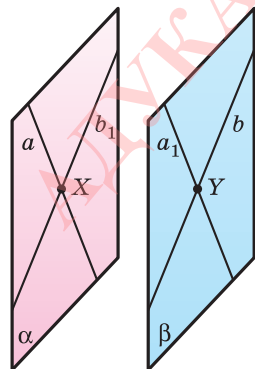
Рыс. 262

Вынік 3. *Калі кожная з дзвюх дадзеных плоскасцей паралельная трэцяй плоскасці, то гэтыя дзве плоскасці паралельныя адна адной.*

Паралельныя або перасякальныя прамыя вызначаюць адзіную плоскасць. Скрыжавальныя прамыя вызначаюць адзіную пару паралельных плоскасцей.

Прыклад 3. *Дакажам, што праз скрыжавальныя прамыя можна правесці паралельныя плоскасці, прычым такая пара плоскасцей адзіная.*

Няхай ёсць скрыжавальныя прамыя a і b (рыс. 263). Выберам адвольна на прамой a пункт X , на прамой b пункт Y і праз пункт X правядзём прамую b_1 , паралельную прамой b , а праз пункт Y — прамую a_1 , паралельную прамой a . Перасякальныя прамыя a і b_1 , а таксама b і a_1 вызначаюць плоскасці α і β , якія з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей з'яўляюцца паралельнымі.



Рыс. 263

Адзінасць шуканай пары плоскасцей даказваецца метадам ад адваротнага, падобна да таго, як гэта было зроблена ў доказе тэарэмы 12. Правядзіце гэтае разважанне самастойна.

На рисунку 264 площині граней $STUV$ і $S_1T_1U_1V_1$ паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ проходять праз скривальні праміа TU і U_1V_1 .

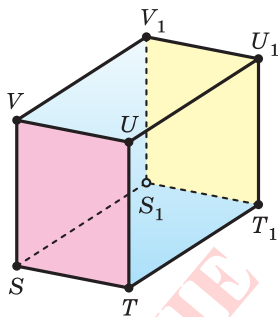


Рис. 264

1. Назавіце магчымыя выпадкі ўзаемага размяшчэння дзвюх плоскасцей.
2. Якія плоскасці называюцца паралельнымі?
3. Сфармулюйце прымету паралельнасці плоскасцей.
4. Сфармулюйце сцверджанне пра лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю.
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія дзве паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых.
6. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія тры паралельныя плоскасці высякаюць з адвольных прамых.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая праходзіць праз дадзены пункт паралельна дадзенай плоскасці.
8. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасці, якія паралельныя іншай плоскасці.
9. Сфармулюйце сцверджанне пра паралельныя праміа, што вызначае пара скривальных прамых.

472. Укажыце мадэлі паралельных плоскасцей на прадметах вашага класа.

473. Прамая m перасякае плоскасць α у пункце A . Ці існуе плоскасць, якая праходзіць праз прамую m і паралельная плоскасці α ?

474. Плоскасці α і β паралельныя, прамая m ляжыць у плоскасці α . Дакажыце, што прамая m паралельная плоскасці β .

475. Дзве стараны трохвугольніка паралельныя плоскасці β . Дакажыце, што і трэцяя старана гэтага трохвугольніка паралельная плоскасці β .

476. Тры адрэзкі P_1P_2 , Q_1Q_2 і R_1R_2 , якія не ляжаць у адной плоскасці, маюць агульную сярэдзіну. Дакажыце, што плоскасці $P_1Q_1R_1$ і $P_2Q_2R_2$ паралельныя.

477. Улічыўшы, што пункт T не ляжыць у плоскасці трохвугольніка ABC , а пункты M , N , P — сярэдзіны адрэзкаў TA , TB , TC :

а) дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя.

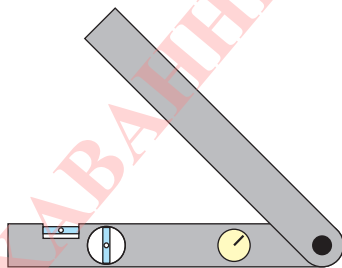
б) знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP , улічыўшы, што плошча трохвугольніка ABC роўная 48 см^2 .

478. Дакажыце, што калі прамая a перасякае плоскасць β , то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную β .

479. Ёсць паралельныя плоскасці α і β , а таксама пункт A на плоскасці β . Дакажыце, што любая прамая, якая праходзіць праз пункт A і паралельная плоскасці α , ляжыць у плоскасці β .

480. Прамая a паралельная адной з дзвюх паралельных плоскасцей. Дакажыце, што прамая a або паралельная другой плоскасці, або ляжыць у ёй.

481. Для праверкі гарызантальнасці ўстаноўкі дыска вугламерных інструментаў карыстаюцца дзвюма грунтвагамі, размешчанымі ў плоскасці дыска на перасякальных прамых (рыс. 265). Чаму грунтвагі нельга размяшчаць на паралельных прамых?

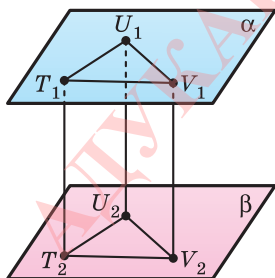


Рыс. 265

482. Паралельныя плоскасці α і β перасякаюць старану CB вугла BCD у пунктах B_1 і B_2 , а старану CD — у пунктах D_1 і D_2 адпаведна. Знайдзіце:

а) CB_2 і CD_2 , улічыўшы, што $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 і CB_2 , улічыўшы, што $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2} B_1B_2$.



Рыс. 266

483. Улічыўшы, што паралельныя адрэзкі T_1T_2 , U_1U_2 і V_1V_2 заключаны паміж паралельнымі плоскасцямі α і β (рыс. 266):

а) вызначыце від чатырохвугольнікаў $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ і $T_1V_1V_2T_2$;

б) дакажыце, што $\Delta T_1U_1V_1 = \Delta T_2U_2V_2$.

484. Тры прамыя, якія праходзяць праз адзін пункт і не ляжаць у адной плоскасці, перасякаюць адну з паралельных плоскасцей у пунктах I_1 , J_1 і K_1 , а другую — у пунктах I_2 , J_2 і K_2 . Дакажыце, што трохвугольнікі $I_1J_1K_1$ і $I_2J_2K_2$ падобныя.

485. Улічыўшы, што вуглы ATB , BTC , CTA і канты TA , TB , TC трохвугольнай піраміды $TABC$ адпаведна роўныя 36° , 72° , 90° і 20 , 18 , 21 , знайдзіце:

- а) канты асновы ABC дадзенай піраміды;
- б) плошчы ўсіх бакавых граней.

486. Улічыўшы, што праз пункт перасячэння медыян грані JKL трохвугольнай піраміды $IJKL$ праведзена плоскасць, паралельная грані IJK :

а) дакажыце, што сячэнне піраміды гэтай плоскасцю ёсць трохвугольнік, падобны трохвугольніку IJK ;

б) знайдзіце адносіну плошчы сячэння да плошчы трохвугольніка IJK .

487. Нарысуйце трохвугольную піраміду $KLMN$ і:

а) пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз кант KL і сярэдзіну A канта MN ;

б) дакажыце, што плоскасць, што праходзіць праз сярэдзіны E , O і F адрэзкаў LM , MA і MK , паралельная плоскасці LKA ;

в) знайдзіце плошчу трохвугольніка EOF , улічыўшы, што плошча трохвугольніка LKA роўная 24 см^2 .

488. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і пабудуйце яго сячэнне:

- а) плоскасцю ABC_1 ;
- б) плоскасцю ACC_1 .

Дакажыце, што пабудаваныя сячэнні з'яўляюцца паралелаграмамі.

489. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, пабудуйце яго сячэнні плоскасцямі ABC_1 і DCB_1 , а таксама агульны адрэзак гэтых сячэнняў.

490. Нарысуйце паралелепіпед $IJKL I_1 J_1 K_1 L_1$ і адзначце ўнутраны пункт M грані $II_1 J_1 J$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункт M паралельна:

- а) плоскасці асновы $IJKL$;
- б) грані $JJ_1 K_1 K$;
- в) плоскасці JLL_1 .

491. Нарысуйце паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз:

а) кант CC_1 і пункт перасячэння дыяганалей грані $AA_1 D_1 D$;

б) пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$ паралельна плоскасці $AB_1 C_1$.

492. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз пункты F_1 , H_1 і сярэдзіну канта GH . Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — трапецыя.

493. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю FKL , дзе K — сярэдзіна канта EE_1 , а L — сярэдзіна канта GG_1 . Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — паралелаграм.

494. Нарысуйце паралелепіпед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю MNK , дзе пункты M , N і K ляжаць адпаведна на кантах:

а) PP_1 , OO_1 , OR ;

б) QQ_1 , OR , PP_1 .

495. Улічыўшы, што пункты I , J , K і L не ляжаць у адной плоскасці, а медыяны трохвугольнікаў IJK і KJL перасякаюцца адпаведна ў пунктах M_1 і M_2 :

а) дакажыце, што адрэзкі IL і M_1M_2 паралельныя;

б) знайдзіце M_1M_2 , улічыўшы, што $IL = 12$ см.

496. Прамая a паралельная плоскасці α . Вызначыце, ці існуюць плоскасці, якія праходзяць праз прамую a і паралельныя плоскасці α , і, калі існуюць, то колькі такіх плоскасцей.

497. На кантах QA , QB і QC трохвугольнай піраміды $QABC$ адзначаны такія пункты M , N , P , што $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя. Знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP , улічыўшы, што плошча трохвугольніка ABC роўная 18 см^2 і $QM : MA = 2 : 1$.

498. Нарысуйце трохвугольную піраміду $ABCD$ і адзначце пункт M на канце AB . Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M паралельна грані BDC .

499. Дакажыце, што ў паралелепіпедзе $FGHIF_1G_1H_1I_1$ плоскасць F_1IG паралельная плоскасці I_1HG_1 .

500. Вызначыце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:

а) трохвугольнай піраміды;

б) трохвугольнай прызмы;

в) чатырохвугольнай піраміды;

г) паралелепіпеда.

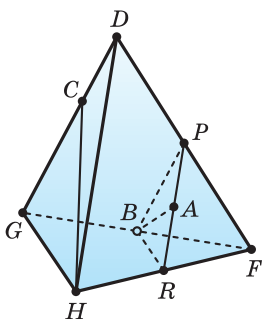


Рис. 267

501. Улічыўшы, што пункты B , P , R — сярэдзіны кантаў FG , FD , FH піраміды $DFGH$, адрэзак AB — медыяна трохвугольніка BPR , а пункт C належыць канту DG (рыс. 267):

а) дакажыце, што прамая AB паралельная плоскасці DGH ;

б) вызначыце, ці перасякаецца прамая HC з плоскасцю BPR .

502. $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ — чатырохвугольная прызма. Дакажыце, што асновы $MNKL$ і $M_1 N_1 K_1 L_1$ прызмы ляжаць у паралельных плоскасцях.

503. Нарысуйце паралелепіпед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ і пазначце сярэдзіну R канта KK_1 . Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцямі $MM_1 K_1$ і MLR і адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні.

504. Улічыўшы, што дыяганалі NL і MK грані $KLMN$ паралелепіпеда $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ перасякаюцца ў пункце Q , сярэдзінай канта NN_1 з'яўляецца пункт R , а чатырохвугольнік $N_1 ALB$ ёсць сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт N_1 і паралельная плоскасці MRK (рыс. 268):

а) устанавіце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік $N_1 ALB$;

б) дакажыце, што прамыя RQ і $N_1 L$ паралельныя.

505. Нарысуйце паралелепіпед $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$ і пазначце сярэдзіну A і B кантаў NN_1 і LL_1 . Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B і паралельная плоскасці MAK . Пабудуйце адрэзак, па якім гэтае сячэнне перасякае дыяганальнае сячэнне $NLL_1 N_1$.

506. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $EFGH$ — сячэнне паралелепіпеда $STUVS_1 T_1 U_1 V_1$ плоскасцю, якая пра-

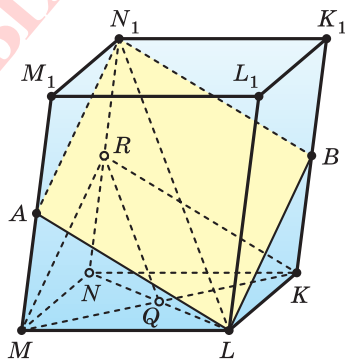


Рис. 268

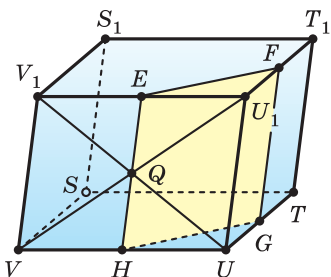


Рис. 269

ходзіць праз пункт Q перасячэння дыяганалей грані UVV_1U_1 і паралельная плоскасці TVV_1 (рыс. 269):

а) растлумачце, чаму прамыя FE і GH паралельныя;

б) вызначыце, ці паралельныя прамыя GF і HE ;

в) растлумачце, чаму прамая SS_1 паралельная плоскасці сячэння.

507. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай $CDEF$, вымярэнні якога роўныя 10 см, 10 см і 24 см. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта CC_1 і паралельная плоскасці CFE_1 , і знайдзіце яго перыметр.

508. Нарысуйце паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей грані $KLMN$ і паралельная плоскасці MLK_1 . Дакажыце, што прамая LN_1 паралельная плоскасці сячэння.

509. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $LNAB$ — сячэнне паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую LN і сярэдзіну A канта N_1K_1 (рыс. 270), устаноўце, ці з'яўляецца трапецыяй чатырохвугольнік $LNAB$.

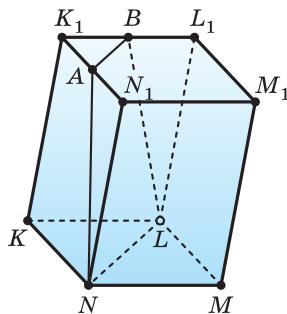


Рис. 270

510. Ёсць прамая чатырохвугольная прызма $AJCD A_1J_1C_1D_1$, асновай якой з'яўляецца ромб са старонай 18 см і вострым вуглом 60° . Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, што праходзіць праз меншую дыяганаль C_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD . Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта прызмы роўная 40 см.

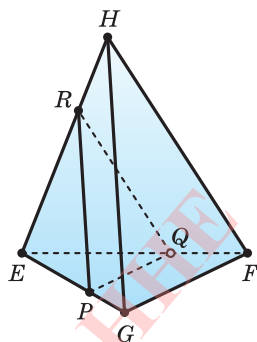
511. Усе канты прамой прызмы $BDFB_1D_1F_1$ роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што плошча сячэння прызмы плоскасцю,

якая праходзіць праз вяршыні B , D і сярэдзіну канта FF_1 , роўная S .

512. Улічыўшы, што трохвугольнік PRQ — сячэнне правільнай трохвугольнай піраміды $HEFG$ плоскасцю, якая паралельная плоскасці HFG і праходзіць праз такі пункт Q канта FE , што $FQ : QE = 1 : 2$ (рыс. 271):

а) дакажыце, што трохвугольнікі PRQ і GHF падобныя;

б) знайдзіце перыметр трохвугольніка PRQ , улічыўшы, што старана асновы піраміды роўная 30 см, а бакавы кант — 90 см.

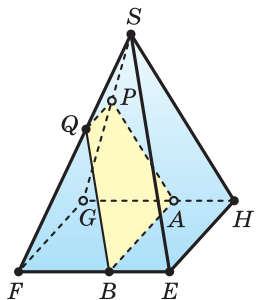


Рыс. 271

513. Сячэнне трохвугольнай піраміды $TXYZ$, паралельнае плоскасці XYZ , дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што плошча трохвугольніка XYZ роўная q .

514. Сячэнне піраміды, паралельнае аснове, дзеліць бакавы кант у адносіне $2 : 3$, калі лічыць ад вяршыні піраміды. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што яго плошча на 336 см^2 меншая за плошчу асновы.

515. Плоскасць, якая паралельная плоскасці HES і праходзіць праз такі пункт Q канта SF правільнай чатырохвугольнай піраміды $SEFGH$, што $FQ : QS = 3 : 2$, перасякае піраміду па чатырохвугольніку $QPAB$ (рыс. 272). Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што $EH = 30 \text{ см}$, $ES = 25 \text{ см}$.

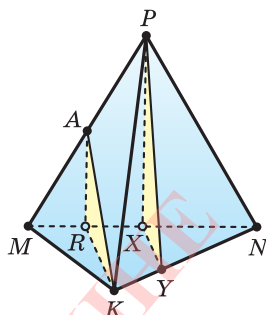


Рыс. 272

516. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FGHIJ$ з вуглом грані HFI пры вяршыні F , роўным 60° . Праз пэўны пункт Q канта GJ праведзена сячэнне плоскасцю, паралельнай грані FJI . Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што даўжыня яго дыяганалі роўная 14 см, а $GQ = 6 \text{ см}$.

517. Пункты X і A ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў MN і MP правільнай трохвугольнай піраміды $PMNK$, а трохвугольнікі ARK і PXY — паралельныя сячэнні, якія

праходзяць праз прамыя KA і PX адпаведна (рыс. 273). Знайдзіце плошчу трохвугольніка PXY , улічыўшы, што плошча трохвугольніка ARK роўная S .



Рыс. 273

518. Пункты X , Y , Z ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў OK , MK , MN правільнай трохвугольнай піраміды $OMNK$. Плошча сячэння плоскасцю, якая праходзіць праз прамую MX і паралельная прамой NK , роўная Q . Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты Y і Z і паралельная прамой MX .

519. Бакавы кант чатырохвугольнай піраміды падзелены на тры долі, і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя плоскасці асновы. Знайдзіце плошчы атрыманых сячэнняў, улічыўшы, што плошча асновы роўная S .

520. Пункт M дзеліць бакавы кант CX трохвугольнай піраміды $CXYZ$ у адносіне $2 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Трохвугольнік MBP ёсць сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M і паралельная плоскасці XYZ . Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды $CMBP$, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні піраміды $CXYZ$ роўная q .

521. Плошча сячэння піраміды плоскасцю α , якая праходзіць праз пункт на бакавым канце і паралельная аснове, роўная 5 см^2 . Вызначыце, у якой адносіне плоскасць α дзеліць бакавы кант піраміды, улічыўшы, што плошча асновы роўная 80 см^2 .

522. Старана асновы і бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды адпаведна роўныя m і n . Праз пункт, які дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічыць ад вяршыні піраміды, праведзена сячэнне, паралельнае бакавой грані. Знайдзіце яго плошчу.

523. На канце M_1L_1 прамавугольнага паралелепіпеда $MNKL M_1N_1K_1L_1$ выбраны такі пункт Q , што $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная плоскасці MN_1K , і

знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плошча трохвугольніка MN_1K роўная 200 см^2 .

524. На кантах N_1K_1 , LK , MM_1 паралелепіпеда $MNKLMM_1N_1K_1L_1$ выбраны пункты Q , T , R адпаведна. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QTR .

525. Пункты Q , B і R ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў SY , XX_1 і S_1T_1 паралелепіпеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QBR .

526. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = s^4 + 4s^3 - s^2 + 2s - 5$; в) $y = s^7 - \frac{1}{s^7}$;

б) $y = \frac{s^5 + 2s^3 - 2s + 5}{s}$; г) $y = \frac{s^2 + 1}{s^{10}}$.

527. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $y = 3x^2 - 4x - 7$; в) $y = x^4 - 8x^2 + 6$;

б) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 18$; г) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

528. Дакажыце тое, што:

а) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$;

б) $\frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1 + \sin \alpha$;

в) $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$;

г) $\sin^2 \alpha (3 - \operatorname{ctg} \alpha)(3 \operatorname{ctg} \alpha - 1) = 10 \sin \alpha \cos \alpha - 3$.

529. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 54^\circ \cos 36^\circ - \sin 54^\circ \sin 36^\circ$;

б) $\sin 124^\circ \cos 34^\circ - \cos 124^\circ \sin 34^\circ$;

в) $\cos 115^\circ \cos 65^\circ - \sin 115^\circ \sin 65^\circ$;

г) $\sin 107^\circ \cos 118^\circ + \cos 62^\circ \sin 73^\circ$.

530. Знайдзіце набліжанае значэнне функцыі f у пунктах x_1 і x_2 , улічыўшы, што:

а) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$, $x_1 = 0,98$, $x_2 = -1,02$;

б) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_1 = 1,0018$, $x_2 = -0,998$.

531. На графіку функції $y = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$ знайдзіце пункт, у

якім датычная:

а) паралельная прамой $y = 3x + 3$;

б) перпендыкулярная прамой $y = -3x - 1$.

532. Знайдзіце датычную да графіка функцыі $y = x^2 - 2x - 2$, якая праходзіць праз пункт:

а) $(-1; 1)$; б) $(2; 2)$; в) $(-2; 1)$.

533. Дакажыце тоеснасць:

а) $\cos(\alpha + 90^\circ) \cos \beta + \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) = 0$;

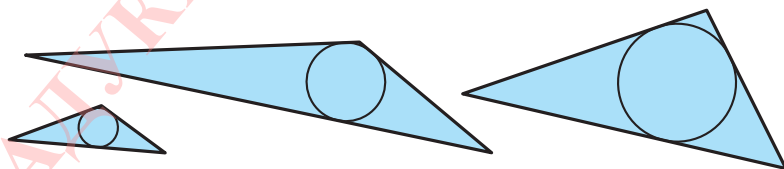
б) $\cos(90^\circ - \alpha) \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) \cos \alpha = 1$.

534. Ці можа косінус быць роўным:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{a^2+1}{2a}$; в) $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; г) $\frac{2uv}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v}}$?

535. Калі сабралі ўраджай з двух палёў плошчамі 27 га і 36 га, то сярэдняя ўраджайнасць аказалася роўнай 42 ц/га. Знайдзіце ўраджайнасць на кожным полі, улічыўшы, што збожжа, сабранае з першага поля, складае $\frac{19}{30}$ ад збожжа, сабранага з другога поля.

536. Калі ў два трохвугольнікі, плошчы якіх адносяцца як 17 : 100, умежылі акружнасці, то іх радыусы аказаліся роўнымі 2 см і 4 см (рыс. 274). Знайдзіце перыметры трохвугольнікаў, улічыўшы, што калі каля акружнасці з радыусам 6 см апісалі трохвугольнік з плошчай, роўнай суме плошчаў першага і другога трохвугольнікаў, то яго перыметр аказаўся роўным 39 см.



Рыс. 274

537. Калі каля двух акружнасцей апісалі трохвугольнікі, плошчы якіх адносяцца як 1 : 5, то іх перыметры аказаліся роўнымі 26 см і 52 см (рыс. 275). Знайдзіце радыусы акружнасцей, улічыўшы, што калі ў трэці трох-

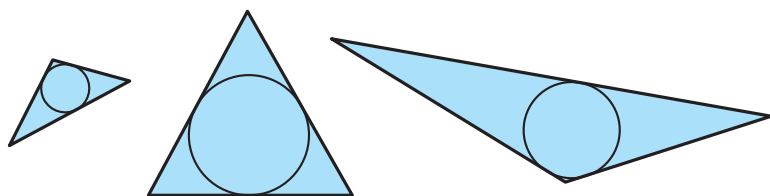


Рис. 275

вугольнік, плошча і перыметр якога адпаведна роўныя суме плошчаў і суме перыметраў першага і другога трохвугольнікаў, умежылі акружнасць, то яе радыус аказаўся роўным 4 см.

* * *

538. Папарна розныя лікі a , b , c праўдзяць умовы $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.

Чаму можа быць роўны здабытак abc ?

539. На старанах AB і AD квадрата $ABCD$ са стараной 1 выбраны такія пункты M і N , што перыметр трохвугольніка AMN роўны 2. Знайдзіце вугал MCN .

540. У пяцізначных лікаў, лічбы якіх ідуць па спаданні, знаходзяць суму лічбаў. Вызначыце, якіх лікаў больш: тых, у якіх сума лічбаў роўная 30, або тых, у якіх гэтая сума роўная 31.

IV

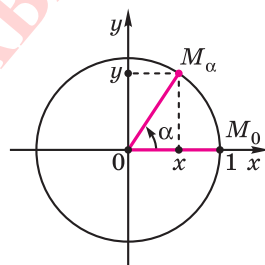
раздзел

Трыганаметрычныя выразы

11. Сінус, косінус, тангенс і катангенс адвольных вуглавога і лікавага аргументаў

Вы ўжо вывучалі сінус, косінус, тангенс і катангенс вуглавога аргумента, які змяняўся ў межах ад 0° да 180° . Цяпер увядзём трыганаметрычныя функцыі адвольнага вуглавога аргумента.

Няхай цэнтр адзінкавай акружнасці супадае з пачаткам каардынат (рыс. 276) і яе пункт $M_0(1; 0)$ пры павароце на вугал α адлюстравыцца ў пункт $M_\alpha(x; y)$.



Рыс. 276

Сінусам вугла α называецца ардыната y пункта $M_\alpha(x; y)$, атрыманага паваротам пункта $M_0(1; 0)$ на вугал α .

Косінусам вугла α называецца абсцыса x пункта $M_\alpha(x; y)$, атрыманага паваротам пункта $M_0(1; 0)$ на вугал α .

Сінус і косінус вугла α абазначаюцца адпаведна $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

У гэтых азначэннях вугал α можа быць выражаны як у градуснай, так і радыяннай мерах.

Адзначым, што дадзеныя азначэнні сінуса і косінуса для значэнняў вугла з прамежку ад 0° да 180° супадаюць з азначэннямі, якія вам вядомыя з VIII класа.

Напрыклад,

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 180^\circ = \cos \pi = -1.$$

Прыклад 1. Знойдзем $\sin(-90^\circ)$ і $\cos(-90^\circ)$.

Як паказвае рысунак 277, пункт $(1; 0)$ пры павароце на вугал велічынёй -90° адлюструецца на пункт $(0; -1)$. Таму $\sin(-90^\circ) = -1$ і $\cos(-90^\circ) = 0$.

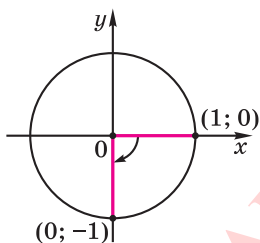
Прыклад 2. Знойдзем $\sin \frac{3\pi}{2}$ і $\cos \frac{3\pi}{2}$.

З рысунка 278 бачна, што пункт $(1; 0)$ пры павароце на вугал велічынёй $\frac{3\pi}{2}$ адлюструецца на пункт $(0; -1)$. Таму $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ і $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

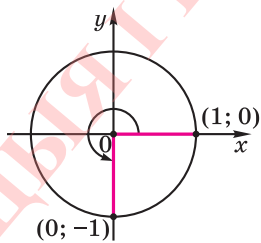
Прыклад 3. Знойдзем $\sin(-495^\circ)$ і $\cos(-495^\circ)$.

Як паказвае рысунак 279, пункт $(1; 0)$ пры павароце на вугал 495° па гадзіннікавай стрэлцы праз 360° вернецца ў зыходнае становішча, а затым яшчэ павернецца на 135° і ў выніку адлюструецца на пункт $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Таму

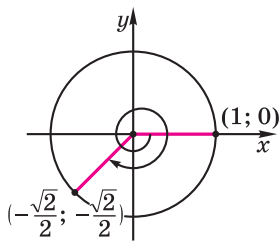
$$\sin(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ і } \cos(-495^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Рыс. 277



Рыс. 278



Рыс. 279

Тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса гэтага вугла да яго косінуса.

Катангенсам вугла α называецца адносіна косінуса гэтага вугла да яго сінуса.

Тангенс і катангенс вугла α абазначаюцца адпаведна $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.

Такім чынам,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ і } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Цяпер уявдзём сінус, косінус, тангенс і катангенс лікавага аргумента. Гэтае жаданне тлумачыцца тым, што адна залежнасць можа апісваць розныя працэсы, у якіх зменныя могуць мець самы розны сэнс. Напрыклад, формула $y = ax^2$ можа мець самыя розныя інтэрпрэтацыі, у тым ліку выражаць залежнасць:

$S = a^2$ плошчы S квадрата ад яго стараны a ;

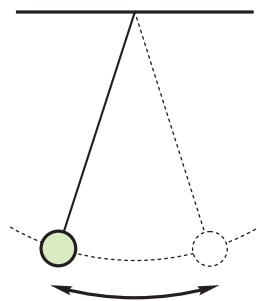
$h = \frac{g}{2}t^2$ пройдзенага цэламу шляху h ад часу t пры свабодным падзенні з паскарэннем g ;

$a = \frac{1}{R}v^2$ лінейнага паскарэння a ад скорасці v пры руху цэла па акружнасці з радыусам R ;

$K = \frac{m}{2}v^2$ кінетычнай энергіі K цэла масай m ад яго скорасці v ;

$Q = Rtl^2$ колькасці Q цеплыні, што выдзелілася ў правадніку супраціўленнем R за час t , ад сілы току I .

У гэтых залежнасцях зменная x у формуле $y = ax^2$ інтэрпрэтуецца як даўжыня a , час t , скорасць v , сіла току I . Можна чакаць, што і зменная x пад знакам сінуса, косінуса, тангенса або катангенса таксама можа мець інтэрпрэтацыі, адрозныя ад градуснай меры вугла. Сапраўды, залежнасць зруху x цэла ад становішча раўнавагі пры яго вагальным руху ад часу t перадаецца формулай $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, дзе A , ω_0 і φ — пастаянныя для дадзенага руху велічыні (рыс. 280).



Рыс. 280

Сінусам ліку t называецца сінус вугла ў t радыянаў.

Косінусам ліку t называецца косінус вугла ў t радыянаў.

Тангенсам ліку t называецца адносіна сінуса гэтага ліку да яго косінуса.

Катангенсам ліку t называецца адносіна косінуса гэтага ліку да яго сінуса.

Складзём табліцу значэнняў сінуса, косінуса, тангенса і катангенса для найбольш ужывальных лікаў у межах ад 0 да 2π (рыс. 281).

Спачатку, улічыўшы рысунак 281, адзначым, што:

$$\sin 0 = \sin 2\pi = 0, \cos 0 = \cos 2\pi = 1;$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0; \sin \pi = 0, \cos \pi = -1;$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Вы ведаеце гэтыя значэнні

для лікаў $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

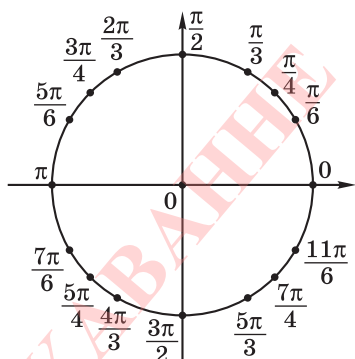


Рис. 281

Цяпер звернем увагу на тое, што пункты на адзінкавай акружнасці $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ сіметрычныя

адпаведна пунктам $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ адносна восі ардынаты, і таму іх ардынаты супадаюць, а абсцысы адрозніваюцца толькі знакам. Значыць,

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Пункты на адзінкавай акружнасці $\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$ сіметрычныя адпаведна пунктам $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ адносна пачатку каардынаты, і таму іх ардынаты і абсцысы адрозніваюцца толькі знакам. Значыць,

$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Нарешче, пункты $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}$ сіметрычны адпаведна пунктам $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ адносна пачатку каардынат, і таму іх ардынаты і абсцысы адрозніваюцца толькі знакам. Значыць,

$$\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

У выніку атрымліваецца наступная табліца.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існуе	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} t$	Не існуе	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin t$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існуе	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} t$	Не існуе	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існуе

Складзеныя табліца падказвае, што сінус, косінус, тангенс і катангенс могуць быць рознымі па знаку. Гэты знак залежыць ад каардынатнай чвэрці, у якой знаходзіцца пункт адзінкавай акружнасці.

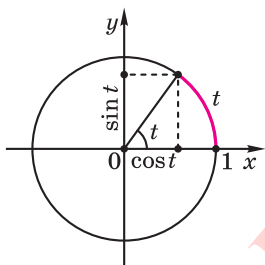
Калі пункт знаходзіцца ў першай чвэрці, то яго ардыната і абсцыса абедзве дадатныя (рыс. 282). Таму сінус і косінус адпаведнага рэчаіснага ліку t таксама дадатныя.

Калі пункт знаходзіцца ў другой чвэрці, то яго ардыната дадатная, а абсцыса адмоўная (рыс. 283). Таму сінус адпаведнага ліку t дадатны, а косінус адмоўны.

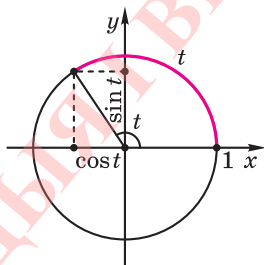
Калі пункт знаходзіцца ў трэцяй чвэрці, то яго ардыната і абсцыса абедзве адмоўныя (рыс. 284). Таму сінус і косінус адпаведнага ліку t адмоўныя.

Калі пункт знаходзіцца ў чацвёртай чвэрці, то яго ардыната адмоўная, а абсцыса дадатная (рыс. 285). Таму сінус адпаведнага ліку t адмоўны, а косінус дадатны.

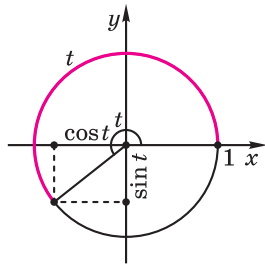
Вынікі гэтага даследавання выяўлены на рысунках 286 і 287 для сінуса і для косінуса адпаведна. Улічыўшы гэта



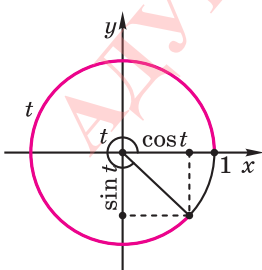
Рыс. 282



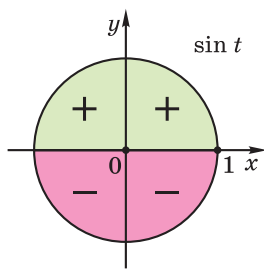
Рыс. 283



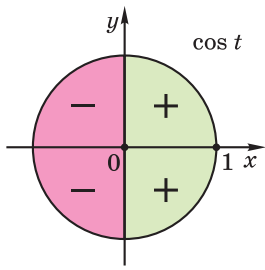
Рыс. 284



Рыс. 285

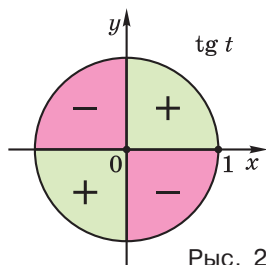


Рыс. 286

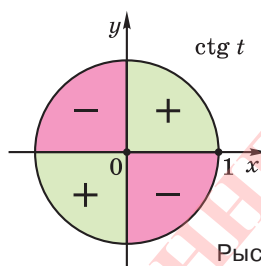


Рыс. 287

і азначэнні тангенса і катангенса, атрымаем размеркаванні іх знакаў, выяўленыя на рысунках 288 і 289 адпаведна.



Рыс. 288



Рыс. 289

Прыклад 4. Знойдзем знакі сіноса, косінуса, тангенса і катангенса:

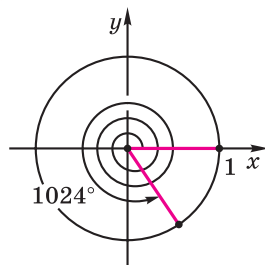
а) вугла 1024° ;

б) ліку -10 .

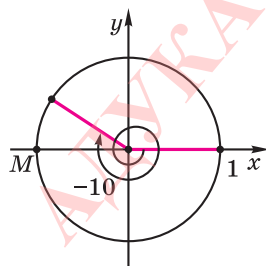
а) Пункт $(1; 0)$, зрабіўшы два абароты супраць гадзіннікавай стрэлкі, г. зн. зрабіўшы паварот на вугал 720° , вернецца ў пачатковае становішча. Пасля гэтага яшчэ застаецца зрабіць паварот на $1024^\circ - 720^\circ$, г. зн. на 304° . У выніку пункт апынецца ў чацвёртай чвэрці (рыс. 290). Значыць,

$$\sin 1024^\circ < 0, \cos 1024^\circ > 0,$$

$$\operatorname{tg} 1024^\circ < 0, \operatorname{ctg} 1024^\circ < 0.$$



Рыс. 290



Рыс. 291

б) Пункт $(1; 0)$, зрабіўшы паўтара абарота па гадзіннікавай стрэлцы, павярнецца на вугал $-9,4247\dots$ радыянаў і патрапіць у пункт $M(-1; 0)$ (рыс. 291). Пасля гэтага яшчэ застаецца зрабіць паварот на $-10 - (-9,4247\dots)$, г. зн. на вугал, роўны $-0,5752\dots$. У выніку пункт апынецца ў другой чвэрці. Значыць,

$$\sin(-10) > 0, \cos(-10) < 0,$$

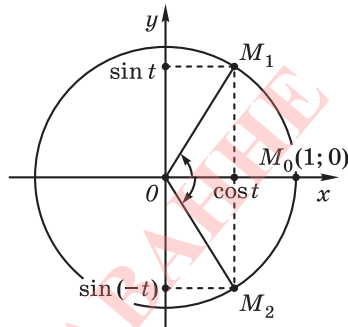
$$\operatorname{tg}(-10) < 0, \operatorname{ctg}(-10) < 0.$$

Тэарэма 1. *Сінус, косінус, тангенс і катангенс лікаў t і $-t$ звязаныя роўнасцямі:*

$$\sin(-t) = -\sin t; \cos(-t) = \cos t;$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t; \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Доказ. Няхай t — пэўны рэчаісны лік і няхай пункт $M_1(x_1; y_1)$ адзінкавай акружнасці атрымамы паваротам пункта $M_0(1; 0)$ на вугал t радыянаў, а пункт $M_2(x_2; y_2)$ — на вугал $-t$ радыянаў (рыс. 292). Тады гэтыя пункты сіметрычныя адносна восі абсцыс, а таму іх абсцысы супадаюць, а ардынаты адрозніваюцца толькі знакам: $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$. Але $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, $x_2 = \cos(-t)$, $y_2 = \sin(-t)$. Значыць,



Рыс. 292

$$\cos(-t) = \cos t, \sin(-t) = -\sin t.$$

Зараз, выкарыстаўшы азначэнні тангенса і катангенса, атрымаем:

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Прыклад 5. Знайдзем значэнне выразу:

а) $\cos(-135^\circ)$; б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Будзем мець:

а) $\cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Сінус, косінус, тангенс і катангенс аднаго аргумента звязаныя адзін з адным.

Тэарэма 2. *Сінус, косінус, тангенс і катангенс аднаго ліку t звязаныя роўнасцямі:*

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}; \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1;$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1; 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Доказ. Першая і другая роўнасці з'яўляюцца азначэннямі. З іх вынікае, што

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

Няхай t — рэчаісны лік і няхай пункт $M_t(x; y)$ адзінкавай акружнасці атрыманы паваротам пункта $M_0(1; 0)$ на вугал у t радыянаў (рыс. 293). Тады па азначэннях сінуса і косінуса можам запісаць:

$$y = \sin t, \quad x = \cos t. \quad (1)$$

Пункт $M_t(x; y)$ — пункт адзінкавай акружнасці, таму яго каардынаты x і y праўдзяць ураўненне гэтай акружнасці:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Улічыўшы роўнасці (1), атрымліваем:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Чацвёртая роўнасць даказаная.

Дакажам пятую роўнасць. Для гэтага абедзве часткі роўнасці $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ падзелім на $\cos^2 t$:

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \text{або} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Падобным чынам даказваецца і шостая роўнасць.

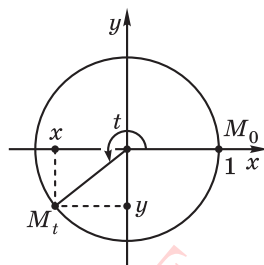
Даказаныя роўнасці з'яўляюцца тоеснасцямі, г. зн. яны праўдзяцца пры ўсіх значэннях зменных, пры якіх абедзве іх часткі маюць значэнні. Так, напрыклад, першая роўнасць праўдзіцца пры тых значэннях зменнай t , пры якіх $\cos t \neq 0$, а чацвёртая — пры ўсіх значэннях t .

Прыклад 6. Няхай $\sin t = -\frac{7}{25}$ і $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Знойдзем значэнні $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Выкарыстаўшы формулу $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, знойдзем, што

$$\begin{aligned} |\cos t| &= \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right)} = \sqrt{\frac{18 \cdot 32}{25 \cdot 25}} = \\ &= \frac{24}{25}. \end{aligned}$$

Паколькі лік t такі, што адпаведны яму вугал за-



Рыс. 293

канчваецца ў трэцяй чвэрці, у якой косінус адмоўны, то

$$\cos t = -\frac{24}{25}.$$

Паколькі $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, то $\operatorname{tg} t = \left(-\frac{7}{25}\right) : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$.

Паколькі $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, то $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 1 : \frac{7}{24} = 3\frac{3}{7}$.



1. Што называюць сінусам вугла; косінусам вугла; тангенсам вугла; катангенсам вугла?
2. Што называюць сінусам ліку; косінусам ліку; тангенсам ліку; катангенсам ліку?
3. Чаму роўныя сінус, косінус, тангенс, катангенс лікаў 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π ?
4. Як па каардынаты чвэрцяў змяняецца знак сінуса, косінуса, тангенса, катангенса?
5. Запішыце тоеснасці, што звязваюць сінус, косінус, тангенс і катангенс лікаў t і $-t$.
6. Запішыце тоеснасці, што звязваюць паміж сабой сінус, косінус, тангенс, катангенс аднаго ліку.

541. Знайдзіце каардынаты пункта адзінкавай акружнасці, атрыманага з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) 90° ; в) 180° ; д) 450° ; ж) 900° ;
б) -90° ; г) -180° ; е) -450° ; з) -900° .

542. Знайдзіце каардынаты пункта адзінкавай акружнасці, атрыманага з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) π ; в) $\frac{3\pi}{2}$; д) 2π ; ж) $\frac{27\pi}{2}$;
б) $-\pi$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; е) -2π ; з) $-\frac{69\pi}{2}$.

543. Знайдзіце каардынаты пункта адзінкавай акружнасці, атрыманага з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) 240° ; в) 840° ; д) 1215° ; ж) 1780° ;
б) -240° ; г) -840° ; е) -1215° ; з) -1780° .

544. Знайдзіце каардынаты пункта адзінкавай акружнасці, атрыманага з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{7\pi}{3}$; д) $\frac{33\pi}{4}$; ж) $\frac{43\pi}{6}$;
б) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $-\frac{7\pi}{3}$; е) $-\frac{33\pi}{4}$; з) $-\frac{43\pi}{6}$.

545. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт, атрыманы з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) 45° ; в) 210° ; д) 495° ; ж) 1050° ;
б) -45° ; г) -210° ; е) -495° ; з) -1050° .

546. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт, атрыманы з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{10\pi}{6}$; д) $\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{25\pi}{6}$;
б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{10\pi}{6}$; е) $-\frac{21\pi}{4}$; з) $-\frac{25\pi}{6}$.

547. Укажыце чвэрць, у якой размешчаны пункт, атрыманы з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) 321° ; в) 520° ; д) 762° ; ж) 1647° ;
б) -321° ; г) -520° ; е) -762° ; з) -1647° .

548. Укажыце чвэрць, у якой размешчаны пункт, атрыманы з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{15\pi}{7}$; д) $\frac{37\pi}{8}$; ж) $\frac{91\pi}{12}$;
б) $-\frac{4\pi}{3}$; г) $-\frac{15\pi}{7}$; е) $-\frac{37\pi}{8}$; з) $-\frac{91\pi}{12}$.

549. Вызначыце чвэрць, у якой размешчаны пункт, атрыманы з пункта (1; 0) паваротам на вугал, роўны:

- а) 1; в) 2,87; д) 5,12; ж) 27,4;
б) -2; г) -3,16; е) -6,31; з) -33,9.

550. Вызначыце знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, улічыўшы, што значэнне зменнай x роўнае:

- а) 234° ; в) 753° ; д) 7941° ;
б) -234° ; г) -753° ; е) $-17\,941^\circ$.

551. Вызначыце знак $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, улічыўшы, што значэнне зменнай x роўнае:

- а) $\frac{4\pi}{5}$; в) $4\frac{2}{25}\pi$; д) 5,59; ж) 7,9;
б) $-1\frac{7}{20}\pi$; г) $-4\frac{2}{25}\pi$; е) -5,59; з) -7,9.

552. Вызначыце, які знак мае выраз:

- а) $\sin 201^\circ \cdot \sin 299^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 145^\circ \cdot \operatorname{ctg} 297^\circ$;
в) $\sin 195^\circ \cdot \operatorname{tg} (-203^\circ)$;
г) $\cos (-243^\circ) \cdot \sin 111^\circ$;
д) $\cos 43^\circ \cdot \sin 121^\circ \cdot \operatorname{tg} 149^\circ$;

- е) $\sin 196^\circ \cdot \cos 916^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1276^\circ$;
 ж) $\operatorname{tg} 96^\circ \cdot \operatorname{ctg} (-196^\circ) \cdot \cos (-296^\circ)$;
 з) $\sin (-1000^\circ) \cdot \cos 835^\circ \cdot \operatorname{tg} (-380^\circ)$.

553. Визначте, які знак має вираз:

- а) $\cos 1,1\pi \cdot \cos 1,7\pi$;
 б) $\cos 1,08\pi \cdot \operatorname{tg} 1,13\pi$;

в) $\sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;

г) $\operatorname{tg} \left(-\frac{4\pi}{5}\right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{33\pi}{20}$;

д) $\sin 0,4\pi \cdot \cos \frac{13\pi}{20} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$;

е) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{20} \cdot \operatorname{ctg} \frac{29\pi}{25} \cdot \sin 2,74\pi$;

ж) $\cos \frac{111\pi}{20} \cdot \sin \left(-\frac{116\pi}{25}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{21\pi}{10}\right)$;

з) $\cos \left(-\frac{27\pi}{25}\right) \cdot \sin 5,09\pi \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{177\pi}{25}\right)$.

554. Знайдіть значення синуса, косінуса, тангенса, котангенса вугла, роўнаго:

- а) -30° ; г) -315° ; ж) -90° ; к) -240° .
 б) -300° ; д) -60° ; з) -270° ;
 в) -45° ; е) -360° ; і) -120° ;

555. Знайдіть значення синуса, косінуса, тангенса, котангенса вугла, роўнаго:

- а) $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{4\pi}{3}$; ж) $-\frac{11\pi}{6}$; і) $-\frac{7\pi}{4}$;
 б) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{5\pi}{6}$; е) $-\frac{5\pi}{3}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.

556. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}$;

д) $\sin \pi - \cos \pi$;

б) $\sin 2\pi + \cos 0$;

е) $\cos 0 + \cos \frac{3\pi}{2}$;

в) $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$;

ж) $\sin \pi : \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\sin \pi + \sin 1,5\pi$;

з) $\cos 0 : \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

557. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg} \pi$;

б) $\operatorname{tg} 2\pi : \cos 2\pi$;

е) $\cos \pi \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \pi$;

ж) $\sin \pi : \operatorname{ctg} \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} - \sin 0,5\pi$;

з) $\operatorname{tg} \pi - \sin \frac{\pi}{2}$.

558. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2 \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

б) $\cos^{11}(-\pi) \operatorname{ctg}^7 \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin^5 \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2 \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;

в) $\left(3 - \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) : 2 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $2 \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3 \operatorname{ctg}^5 \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \frac{7}{12} \operatorname{tg}^7(-\pi) + 14 \cos^{12} \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

559. Непасрэднай праверкай дакажыце праўдзівасць роўнасці:

а) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$;

г) $\sin^2 \frac{7\pi}{4} + \cos^2 \frac{7\pi}{4} = 1$;

б) $\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1$;

д) $\sin^2 \frac{8\pi}{3} + \cos^2 \frac{8\pi}{3} = 1$;

в) $\sin^2 \frac{7\pi}{6} + \cos^2 \frac{7\pi}{6} = 1$;

е) $\sin^2 \frac{17\pi}{6} + \cos^2 \frac{17\pi}{6} = 1$.

560. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $4 \sin \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

б) $7 \sin \frac{\pi}{6} + 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} - 11 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$;

г) $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} : \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

д) $\left(2 \sin \frac{\pi}{6} - 4 \cos \frac{\pi}{3}\right)^3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$;

е) $\sin 0,5\pi : \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2\pi : \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

561. На адзінкавай акружнасці выявіце пункты, што адпавядаюць вуглам, якія праўдзяць роўнасць:

а) $\sin \beta = \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{ctg} \delta = \sqrt{3}$; ж) $\operatorname{tg} \tau = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; д) $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\operatorname{ctg} \varepsilon = -\sqrt{3}$.

в) $\operatorname{tg} \gamma = 1$; е) $\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

562. На адзінкавай акружнасці выявіце пункты, што адпавядаюць вуглам, якія праўдзяць роўнасць:

а) $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} \delta = -1$; ж) $\operatorname{tg} \tau = -\sqrt{3}$;

б) $\cos \alpha = -1$; д) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\operatorname{ctg} \varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

в) $\operatorname{tg} \gamma = 0$; е) $\cos \omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

563. Улічыўшы, што $\sin x = \frac{4}{5}$ і $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, знайдзіце:

а) $\cos x$; б) $\operatorname{tg} x$; в) $\operatorname{ctg} x$.

564. Улічыўшы, што $\cos z = \frac{9}{41}$ і $\frac{3\pi}{2} < z < 2\pi$, знайдзіце:

а) $\sin z$; б) $\operatorname{tg} z$; в) $\operatorname{ctg} z$.

565. Улічыўшы, што $\operatorname{tg} a = \frac{7}{24}$ і $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, знайдзіце:

а) $\operatorname{ctg} a$; б) $\cos a$; в) $\sin a$.

566. Улічыўшы, што $\operatorname{ctg} y = \frac{61}{60}$ і $0 < y < \frac{\pi}{2}$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg} y$; б) $\sin y$; в) $\cos y$.

567. Знайдзіце значэнні $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, улічыўшы, што $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ і:

а) $\sin x = \frac{15}{17}$; в) $\sin x = -\frac{11}{61}$;

б) $\sin x = \frac{21}{29}$; г) $\sin x = -\frac{65}{97}$.

568. Знайдзіце значэнні $\sin c$, $\operatorname{tg} c$, $\operatorname{ctg} c$, улічыўшы, што $\pi < c < 2\pi$ і:

а) $\cos c = \frac{3}{5}$; в) $\cos c = -\frac{28}{53}$;

б) $\cos c = \frac{5}{13}$; г) $\cos c = -\frac{24}{143}$.

569. Знайдзіце значэнні $\operatorname{ctg} d$, $\cos d$, $\sin d$, улічыўшы, што $3\pi < d < 4\pi$ і:

а) $\operatorname{tg} d = \frac{40}{41}$; в) $\operatorname{tg} d = -\frac{56}{65}$;
 б) $\operatorname{tg} d = 1\frac{1}{21}$; г) $\operatorname{tg} d = -\frac{105}{137}$.

570. Знайдзіце значэнні $\operatorname{tg} z$, $\sin z$, $\cos z$, улічыўшы, што $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$ і:

а) $\operatorname{ctg} z = 1\frac{2}{15}$; в) $\operatorname{ctg} z = -\frac{63}{65}$;
 б) $\operatorname{ctg} z = \frac{55}{73}$; г) $\operatorname{ctg} z = -\frac{195}{197}$.

571. Спрасціце выраз:

а) $1 - \sin^2 x$;
 б) $\sin^4 y - \cos^4 y + \cos^2 y$;
 в) $\sin^4 z + \cos^4 z + 2\sin^2 z \cos^2 z$;
 г) $(\sin t - \cos t)^2 + (\sin t + \cos t)^2$;
 д) $\sin^2 u + \cos^2 u + \cos^2 u \cdot \sin^2 u$;
 е) $\sin^4 v - \cos^4 v + \cos^2 v - \sin^2 v$.

572. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$; в) $\frac{\sin^3 \delta + \cos^3 \delta}{\sin \delta \cdot \cos \delta - 1}$;
 б) $\frac{2\cos^2 \beta - 1}{1 - 2\sin^2 \beta}$; г) $\frac{\sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi + 1}$.

573. Спрасціце выраз:

а) $\cos x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$; г) $\sin^2 u \cdot \operatorname{ctg}^2 u - \sin^2 u + 1$;
 б) $\sin^2 y + \operatorname{tg}^2 y - \frac{1}{\cos^2 y}$; д) $\cos^2 v \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 v)$;
 в) $\operatorname{tg}^2 z + \sin^2 z + \cos^2 z$; е) $\frac{\operatorname{tg}^4 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 2$.

574. Спрасціце выраз:

а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$; в) $\frac{\operatorname{tg}^3 \beta + \operatorname{ctg}^3 \beta}{(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2 + 1}$;
 б) $\frac{\cos^2 \delta - \operatorname{ctg}^2 \delta}{\sin^2 \delta - \operatorname{tg}^2 \delta}$;

575. Дакажыце тое, насць:

а) $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a$;
 б) $\sin^2 b - \cos^2 c = \cos^2 c - \cos^2 b$;

$$в) \operatorname{ctg}^2 d \cdot \cos^2 d = \operatorname{ctg}^2 d - \cos^2 d;$$

$$г) \frac{1 + \cos b}{\sin b} = \frac{\sin b}{1 - \cos b};$$

$$д) \frac{1 - 2\sin^2 t}{2\cos^2 t - 1} = 1;$$

$$е) \frac{\operatorname{tg}^2 g - 1}{\operatorname{tg} g} + \frac{(\operatorname{tg}^2 g - 1)(\operatorname{tg}^4 g + 1)}{\operatorname{tg}^3 g} = \operatorname{tg}^3 g - \operatorname{ctg}^3 g.$$

576. Дакажыце тоеснасць:

$$а) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$б) \frac{2\sin^2 \beta - 1}{1 - 2\cos^2 \beta} - \frac{\cos^2 \beta - 1}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{\cos^2 \beta};$$

$$в) \frac{1 + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg}^2 \gamma} = \operatorname{tg}^2 \gamma;$$

$$г) \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha;$$

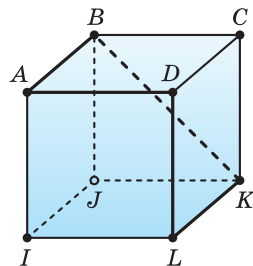
$$д) \frac{1 - 4\sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta}{(\sin \delta - \cos \delta)^2} = 1 - 2\sin \delta \cos \delta;$$

$$е) \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi.$$

577. Колькі старон мае многавугольнік, калі сума яго вуглоў роўная:

а) 1080° ; б) 1440° ; в) 1980° ; г) 3420°

578. Даўжыня ломанай $ABKLDA$, утворанай кантамі AB , AD , DL , LK куба і дыяганаллю BK яго бакавой грані (рыс. 294), роўная 16 см. Знайдзіце паверхню куба.



Рыс. 294

579. У трохвугольнай піраміды $QKLM$, усе грані якой — правільныя трохвугольнікі, праведзены сярэднія лініі AB і BC граней QLM і QLK (рыс. 295). Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што даўжыня

просторавай ломанай $ABCLMA$ роўная 27 см.

580. Здабытак дыяганалей ромба, які з'яўляецца асновай прамога паралелепіпеда, роўны 192 см^2 , радыус умежанай у яго акружнасці — 4,8 см, а дыяганаль бакавой грані — 26 см. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.

581. Кант асновы правільнай трохвугольнай піраміды і яе бакавы кант адпаведна роўныя k і l . Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, што праходзіць праз дзве вяршыні асновы і сярэдзіну бакавога канта.

582. Знайдзіце поўную паверхню прамавугольнага паралелепіпеда, улічыўшы, што дыяганалі яго граней роўныя 5 см, $\sqrt{41}$ см і $\sqrt{34}$ см.

583. Пункт B дзеліць адрэзак AC папалам. Вызначыце радыус акружнасці, што датыкаецца акружнасцей, пабудаваных на адрэзках AB , BC і AC як на дыяметрах, улічыўшы, што $AB = a$.

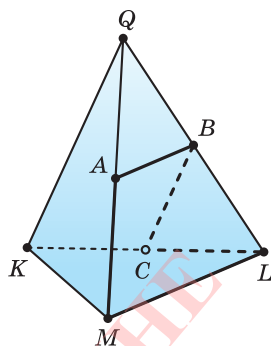
584. У трохвугольнік са старанамі 7, 8 і 13 умежана акружнасць. Яшчэ адна акружнасць датыкаецца яе і дзвюх меншых старон трохвугольніка. Вызначыце радыус гэтай акружнасці.

585. Улічыўшы, што S — плошча трохвугольніка са старанамі a , b і c , p — паўперыметр, r — радыус умежанай у трохвугольнік акружнасці, r_a , r_b , r_c — радыусы пазаўмежаных акружнасцей, якія датыкаюцца адпаведных старон (рыс. 296), дакажыце, што праўдзяцца роўнасці

$$S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

586. З двух участкаў разам сабралі 590 ц ячменю, пры гэтым ураджайнасць на першым з іх склала 26 ц/га, а плошча другога роўная 12 га. Знайдзіце ўраджайнасць на другім участку, улічыўшы, што сярэдняя ўраджайнасць на абодвух участках аказалася роўнай 23,6 ц/га.

587. Веласіпедыст ехаў спачатку са скорасцю 16 км/г, а затым знізіў яе да 12 км/г і з меншай скорасцю праехаў на 19 км менш. Знайдзіце шлях, які праехаў веласіпедыст,



Рыс. 295

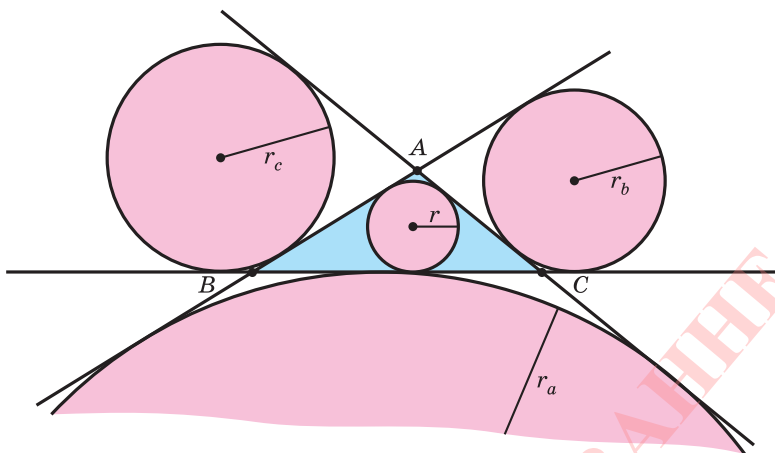


Рис. 296

улічыўшы, што сярэдняя скорасць на ўсім шляху аказалася роўнай 14,8 км/г.

588. Ёсць два прамавугольныя паралелепіпеды. У аднаго плошча асновы роўная 28 м^2 , у другога — 58 м^2 і аб'ём другога на 268 м^3 большы (рыс. 297).

Знайдзіце аб'ёмы паралелепіпедаў, улічыўшы, што трэці паралелепіпед з аб'ёмам, роўным супольнаму аб'ёму першага і другога паралелепіпедаў, і вышы-
нэй, роўнай супольнай вышыні першага і другога паралелепіпедаў, мае плошчу асновы роўнай 44 м^2 .

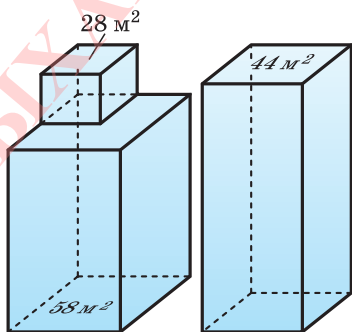


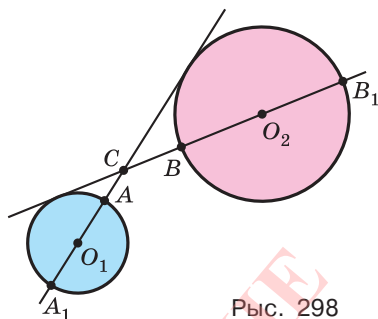
Рис. 297

589. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , улічыўшы, што яго медыяна AM перпендыкулярная бісектрысе BL і AM роўны m і BL роўны l .

590. Нарастальная паслядоўнасць $a(n)$ прымае натуральныя значэнні і пры ўсіх натуральных значэннях k праўдзіць умову $a(a(k)) = 3k$. Знайдзіце $a(2008)$.

591. Акружнасці з цэнтрамі O_1 і O_2 не маюць агульных пунктаў. Прамая, што праходзіць праз пункт O_1 і датыкаецца другой акружнасці, перасякае першую ў пунктах A і A_1 ,

а прамая, што праходзіць праз пункт O_2 і датыкаецца першай акружнасці, перасякае другую ў пунктах B і B_1 (рыс. 298). Улічыўшы, што прамыя AA_1 і BB_1 перасякаюцца, пункты A і B ляжаць па адзін бок ад прамой O_1O_2 і адрэзкі AB і A_1B_1 адпаведна роўныя m і n , знайдзіце адрэзак O_1O_2 .



Рыс. 298

12. Формулы складання. Формулы прывядзення

Сінус, косінус, тангенс і катангенс звязаныя паміж сабой многімі судачыненнямі. Некаторыя з іх вы ўжо ведаеце. Гэта судачыненні, якія звязваюць значэнні выразаў $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$, значэнні трыганаметрычных выразаў для лікаў $-t$ і t .

Устанавім цяпер групу судачыненняў, якія вынікаюць з уласцівасцей паваротаў. Паварот пункта на вугал $u + v$ можна разглядаць як кампазіцыю (паслядоўнае выкананне) павароту на вугал u і павароту на вугал v .

Тэарэма 3. Для любых рэчаісных лікаў u і v праўдзяцца роўнасці:

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

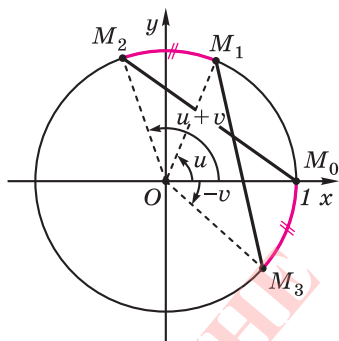
Доказ. Няхай u і v — рэчаісныя лікі і няхай пункты M_1 , M_2 , M_3 адзінкавай акружнасці атрыманы паваротам пункта $M_0(1; 0)$ на вуглы u , $u + v$, $-v$ радыянаў адпаведна (рыс. 299). Тады па азначэннях косінуса і сінуса каардынаты гэтых пунктаў наступныя:

$$M_1(\cos u, \sin u), M_2(\cos(u + v), \sin(u + v)),$$

$$M_3(\cos(-v), \sin(-v)).$$

Паколькі паварот на вугал $u + v$ радыянаў ёсць кампазіцыя паваротаў на вугал u радыянаў і вугал v радыянаў,

то вугал M_1OM_2 роўны v радыянаў, і, значыць, вуглы M_1OM_2 і M_3OM_0 роўныя адзін аднаму. Калі да гэтых вуглоў дадаць па вугле M_0OM_1 , то атрымаюцца таксама роўныя вуглы M_0OM_2 і M_3OM_1 . Улічыўшы, што прылеглыя да гэтых вуглоў стораны трохвугольнікаў M_0OM_2 і M_3OM_1 з'яўляюцца радыусамі адной акружнасці, можам сцвярджаць, што трохвугольнікі M_0OM_2 і M_3OM_1 роўныя. Таму роўныя іх адпаведныя стораны M_0M_2 і M_3M_1 і, значыць,



Рыс. 299

$$M_0M_2^2 = M_3M_1^2.$$

Але па формуле адлегласці паміж пунктамі атрымліваем:

$$M_0M_2^2 = (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2;$$

$$M_3M_1^2 = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2.$$

Таму

$$\begin{aligned} & (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 = \\ & = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2. \end{aligned}$$

Пераўтворым гэтую роўнасць:

$$\begin{aligned} & (\cos(u+v) - 1)^2 + (\sin(u+v) - 0)^2 = \\ & = (\cos u - \cos(-v))^2 + (\sin u - \sin(-v))^2 \stackrel{(1)}{\equiv} \\ & \equiv (\cos(u+v) - 1)^2 + \sin^2(u+v) = (\cos u - \cos v)^2 + \\ & + (\sin u + \sin v)^2 \stackrel{(2)}{\equiv} \cos^2(u+v) + 1 - 2\cos(u+v) + \\ & + \sin^2(u+v) = \cos^2 u + \cos^2 v - 2\cos u \cos v + \\ & + \sin^2 u + \sin^2 v + 2\sin u \sin v \stackrel{(3)}{\equiv} (\cos^2(u+v) + \\ & + \sin^2(u+v)) + 1 - 2\cos(u+v) = (\cos^2 u + \sin^2 u) + \\ & + (\cos^2 v + \sin^2 v) - 2\cos u \cos v + 2\sin u \sin v \stackrel{(4)}{\equiv} \\ & \equiv 1 + 1 - 2\cos(u+v) = 1 + 1 - 2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv 2 - 2\cos(u+v) = 2 - 2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv -2\cos(u+v) = -2\cos u \cos v + \\ & + 2\sin u \sin v \equiv \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Тут мы выкарысталі: (1) — тоеснасці, устаноўленыя тэарэмай 1; (2) — формулы квадрата сумы і рознасці двух выказаў; (3) — групоўку складаемых алгебраічнай сумы; (4) — тоеснасць $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Першая роўнасць даказаная. Каб устанавіць другую роўнасць, заменім у першай роўнасці выраз v выразам $-v$:

$$\begin{aligned}\cos(u - v) &= \cos u \cos(-v) - \sin u \sin(-v) \equiv \\ &\equiv \cos(u - v) = \cos u \cos v - \sin u (-\sin v) \equiv \\ &\equiv \cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.\end{aligned}$$

Перш чым даказваць трэцюю роўнасць, устанавім роўнасці:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Выкарыстаўшы другую формулу, атрымаем:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos t + \sin \frac{\pi}{2} \sin t \equiv \\ &\equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.\end{aligned}$$

У даказанай формуле $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ выраз t заменім выразам $\frac{\pi}{2} - t$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Цяпер дакажам трэцюю формулу:

$$\begin{aligned}\sin(u + v) &\stackrel{(1)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right) \stackrel{(2)}{=} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right) \stackrel{(3)}{=} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cos v + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin v \stackrel{(4)}{=} \sin u \cos v + \cos u \sin v.\end{aligned}$$

Тут мы выкарысталі: (1) — формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ пры яе прачытанні справа налева; (2) — перагрупоўку членаў алгебраічнай сумы; (3) — даказаную формулу косінуса рознасці; (4) — формулы $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ і $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$.

Каб атрымаць чацвёртую формулу, у трэцяй формуле заменім выраз v выразам $-v$:

$$\begin{aligned}\sin(u - v) &= \sin u \cos(-v) - \cos u \sin(-v) \equiv \\ &\equiv \sin(u - v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.\end{aligned}$$

Вынік. Роўнасці

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}; \quad \operatorname{tg}(u-v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v};$$

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u+v)}{\cos u \cdot \cos v}; \quad \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cdot \cos v}.$$

з'яўляюцца тоеснасцямі.

Трэба ўпэўніцца, што запісаныя роўнасці праўдзяцца пры ўсіх значэннях зменных, пры якіх абедзве іх часткі маюць значэнні.

Першую формулу можна атрымаць, калі выкарыстаць азначэнне тангенса і даказаныя формулы для $\sin(u+v)$ і $\cos(u+v)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} = \\ &= \frac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} + \frac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v}}{\frac{\cos u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin u \sin v}{\cos u \cos v}} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}. \end{aligned}$$

Другую формулу атрымаем, замяніўшы ў першай формуле выраз v выразам $-v$:

$$\operatorname{tg}(u-v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg}(-v)}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg}(-v)} = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Дзве астатнія формулы атрымаем, выкарыстаўшы азначэнне тангенса і формулы для $\sin(u+v)$ і $\sin(u-v)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v &= \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin(u+v)}{\cos u \cdot \cos v}, \\ \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v &= \frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cdot \cos v}. \end{aligned}$$

Прыклад 1. Знайдзем $\cos 15^\circ$ і $\operatorname{tg} 75^\circ$. Маем:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

З дапамогай устаноўленых формул складання лёгка даказваюцца *формулы прывядзення*, якія даюць магчымасць зводзіць знаходжанне значэнняў выразаў $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ да знаходжання іх значэнняў для аргумента з прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Формулы прывядзення адлюстроўваюць сіметрыю пунктаў адзінкавай акружнасці адносна каардынатных восей.

Тэарэма 4. Праўдзяцца формулы:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) &= \cos t; & \sin(\pi \pm t) &= \mp \sin t; \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= -\cos t; & \sin(2\pi \pm t) &= \pm \sin t; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) &= \mp \sin t; & \cos(\pi \pm t) &= -\cos t; \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= \pm \sin t; & \cos(2\pi \pm t) &= \cos t; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) &= \mp \operatorname{ctg} t; & \operatorname{tg}(\pi \pm t) &= \pm \operatorname{tg} t; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= \mp \operatorname{ctg} t; & \operatorname{tg}(2\pi \pm t) &= \pm \operatorname{tg} t; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) &= \mp \operatorname{tg} t; & \operatorname{ctg}(\pi \pm t) &= \pm \operatorname{ctg} t; \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= \mp \operatorname{tg} t; & \operatorname{ctg}(2\pi \pm t) &= \pm \operatorname{ctg} t.\end{aligned}$$

Доказ. Формулы для сінуса і косінуса даказваюцца па адной схеме. Дакажам, напрыклад, формулы $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm \sin t$. Маем:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) &= \cos \frac{3\pi}{2} \cos t \mp \sin \frac{3\pi}{2} \sin t = \\ &= 0 \cdot \cos t \mp (-1) \cdot \sin t = \pm \sin t.\end{aligned}$$

Доказ формул для тангенса і катангенса можна правесці з выкарыстаннем азначэнняў тангенса і катангенса і формул прывядзення для сінуса і косінуса. Дакажам, на-

приклад, формулы $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp \operatorname{ctg} t$. Атрымліваем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)} = \frac{\cos t}{\mp \sin t} = \mp \operatorname{ctg} t.$$

Формулы, што складаюць змест тэарэмы 4, дазваляюць запомніць наступнае мнеманічнае¹ правіла: а) знак правай часткі вызначаецца знакам левай, калі лічыць, што значэнне зменнай t належыць прамежку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) калі першае складаемае A аргумента $(A \pm t)$ ёсць π або 2π , то назва функцыі не змяняецца, а калі складаемае A ёсць $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$, то назва функцыі змяняецца: \sin на \cos ; \cos на \sin ; tg на ctg ; ctg на tg .



1. Запішыце формулы складання для косінуса сумы і рознасці двух лікаў.
2. Запішыце формулы складання для сінуса сумы і рознасці двух лікаў.
3. Запішыце формулы складання для тангенса сумы і рознасці двух лікаў.
4. Сфармулюйце мнеманічнае правіла, якое дазваляе запісаць любую з формул прывядзення.

592. Спрасціце выраз:

- а) $\cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$;
- б) $\cos 3\beta \cos 5\beta - \sin 3\beta \sin 5\beta$;
- в) $\sin 2\gamma \cos 3\gamma - \cos 2\gamma \sin 3\gamma$;
- г) $\cos 3\delta \sin 7\delta - \sin 3\delta \cos 7\delta$;
- д) $(\operatorname{tg} 4\varepsilon + \operatorname{tg} 3\varepsilon) : (1 - \operatorname{tg} 4\varepsilon \operatorname{tg} 3\varepsilon)$;
- е) $(\operatorname{tg} 2\tau - \operatorname{tg} 8\tau) : (1 + \operatorname{tg} 2\tau \operatorname{tg} 8\tau)$;
- ж) $(1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} 2\omega) : (\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} 2\omega)$;
- з) $(1 + \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 4\varphi) : (\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} 4\varphi)$.

¹ Мнемоніка — (грэч. *μνημονικά*) сукупнасць прыёмаў, што робяць больш лёгкай запамінанне праз утварэнне штучных асацыяцый.

593. Вилічыце:

а) $\cos 57^\circ \cos 123^\circ - \sin 57^\circ \sin 123^\circ$;

б) $\cos 121^\circ \cos 31^\circ + \sin 121^\circ \sin 31^\circ$;

в) $\sin 57^\circ \cos 123^\circ + \cos 57^\circ \sin 123^\circ$;

г) $\sin 121^\circ \cos 31^\circ - \cos 121^\circ \sin 31^\circ$.

594. Вилічыце:

а) $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;

б) $\cos 21^\circ 30' \cos 23^\circ 30' - \sin 21^\circ 30' \sin 23^\circ 30'$;

в) $\sin 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' - \cos 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$;

г) $\sin 21^\circ 30' \cos 23^\circ 30' + \cos 21^\circ 30' \sin 23^\circ 30'$.

595. Вилічыце:

а) $\cos \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9}$;

б) $\cos \frac{13\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{13\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$;

в) $\sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{13\pi}{9}$;

г) $\sin \frac{13\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} - \cos \frac{13\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$.

596. Вилічыце:

а) $\frac{\operatorname{tg} 57^\circ 30' - \operatorname{tg} 27^\circ 30'}{1 + \operatorname{tg} 57^\circ 30' \operatorname{tg} 27^\circ 30'}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{9} \cdot \operatorname{tg} \frac{13\pi}{9}}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 21^\circ 30' + \operatorname{tg} 23^\circ 30'}{1 + \operatorname{tg} 21^\circ 30' \operatorname{tg} 23^\circ 30'}$;

г) $\frac{\operatorname{tg} \frac{13\pi}{11} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}}{1 + \operatorname{tg} \frac{13\pi}{11} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}}$.

597. Вилічыце:

а) $(\operatorname{tg} 57^\circ + \operatorname{tg} 123^\circ) : (1 - \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 123^\circ)$;

б) $(1 + \operatorname{tg} 157^\circ \operatorname{tg} 67^\circ) : (\operatorname{tg} 157^\circ - \operatorname{tg} 67^\circ)$;

в) $(\operatorname{tg} 121^\circ - \operatorname{tg} 31^\circ) : (1 + \operatorname{tg} 121^\circ \operatorname{tg} 31^\circ)$.

г) $(1 - \operatorname{tg} 190^\circ \operatorname{tg} 80^\circ) : (\operatorname{tg} 190^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ)$.

598. Спрасціце выраз:

а) $\cos \left(\frac{2\pi}{7} - a \right) \cos \left(\frac{3\pi}{14} + a \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{7} - a \right) \sin \left(\frac{3\pi}{14} + a \right)$;

б) $\cos \left(\frac{5\pi}{12} + u \right) \cos \left(\frac{7\pi}{12} - u \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} + u \right) \sin \left(\frac{7\pi}{12} - u \right)$;

$$в) \sin\left(\frac{2\pi}{7} - c\right) \cos\left(\frac{3\pi}{14} + c\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} - c\right) \sin\left(\frac{3\pi}{14} + c\right);$$

$$г) \cos\left(\frac{5\pi}{12} + r\right) \sin\left(\frac{7\pi}{12} - r\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{12} + r\right) \cos\left(\frac{7\pi}{12} - r\right).$$

599. Спрасціце выраз:

$$а) \left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) \right) : \left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9} + x\right) \right);$$

$$б) \left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - y\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9} + y\right) \right) : \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18} - y\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9} + y\right) \right);$$

$$в) \left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \right) : \left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10} + z\right) \right);$$

$$г) \left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} - t\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} + t\right) \right) : \left(\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{20} + t\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - t\right) \right).$$

600. Знайдзіце значэнне выразу:

$$а) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right), \text{ улічыўшы, што } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ і } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$б) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ улічыўшы, што } \cos x = -\frac{1}{3} \text{ і } \frac{\pi}{2} < x < \pi;$$

$$в) \sin\left(\frac{\pi}{6} + y\right), \text{ улічыўшы, што } \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ і } \pi < y < \frac{3\pi}{2};$$

$$г) \sin\left(z - \frac{2\pi}{3}\right), \text{ улічыўшы, што } \operatorname{tg} z = -\frac{4}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < z < 2\pi.$$

601. Знайдзіце значэнне выразу:

$$а) \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} + s\right), \text{ улічыўшы, што } \sin s = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ і } \frac{\pi}{2} < s < \pi;$$

$$б) \operatorname{tg}\left(u - \frac{5\pi}{3}\right), \text{ улічыўшы, што } \operatorname{ctg} u = -\frac{4}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < u < 2\pi;$$

$$в) \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4} + v\right), \text{ улічыўшы, што } \sin v = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < v < 2\pi;$$

$$г) \operatorname{ctg}\left(t - \frac{11\pi}{6}\right), \text{ улічыўшы, што } \operatorname{tg} t = -\frac{5}{3} \text{ і } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi.$$

602. Спрасціце выраз:

$$а) \frac{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}; \quad в) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} + \operatorname{tg} \frac{25\pi}{21}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{25\pi}{21}}; \quad д) \frac{\operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}}{1 - \operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}};$$

$$б) \frac{1 + \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 72^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 72^\circ}; \quad г) \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{28\pi}{15} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}{\operatorname{tg} \frac{28\pi}{15} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}}; \quad е) \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{11\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}.$$

603. Знайдіть значення виразу:

- а) $\operatorname{tg} 15^\circ$; г) $\cos 75^\circ$; ж) $\operatorname{tg} 105^\circ$; к) $\cos 165^\circ$;
б) $\operatorname{ctg} 15^\circ$; д) $\operatorname{ctg} 75^\circ$; з) $\operatorname{ctg} 105^\circ$; л) $\operatorname{tg} 165^\circ$;
в) $\sin 75^\circ$; е) $\cos 105^\circ$; і) $\sin 165^\circ$; м) $\operatorname{ctg} 165^\circ$.

604. Спростіть вираз:

а) $\sin(-u) \cos(-v) + \sin(u+v)$;

б) $\sin(y-z) - \sin(-y) \cos(-z)$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - \sin(s-t)$;

г) $\sin(\beta+\gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \sin(-\gamma)$;

д) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-f\right) + \cos\left(f+\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $\sin\left(g+\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-g\right)$;

ж) $\frac{2 \cos k \sin l + \sin(k-l)}{2 \cos k \cos l - \cos(k-l)}$;

з) $\frac{\cos x \cos t - \cos(x+t)}{\cos(x-t) - \sin x \cos t}$.

605. Знайдіть значення виразу:

а) $\cos(x+y)$ і $\cos(x-y)$, улічуйте, що $\cos x = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ і $\sin y = \frac{8}{17}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin(u+v)$ і $\cos(u-v)$, улічуйте, що $\cos u = -0,8$, $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ і $\sin v = -\frac{12}{13}$, $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(i+j)$ і $\operatorname{tg}(i-j)$, улічуйте, що $\operatorname{tg} i = -\frac{11}{60}$, $\frac{\pi}{2} < i < \pi$ і $\operatorname{ctg} j = 3\frac{15}{16}$, $\pi < j < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}(r+s)$ і $\operatorname{ctg}(r-s)$, улічуйте, що $\operatorname{ctg} r = 6\frac{6}{13}$, $\pi < r < \frac{3\pi}{2}$ і $\operatorname{tg} s = -2,4$, $\frac{\pi}{2} < s < \pi$.

606. Докажіть тотожність:

а) $\sin(x-y) \sin(x+y) = \sin^2 x - \sin^2 y$;

б) $\cos(t-v) \cos(t+v) = \cos^2 t - \sin^2 v$;

$$\text{в)} \frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) - \sqrt{2} \cos x}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) - \sqrt{3} \sin x} = \sqrt{2} \operatorname{tg} x;$$

$$\text{г)} \frac{\cos y - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + y \right)}{2 \sin \left(y - \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} \sin y} = -\sqrt{3} \operatorname{tg} y;$$

$$\text{д)} \frac{\sin(s+t)}{\sin(s-t)} = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} t};$$

$$\text{е)} \frac{\cos(s-t)}{\cos(s+t)} = \frac{\operatorname{ctg} s \operatorname{ctg} t + 1}{\operatorname{ctg} s \operatorname{ctg} t - 1}.$$

607. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin(x + y)$, улічыўшы, што $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\cos y = \frac{60}{61}$, а вуглы x і y заканчваюцца ў трэцяй і чацвёртай чвэрцях адпаведна;

б) $\sin(x - y)$, улічыўшы, што $\cos x = -\frac{28}{53}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, а вуглы x і y заканчваюцца ў трэцяй і першай чвэрцях адпаведна;

в) $\sin(x + y)$, улічыўшы, што $\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin y = -\frac{4}{5}$, а вуглы u і v заканчваюцца ў першай і трэцяй чвэрцях адпаведна;

г) $\cos(x + y)$, улічыўшы, што $\cos x = -\frac{9}{41}$, $\sin y = \frac{40}{41}$, а вуглы x і y заканчваюцца ў трэцяй і другой чвэрцях адпаведна;

д) $\cos(a - b)$, улічыўшы, што $\sin a = \frac{20}{29}$, $\cos b = -\frac{7}{25}$, а вуглы a і b заканчваюцца ў другой чвэрці;

е) $\sin(a - b)$, улічыўшы, што $\cos a = -\frac{15}{17}$, $\sin b = -\frac{3}{5}$, а вуглы a і b заканчваюцца ў другой і чацвёртай чвэрцях адпаведна;

ж) $\cos(g + h)$ і $\cos(g - h)$, улічыўшы, што $\cos g = \cos h$ і $\sin g = \sin h$;

608. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} a = 7$;

б) $\operatorname{tg}(r + s)$ і $\operatorname{tg}(r - s)$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} r = 1,2$, $\operatorname{tg} s = 0,7$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$, улічыўшы, што $\sin \varphi = \frac{3}{4}$ і вугал φ заканчваецца ў другой чвэрці.

609. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin \frac{13\pi}{12}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{12}$; і) $\sin \frac{19\pi}{12}$; н) $\sin \frac{23\pi}{12}$;

б) $\cos \frac{13\pi}{12}$; е) $\cos \frac{17\pi}{12}$; к) $\cos \frac{19\pi}{12}$; о) $\cos \frac{23\pi}{12}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{12}$; ж) $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{12}$; л) $\operatorname{tg} \frac{19\pi}{12}$; п) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{12}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{12}$; з) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{12}$; м) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{12}$; р) $\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{12}$.

610. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$;

б) $\sin(\pi + t) = -\sin t$;

е) $\sin(\pi - t) = \sin t$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t$;

ж) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$;

г) $\sin(2\pi + t) = \sin t$;

з) $\sin(2\pi - t) = -\sin t$.

611. Дакажыце тоеснасць:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$;

д) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$;

б) $\cos(\pi + t) = -\cos t$;

е) $\cos(\pi - t) = -\cos t$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t$;

ж) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t$;

г) $\cos(2\pi + t) = \cos t$;

з) $\cos(2\pi - t) = \cos t$.

612. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{ctg} t$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$;

б) $\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$;

е) $\operatorname{tg}(\pi - t) = -\operatorname{tg} t$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{ctg} t$;

ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$;

г) $\operatorname{tg}(2\pi + t) = \operatorname{tg} t$;

з) $\operatorname{tg}(2\pi - t) = -\operatorname{tg} t$.

613. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{tg} t$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\operatorname{tg} t$;

б) $\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$;

г) $\operatorname{ctg}(2\pi + t) = \operatorname{ctg} t$;

$$д) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t ;$$

$$ж) \operatorname{ctg}\left(\frac{3 \pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t ;$$

$$е) \operatorname{ctg}(\pi-t)=-\operatorname{ctg} t ;$$

$$з) \operatorname{ctg}(2 \pi-t)=-\operatorname{ctg} t .$$

614. Спрасціце выраз:

$$а) \cos (x+y)+\cos \left(\frac{3 \pi}{2}+x\right) \cos \left(\frac{3 \pi}{2}+y\right) ;$$

$$б) \cos (r-s)-\cos \left(\frac{\pi}{2}-r\right) \cos \left(\frac{\pi}{2}-s\right) ;$$

$$в) \sin (u+v)+\sin \left(\frac{3 \pi}{2}-u\right) \cos \left(\frac{3 \pi}{2}+v\right) ;$$

$$г) \sin (i-j)-\cos \left(\frac{\pi}{2}-i\right) \sin \left(\frac{\pi}{2}+j\right) .$$

615. Спрасціце выраз:

$$а) \operatorname{tg}(k+l)(\operatorname{tg} k \operatorname{tg} l-1) ;$$

$$в) \operatorname{ctg}(m+n)(\operatorname{tg} m+\operatorname{tg} n) ;$$

$$б) \operatorname{tg}(a-c)(\operatorname{tg} a \operatorname{tg} c+1) ;$$

$$г) \operatorname{ctg}(b+d)(\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} d) .$$

616. Спрасціце выраз:

$$а) \cos \left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos \left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right) ;$$

$$д) \sin \left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin \left(\beta-\frac{\pi}{3}\right) ;$$

$$б) \cos \left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos \left(\frac{\pi}{6}-x\right) ;$$

$$е) \sin \left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin \left(\frac{\pi}{6}-x\right) ;$$

$$в) \frac{\sin (u+v)-\sin (u-v)}{\sin (u+v)+\sin (u-v)} ;$$

$$ж) \frac{\cos (u+v)-\cos (u-v)}{\cos (u+v)+\cos (u-v)} ;$$

$$г) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)-\cos \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)+\cos \left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)} ;$$

$$з) \frac{\sin \left(\frac{5 \pi}{3}+\varphi\right)+\cos \left(\frac{5 \pi}{3}-\varphi\right)}{\sin \left(\frac{5 \pi}{3}-\varphi\right)-\cos \left(\frac{5 \pi}{3}+\varphi\right)} .$$

617. Дакажыце тое, насць:

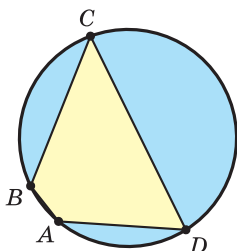
$$а) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\frac{1+\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t} ;$$

$$б) \operatorname{tg} x+2 \operatorname{ctg} 2 x=\operatorname{ctg} x ;$$

$$в) \frac{\operatorname{tg} \beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)}{\operatorname{ctg} \beta+\operatorname{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg} \beta ;$$

$$г) \operatorname{tg} x+2 \operatorname{tg} 2 x+4 \operatorname{tg} 4 x+8 \operatorname{ctg} 8 x=\operatorname{ctg} x .$$

618. Каля квадрата $ABCD$ апісана акружнасць, на меншай з дзвюх дуг з канцамі A і B адзначаны пункт M . Дакажыце, што прамені MC і MD дзеляць вугал AMB на тры долі.



Рыс. 300

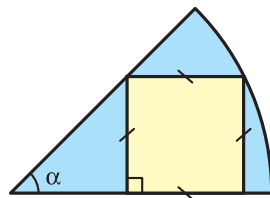
619. Пункты A, B, C, D раздзяляюць акружнасць на дугі ў адносіне $AB : BC : CD : DA = 1 : 4 : 7 : 3$ (рыс. 300). Знайдзіце:

- а) вуглы чатырохвугольніка;
- б) вугал паміж прамымі AB і CD ;
- в) вугал паміж прамымі AC і BD .

620. Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце Q , прычым $AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$. Дакажыце, што пункты A, B, C, D належаць адной акружнасці.

621. Тры акружнасці папарна датыкаюцца знешнім чынам у пунктах A, B, C . Радыусы акружнасцей адносяцца як $1 : 2 : 3$. Знайдзіце косінус найменшага вугла трохвугольніка ABC .

622. У сектар з вострым цэнтральным вуглом α умежаны квадрат, тры вяршыні якога знаходзяцца на радыусах, а чацвёртая — на дузе (рыс. 301). Знайдзіце адносіну плошчаў сектара і квадрата.



Рыс. 301

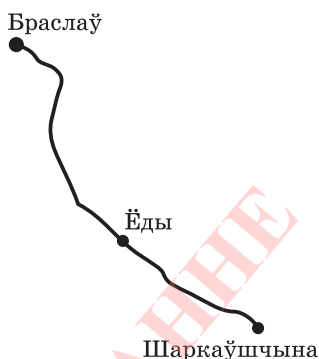
623. Ёсць дзве канцэнтрычныя акружнасці. У адной з іх праведзены дыяметр AB , а на другой выбраны пункт C . Дакажыце, што велічыня $AC^2 + BC^2$ не залежыць ад таго, у якой акружнасці праведзены дыяметр і як выбраны пункт на другой.

624. Аўтамабіль ехаў спачатку са скорасцю 85 км/г, а затым зменшыў яе і з меншай скорасцю праехаў 140 км. Знайдзіце меншую скорасць аўтамабіля, улічыўшы, што час руху з гэтай скорасцю быў у 2 разы меншы за час руху з большай скорасцю, а сярэдняя скорасць на ўсім шляху склала 80 км/г.

625. Даехаўшы за $1,5$ г з Шаркаўшчыны да Ёдаў, велапедыст знізіў скорасць на $3,5$ км/г і з меншай скорасцю

ехаў да Браслава яшчэ 2 г (рыс. 302). Знайдзіце шляхі ад Ёдаў да Шаркаўшчыны і Браслава, улічыўшы, што сярэдняя скорасць на ўсім шляху склала 14 км/г.

626. Пункт M разбівае адрэзак AB на часткі даўжынёй 9 см і 15 см, на якіх пабудаваны паралелаграмы $AMCD$ і $BMEF$. Іх вышыні, праведзеныя да AB з пунктаў D і F , адрозніваюцца на 8 см. Знайдзіце магчымыя значэнні плошчы паралелаграма $AMCD$, улічыўшы, што разам яны даюць плошчу паралелаграма з асновай AB і вышынёй 18 см.



Рыс. 302

627. Ці існуе лік, у дзесятковым запісе квадрата якога лічбы ў суме даюць:

- а) 2010; б) 2011?

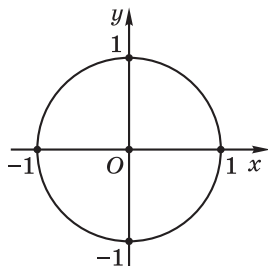
628. Знайдзіце чатырохвугольнік з найменшым перыметрам, у якога дыяганалі маюць роўныя m і n , а вугал паміж імі — φ .

629. Вызначыце, колькі рашэнняў мае сістэма ўраўненняў

$$\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5. \end{cases}$$

13. Арксінус, арккосінус, арктангенс, арккатангенс

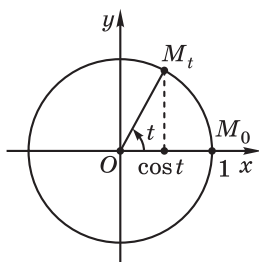
Пры рабоце з уведзенымі ў папярэднім параграфі трыганаметрычнымі функцыямі зручна выкарыстоўваць іх геаметрычныя выяўленні, звязаныя з адзінкавай акружнасцю, цэнтр якой знаходзіцца ў пачатку каардынат (рыс. 303). Яе называюць трыганаметрычнай акружнасцю.



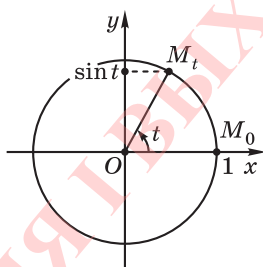
Рыс. 303

Вы ведаеце, як ліку t паставіць у адпаведнасць пункт M_t адзінкавай акружнасці. Ён атрымліваецца паваротам пункта M_0 на t радыянаў. Косінус і сінус ліку t — праекцыі пункта M_t на вось абсцыс (рыс. 304) і вось ардынаты адпаведна (рыс. 305). Таму вось абсцыс называюць **восьсю косінусаў**, а вось ардынаты — **восьсю сінусаў** для трыганаметрычнай акружнасці.

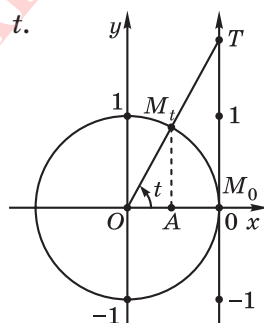
Каардынатную прамую, атрыманую паралельным пераносам восі ардынаты на адну адзінку ўправа (рыс. 306), называюць **восьсю тангенсаў**, бо праекцыя на яе пункта M_t з пачатку каардынат O дае значэнне тангенса ліку t . Сапраўды, з падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў OAM_t і OM_0T маем: $\frac{M_0T}{OM_0} = \frac{AM_t}{OA}$, або $M_0T = \operatorname{tg} t$, з улікам таго, што $OM_0 = 1$, $OA = \cos t$ і $AM_t = \sin t$.



Рыс. 304



Рыс. 305

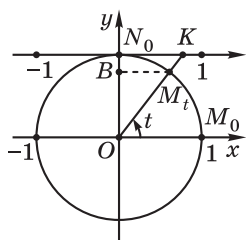


Рыс. 306

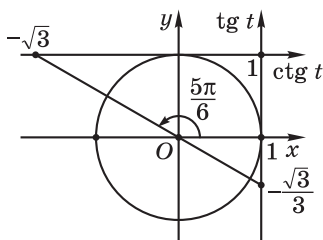
Гэтаксама атрымліваем, што калі перанесці вось абсцыс паралельна на адну адзінку ўверх (рыс. 307), то з падобнасці прамавугольных трохвугольнікаў OBM_t і ON_0K вынікае роўнасць $N_0K = BM_t : OB = \operatorname{ctg} t$. Таму каардынатную прамую N_0K называюць **восьсю катангенсаў**.

З рысунка 308 бачна, што $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$ ёсць адмоўны лік і яго модуль большы за адзінку, лік $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ — таксама адмоўны, а яго модуль меншы за адзінку.

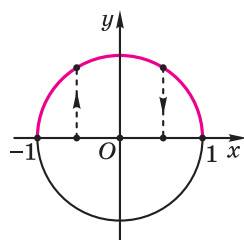
Праектаванне ўздоўж восі ардынаты, як бачна з рысунка 309, устанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі адрэзка $[-1; 1]$ восі косінусаў і лікамі з



Рыс. 307



Рыс. 308



Рыс. 309

прамежку $[0; \pi]$. Пры гэтым лік, што адпавядае ліку a восі косінусаў, называюць арккосінусам ліку a і абазначаюць $\arccos a$.

Арккосінусам ліку a называецца такі лік з прамежку $[0; \pi]$, косінус якога роўны a .

Такім чынам, па азначэнні

$$t = \arccos a \equiv 0 \leq t \leq \pi \text{ і } \cos t = a.$$

З гэтага азначэння вынікае, што

$$\text{калі } a \in [-1; 1], \text{ то } \cos(\arccos a) = a,$$

$$\text{а калі } t \in [0; \pi], \text{ то } \arccos(\cos t) = t.$$

Як бачна з рысунка 310, праектаванне ўздоўж восі абсцыс устанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі адрэзка $[-1; 1]$ восі

сінусаў і лікамі з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пры гэтым лік, што адпавядае ліку a восі сінусаў, называюць арксінусам ліку a і абазначаюць $\arcsin a$.

Арксінусам ліку a называецца такі лік з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, сінус якога роўны a .

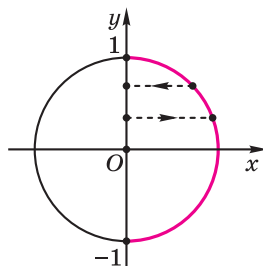
Такім чынам, па азначэнні

$$t = \arcsin a \equiv -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ і } \sin t = a.$$

З гэтага азначэння вынікае, што

$$\text{калі } a \in [-1; 1], \text{ то } \sin(\arcsin a) = a,$$

$$\text{а калі } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } \arcsin(\sin t) = t.$$



Рыс. 310

Рисунок 311 показує, що проєктування з центром O устаноує взаємна однозначну відповідність між пунктами осі тангенсів і ліками з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. При цьому лік, що відповідає ліку a осі тангенсів, називають арктангенсом ліку a і абзаначають $\arctg a$.

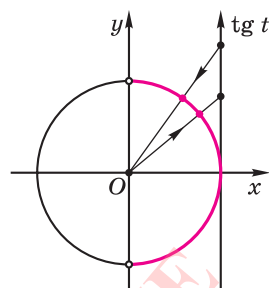


Рис. 311

Арктангенсом ліку a називається такий лік з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого роуны a .

Таким чином, па абзаченні

$$t = \arctg a \equiv -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ і } \tg t = a.$$

З гэтага абзачення вынікае, што

$$\tg(\arctg a) = a,$$

$$\text{а калі } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ то } \arctg(\tg t) = t.$$

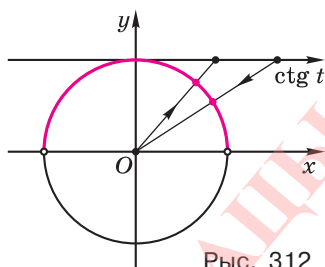


Рис. 312

Праектаванне з центрам O устанауівае, як бачна з рисунка 312, взаємна однозначную відповідність між пунктами осі котангенсів і ліками з проміжку $(0; \pi)$. При цьому лік, що відповідає ліку a осі котангенсів, називають арккотангенсом ліку a і абзаначають $\text{arcctg } a$.

Арккотангенсом ліку a називається такий лік з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого роуны a .

Таким чином, па абзаченні

$$t = \text{arcctg } a \equiv 0 < t < \pi \text{ і } \text{ctg } t = a.$$

З гэтага абзачення вынікае, што

$$\text{ctg}(\text{arcctg } a) = a,$$

$$\text{а калі } t \in (0; \pi), \text{ то } \text{arcctg}(\text{ctg } t) = t.$$

Прыклад 1. Знайдзем значэнні выразаў $\sin t$, $\cos t$, $\tg t$, $\text{ctg } t$, дзе $t = \arcsin \frac{1}{3}$.

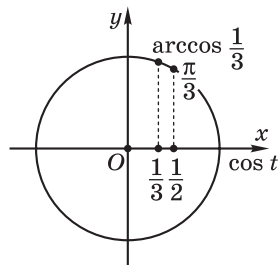
Выкарыстаўшы азначэнне арксінуса, атрымліваем, што лік t праўдзіць умовы $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin t = \frac{1}{3}$. Тады $\cos t = +\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, паколькі $\cos t > 0$. Далей знаходзім, што $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ і $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = 2\sqrt{2}$.

Прыклад 2. Знайдзем значэнне выразу $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

Выкарыстаўшы формулы прывядзення, атрымліваем: $\sin\frac{7\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$. А паколькі $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$.

Прыклад 3. Параўнаем лікі $\arccos\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Паколькі лікі $\arccos\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$ абодва належаць прамежку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рыс. 313), на якім большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне косінуса і наадварот, $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, то $\arccos\frac{1}{3} > \frac{\pi}{3}$.



Рыс. 313

Тэарэма 5. Для любога рэчаіснага ліку a з прамежку $[-1; 1]$ праўдзяцца роўнасці:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Доказ. Няхай лік a належыць прамежку $[-1; 1]$. Тады выразы $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arcsin(-a)$ і $\arccos(-a)$ маюць значэнні, прычым $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$ і $0 \leq \arccos a \leq \pi$.

Пасля множання кожнай часткі першай няроўнасці на лік -1 атрымаем, што

$$\frac{\pi}{2} \geq -\arcsin a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ або } -\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin a \leq \frac{\pi}{2}.$$

А паколькі

$$\sin(-\arcsin a) = -\sin(\arcsin a) = -a,$$

то, па азначэнні арксінуса, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$. Першая тоеснасць даказана.

Для доказу другой тоеснасці памножым на лік -1 усе часткі няроўнасці $0 \leq \arccos a \leq \pi$ і дададзім да кожнай лік π . Атрымаем:

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\arccos a \geq -\pi, \\ \pi &\geq \pi - \arccos a \geq 0, \text{ або} \\ 0 &\leq \pi - \arccos a \leq \pi. \end{aligned} \quad (1)$$

А паколькі

$$\cos(\pi - \arccos a) = -\cos(\arccos a) = -a,$$

то, па азначэнні арккосінуса, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$. Другая тоеснасць даказана.

Каб даказаць трэцюю тоеснасць, да кожнай часткі няроўнасці (1) дададзім лік $\frac{\pi}{2}$. Атрымліваем, што

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\geq \frac{\pi}{2} - \arccos a \geq -\frac{\pi}{2}, \quad \text{г. зн.} \\ \frac{\pi}{2} - \arccos a &\in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Паколькі

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = \cos(\arccos a) = a,$$

то, па азначэнні арккосінуса, атрымліваем, што

$$\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a, \text{ або } \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Аналагічна даказваецца наступная тэарэма.

Тэарэма 6. Для любога рэчаіснага ліку a прайдзяцца роўнасці:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(-a) &= -\operatorname{arctg} a, \operatorname{arctg}(-a) = \pi - \operatorname{arctg} a, \\ \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} a &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Доказ. Для кожнага рэчаіснага ліку a выразы $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arctg}(-a)$ і $\operatorname{arctg}(-a)$ маюць значэнні, прычым

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} a \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{arctg} a \leq \pi.$$

Пасля множання кожнай часткі першай няроўнасці на лік -1 атрымаем, што

$$\frac{\pi}{2} \geq \arctg a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ або } -\frac{\pi}{2} \leq -\arctg a \leq \frac{\pi}{2}.$$

А паколькі

$$\operatorname{tg}(-\arctg a) = -\operatorname{tg}(\arctg a) = -a,$$

то, па азначэнні арктангенса, $\arctg(-a) = -\arctg a$. Першая тоеснасць даказана.

Для доказу другой тоеснасці памножым на лік -1 усе часткі няроўнасці $0 \leq \operatorname{arccctg} a \leq \pi$ і дададзім да кожнай лік π . Атрымаем:

$$0 \geq -\operatorname{arccctg} a \geq -\pi, \quad (2)$$

$$\pi \geq \pi - \operatorname{arccctg} a \geq 0, \text{ або}$$

$$0 \leq \pi - \operatorname{arccctg} a \leq \pi.$$

А паколькі

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arccctg} a) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = -a,$$

то, па азначэнні арккатангенса, $\operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a$. Другая тоеснасць даказана.

Каб даказаць трэцюю тоеснасць, да кожнай часткі няроўнасці (2) дададзім лік $\frac{\pi}{2}$. Атрымліваем, што

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} a \geq -\frac{\pi}{2}, \text{ г. зн. } \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Паколькі

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} a\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a,$$

то, па азначэнні арккатангенса, атрымліваем, што $\arctg a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} a$, або $\arctg a + \operatorname{arccctg} a = \frac{\pi}{2}$.



1. Што называюць трыганаметрычнай акружнасцю?
2. Патлумачце назвы *вось косінусаў* і *вось сінусаў*.
3. Як размешчаны каля трыганаметрычнай акружнасці восі тангенсаў і катангенсаў?
4. Што называецца арккосінусам ліку a ? арксінусам ліку a ? арктангенсам ліку a ? арккатангенсам ліку a ?
5. Якая ёсць залежнасць паміж лікамі $\arcsin a$ і $\arcsin(-a)$? $\arctg a$ і $\arctg(-a)$?
6. Якая ёсць залежнасць паміж лікамі $\arccos a$ і $\arccos(-a)$? $\operatorname{arccctg} a$ і $\operatorname{arccctg}(-a)$?
7. Якая ёсць залежнасць паміж лікамі $\arcsin a$ і $\arccos a$? $\arctg a$ і $\operatorname{arccctg} a$?

630. Знайдіть значення t з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, яке задовольняє умову:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin t = \frac{1}{2}$; д) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t = -\frac{1}{2}$; е) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

631. Визначте, у якій чверці знаходиться пункт тригонометричної окружності, що відповідає ліку:

а) $\arcsin 0,6$; в) $\arcsin (-0,8)$;

б) $\arcsin 0,9$; г) $\arcsin (-0,1)$.

632. Визначте:

а) $\arcsin 1$; д) $\arcsin (-0,5)$; і) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arcsin (-1)$; е) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$.

в) $\arcsin 0$; ж) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arcsin \frac{1}{2}$; з) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

633. З допомогою калькулятора або таблиць знайдіть:

а) $\arcsin 0,6691$; е) $\arcsin (-0,4848)$;

б) $\arcsin 0,9101$; ж) $\arcsin (-0,9336)$;

в) $\arcsin 0,9816$; з) $\arcsin (-0,9877)$;

г) $\arcsin 0,9994$; і) $\arcsin (-0,8660)$.

д) $\arcsin (-0,3090)$;

634. Знайдіть значення виразу:

а) $\sin \left(\arcsin \frac{1}{4} \right)$; г) $\arcsin \left(\sin \frac{5\pi}{4} \right)$;

б) $\sin \left(\arcsin \left(-\frac{1}{4} \right) \right)$; д) $\arcsin (\sin x)$, коли $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$;

в) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{7} \right)$; е) $\arcsin (\sin x)$, коли $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

635. Знайдіть значення виразу:

а) $\arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\arcsin 0 + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin(-1)$;

в) $6 \arcsin(-1) - 12 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

636. Визначте, у якій чверці знаходиться пункт тригонометричної окружності, що відповідає ліку:

а) $\arccos 0,7$;

в) $\arccos(-0,3)$;

б) $\arccos 0,1$;

г) $\arccos(-0,001)$.

637. Визначте, ці прапдіває сдверджанне:

а) з того, што $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, вынікае, што $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;

б) з того, што $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, вынікае, што $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) з того, што $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, вынікае, што $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$;

г) з того, што $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, вынікае, што $\sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

638. Вылічыце:

а) $\sin(\arcsin 0,6)$;

в) $\cos(\arcsin(\sqrt{3} - \sqrt{2}))$;

б) $\sin(\arcsin(-0,8))$;

г) $\cos\left(\arcsin \frac{\pi}{4}\right)$.

639. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс ліку:

а) $\arcsin 0,4$;

б) $\arcsin(-0,8)$.

640. Дакажыце, што прапдіца роўнасць:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$;

б) $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

641. Вылічыце:

а) $\arccos 0$;

г) $\arccos \frac{1}{2}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arccos 1$;

д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

з) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos(-1)$;

е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

і) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

642. З дапамогай калькулятара або табліц знайдзіце значэнне выразу:

- а) $\arccos 0,4278$; е) $\arccos (-0,7878)$;
 б) $\arccos 0,2983$; ж) $\arccos (-0,897)$;
 в) $\arccos 0,9987$; з) $\arccos (-0,5679)$.
 г) $\arccos 0,0239$; і) $\arccos (-0,8660)$.
 д) $\arccos (-0,3298)$;

643. Вызначыце, ці могуць $\arccos a$ і $\arcsin a$ быць роўнымі:

- а) $\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{22}}{3}$; д) $\frac{\pi}{2}$; ж) $-1,1$;
 б) $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{23}}{3}$; е) $\frac{4\pi}{3}$; з) -2 .

644. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; г) $\arccos\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$;
 б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)\right)$; д) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$;
 в) $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{5}\right)$; е) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$.

645. Дакажыце тое, насць:

- а) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; б) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

646. Запоўніце табліцу:

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

647. Рашыце ўраўненне:

- а) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin y = \frac{5\pi}{6}$; в) $\arccos z = \frac{5\pi}{6}$.

648. Вызначыце, пры якіх значэннях зменнай a праўдзіца роўнасць:

- а) $\arcsin \sqrt{1-a^2} = \arccos a$; г) $\arccos(\cos a) = a$;
 б) $\arccos \sqrt{1-a^2} = \arcsin a$; д) $\sin(\arcsin a) = a$;
 в) $\arcsin(\sin a) = a$; е) $\cos(\arccos a) = a$.

649. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos 0 + \arccos (-1) + \arccos 1$;

б) $\arccos 0 + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos (-1) - \arccos 1 - \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $5 \arccos (-1) - 12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

650. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin \left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} (-5))$;

б) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} (-5))$.

651. Вызначыце, ці праўдзiвае сцверджанне:

а) з таго, што $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, вынікае, што $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

б) з таго, што $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, вынікае, што $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

в) з таго, што $\cos 3\pi = -1$, вынікае, што $\arccos (-1) = 3\pi$;

г) з таго, што $\arccos (-1) = \pi$, вынікае, што $\cos \pi = -1$.

652. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos (\arccos 0,5)$; в) $\sin (\arccos (\sqrt{2}-2))$;

б) $\cos (\arccos 0,2)$; г) $\sin (\arccos (3-\sqrt{2}))$.

653. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс ліку:

а) $\arccos 0,5$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos (-0,5)$.

654. Дакажыце, што праўдзiцца роўнасць:

а) $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$; в) $\arccos \left(\cos \frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;

б) $\arccos \left(\cos \frac{6\pi}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$; г) $\arccos (\cos 6) = 6 - 2\pi$.

655. Вылічыце:

а) $\arccos \left(\cos \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\arccos (\cos (-12))$.

б) $\arccos (\cos 12)$;

656. Визначьте, ці можуть значенні виразаў $\arccos a$ і $\arcsin a$ прымаць значэнні:

- а) аднаго знака; б) розных знакаў.

657. Запоўніце табліцу:

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctg a$							
$\operatorname{arccctg} a$							

658. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arctg 0 + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg \sqrt{3} + \arctg 1$;

б) $\operatorname{arccctg} 0 + \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arccctg} \sqrt{3} + \operatorname{arccctg} 1$;

в) $\operatorname{arccctg} 0 + \operatorname{arccctg}(-1) - \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3})$;

г) $\arctg(-1) + \arctg(-\sqrt{3}) - \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctg 0$.

659. Визначыце, якія значэнні могуць прымаць лікі a і b , улічыўшы, што:

а) $b = \arcsin a$;

в) $b = \arctg a$;

б) $b = \arccos a$;

г) $b = \operatorname{arccctg} a$.

660. Визначыце, ці могуць значэнні выразаў $\arctg a$ і $\operatorname{arccctg} a$ прымаць значэнні:

а) аднаго знака;

б) розных знакаў.

661. Знайдзіце сінус, косінус, тангенс і катангенс ліку:

а) $\arctg \frac{5}{12}$;

в) $\operatorname{arccctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$;

б) $\arctg(-0,75)$;

г) $\operatorname{arccctg} 0,75$.

662. Дакажыце, што праўдзіца роўнасць:

а) $\operatorname{arccctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$;

в) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 7) = 7 - 2\pi$;

б) $\operatorname{arccctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right) = \frac{4\pi}{7}$;

г) $\arctg(\operatorname{tg}(-7)) = -7 + 2\pi$.

663. Вылічыце:

а) $\arctg(\operatorname{ctg} 2)$;

в) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-10))$;

б) $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(-2))$;

г) $\arctg(\operatorname{tg}(-10))$.

664. Знайдіть значення виразу:

а) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

д) $\arcsin 0 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} 0$;

б) $\operatorname{arctg} 0$;

е) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

ж) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

з) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

665. Вилічіть:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} 1$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

666. Знайдіть значення виразу:

а) $\cos^2\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) +$
 $+ \sin^2\left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{33\pi}{7}\right)\right) - \arccos\left(\cos \frac{46\pi}{7}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}\right) +$
 $+ \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{8}\right)$.

667. Знайдіть значення виразу:

а) $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \arccos(-1)$;

б) $\arcsin\left(\sin \frac{33\pi}{7}\right) + \arccos\left(\cos \frac{46\pi}{7}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg} \frac{13\pi}{8}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

668. Вилічіть:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)$;

г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{5}\right)$;

д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$;

е) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

669. Спрасціце выраз:

- а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{5}\right)$; г) $\arccos(\sin 10)$;
б) $\arccos(\cos 11)$; д) $\arcsin\left(\cos\frac{31\pi}{5}\right)$;
в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 8)$; е) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$.

670. Рашыце ўраўненне:

- а) $\arcsin a = \frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{arctg} a = -\frac{\pi}{6}$;
б) $\arccos a = \frac{2\pi}{3}$; г) $\arcsin(a - 1) = -\frac{\pi}{4}$.

671. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $\cos\left(\arcsin\frac{12}{13} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$;
б) $\cos\left(\arccos\frac{15}{17} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;
в) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,6 - \operatorname{arctg} 2,4)$;
г) $\sin\left(\arcsin 0,6 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;
д) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;
е) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$.

672. Вылічыце:

- а) $\sin\left(3 \operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2 \arccos\frac{1}{2}\right)$;
б) $\cos\left(3 \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7}{3} \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{4} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

673. Вылічыце:

- а) $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$;
б) $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $\arcsin\left(-\sin\frac{7}{3}\pi\right)$.

674. Визначыце, якой чвэрці трыганаметрычнай акружнасці належыць лік:

- а) $\arctg 5$; в) $\operatorname{arccctg} 3$; д) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg}(-4)$;
б) $\arctg(-7)$; г) $\operatorname{arccctg}(-2)$; е) $\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

675. Дакажыце, што:

а) калі тангенсы трох вострых вуглоў роўныя $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ і $\frac{1}{8}$, то сума гэтых вуглоў роўная $\frac{\pi}{4}$;

б) калі $a = \operatorname{arccctg} \frac{3}{4}$ і $b = \operatorname{arccctg} \frac{1}{7}$, то $a + b = \frac{3\pi}{4}$.

676. Сінусы двух вострых вуглоў трохвугольніка роўныя $\frac{7}{25}$ і $\frac{4}{5}$. Дакажыце, што косінус знешняга несумежнага з дадзенымі вугла гэтага трохвугольніка роўны 0,352.

677. Визначыце, пры якіх значэннях зменнай праўдзіца роўнасць:

- а) $\arctg \frac{1}{a} = \operatorname{arccctg} a$; в) $\operatorname{tg}(\arctg a) = a$.
б) $\arctg(\operatorname{tg} a) = a$;

678. Дакажыце, што праўдзіца роўнасць:

а) $\operatorname{arccctg} \frac{12}{5} - \arcsin\left(-\frac{8}{17}\right) = \operatorname{arccctg} \frac{140}{171}$;

б) $\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13} = \pi - \arccos \frac{16}{65}$;

в) $\arccos \frac{4}{5} + \arctg\left(-\frac{5}{12}\right) = \arctg \frac{16}{63}$;

г) $\arccos \frac{15}{17} - \arctg \frac{3}{4} = -\arcsin \frac{13}{85}$.

679. Спрасціце выраз:

а) $\arctg \frac{4}{3} - \arctg(-2,4)$; г) $\operatorname{arccctg} \frac{3}{4} + \arctg \frac{15}{8}$;

б) $\arctg \frac{5}{12} - \operatorname{arccctg} \frac{4}{3}$; д) $\arctg 2 + \arctg 3$;

в) $\operatorname{arccctg} \frac{8}{15} - \arctg \frac{12}{5}$; е) $\operatorname{arccctg} 2 + \operatorname{arccctg} 3$.

680. Спрасціце выраз:

- а) $\arcsin \frac{12}{13} + \arccos \frac{8}{17}$; г) $\arcsin \frac{12}{13} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$;
б) $\arccos \frac{7}{25} + \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; д) $\arccos \frac{15}{17} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$;
в) $\operatorname{arctg} 2,4 - \arccos \frac{3}{5}$; е) $\operatorname{arctg} 0,75 + \arcsin \left(-\frac{15}{17}\right)$.

681. Вызначыце, ці можа выражацца адмоўным лікам:

- а) $\cos(\arcsin b)$; в) $\sin(\arccos b)$; д) $\operatorname{ctg}(\arcsin b)$;
б) $\cos(\operatorname{arctg} b)$; г) $\sin(\operatorname{arctg} b)$; е) $\operatorname{tg}(\arccos b)$.

682. Спрасціце выраз:

- а) $\frac{\pi}{2} - \arcsin 0,3$; в) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$;
б) $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{11}$; г) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} h$ ($h > 0$).

683. Дакажыце, што пры любым значэнні зменнай a з прамежку $[-1; 1]$ праўдзіцца формула:

- а) $\arccos(2a^2 - 1) = 2 \arccos |a|$;
б) $\arccos(2a^2 - 1) = 2 \arccos a$.

684. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $2 \arcsin \frac{1}{6} - \arccos \frac{17}{18}$;
б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$;
в) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{12}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$;
г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$;
д) $\arccos \frac{3}{5} - \arccos \frac{15}{17} + \arccos \frac{36}{85}$;
е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

685. Дакажыце, што роўнасць:

а) $\operatorname{arctg} a = \arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$ праўдзіцца пры любым значэнні зменнай a ;

б) $2 \arcsin \sqrt{\frac{1-a}{2}} = \arccos a$ праўдзіцца, калі $|a| \leq 1$;

в) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-ab}{a+b} \right)$, праўдзіцца, калі $a > 0$,
 $b > 0$;

г) $\arccos a - \arccos b = \arcsin \left(b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} \right)$ праўдзіцца, калі $0 \leq a \leq 1$ і $0 \leq b \leq 1$;

д) $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \arctg |a|$ праўдзіцца пры любым значэнні зменнай a ;

е) $\arctg \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \arcsin a$ праўдзіцца, калі $|a| < 1$.

686. Вылічыце:

а) $\sin \left(\arctg \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17} \right)$;

б) $\cos \left(2 \arctg \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5} \right)$;

в) $\sin \left(2 \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right)$;

г) $\cos \left(2 \arctg \frac{1}{4} + \arcsin \frac{3}{5} \right)$.

687. Спрасціце выраз:

а) $\cos (\arccos n + \arccos m)$;

б) $\sin (\arccos b + \arcsin c)$;

в) $\tg (\arctg t + \arctg e)$;

г) $\tg (\arcsin k + \arcsin l)$;

д) $\sin (2 \arcsin p)$;

е) $\tg (2 \arctg j)$;

ж) $\cos (2 \arctg h)$;

з) $\sin (2 \arctg g)$;

и) $\cos (2 \arctg f)$;

к) $\cos \left(\frac{1}{2} \arccos d \right)$;

л) $\tg \left(\frac{1}{2} \arctg s \right)$;

м) $\ctg \left(\frac{1}{2} \arctg t \right)$.

688. Вызначыце, ці праўдзіцца роўнасць:

а) $\arccos \frac{7}{8} = 2 \arcsin \frac{1}{4}$;

б) $\arccos \frac{17}{18} = \arcsin \frac{1}{6}$;

в) $\arccos \frac{7}{9} = 2 \arcsin \frac{1}{6}$;

г) $\arctg \frac{1}{7} + 2 \arctg \frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}$;

д) $\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arctg \frac{1}{2}$;

е) $\arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$.

689. Визначьте, ці праўдзіца роўнасць:

а) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5} = \frac{3\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg} (3 + 2\sqrt{2})$;

д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$;

е) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

690. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{arctg} k = \arcsin \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$;

б) $2 \arccos \sqrt{\frac{1+z}{2}} = \arccos z$;

в) $\frac{1}{2} \arccos (2s^2 - 1) = \arccos s$, калі $s \geq 0$.

691. Дакажыце тоеснасць:

а) $\arcsin p = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-p^2}, & \text{калі } 0 \leq p \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-p^2}, & \text{калі } -1 \leq p < 0; \end{cases}$

б) $\arcsin n = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2}}{n}, & \text{калі } 0 < n \leq 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} - \pi, & \text{калі } -1 \leq n < 0. \end{cases}$

692. Дакажыце тоеснасць:

а) $\arccos l = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-l^2}, & \text{калі } 0 \leq l \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-l^2}, & \text{калі } -1 \leq l < 0; \end{cases}$

б) $\arccos j = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{калі } 0 < j \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-j^2}}{j}, & \text{калі } -1 \leq j < 0. \end{cases}$

693. Дакажыце тоеснасць:

$$\text{a) } \operatorname{arctg} k = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{калі } k > 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, & \text{калі } k \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} m = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{m}, & \text{калі } m > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{m} - \pi, & \text{калі } m < 0. \end{cases}$$

694. Дакажыце тоеснасць:

$$\text{a) } \operatorname{arcctg} b = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{калі } b \geq 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, & \text{калі } b < 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{arcctg} c = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{c}, & \text{калі } c > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{c}, & \text{калі } c < 0. \end{cases}$$

695. Ці можа сінус быць роўным:

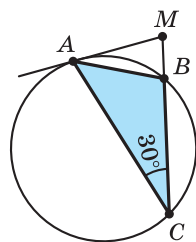
а) $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$; б) $n + \frac{1}{n}$; в) $\frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}$; г) $\frac{2\sqrt{cd}}{c+d}$?

696. Знайдзіце катэты прававугольнага трохвугольніка з плошчай S , улічыўшы, што:

- а) радыус апісанай каля яго акружнасці роўны R ;
- б) радыус умежанай у яго акружнасці роўны r ;
- в) вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, роўная h ;
- г) медыяна, праведзеная да катэта, роўная m ;
- д) бісектрыса, праведзеная да гіпатэнузы, роўная l .

697. Дыяганалі ромба адносяцца як 3 : 4. У колькі разоў плошча ромба большая за плошчу ўмежанага ў яго круга?

698. З пункта M да акружнасці праведзены датычная MA і сечная BC (рыс. 314). Знайдзіце плошчу трохвугольніка MAB , улічыўшы, што $MB = 16$, $BC = 8$ і $\angle ACB = 30^\circ$.



Рыс. 314

699. Аўтамабіль з Брэста да Ружанаў ехаў з адной скорасцю, а затым знізіў яе і на шлях да Гродна (рыс. 315) затраціў на 30 мін больш, чым на першую частку шляху. Знайдзіце скорасці аўтамабіля на кожнай частцы шляху, улічыўшы, што сярэдняя скорасць на ўсім шляху аказалася роўнай 82 км/г.



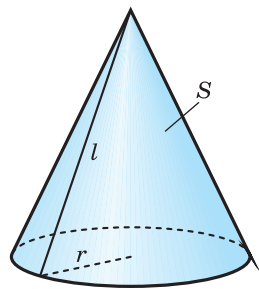
Рыс. 315

700. Ёсць два конусы, плошчы бакавых паверхняў якіх роўныя 608π см² і 475π см², прычым утваральнік першага конуса на 19 см большы. радыус асновы трэцяга конуса, бакавая паверхня якога роўная супольнай бакавой паверхні першага і другога конусаў, а ўтваральнік — супольнай даўжыні ўтваральнікаў гэтых конусаў, мае даўжыню 19 см. Знайдзіце радыусы асноў конусаў, улічыўшы, што бакавая паверхня S конуса, радыус R яго асновы і ўтваральнік l звязаныя формулай $S = \pi Rl$ (рыс. 316).

701. а) Дакажыце, што сума квадратаў любых дзесяці паслядоўных натуральных лікаў не з'яўляецца дакладным квадратам.

б) Знайдзіце 11 паслядоўных натуральных лікаў, сума квадратаў якіх ёсць дакладны квадрат.

702. Медыяны AD і BF трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пунк-



Рыс. 316

це M . Знайдіть периметр трикутника, улічуйте, що $\triangle CDMF$ можна вписати в коло, $AB = 6$ і $MD = \sqrt{3}$.

703. Визначте кут між діагоналями чотирикутника, сусідніх сторін якого рівні 8, 12, 9, 1.

14. Применення формул складання

Дані формули в параграфі формули привертання виникають з формул складання. Говорять формули мають і інші важливі результати.

Тезема 7. Формули

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$$

з'являються тождествами.

Доказ. Використовуючи відповідні формули складання, отримуємо:

$$\begin{aligned} \sin 2t &= \sin(t + t) = \sin t \cos t + \cos t \sin t = 2 \sin t \cos t; \\ \cos 2t &= \cos(t + t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t; \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2t = \operatorname{tg}(t + t) = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} t} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}.$$

Формули, установлені теземою 7, називають *формулами подвійного аргумента*. Говорять формули дозволяють синус, косинус, тангенс будь-якого аргумента виразити через тригонометричні вирази з двох разів меншого аргумента. Наприклад,

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin 3y = 2 \sin \frac{3y}{2} \cos \frac{3y}{2},$$

$$\operatorname{tg} 12t = \frac{2 \operatorname{tg} 6t}{1 - \operatorname{tg}^2 6t}.$$

Приклад 1. Спростіть вираз $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t$.

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3t - \operatorname{ctg} 3t &= \frac{\sin 3t}{\cos 3t} - \frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \frac{\sin^2 3t - \cos^2 3t}{\sin 3t \cos 3t} = \\ &= -2 \cdot \frac{\cos^2 3t - \sin^2 3t}{2 \sin 3t \cos 3t} = -2 \cdot \frac{\cos 6t}{\sin 6t} = -2 \operatorname{ctg} 6t. \end{aligned}$$

Тэарэма 8. Формулы

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} t = \frac{1 - \cos 2t}{\sin 2t}$$

з'яўляюцца тоеснасцямі.

Доказ. Паколькі $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2 \sin^2 t$ і $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$, то

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad \text{і} \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Для доказу трэцяй роўнасці пераўтворым яе правую частку:

$$\frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} = \frac{2 \sin t \cos t}{2 \cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Гэтаксама даказваецца чацвёртая роўнасць.

Формулы, устаноўленыя тэарэмай 8, дазваляюць выразіць сінус, косінус і тангенс любога аргумента праз трыганаметрычныя выразы ў два разы большага аргумента. Іншы раз іх называюць *формуламі палавіннага аргумента*. Першыя дзве з гэтых формул называюць *формуламі паніжэння ступені*.

Прыклад 2. Знойдзем значэнне выразу $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$,

улічыўшы, што $\cos x = \frac{60}{61}$.

Атрымаем:

$$\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 + \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^2.$$

Цяпер улічым, што $\cos x = \frac{60}{61}$:

$$\left(\frac{1 - \frac{60}{61}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{60}{61}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 61} \right)^2 + \left(\frac{121}{2 \cdot 61} \right)^2 = \frac{1 + 14641}{14884} = \frac{14642}{14884} = \frac{7321}{7442}.$$

Тэарэма 9. Формулы

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2},$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2},$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2},$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

з'яўляюцца тоеснасцямі.

Доказ. Звернем увагу на тое, што праўдзяцца роўнасці:

$$u = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}; v = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}.$$

Улічыўшы гэта, атрымаем:

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= \sin\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) + \sin\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = \\ &= \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} + \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} + \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} - \\ &\quad - \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}. \end{aligned}$$

Аналагічна даказваюцца тры астатнія формулы.

Прыклад 3. Знайдзем значэнне выразу:

$$\text{а) } \sin 105^\circ + \sin 15^\circ; \quad \text{б) } \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12}.$$

Маем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 105^\circ + \sin 15^\circ &= 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12} &= -2 \sin \frac{\frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{\pi}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Прыклад 4. Дакажам праўдзівасць роўнасці $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = 4$.

Будзем паслядоўна атрымліваць:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ &= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - \\ &\quad - (\operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ) = \frac{\sin(9^\circ + 81^\circ)}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin(27^\circ + 63^\circ)}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} = \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{2 \cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{2}{2 \cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \\ &= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{2(2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \\ &= \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cos 36^\circ} = 4. \end{aligned}$$

Тэарэма 10. Формулы

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) - \cos (u + v)),$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) + \cos (u + v)),$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin (u - v) + \sin (u + v)),$$

праўдзяцца пры любых значэннях зменных u і v .

Доказ. Мы ведаем, што праўдзяцца роўнасці:

$$\cos (u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v;$$

$$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v;$$

$$\sin (u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v;$$

$$\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Адняўшы ад другой роўнасці першую, атрымаем:

$$\cos (u - v) - \cos (u + v) = 2 \sin u \sin v,$$

або

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) - \cos (u + v)).$$

Гэтаксама, склаўшы першую і другую роўнасці, прыйдзем да роўнасці

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} (\cos (u - v) + \cos (u + v)),$$

а склаўшы трэцюю і чацвёртую роўнасці, — да роўнасці

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} (\sin (u - v) + \sin (u + v)).$$

Прыклад 5. Спросім выраз

$$\sin x + \sin (x + a) + \sin (x + 2a) + \sin (x + 3a).$$

Выкарыстаем такі прыём: памножым дадзены выраз

на выраз $\frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$, які роўны адзінцы. Тады атрымаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \left(\sin x \sin \frac{a}{2} + \sin (x + a) \sin \frac{a}{2} + \right. \\ & \quad \left. + \sin (x + 2a) \sin \frac{a}{2} + \sin (x + 3a) \sin \frac{a}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos \left(x - \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{3a}{2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{3a}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5a}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5a}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{7a}{2}\right) \Bigg) = \\
 & = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left(\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{7a}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Формула $\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$, даказаная ў тэарэме 7, дае магчымасць тангенс пэўнага аргумента выразіць праз тангенс у два разы меншага аргумента. Праз тангенс такога аргумента можна выразіць таксама сінус і косінус.

Тэарэма 11. Формулы

$$\sin 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad \cos 2t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

з'яўляюцца тоеснасцямі.

Доказ. Мы ведаем, што праўдзіцца роўнасць

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t.$$

Яе можна запісаць у выглядзе

$$\sin 2t = \frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t},$$

улічыўшы, што $1 = \cos^2 t + \sin^2 t$.

Цяпер падзелім лічнік і назоўнік дробу правай часткі на $\cos^2 t$ і ўлічым азначэнне тангенса:

$$\sin 2t = \frac{\frac{2 \sin t \cos t}{\cos^2 t}}{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Аналагічна даказваецца другая роўнасць.

Формулы, устаноўленыя тэарэмай 11, дазваляюць трыганаметрычны выраз выгляду $A \sin x + B \cos x + C \operatorname{tg} x + D$ выявіць рацыянальным выразам ад $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Іх іншы раз называюць *формуламі ўніверсальнай трыганаметрычнай падстаноўкі*.

Прыклад 6. Знойдзем значэнне выразу $2 \sin^2\left(b + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos^2 b + \operatorname{tg} b$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} b = 7$.

Викарыстаўшы формулы паніжэння ступені з тэарэмы 8 і формулы ўніверсальнай трыганаметрычнай падстаноўкі з тэарэмы 11, атрымаем:

$$2 \sin^2\left(b + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos^2 b + \operatorname{tg} b = 1 - \cos\left(2b + \frac{\pi}{2}\right) - 1 - \cos 2b + \\ + \operatorname{tg} b = \sin 2b - \cos 2b + \operatorname{tg} b = \frac{2 \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} + \operatorname{tg} b.$$

Цяпер, улічыўшы, што $\operatorname{tg} b = 7$, праводзім вылічэнні:

$$\frac{2 \cdot 7}{1 + 7^2} - \frac{1 - 7^2}{1 + 7^2} + 7 = 7 + \frac{14}{50} - \frac{48}{50} = 6,32.$$

Зарыентавацца ў формулах, устаноўленых тэарэмамі 7—11, вам дапаможа схема, прыведзеная на рысунку 317.



1. Запішыце формулы двойнога аргумента для сінуса, косінуса і тангенса.
2. Запішыце формулы, што выяўляюць косінус двойнога аргумента праз: сінус у два разы меншага аргумента; праз косінус у два разы меншага аргумента.
3. Запішыце формулы палавіннага аргумента, што выяўляюць сінус, косінус, тангенс дадзенага аргумента праз косінус у два разы большага аргумента.
4. Запішыце формулы пераўтварэння ў здабытак сумы і рознасці сінусаў.
5. Запішыце формулы пераўтварэння ў здабытак сумы і рознасці косінусаў.
6. Запішыце формулы пераўтварэння ў суму здабытку сінусаў; здабытку косінусаў, здабытку сінуса і косінуса.
7. Запішыце формулы, што выяўляюць сінус, косінус і тангенс дадзенага аргумента праз тангенс у два разы меншага аргумента.

704. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\cos b}{1 + \sin b};$

б) $(3 \sin y + 2 \cos y)^2 + (2 \sin y - 3 \cos y)^2;$

в) $\operatorname{tg}^2 b - \sin^2 b - \operatorname{tg}^2 b \sin^2 b;$

г) $\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} + \sqrt{\frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}}.$

705. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = 2 \sin a \cdot \cos a;$

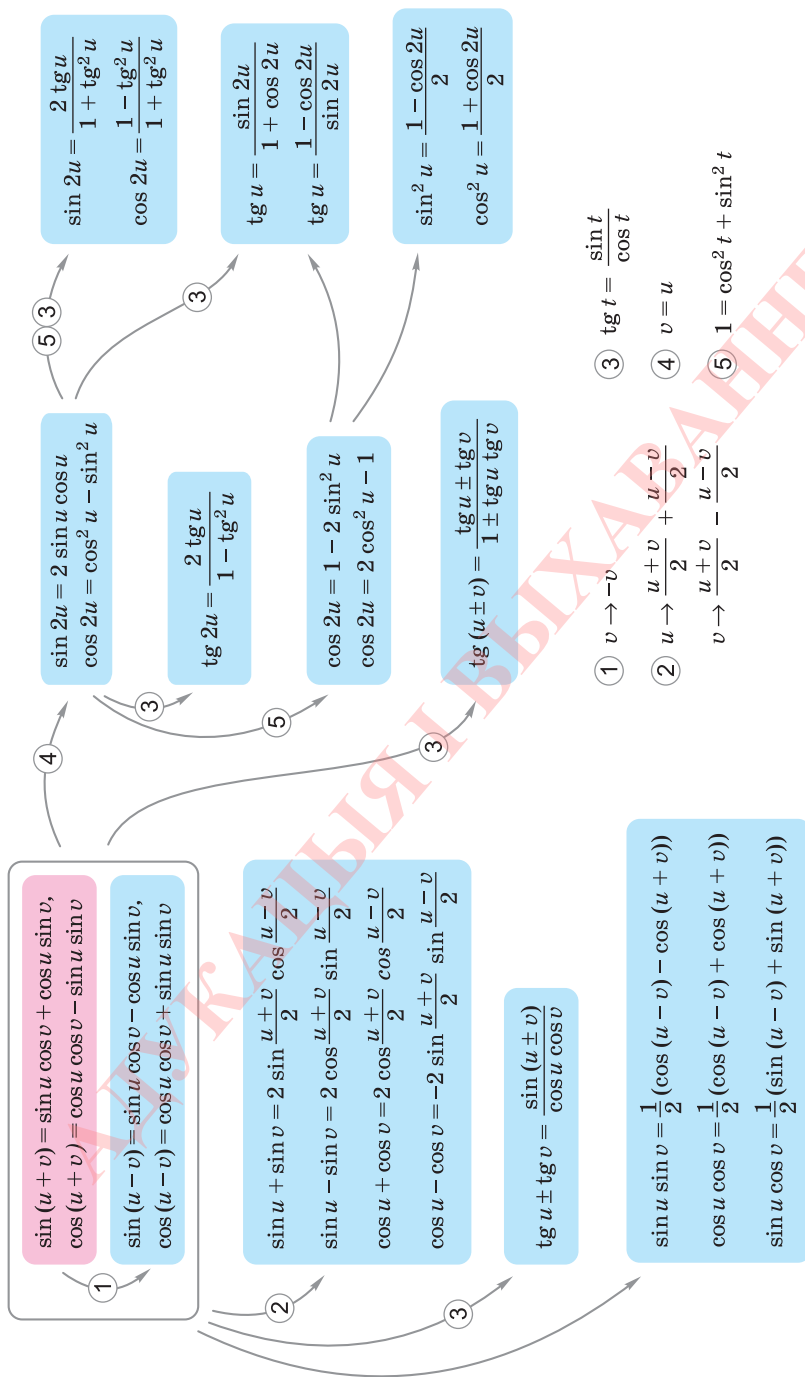


Рис. 317

$$\text{б)} \frac{\operatorname{tg} 4b - \operatorname{tg} 3b}{1 + \operatorname{tg} 4b \cdot \operatorname{tg} 3b} = \operatorname{tg} b;$$

$$\text{в)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 - \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi;$$

$$\text{г)} \sin^2 a \cdot \sin^2 b + \sin^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 a = 1.$$

706. Спрасціце выраз:

$$\text{а)} 2 \cos^2 \frac{c}{2} - 1;$$

$$\text{г)} \frac{1 + \sin 2c}{(\sin c + \cos c)^2};$$

$$\text{б)} \frac{\sin(x+y) - \cos x \sin y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y};$$

$$\text{д)} \frac{1 - \cos 2c + \sin 2c}{1 + \cos 2c + \sin 2c};$$

$$\text{в)} 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta;$$

$$\text{е)} \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) + \sin(x+y) \cdot \sin(x-y).$$

707. Дакажыце тоеснасць:

$$\text{а)} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin a + \cos a);$$

$$\text{б)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + d\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + d\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + d\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + d\right)} = \operatorname{tg} d;$$

$$\text{в)} \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0.$$

708. Вылічыце:

$$\text{а)} 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ;$$

$$\text{г)} (\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2;$$

$$\text{б)} 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$$

$$\text{д)} (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2;$$

$$\text{в)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$\text{е)} \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}.$$

709. Вылічыце:

$$\text{а)} 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8};$$

$$\text{г)} \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$\text{б)} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4};$$

$$\text{д)} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8};$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2;$$

$$\text{е)} 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1.$$

710. Спрасціце выраз:

$$\text{а)} 2 \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ;$$

$$\text{б)} (\sin 10^\circ + \sin 80^\circ) \cdot (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ);$$

$$\text{в)} \cos^4 \beta - \sin^4 \beta;$$

$$\text{г)} \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma + 2 \sin \gamma \cos \gamma;$$

д) $1 - 4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi$; е) $\frac{(\cos \beta - \sin \beta)^2}{1 - \sin^2 2\beta}$.

711. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin 2\gamma = (\sin \gamma + \cos \gamma)^2 - 1$;

б) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

в) $\cos^4 \gamma - \sin^4 \gamma = \cos 2\gamma$;

г) $2 \cos^2 x - \cos 2x = 1$;

д) $1 + \cos 2y = 2 \cos^2 y$;

е) $1 - \cos 2z = 2 \sin^2 z$.

712. Дакажыце тоеснасць:

а) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; г) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$;

б) $1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$; д) $1 + \sin \gamma = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right)$;

в) $\frac{1 - \cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \operatorname{tg} \beta$; е) $\frac{\sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma} = \operatorname{tg} \gamma$.

713. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\cos 2\beta}{\sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta} = \operatorname{ctg} \beta - 1$;

б) $\frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha$;

в) $\operatorname{tg} \varphi (1 + \cos 2\varphi) = \sin 2\varphi$.

714. Спрасціце выраз:

а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; в) $\frac{\cos a \cdot \sin a}{\cos^2 a - \sin^2 a}$;

б) $\operatorname{ctg} \frac{y}{2} - \operatorname{tg} \frac{y}{2}$; г) $\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.

715. У раўнабокім трохвугольніку сінус вугла пры аснове роўны $\frac{5}{13}$. Знайдзіце сінус і косінус вугла паміж бакавымі старанамі.

716. Знайдзіце значэнне зменнай з прамежку:

а) $(\pi; 2\pi)$, якое праўдзіць роўнасць $\sin 2x - 2 \cos x = 0$;

б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$, якое праўдзіць роўнасць $\cos 2y + 3 \sin y = 1$;

в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, якое праўдзіць роўнасць $2 \sin z = \sin 2z$;

г) $(\pi; 2\pi)$, якое праўдзіць роўнасць $\sin^2 t = -\cos 2t$.

717. Вылічыце $\sin 2\gamma$, $\cos 2\gamma$ і $\operatorname{tg} 2\gamma$, улічыўшы, што:

а) $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ і $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg} \gamma = 2,4$ і $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos \gamma = -\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$; г) $\operatorname{ctg} \gamma = -2$ і $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

718. Знайдзіце:

а) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, улічыўшы, што $\sin \beta = \frac{3}{5}$ і $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, улічыўшы, што $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ і $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

в) $\sin \gamma$ і $\cos \gamma$, улічыўшы, што $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{12}{13}$ і $\pi < \gamma < 2\pi$;

г) $\sin 4p$ і $\cos 4p$, улічыўшы, што $\cos 2p = -\frac{3}{5}$ і $\frac{\pi}{4} < p < \frac{\pi}{2}$;

д) $\operatorname{tg} 4\phi$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{5}$.

719. Вылічыце:

а) $\sin 2\alpha$, улічыўшы, што $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$;

б) $\sin 2\beta$, улічыўшы, што $\sin \beta - \cos \beta = -\frac{1}{3}$;

в) $\cos 2\alpha$, улічыўшы, што $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{2}{5}$;

г) $\cos 2\beta$, улічыўшы, што $\sin \beta - \cos \beta = \frac{4}{7}$;

д) $\operatorname{tg} 2\alpha$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$;

е) $\operatorname{ctg} 2\beta$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} \beta = -0,8$.

720. Дакажыце, што $\sin 2\beta < 2 \sin \beta$, калі $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.
Знайдзіце ўмову, пры якой $\sin 2\beta = 2 \sin \beta$.

721. Улічыўшы, што $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, устанавіце, значэнне якога выразу большае:

а) $\cos 2\beta$ або $2 \cos \beta$; б) $\operatorname{tg} 2\beta$ або $2 \operatorname{tg} \beta$, калі $\beta \neq \frac{\pi}{4}$.

722. Знайдзіце найменшае па модулі значэнне зменнай, якое праўдзіць роўнасць:

а) $\sin 2k = \sin k$; в) $1 + \sin^2 2u = 4 \sin^2 u$.

б) $\sin t = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

723. Знайдзіце значэнне зменнай з прамежку:

а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, якое праўдзіць роўнасць $\sin^2 m - \cos^2 m = 0,5$;

б) $\left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right)$, яке праўдзіць роўнасць $\sin z \cdot \cos z = 0,25$;

в) $\left(\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$, яке праўдзіць роўнасць $\operatorname{tg} 2b = \operatorname{tg} b$.

724. Дакажыце, што калі $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, то $4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{4 \sin^4 \varphi + \sin^2 2\varphi} = 2$.

725. Улічыўшы, што $0 < x < \frac{\pi}{2}$, выявіце здабыткам выраз:

а) $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$; б) $\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 - \cos x}$.

726. Спрасціце выраз:

а) $1 - 2 \sin^2 \gamma + \cos 2\gamma$;

б) $(\cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta - \sin^2 \beta)^2$;

в) $\cos 4z + 2 \sin^2 2z$.

727. Выразіце:

а) $\sin 3t, \cos 3t, \sin 4t, \cos 4t$ праз $\sin t, \cos t$;

б) $\operatorname{tg} 3t, \operatorname{tg} 4t$ праз $\operatorname{tg} t$.

728. Улічыўшы, што $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, і выкарыстаўшы формулы для $\sin 2\gamma$ і $\cos 3\gamma$, вылічыце $\sin 18^\circ$.

729. Улічыўшы, што:

а) $\cos z = \frac{3}{4}$ і $0 < z < \frac{\pi}{2}$, знайдзіце $\sin \frac{z}{2}, \cos \frac{z}{2}, \operatorname{tg} \frac{z}{2}$;

б) $\sin 2y = -\frac{3}{5}$ і $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{4}$, знайдзіце $\cos y, \sin y, \operatorname{tg} y$.

730. Дакажыце тоеснасць:

а) $1 + \sin \gamma = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$;

б) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$;

г) $\cos^2 g - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2g\right)$;

д) $\sin^2 g - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(2g - \frac{\pi}{4}\right)$;

е) $2 \cos^2 y - \cos 2y = 1$.

731. Улічыўшы, што:

а) $\cos \beta = \frac{1}{2}$ і $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, знайдзіце $\sin \frac{\beta}{2}$, $\cos \frac{\beta}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$;

б) $\sin \gamma = 0,28$ і $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$, знайдзіце $\sin \frac{\gamma}{2}$, $\cos \frac{\gamma}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$;

в) $\cos \varphi = -\frac{8}{17}$ і $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, знайдзіце $\sin \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$;

г) $\sin \varphi = -\frac{24}{25}$ і $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$, знайдзіце $\sin \frac{\varphi}{2}$, $\cos \frac{\varphi}{2}$ і $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

732. Знайдзіце сінус, косінус і тангенс вугла:

а) $22^\circ 30'$; в) $67^\circ 30'$; д) $7^\circ 30'$;

б) 15° ; г) $11^\circ 15'$; е) $33^\circ 45'$.

733. У раўнабокім трохвугольніку косінус вугла паміж бакавымі старанамі роўны $\frac{7}{25}$. Знайдзіце сінус і косінус вугла пры аснове.

734. Знайдзіце $\sin a$, $\cos a$ і $\operatorname{tg} a$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$.

735. Улічыўшы, што:

а) $\sin \beta = \frac{336}{625}$ і $\frac{5\pi}{2} < \beta < 3\pi$, знайдзіце $\sin \frac{\beta}{4}$;

б) $\cos 2\gamma = -\frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, знайдзіце $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ і $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{4}$;

в) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$ і $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, знайдзіце $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

736. Выразіце:

а) $\sin \frac{a}{2}$ і $\cos \frac{a}{2}$ праз $\sin a$; в) $\operatorname{ctg} \frac{c}{2}$ праз $\operatorname{ctg} c$;

б) $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$ праз $\operatorname{tg} b$;

737. Знайдзіце значэнне зменнай з прамежку:

а) $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, якое праўдзіць роўнасць $1 - \cos t = \sin \frac{t}{2}$;

б) $(2\pi; 4\pi)$, якое праўдзіць роўнасць $1 - \cos h = \sin h$;

в) $\left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$, якое праўдзіць роўнасць $1 + \cos g = \cos \frac{g}{2}$.

738. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{2(1 + \cos 2x)}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; г) $\frac{\sin b}{1 + \cos b}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4y}$, $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}$; д) $\frac{1 - \sin 2p}{1 + \sin 2p}$;

в) $\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$; е) $\frac{1 - \cos 2q}{\sin 2q}$.

739. Улічыўшы, што:

а) $\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = 2,2$, знайдзіце $\sin 2\beta$ і $\cos 2\beta$;

б) $\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma} = \frac{39}{41}$, знайдзіце $\sin 2\gamma$ і $\cos 2\gamma$;

в) $\operatorname{ctg} \alpha = 2$, знайдзіце $\sin 4\alpha$ і $\cos 4\alpha$.

740. Вылічыце:

а) $1 - 2 \sin^2 15^\circ$; в) $\frac{1 - 2 \sin^2 22^\circ 30'}{2 \cos^2 15^\circ - 1}$; д) $\frac{2 \operatorname{ctg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{ctg}^2 15^\circ}$;

б) $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$; г) $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; е) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 9^\circ}{2 \operatorname{tg} 9^\circ}$.

741. Выкарыстаўшы формулы паніжэння ступені, выявіце праз сінус і косінус у першай ступені выраз:

а) $\sin^3 x$; 2) $\sin^4 y$; 3) $\sin^2 z \cdot \cos^4 z$.

742. Устаноўце праўдзівасць роўнасці:

а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;

б) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\sin 18^\circ$;

в) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;

г) $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = \cos 70^\circ$.

743. Пераўтварыце ў здабытак выраз:

а) $\sin 40^\circ + \sin 80^\circ$; д) $\sin 40^\circ - \cos 25^\circ$;

б) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$; е) $\sin 20^\circ + \cos 80^\circ$;

в) $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ$; ж) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{ctg} 80^\circ$;

г) $\cos 15^\circ - \cos 25^\circ$; з) $\operatorname{tg} 95^\circ - \operatorname{ctg} 15^\circ$.

744. Выявіце здабыткам выраз:

а) $\sin 24^\circ + \sin 26^\circ$; д) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;

б) $\sin 5r - \sin 3r$; е) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;

в) $\cos 23^\circ + \cos 43^\circ$; ж) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

г) $\cos 1 - \cos 5$; з) $\cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right)$.

745. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\cos 52^\circ + \cos 18^\circ$; г) $\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$;

б) $\cos 78^\circ - \cos 18^\circ$; д) $\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10}$;

в) $\sin 133^\circ - \sin 13^\circ$; е) $\sin \frac{\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15}$;

ж) $\cos x + \cos 5x$;

з) $\sin x + \sin 7x$;

и) $\sin 3d - \sin d$;

к) $\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} d$;

л) $\cos(x - 2y) - \cos(x + 2y)$;

м) $\sin(x + 3y) - \sin(x - 3y)$.

746. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin 35^\circ - \sin 25^\circ}{\sin 35^\circ + \sin 25^\circ}$;

в) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}$.

б) $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$;

747. Выявіце здабыткам выраз:

а) $\sin 17^\circ + \cos 29^\circ$;

г) $\sin c - \cos d$;

б) $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$;

д) $\sin 19^\circ + 2\sin 25^\circ + \sin 31^\circ$;

в) $\sin b + \cos b$;

е) $2\cos 2x + \cos 5x + \cos x$.

748. Выявіце здабыткам выраз:

а) $1 - 2\cos \beta + \cos 2\beta$;

г) $\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}$;

б) $\sin \gamma + \sin 2\gamma + \sin 3\gamma$;

д) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha - \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$;

в) $\cos z - \cos 2z + \cos 3z$;

е) $\frac{\sin a + \sin 2a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a}$.

749. Выявіце здабыткам выраз:

а) $\sin^2 a - \sin^2 b$;

г) $\cos^2 16^\circ - \sin^2 20^\circ$;

б) $\cos^2 a - \cos^2 b$;

д) $\sin^2 5q - \sin^2 3q$;

в) $\sin^2 a - \cos^2 b$;

е) $1 - \cos^2 y - \cos^2 z$.

750. Устаноўце праўдзівасць роўнасці:

а) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ} = \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ$;

б) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = 1$;

в) $16 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$;

г) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ$.

751. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}$;

г) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 2z \cdot \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} 2z - \operatorname{tg} z} = \sin 2z$;

д) $\frac{\operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - 1} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - y \right)$;

в) $\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right)$;

е) $\frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma} = \operatorname{ctg} (\beta + \gamma) \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

752. Вывяіце здабыткам выраз:

- а) $\cos a - \sin a$; в) $\frac{1}{2} - \cos \varphi$; д) $1 + 2 \cos \varphi$;
б) $\cos k + \sin k$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin k$; е) $2 \sin a - \sqrt{3}$.

753. Дакажыце тоеснасць:

- а) $\sqrt{2} + 2 \cos a = 4 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a}{2}\right)$;
б) $3 - 4 \sin^2 b = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + b\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - b\right)$;
в) $1 - 4 \cos^2 c = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + c\right) \cdot \sin\left(c - \frac{\pi}{3}\right)$;
г) $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}$;
д) $\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y) = \sin 2x \cdot \sin 2y$;
е) $\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y) = -\sin 2x \cdot \sin 2y$;
ж) $1 + \cos z + \cos 2z = 4 \cos z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{z}{2}\right)$;
з) $\cos z + \cos 2z + \cos 3z = 4 \cos 2z \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{z}{2}\right)$.

754. Дакажыце тоеснасць:

- а) $\sin d - \sin 2d + \sin 3d = 4 \cos \frac{3d}{2} \cdot \cos d \cdot \sin \frac{d}{2}$;
б) $\sqrt{1 + \sin \varphi} - \sqrt{1 - \sin \varphi} = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$, улічыўшы, што $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
в) $\sin \gamma + \sin 3\gamma + \sin 5\gamma + \sin 7\gamma = 4 \cos \gamma \cdot \cos 2\gamma \cdot \sin 4\gamma$;
г) $\cos^2 k + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - k\right) = \frac{3}{2}$;
д) $1 - \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}$;
е) $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{\sqrt{-\cos 2\varphi}}{\sin \varphi}$.

755. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 (\beta + \alpha) - 2 \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos (\beta + \alpha)$$

не залежыць ад зменнай α .

756. Улічыўшы, што вуглы трохвугольніка звязаны да-
чыненнем

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \cos (A - B) \cos C - \cos^2 C = \frac{1}{4},$$

знайдзіце вугал C .

757. Улічыўшы, што A, B, C — вуглы трохвугольніка, дакажыце тоеснасць:

а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$;

б) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$;

в) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$;

г) $\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$;

е) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$;

ж) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$;

з) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$;

і) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

758. Улічыўшы, што $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, выявіце здабыткам выраз:

а) $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$; б) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$.

759. Выявіце сумай здабытак:

а) $2 \sin 15^\circ \cdot \cos 10^\circ$; д) $\cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$;

б) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$; е) $\cos n \cdot \cos (n + 1)$;

в) $2 \cos 3 \cdot \sin 2$; ж) $2 \cos (k + l) \cdot \cos (k - l)$;

г) $\sin (f - g) \cdot \cos (f + g)$; з) $\cos \left(\frac{m}{2} + 2 \right) \cdot \cos \left(\frac{3m}{2} + 1 \right)$.

760. Выявіце сумай здабытак:

а) $\sin 55^\circ \cdot \sin 33^\circ$;

б) $2 \sin a \cdot \sin 2a$;

в) $2 \sin (k + l) \cdot \sin (k - l)$;

г) $\sin 10^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 6^\circ$;

д) $4 \sin 25^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 5^\circ$;

е) $4 \sin 12^\circ \cdot \sin 14^\circ \cdot \sin 16^\circ$;

ж) $4 \cos 25^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$;

з) $8 \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ$;

і) $8 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A$;

к) $8 \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \sin 4 \cdot \cos 8$.

761. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 50^\circ \cdot \sin 15^\circ$;

г) $\sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

б) $\sin 33^\circ \cdot \cos 47^\circ$;

д) $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$;

в) $\sin 12^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 10^\circ$;

е) $\cos 75^\circ \cdot \sin 105^\circ$.

762. Выявіце здабыткам выраз:

а) $1 + \cos z$;

ж) $\sin a + \operatorname{tg} a$;

б) $1 - \cos y$;

з) $\operatorname{ctg} x + \cos x$;

в) $1 + \sin z$;

и) $1 - 2 \sin^2 a$;

г) $1 - \sin t$;

к) $1 - 2 \cos^2 b$;

д) $\sin a - \operatorname{tg} a$;

л) $1 + 2 \cos z$;

е) $\operatorname{ctg} b - \cos b$;

м) $1 - 2 \cos t$.

763. Вылічыце:

а) $l \sin 2a + k \cos 2a$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} a = \frac{l}{k}$;

б) $\cos(a + b)$ і $\sin(a + b)$, улічыўшы, што $\sin a + \sin b = s$ і $\cos a + \cos b = t$.

764. Пабудуйце сячэнне прызмы, паказанай на рысунку 318, плоскасцю MNK .

765. Пабудуйце сячэнне прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, паказанай на рысунку 319, плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M на канце AA_1 і перасякае плоскасць асновы па прамой m .

766. Пабудуйце сячэнне прызмы $ABCA_1B_1C_1D_1$, паказанай на рысунку 320, плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M на грані AA_1B_1B і перасякае плоскасць асновы па прамой l .

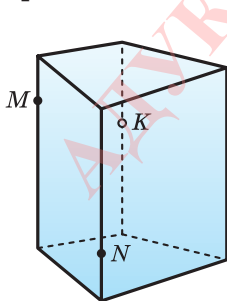


Рис. 318

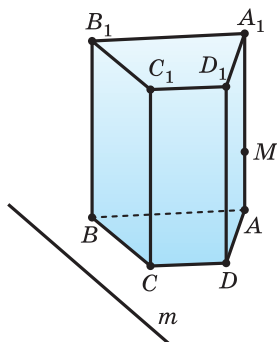


Рис. 319

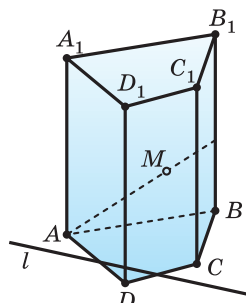


Рис. 320

767. Знайдіть більші корені рівняння:

а) $1 - \frac{25}{x^2} = \frac{24}{x}$; в) $(x + 0,5)(x^2 - 9) = (2x + 1)(x + 3)^2$;

б) $x - 1 = \frac{12}{x}$; г) $\frac{x^3 - 8}{2x - 4} = 12x - 18$.

768. Знайдіть середнє арифметичне коренів рівняння:

а) $7 - 2x = \frac{3}{x}$;

б) $\frac{4}{x} + 5 = \frac{1}{x^2}$;

в) $(2x + 8)^2(13x - 39) = 26(4x^2 - 64)(x - 3)$;

г) $\frac{x^3 + 64}{16 + 4x} = 11 - \frac{x}{4}$.

769. Клі сабрали урожай пшаниці з двох полів площею 48 га і 36 га, то аказалася, що середня урожайнасць роўная 37 ц/га. Кількі збжжа сабрали з кожнаго поля, улічуйшы, що урожайнасць на другім полі аказалася на 12 ц/га меншай?

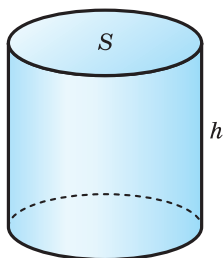


Рис. 321

770. Площа основи циліндра з вишынёй 14 см на 23 см^2 меншая за плошчу основи другога циліндра з вишынёй 9 см. Знайдіть аб'ёмы циліндраў, улічуйшы, што іх супольны аб'ём роўны 759 см^3 , і аб'ём V циліндра, площа S яго основи і вышыня h звязаныя формулай $V = Sh$ (рис. 321).

771. На адрэзку MN выбралі такі пункт A , што $AN - AM = 5 \text{ см}$, і на адрэзках-частках AN і AM як на вышынях пабудавалі конусы з плошчамі асноў, роўнымі 24 см^2 і 36 см^2 адпаведна (рис. 322). Знайдіть аб'ёмы конусаў, улічуйшы, што супольны іх аб'ём роўны 220 см^3 , і аб'ём V конуса, площа S яго основи і вышыня h звязаныя формулай $V = \frac{1}{3}Sh$.

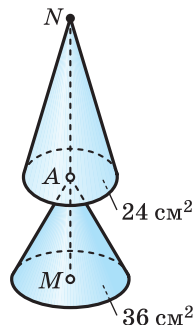


Рис. 322

772. Знайдзіце найменшае значэнне выразу

$$\sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-d)^2} + \sqrt{d^2 + (1-a)^2}.$$

773. Плошча выпуклага чатырохвугольніка $ABCD$ роўная 2. Знайдзіце дыяганаль AC , улічыўшы, што даўжыня ломанай $ABDC$ не перавышае 4.

774. Знайдзіце рознасць паміж найбольшым і найменшым кратнымі 11 дзесяцізначных лікаў, у дзесятковых запісах якіх лічбы не паўтараюцца.

15. Пераўтварэнні трыганаметрычных выказаў

З увядзеннем дзеянняў знаходжання значэнняў сінуса, косінуса, тангенса і катангенса параджаецца новы клас выказаў.

Трыганаметрычным выказам называецца выраз, які змяшчае зменныя пад знакам сінуса, косінуса, тангенса або катангенса.

Напрыклад, выразы

$$\cos x, t - 2 + \cos^2 2t$$

з'яўляюцца трыганаметрычнымі, а выразы

$$\operatorname{tg}^2 2 + 7 \cos \frac{\pi}{8} + 3, y^2 - \cos \frac{12}{13} + 1$$

трыганаметрычнымі не з'яўляюцца: першы з іх не змяшчае зменных, а другі хоць і змяшчае зменную y , але не пад знакам сінуса, косінуса, тангенса або катангенса.

Пры пераўтварэннях трыганаметрычных выказаў выкарыстоўваюць уласцівасці сінуса, косінуса, тангенса, катангенса, даказаныя вышэй трыганаметрычныя формулы, а таксама ўласцівасці дзеянняў складання, аднімання, множання, дзялення, узвядзення ў ступень, здабывання кораня.

Прыклад 1. Спросцім лікавы выраз

$$\cos \frac{7\pi}{9} \sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{17\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18}.$$

Спочатку, використавши формули прив'язання, прив'язуємо вирази $\cos \frac{7\pi}{9}$, $\sin \frac{17\pi}{18}$ і $\cos \frac{17\pi}{18}$ до роўних їм виразів з аргументами з прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos \frac{7\pi}{9} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\cos \frac{2\pi}{9};$$

$$\sin \frac{17\pi}{18} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{18} \right) = \sin \frac{\pi}{18};$$

$$\cos \frac{17\pi}{18} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{18} \right) = -\cos \frac{\pi}{18}.$$

Значыць,

$$\begin{aligned} & \cos \frac{7\pi}{9} \sin \frac{17\pi}{18} - \cos \frac{17\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} = \\ & = -\cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} - \left(-\cos \left(\frac{\pi}{18} \right) \right) \cos \frac{5\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} - \\ & - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{18} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18} \right) - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \\ & = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18} = \sin \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Прыклад 2. Спросім лікавы выраз $\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$.

Структура выразу $\sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$ падказвае, што яго можна пераўтварыць у правую частку якой-небудзь формулы складання. Сапраўды, калі яго памножыць і падзяліць на 2, то атрымаем выраз $2 \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ \right)$, у якім лікі $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$ можна замяніць роўнымі ім лікамі $\cos 60^\circ$ і $\sin 60^\circ$. З улікам гэтага паслядоўна атрымліваем:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ \right) = \\ &= 2 (\cos 60^\circ \sin 15^\circ - \sin 60^\circ \cos 15^\circ) = \\ &= -2 (\sin 60^\circ \cos 15^\circ - \cos 60^\circ \sin 15^\circ) = \\ &= -2 \sin (60^\circ - 15^\circ) = -2 \sin 45^\circ = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Падобным чынам можна пераўтварыць любы выраз выгляду $a \sin t + s \cos t$.

Тэарэма 12. *Калі $a \neq 0$ або $b \neq 0$, то*

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + u),$$

$$\text{дзе } \cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ і } \sin u = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказ. Няхай a, b, t — пэўныя рэчаісныя лікі, прычым $a \neq 0$ або $b \neq 0$. Тады $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ і

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right).$$

Цяпер звернем увагу на тое, што

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Гэта азначае, што пункт $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ належыць трыганаметрычнай акружасці (рыс. 323). Няхай u — лік, якому адпавядае пункт M . Тады праўдзяцца роўнасці:

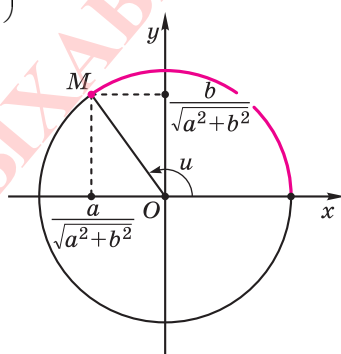
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos u; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin u.$$

Значыць,

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin t \cos u + \cos t \sin u) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + u). \end{aligned}$$

Даказаная формула называецца *формулай дапаможнага вугла*.

Адзначым, што на практыцы на заключным этапе пераўтварэнняў выразу выгляду $a \sin t + b \cos t$ не абавязкова карыстацца менавіта формулай сінуса сумы, можна выкарыстаць любую з формул складання.



Рыс. 323

Приклад 3. Виявимо здабыткам выраз $\sin x + \cos x$.

Паколькі $a = 1$ і $b = 1$, то $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, і таму атрымліваем:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайдзем значэнне выразу $\frac{\sin^3 z + 2 \cos^2 z \sin z}{\sin z + 2 \cos z}$, улічыўшы, што $\operatorname{ctg} z = -4$.

Паколькі $\sin z \neq 0$, то будзем паслядоўна атрымліваць:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 z + 2 \cos^2 z \sin z}{\sin z + 2 \cos z} &\stackrel{(1)}{=} \frac{\sin^3 z \left(1 + 2 \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \right)}{\sin z \left(1 + 2 \frac{\cos z}{\sin z} \right)} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{\sin^2 z (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z)}{(1 + 2 \operatorname{ctg} z)} \stackrel{(3)}{=} \frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2 \operatorname{ctg} z)}.\end{aligned}$$

Тут мы выкарысталі: (1) — вынясенне ў лічніку множніка $\sin^3 z$, у назоўніку — множніка $\sin z$; (2) — скарачэнне дробу на $\sin z$; (3) — тоеснасць $\sin^2 z = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 z}$.

Атрыманы выраз залежыць ад $\operatorname{ctg} z$, значэнне якога па ўмове роўнае -4 . Таму

$$\frac{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 z}{(1 + \operatorname{ctg}^2 z)(1 + 2 \operatorname{ctg} z)} = \frac{1 + 2 \cdot (-4)^2}{(1 + (-4)^2)(1 + 2 \cdot (-4))} = \frac{33}{17 \cdot (-7)} = -\frac{33}{119}.$$

Приклад 5. Вылічым значэнне выразу $\operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ$.

Звернем увагу на тое, што аргументы першага і трэцяга складаемых, а таксама другога і чацвёртага складаемых разам складаюць 90° . Гэта падказвае выканаць адпаведную групую складаемых дадзенай алгебраічнай сумы і затым далейшыя пераўтварэнні:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ &= \\ &= (\operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 81^\circ) - (\operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} + \frac{\cos 81^\circ}{\sin 81^\circ} \right) - \left(\frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ} + \frac{\cos 63^\circ}{\sin 63^\circ} \right) = \\
&= \frac{\sin 81^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \sin 9^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \\
&= \frac{\sin(81^\circ + 9^\circ)}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin(63^\circ + 27^\circ)}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 27^\circ \sin 63^\circ} = \\
&= \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{2}{2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{2}{2 \sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\
&= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 2 \frac{\sin 54^\circ - \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 2 \frac{2 \sin \frac{54^\circ - 18^\circ}{2} \cos \frac{54^\circ + 18^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \\
&= 4 \frac{\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4 \frac{\cos 36^\circ}{\cos(90^\circ - 54^\circ)} = 4.
\end{aligned}$$

Приклад 6. Спросім вираз-здабытак

$$\cos y \cos 2y \cos 4y \cos 8y.$$

Звяртае на сябе ўвагу тое, што аргумент кожнага множніка ў два разы меншы за аргумент наступнага множніка. Тут можна выкарыстаць множанне і дзяленне выразу на $2 \sin y$:

$$\begin{aligned}
&\cos y \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{2 \sin y} (2 \sin y \cos y) \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{2 \sin y} \sin 2y \cos 2y \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{4 \sin y} (2 \sin 2y \cos 2y) \cos 4y \cos 8y = \\
&= \frac{1}{8 \sin y} (2 \sin 4y \cos 4y) \cos 8y = \\
&= \frac{1}{16 \sin y} (2 \sin 8y \cos 8y) = \frac{\sin 16y}{16 \sin y}.
\end{aligned}$$

Приклад 7. Знайдзем значэнне выразу-сумы

$$\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}.$$

Асаблівасцю дадзенага выразу з'яўляецца тое, што аргумент A чарговага множніка $\cos A$ на $\frac{2\pi}{11}$ большы за аргу-

мент папярэдняга множніка. Тут можна выкарыстаць множанне і дзяленне выразу на $2 \sin \frac{\pi}{11}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{6\pi}{11} + \right. \\ & \left. + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{8\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{10\pi}{11} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{3\pi}{11} - \right. \\ & \left. - \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{5\pi}{11} - \sin \frac{5\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} + \sin \frac{9\pi}{11} - \sin \frac{9\pi}{11} + \sin \frac{11\pi}{11} \right) = \\ & = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{11} + 0 \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Прыклад 8. Дакажам, што

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{5\pi}{12} \cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2v.$$

Будзем паслядоўна пераўтвараць левую частку дадзенай роўнасці:

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - v\right) - \sin^2\left(v - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \frac{5\pi}{12} \cos\left(2v + \frac{\pi}{12}\right) \stackrel{(1)}{=} \\ & \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) \right) - \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) + \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \left(2v + \frac{\pi}{12}\right)\right) \right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) - 1 + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(\frac{5\pi}{12} - 2v - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12} + 2v + \frac{\pi}{12}\right) \right) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left(\sin 2v + \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2v\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right) \right) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \left((\sin 2v + \sin 2v) + \left(\cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos\left(2v - \frac{\pi}{3}\right) \right) \right) \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} (2 \sin 2v + 0) = \sin 2v. \end{aligned}$$

Тут мы выкарысталі: (1) — формулы паніжэння ступені і формулу здабытку косінусаў; (2) — вынясенне множніка $\frac{1}{2}$ за дужкі і раскрыццё дужак; (3) — формулу пры-

вядзення для $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right)$ і прывядзенне падобных; (4) — формулу прывядзення для $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2v\right)$, тоеснасць $\cos(-t) = \cos t$ і групуванне складаемых алгебраічнай сумы; (5) — прывядзенне падобных.

Прыклад 9. Знайдзем $\sin 18^\circ$.

Улічым, што $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. Цяпер прайойдзем да вугла ў 18° , улічыўшы, што

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \quad \text{і} \quad \cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t.$$

Значыць:

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ;$$

$$2 \sin 18^\circ = 4 \cos^2 18^\circ - 3;$$

$$2 \sin 18^\circ = 4 (1 - \sin^2 18^\circ) - 3;$$

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Атрымалі, што лік $\sin 18^\circ$ — адзін з каранёў квадратнага ўраўнення $4x^2 + 2x - 1 = 0$, якія выяўляюцца выразам

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \text{ Улічыўшы, што } \sin 18^\circ > 0, \text{ маем:}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$



1. Які выраз называецца трыганаметрычным?
2. Якая ёсць сувязь паміж значэннямі сінуса, косінуса, тангенса і катангенса лікаў t і $-t$?
3. Як звязаны паміж сабой сінус, косінус, тангенс, катангенс аднаго ліку?
4. Запішыце формулы складання для сінуса, косінуса і тангенса сумы і рознасці двух лікаў.
5. Сфармулюйце мнеманічнае правіла, якое дазваляе запісаць любую з формул прывядзення.
6. Запішыце: для сінуса і косінуса формулы двайнога аргумента, формулы палавіннага аргумента; формулы паніжэння ступені; формулы пераўтварэння ў здабытак сумы сінусаў, рознасці сінусаў, сумы косінусаў і рознасці косінусаў; формулы пераўтварэння ў суму здабытку сінусаў; здабытку косінусаў, здабытку сінуса і косінуса.
7. Запішыце формулы, што выяўляюць сінус, косінус і тангенс дадзенага аргумента праз тангенс у два разы меншага аргумента.
8. Запішыце формулу дапаможнага вугла.

775. Виразіце ў радыянах вугал α , роўны -210° , і знайдзіце:

- а) $\sin \alpha$; д) $\sin 2\alpha$; і) $\sin \frac{1}{2}\alpha$; н) $\sin 3\alpha$;
 б) $\cos \alpha$; е) $\cos 2\alpha$; к) $\cos \frac{1}{2}\alpha$; о) $\cos 3\alpha$;
 в) $\operatorname{tg} \alpha$; ж) $\operatorname{tg} 2\alpha$; л) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$; п) $\operatorname{tg} 3\alpha$;
 р) $\operatorname{ctg} \alpha$; з) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; м) $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha$; р) $\operatorname{ctg} 3\alpha$.

776. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $4 \sin 45^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ - 3 \cos 45^\circ$;
 б) $2 \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ + \sin 60^\circ - 6 \cos 90^\circ$;

в) $\frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 30^\circ - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos 60^\circ$;

г) $\sqrt{1 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{\left(1 - 3 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$;

д) $\frac{6 \sin 30^\circ \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2 30^\circ}$;

е) $\frac{1 - \cos^2 30^\circ}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1}$;

ж) $\left| \sin \frac{3\pi}{4} \right| + \left| \frac{\pi}{3} - \sqrt{2} \right| + \left| \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right|$;

з) $\left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| + \left| \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \right| + \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right|$.

777. Вызначыце знак ліку:

а) $\sin 1001^\circ \cos 1989^\circ \operatorname{ctg} 811^\circ$;

е) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}}$;

б) $\operatorname{ctg}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$;

ж) $\operatorname{tg}(\pi\sqrt{10})$;

в) $\cos 10^\circ \sin 145^\circ \operatorname{tg} 250^\circ \operatorname{ctg} 95^\circ$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$;

г) $\cos 22$;

і) $\operatorname{tg} |\cos 1 - \sin 1|$.

д) $\sin\left(\frac{8\pi}{3} + \sqrt{2}\right)$;

778. Параўнайце лікі:

а) $\sin 10$ і $\sin 11$;

б) $\sin 3$ і $\cos 5$;

в) $\operatorname{tg} 1$ і $\operatorname{tg} 3$;

г) $\cos 10$ і $\cos 11$;

д) $\operatorname{ctg}(\pi\sqrt{2})$ і $\operatorname{ctg}(\pi\sqrt{3})$;

е) $\sin 5$ і $\cos 3$;

ж) $\sqrt{1 + 2 \sin \frac{\pi}{5}}$ і $\cos \frac{\pi}{5}$;

з) $\sin 5$ і $\operatorname{tg} 3$.

779. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\cos 71^\circ \cos 334^\circ + \cos 19^\circ \cos 64^\circ}{\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 65^\circ \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{ctg} 55^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{ctg} 55^\circ}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg} 17^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 17^\circ)}{4 \operatorname{ctg} 34^\circ}$;

д) $\frac{2(\sin 166^\circ + \sin^2 38^\circ)}{1 - \cos^2 52^\circ}$;

е) $\frac{\operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{ctg} 80^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ}$.

780. Улічыўшы, што $\pi < a < 2\pi$, спрасціце выраз

$$\sqrt{\frac{2 \sin a - \sin 2a}{2 \sin a + \sin 2a}}.$$

781. Спрасціце выраз:

а) $2 \cos 50^\circ - 3 \sin 340^\circ - 2 \sin 40^\circ + 3 \cos 110^\circ$;

б) $\sqrt{\left(1 - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi+x}{2}\right)\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi+x}{2}\right) - 1\right)}$, дзе $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) $\sqrt{\frac{1 + \sin\left(y + \pi\right)}{1 - \sin\left(y - \pi\right)}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}}$, дзе $y \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

г) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos(\pi - t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)}$;

д) $\frac{\sin^3\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - b)}{\operatorname{ctg}^3\left(a - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(b - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

е) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - v\right)}{\cos(\pi + v) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - u)}$.

782. Спрасціце выраз:

$$a) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi+\beta) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sin(\beta-\pi) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)};$$

$$b) \frac{\operatorname{tg} 615^{\circ}-\operatorname{tg} 555^{\circ}}{\operatorname{tg} 795^{\circ}+\operatorname{tg} 735^{\circ}};$$

$$b) \frac{\sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9}+\sin \frac{4 \pi}{9} \cos \frac{7 \pi}{18}}{\cos 19^{\circ} \sin 79^{\circ}-\sin 11^{\circ} \cos 71^{\circ}};$$

$$r) \frac{2 \cos 40^{\circ}-\cos 20^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}.$$

783. Улічыўшы, што:

$$a) \operatorname{tg} z=2, \text { знайдзіце } \sin 2 z, \cos 2 z \text { і } \operatorname{tg} 2 z;$$

$$b) \operatorname{ctg} t=3, \text { знайдзіце } \frac{\sin ^3 a+2 \cos ^2 a \sin a}{\sin a+2 \cos a} ;$$

$$b) \operatorname{tg} c-\operatorname{ctg} c=-3, \text { знайдзіце } \operatorname{tg}^2 c+\operatorname{ctg}^2 c ;$$

$$r) x+y=\frac{3 \pi}{4}, \text { знайдзіце } (1+\operatorname{ctg} x)(1+\operatorname{ctg} y) .$$

784. Спрасціце выраз:

$$a) \operatorname{tg}\left(\frac{3 \pi}{2}+a\right) \operatorname{tg}(5 \pi-a)+\sin (a-2 \pi) \cos \left(\frac{3 \pi}{2}-a\right)+ \\ +\cos ^2\left(\frac{\pi}{2}-a\right) ;$$

$$b) \cos ^2 x+\cos ^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos ^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) ;$$

$$b) \sin ^2 u+\cos \left(\frac{\pi}{3}-u\right) \sin \left(\frac{\pi}{6}-u\right) ;$$

$$r) 1+\cos 2 y \operatorname{ctg}\left(\frac{3 \pi}{4}-y\right)-\sin 2 y ;$$

$$d) \operatorname{tg} b+2 \operatorname{ctg} 2 b-\operatorname{ctg} b ;$$

$$e) \frac{1-2 \sin ^2 v}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+v\right) \cos ^2\left(\frac{\pi}{4}-v\right)} ;$$

$$ж) \operatorname{ctg} t-2 \operatorname{tg} 2 t-\operatorname{tg} t-4 \operatorname{ctg} 4 t ;$$

$$з) \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \lambda+(\operatorname{tg} \gamma+\operatorname{tg} \lambda) \operatorname{ctg}(\gamma+\lambda) ;$$

$$i) \frac{\sin ^3\left(z-\frac{\pi}{6}\right)+\sin \left(3 z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos ^2\left(z-\frac{\pi}{6}\right) \cos \left(z+\frac{\pi}{3}\right)} ;$$

$$к) \frac{\cos i+\sin 2 i}{1-\cos 2 i+\sin i}-\operatorname{ctg} i .$$

785. Докажіть, що каті α , β , γ — внутрішні кути трикутника, то:

а) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2$.

786. Спростіть вираз:

а) $\cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - x\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - x\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - a\right) - \left(\cos \frac{5\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + 2a\right)$;

в) $\sin^6 s + 3 \sin^2 s \cos^2 s + \cos^6 s$;

г) $3(\sin^4 t + \cos^4 t) - 2(\sin^6 t + \cos^6 t)$;

д) $\frac{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a - 6}{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a + 2}$;

е) $\frac{\sin r - 3 \sin 2r + \sin 3r}{\cos r - 3 \cos 2r + \cos 3r}$;

ж) $\sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}\right) \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{y}{2} - 1\right)}$;

з) $\sqrt{(1 - \sin x \sin y)^2 - \cos^2 x \cos^2 y}$;

и) $\sqrt{(\cos u - \cos v)^2 + (\sin u + \sin v)^2}$;

к) $\frac{\left(\operatorname{tg}^2\left(w - \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - w\right)\right) \cos^2 2w}{\sin 2w}$;

л) $2 \frac{\cos^4 p + \sin^4 p}{1 + \cos^2 2p} - \frac{2 \cos^2 p - 1}{\cos^4 p - \sin^4 p}$.

787. Докажіть тотожності:

а) $(1 + \operatorname{tg} x) \cos^3 x + (1 + \operatorname{ctg} x) \sin^3 x = \sin x + \cos x$;

б) $\operatorname{ctg} 2y \operatorname{ctg} 6y - \operatorname{ctg} 4y \operatorname{ctg} 2y + \operatorname{ctg} 4y \operatorname{ctg} 6y = -1$;

в) $1 + \cos u + \cos v + \cos(u + v) = 4 \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \cos \frac{u+v}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{ctg}^2\left(a - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = 6 + 9 \operatorname{ctg}^2 3a$;

д) $\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2\left(t - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{9}{\cos^2 3t}$;

е) $(\sin r - \sin s)(\sin r + \sin s) = \sin(r - s) \sin(r + s)$;

$$\text{ж)} \frac{\cos^3 a - \cos 3a}{\sin^3 a + \sin 3a};$$

$$3) \frac{\sin b + \sin 3b + \sin 5b + \sin 7b}{\cos b - \cos 3b + \cos 5b - \cos 7b} = \operatorname{ctg} b;$$

$$\text{и)} \frac{\sin^2(c+d) + \sin^2(c-d)}{\cos^2 c \cos^2 d} = \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 d;$$

$$\text{к)} 4 \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x.$$

788. Дакажыце, што:

$$\text{а)} \text{ калі } a + b + c = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c = 1;$$

$$\text{б)} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos\left(2t + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2t;$$

$$\text{в)} \cos 3v = -4 \cos v \cos\left(v + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(v + \frac{2\pi}{3}\right).$$

789. Вылічыце:

$$\text{а)} \sin^2 \frac{\pi}{8} + 3 \cos^2 \frac{3\pi}{8};$$

$$\text{б)} \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ;$$

$$\text{в)} (\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ)(\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ);$$

$$\text{г)} \sin^2 58^\circ + \cos 56^\circ \frac{\sin 13^\circ}{\sin 17^\circ} + 2 \sin^2 74^\circ (1 - \cos 32^\circ) + \cos 56^\circ \frac{\cos 13^\circ}{\cos 17^\circ}.$$

790. Спрасціце:

$$\text{а)} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7};$$

$$\text{б)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9};$$

$$\text{в)} \sin^2 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 47^\circ + \cos^2 47^\circ;$$

$$\text{г)} \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16};$$

$$\text{д)} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{9} + \operatorname{ctg}^2 \frac{4\pi}{9};$$

$$\text{е)} \frac{(\cos 5^\circ - \sin 5^\circ)^2}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$$

791. Спрасціце выраз:

$$\text{а)} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5};$$

$$б) \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{10};$$

$$в) \frac{(\sqrt{3} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ)(\sqrt{3} + 1)}{8 \sin 75^\circ};$$

$$г) \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8};$$

$$д) \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 65^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 65^\circ;$$

$$е) \frac{1 - \sin 4^\circ}{1 + \cos 94^\circ} + \frac{\sin 82^\circ}{\sqrt{3} \cos 22^\circ + \sin 22^\circ}.$$

792. Пераўтварыце ў здабытак:

$$а) \left(1 - \sin \left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{2} + 3a\right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right)\right) \cos a;$$

$$б) \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos^2 b + \sin 2b;$$

$$в) 3 - 4 \cos 2c + \cos 4c - 8 \cos^4 c;$$

$$г) \cos^2 z - 2 \cos z \cos t \cos(z - t) + \cos^2 t;$$

$$д) \frac{2 \sin 2f}{\left(\sin^2 \left(\frac{f}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2 \left(\frac{f}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos f};$$

$$е) \sin^2(x + y) - \sin^2(x - y);$$

$$ж) \sin 4d - \sin 2d + \sin d;$$

$$з) \operatorname{tg}(i - j) + \operatorname{tg}(j - k) + \operatorname{tg}(k - i);$$

$$і) 1 + \frac{1}{2 \sin^2 l} + \frac{4 \sin^2 l - 1}{\sin 2l} \operatorname{ctg} l;$$

$$к) \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} e} + \sqrt{\operatorname{tg} e}}{\sqrt{\operatorname{ctg} e} - \sqrt{\operatorname{tg} e}}.$$

793. Дакажыце, што калі α , β , γ — унутраныя вуглы трохвугольніка, то:

$$а) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$б) \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin \beta}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} = 2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma);$$

$$в) \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2;$$

$$г) 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1;$$

$$д) \cos \frac{\alpha}{2} < \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2}.$$

794. Дакажыце, што:

а) калі $x + y + z = \frac{3\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z =$
 $= \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$;

б) для таго, каб адзін з вуглоў $\varepsilon, \eta, \lambda$ трохвугольніка быў роўны 60° , неабходна і дастаткова, каб $\sin 3\varepsilon + \sin 3\eta + \sin 3\alpha = 0$.

795. Дакажыце, што:

а) калі вуглы α, β, γ трохвугольніка праўдзяць роўнасці $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то гэты трохвугольнік прамавугольны;

б) для таго, каб адзін з вуглоў α, β, γ трохвугольніка быў роўны 36° або 108° , неабходна і дастаткова, каб $\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$.

796. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ$;

в) $4 \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;

г) $\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$;

д) $14 \sin 10^\circ - \frac{7\sqrt{3}}{2 \cos 50^\circ}$;

е) $\frac{9 \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{13\pi}{30}}{\sin \frac{4\pi}{15}}$.

797. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $16 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{3a}{2}$, улічыўшы, што $\cos a = \frac{3}{4}$;

б) $\sin^6 b + \cos^6 b$, улічыўшы, што $\cos 2b = t$;

в) $\operatorname{tg}(c + 2d)$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} c = \frac{1}{7}$ і $\sin d = \frac{1}{\sqrt{10}}$;

г) $\operatorname{tg}^4 t + \operatorname{ctg}^4 t$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = a$;

д) $\sin(2u - v)$, улічыўшы, што $\operatorname{tg} u = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} v = \frac{3}{4}$, $u \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,

$v \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\frac{3 \cos x + 4 \sin x}{3 \cos x - \sin x}$, улічыўшы, што $1 + 8 \cos^2 x + 3 \sin 2x = 0$.

798. Пераўтварыце ў здабытак выраз $\cos x + \cos (x + y) \cdot \cos z + \cos y - \sin (y + z) \sin z + \cos z$.

799. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $\cos\left(2 \arcsin \frac{1}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(3 \operatorname{arctg} 2)$;
 б) $\sin\left(3 \arccos \frac{3}{5}\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13}\right)$;
 в) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$; е) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + 2 \operatorname{arctg} 2\right)$.

800. Вылічыце:

- а) $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right)$;
 б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,3\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

801. Знайдзіце значэнні выразаў $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ і $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$ і дакажыце, што $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

802. Улічыўшы, што $\sin \alpha + \sin \beta = x$ і $\cos \alpha + \cos \beta = y$ і $x^2 + y^2 \neq 0$, знайдзіце $\cos(\alpha + \beta)$ і $\sin(\alpha + \beta)$.

803. Знайдзіце значэнне выразу:

- а) $\sin 37^\circ \cos 61^\circ + \sin 61^\circ \cos 159^\circ + \sin 159^\circ \cos 119^\circ + \sin 119^\circ \cos 37^\circ$;
 б) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 85^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$;
 в) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$;
 г) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$;
 д) $\cos 5^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \dots \cdot \cos 75^\circ \cdot \cos 85^\circ$.

804. Спрасціце выраз:

- а) $(2 \cos x - 1)(2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos (2^m x) - 1)$;
 б) $\sin a + 2 \sin 2a + 3 \sin 3a + \dots + m \sin ma$;
 в) $\sin^3 t \cos 3t + \cos^3 t \sin 3t$;
 г) $\frac{\sin 4a + \sin 5a + \sin 6a}{\cos 4a + \cos 5a + \cos 6a}$;
 д) $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos \frac{a}{8} \dots \cos \frac{a}{2^m}$;
 е) $\sqrt{1 + 2 \cos \frac{\pi}{5}} + \sqrt{1 + 2 \cos \frac{3\pi}{5}}$;
 ж) $\operatorname{ctg}^2 36^\circ \operatorname{ctg}^2 72^\circ$;
 з) $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7}$.

805. Дакажыце, што:

а) калі $0 < x < \frac{\pi}{4}$, то $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots =$
$$= \frac{\sqrt{2} \cos x}{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)};$$

б) выраз $Q = \cos^2\left(a + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(a - \frac{\pi}{6}\right)$

пры ўсіх значэннях зменнай a прымае адно і тое значэнне, і знайдзіце гэтае значэнне.

806. Вызначыце, пры якіх значэннях зменнай a праўдзіцца роўнасць

$$\cos a + \cos 3a + \dots + \cos ((2n - 1)a) = \frac{\sin(2na)}{2 \sin a}.$$

807. Ёсць два прамавугольныя трохвугольнікі $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ з катэтамі A_1C_1 і A_2C_2 , роўнымі адпаведна 6 і 5, прычым гіпатэнуза A_1B_1 на 3 меншая за гіпатэнузу A_2B_2 . Знайдзіце сінусы вуглоў B_1 і B_2 гэтых трохвугольнікаў, улічыўшы, што іх сума роўная $\frac{5}{6}$.

808. Ці праўдзівае сцверджанне:

а) калі два пункты акружнасці належаць плоскасці, то акружнасць ляжыць у гэтай плоскасці;

б) калі тры пункты акружнасці належаць плоскасці, то акружнасць ляжыць у гэтай плоскасці?

809. Ёсць прамая a і пункт G , што не ляжыць на ёй. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз пункт G і перасякаюць прамую a , ляжаць у адной плоскасці.

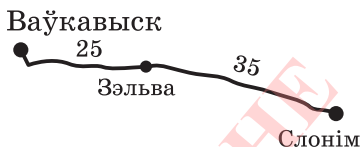
810. Усе канты правільнай трохвугольнай прызмы $BDFACE$ роўныя адзін аднаму, а плошча яе асновы роўная $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $BDEFB$.

811. Пункты U і V — цэнтры сумежных граней AA_1C_1C і $A_1C_1E_1G_1$ куба $ACEGA_1C_1E_1G_1$, кант якога роўны l . Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі U і V .

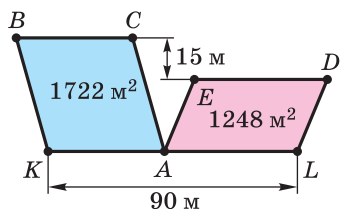
812. Пункт K дзеліць папалам бакавы кант AR правільнай чатырохвугольнай піраміды $APQRS$. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 16 см, а адрэзак QK — 12 см.

813. У аснове прамой прызмы ляжыць паралелаграм, перыметр якога роўны 64 см, а рознасць перыметраў розных трохвугольнікаў, на якія раздзяляецца паралелаграм яго дыяганалямі, — 16 см. Знайдзіце дыяганалі бакавых граней прызмы, улічыўшы, што яе бакавая паверхня роўная 640 см^2 .

814. Веласіпедыст ад Слоніма да Зэльвы ехаў са скорасцю на $2\frac{2}{3}$ км/г меншай, чым ад Зэльвы да Ваўкавыска (рыс. 324). Вызначыце час знаходжання веласіпедыста ў дарозе на другой частцы шляху, улічыўшы, што сярэдняя скорасць руху на ўсім шляху аказалася роўнай 15 км/г.



Рыс. 324



Рыс. 325

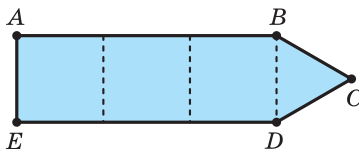
815. На адрэзку KL даўжынёй 90 м выбраны пункт A , і на адрэзках-частках AK і AL як на аснове пабудаваны паралелаграмы $AKBC$ і $ALDE$ з плошчамі 1722 м^2 і 1248 м^2 адпаведна (рыс. 325). Знайдзіце даўжыню адрэзка AK , улічыўшы, што, вышыня першага паралелаграма на 15 м большая.

816. Ці можна разрэзаць квадрат на тры адзін аднаму падобныя і няроўныя прамавугольнікі?

817. На прамежку $[0; 1]$ выбіраюцца лікі $x_1, x_2, \dots, x_{2008}$. Вызначыце найбольшае магчымае значэнне выразу

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2008} - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{2007} x_{2008} - x_{2008} x_1.$$

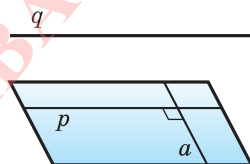
818. Некаторыя выпуклыя n -вугольнікі можна разрэзаць на квадраты і правільныя трохвугольнікі (рыс. 326). Знайдзіце ўсе значэнні зменнай n .



Рыс. 326

16. Перпендыкулярнасць
прамой і плоскасці

Нагадаем, што *перпендыкулярнымі* называюць прамыя, вугал паміж якімі роўны 90° . Перпендыкулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі і скрыжавальнымі. На рысунку 327 перпендыкулярныя прамыя a і p перасякаюцца, а перпендыкулярныя прамыя a і q скрыжоўваюцца.



Рыс. 327

Праяма называецца **перпендыкулярнай плоскасці**, калі яна перпендыкулярная любой прамой гэтай плоскасці.

Перпендыкулярнасць прамой a плоскасці α запісваюць так: $a \perp \alpha$. Гавораць таксама, што і плоскасць α перпендыкулярная прамой a , і пішуць $\alpha \perp a$.

Калі праяма l ляжыць у плоскасці β або паралельная ёй, то ў плоскасці β ёсць прамыя, паралельныя прамой l . Таму праяма, перпендыкулярная плоскасці, абавязкова гэтую плоскасць перасякае.

Навакольнае асяроддзе дае многа прыкладаў, што ілюструюць перпендыкулярнасць прамой і плоскасці. Слупы з асвятляльнымі лямпамі і калоны ўстанаўліваюць перпендыкулярна да гарызантальнай паверхні зямлі (рыс. 328 і 329).

З тэарэмы 6 параграфу 8 вынікае, што пры вызначэнні вугла паміж прамымі іх можна замяняць паралельнымі прамымі. Таму калі адна з паралельных прамых перпендыкулярная плоскасці, то і другая таксама перпендыкулярная гэтай плоскасці. Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне.

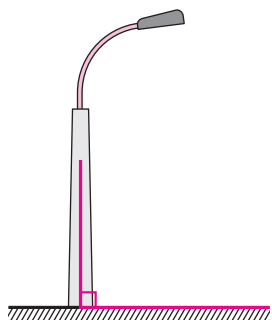


Рис. 328

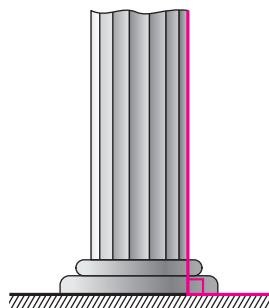


Рис. 329

Тэарэма 1. *Калі дзве прамыя перпендыкулярныя плоскасці, то яны паралельныя адна адной.*

Доказ. Няхай прамыя x і y абедзве перпендыкулярныя плоскасці α (рис. 330). Дакажам, што прамыя x і y паралельныя адна адной.

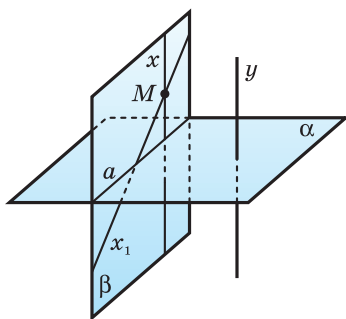


Рис. 330

Праз які-небудзь пункт M прамой x правядзём прамую x_1 , паралельную прамой y . Тады $x_1 \perp \alpha$. Дакажам, што прамая x_1 супадае з прамой x . Дапусцім, што гэта не так. Тады атрымліваецца, што ў плоскасці β , зададзенай прамымі

x і x_1 , праз пункт M праведзены дзве прамыя, перпендыкулярныя прамой a , па якой перасякаюцца плоскасці α і β , што немагчыма. Значыць, прамыя x і y паралельныя.

Устанавім прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

Тэарэма 2. *Калі прамая перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.*

Доказ. Няхай прамая p перасякае плоскасць α у пункце O і перпендыкулярная перасякальным прамым a і b , што ляжаць у плоскасці α (рис. 331). Дакажам, што прамая p перпендыкулярная плоскасці α , г. зн. што прамая p перпендыкулярная прамой t , адвольна выбранай у плоскасці α .

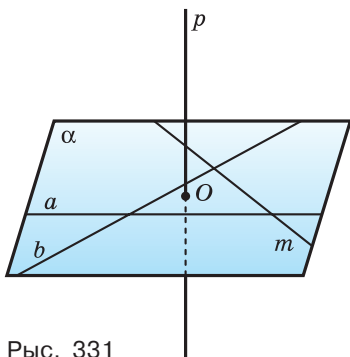


Рис. 331

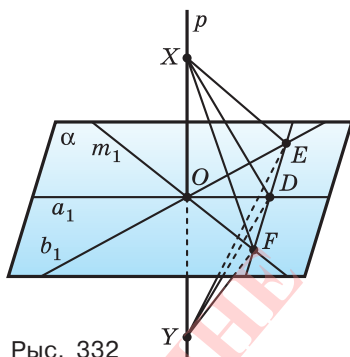


Рис. 332

Правядзём праз пункт O прамыя a_1 , b_1 і m_1 , адпаведна паралельныя прамым a , b і m . У плоскасці α правядзём якую-небудзь прамую так, каб яна перасякала прамыя a_1 , b_1 і m_1 у пунктах D , E , F (рыс. 332). На прамой p адзначым пункты X і Y на аднолькавых адлегласцях ад пункта O . Прамыя a_1 і b_1 — пасярэднія перпендыкуляры да адрэзка XY , таму $DX = DY$ і $EX = EY$. Значыць, трохвугольнікі XDE і YDE роўныя па трох старанах, а таму вуглы XEF і YEF роўныя. Улічыўшы гэта, атрымаем, што трохвугольнікі XEF і YEF роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Таму $FX = FY$. Гэта азначае, што трохвугольнік XFY з'яўляецца раўнабокім, а таму яго медыяна FO з'яўляецца і вышыняй, г. зн. прамыя p і m_1 , а значыць, і прамыя p і m перпендыкулярныя.

Вынік 1. *Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.*

Няхай плоскасці α і β паралельныя і прамая l перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 333). Дакажам, што прамая l перпендыкулярная плоскасці β . Для доказу правядзём праз прамую l дзве якія-небудзь плоскасці γ_1 і γ_2 . Няхай яны перасякаюць плоскасць α па прамых a_1 і a_2 , а

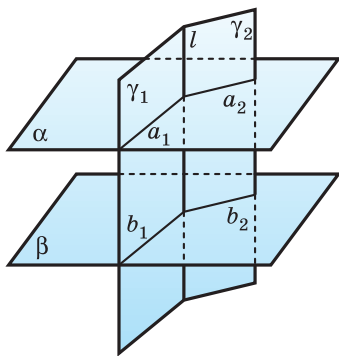


Рис. 333

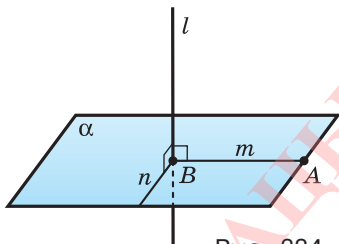
паралельную ёй плоскасць β — па прамых b_1 і b_2 . Паколькі $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ і $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ і $l \perp b_2$. Па тэарэме 2 атрымліваем, што $l \perp \beta$.

Вынік 2. *Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.*

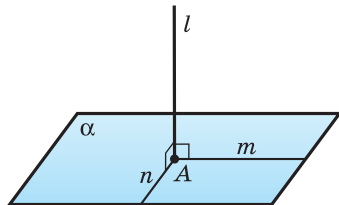
Правядзіце самастойна абгрунтаванне гэтага сцверджання, выкарыстаўшы рысунак 333.

Тэарэма 3. *Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная плоскасць, перпендыкулярная дадзенай прамой.*

Доказ. Няхай ёсць прамая l і пункт A . У выпадку, калі пункт A не ляжыць на прамой l (рыс. 334), праз пункт A правядзём прамую m , перпендыкулярную прамой l , і праз пункт B перасячэння прамых m і l — яшчэ адну прамую n , перпендыкулярную прамой l . У выпадку, калі пункт A ляжыць на прамой l (рыс. 335), праз пункт A правядзём прамыя m і n , перпендыкулярныя прамой l . Праз прамыя m і n правядзём плоскасць α . Гэтая плоскасць і прамая l перпендыкулярныя па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.



Рыс. 334



Рыс. 335

Дакажам цяпер, што пабудаваная плоскасць α адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праведзены дзве плоскасці α_1 і α_2 , перпендыкулярныя прамой l (рыс. 336 і 337). Праз прамую l і пункт A правядзём якую-небудзь плоскасць β . Яна перасякае плоскасці α_1 і α_2 па пэўных прамых p_1 і p_2 , бо плоскасць β мае з плоскасцямі α_1 і α_2 агульны пункт A . Паколькі $l \perp \alpha_1$ і $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ і $l \perp p_2$. Атрымліваецца, што ў плоскасці β праз пункт A праведзены дзве прамыя p_1 і p_2 , перпендыкулярныя прамой l , што немагчыма.

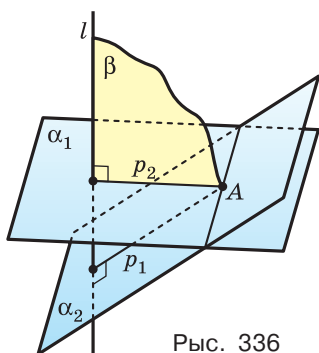


Рис. 336

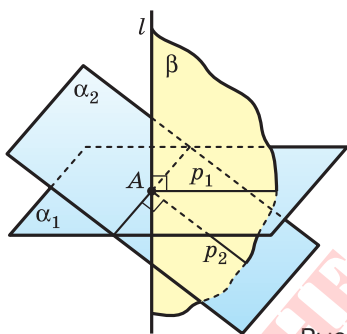


Рис. 337

Тэарэма 4. *Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная прамая, перпендыкулярная дадзенай плоскасці.*

Доказ. Няхай ёсць пункт A і плоскасць α . Няхай a — прамая ў плоскасці α , а β — плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a . Няхай плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b (рис. 338). У плоскасці β праз пункт A правядзём прамую l , перпендыкулярную прамой b . Прамая l — шуканая, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым a і b : $l \perp b$ па пабудаванні; $l \perp a$, бо $a \perp \beta$ і l належыць β .

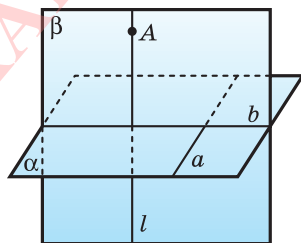


Рис. 338

Прамая l — адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праходзіць яшчэ адна прамая l_1 , перпендыкулярная плоскасці α (рис. 339 і 340). Тады па тэарэме 1 прамыя l і l_1 паралельныя адна адной. Але такое немагчыма, бо прамыя l і l_1 перасякаюцца ў пункце A .

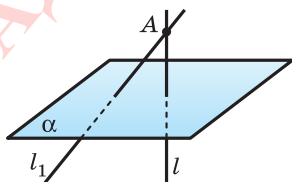


Рис. 339

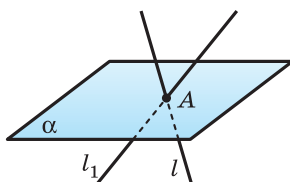


Рис. 340

Винік 3. Квадрат дияганалі прамавугольнага паралелепіеда роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.

Няхай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прамавугольны паралелепіед (рыс. 341). Паколькі кант CC_1 перпендыкулярны плоскасці

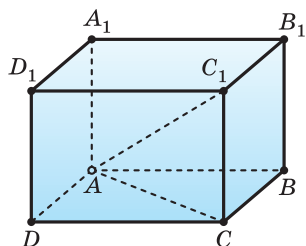


Рис. 341

$ABCD$, то трохвугольнік ACC_1 прамавугольны з прамым вуглом C . Таму

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

А паколькі трохвугольнік ABC таксама прамавугольны з прамым вуглом B , то $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Улічыўшы, што $CC_1 = AA_1$ і $BC = AD$,

$$\text{атрымліваем, што } AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$



1. Якія прамыя прасторы называюцца перпендыкулярнымі? Ці могуць скрыжавальныя прамыя быць перпендыкулярнымі?

2. Якую прамую называюць перпендыкулярнай плоскасці?

3. Сфармулюйце ўласцівасць прамых, перпендыкулярных адной плоскасці.

4. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.

5. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, перпендыкулярнай да адной з паралельных плоскасцей.

6. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасцей, перпендыкулярных да адной прамой.

7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая перпендыкулярная дадзенай прамой і праходзіць праз дадзены пункт.

8. Сфармулюйце сцверджанне пра прамую, якая перпендыкулярная дадзенай плоскасці і праходзіць праз дадзены пункт.

819. Ёсць паралелепіед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Дакажыце, што:

а) калі $\angle BAD = 90^\circ$, то $CD \perp B_1 C_1$ і $AB \perp A_1 D_1$;

б) калі $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ і $DD_1 \perp A_1 B_1$.

820. Канты BC і AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што кант AD перпендыкулярны адной з сярэдніх ліній грані ABC .

821. Укажыце ў сваім класе мадэлі прамых, перпендыкулярных плоскасці.

822. Вызначыце, ці перпендыкулярная прамая l плоскасці α , улічыўшы, што на рысунку:

а) 342 паралельныя прамыя a і b ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

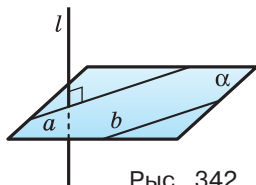


Рис. 342

б) 343 пересикаючі прямі s і d лежать у площині α і пряма l перпендикулярна їм обом;

в) 344 пересикаючі прямі m і n лежать у площині α і пряма l перпендикулярна їм обом;

г) 345 пряма r перпендикулярна пересикаючим прямим p і q площині α і пряма l паралельна прямій r .

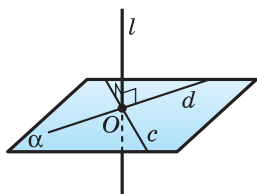


Рис. 343

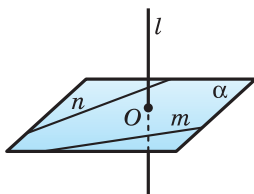


Рис. 344

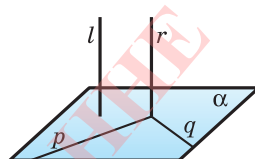


Рис. 345

823. На кантах F_1G_1 і FF_1 прямокутного паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбрані пункти A і B (рис. 346). Визначте, ці перпендикулярні:

а) пряма FG і площина EE_1F_1 ;

б) прямі AB і GH ;

в) прямі F_1G і EF .

824. Пункти L , M і O лежать на прямій, перпендикулярній площині γ , а пункти O , B , C і D лежать у тій самій площині. Визначте, ці з'являється прямим кутом:

а) LOB ; в) DLM , д) BMO .

б) MOC , г) DOL ,

825. Пряма FA перпендикулярна площині BCF , і пункт F — середина відрізка AD . Доведіть, що:

а) $AB = DB$;

б) калі $BF = FC$, то $AB = AC$;

в) калі $AB = DC$, то $BF = FC$.

826. Проз центр O симетрії квадрата са старою a проведена пряма l , перпендикулярна площині квадрата. Знайдіть відстань від вершини квадрата до пункту K прямою l , влічючи, що $OK = d$.

827. Проз вершину C правильного трикутника ABC са старою $16\sqrt{3}$ см проведена пряма k , перпендику-

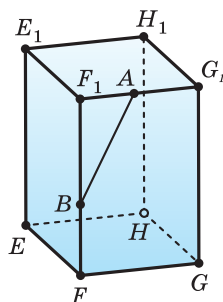


Рис. 346

лярная плоскасці ABC , а праз артацэнтр O гэтага трохвугольніка — прамая l , паралельная прамой k . На прамых k і l выбраны пункты D і E , адлеглыя ад пунктаў C і O на 16 см і 12 см адпаведна. Знайдзіце адлегласць DE і адлегласці ад пунктаў D і E да вяршынь трохвугольніка.

828. Праз канцы P і Q адрэзка PQ , паралельнага плоскасці γ , праведзены прамыя, перпендыкулярныя гэтай плоскасці, якія перасякаюць яе ў пунктах P_1 і Q_1 . Дакажыце, што $PQ = P_1Q_1$.

829. Вуглы A і B трохвугольніка ABC разам складаюць 90° , а прамая BD перпендыкулярная плоскасці ABC . Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

830. Прамая AM перпендыкулярная плоскасці квадрата $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O . Дакажыце, што прамая BD перпендыкулярная:

- а) плоскасці AMO ; б) прамой MO .

831. Праз цэнтр O сіметрыі паралелаграма $ABCD$ праведзена такая прамая l , што для яе пункта M , адрознага ад O , праўдзяцца роўнасці $MA = MC$, $MB = MD$. Дакажыце, што прамая OM перпендыкулярная плоскасці паралелаграма.

832. Як праверыць перпендыкулярнасць прамой і плоскасці, калі вымяраць можна толькі адлегласці?

833. Два роўныя кругі маюць адзіны агульны пункт A , праз які праходзяць дыяметры AB і AC гэтых кругоў, прычым гэтыя дыяметры не ляжаць на адной прамой. Вызначыце, ці перпендыкулярная плоскасці ABC лінія перасячэння плоскасцей, у якіх ляжаць дадзеныя кругі. Ці зменіцца вынік, калі кругі не будуць роўнымі?

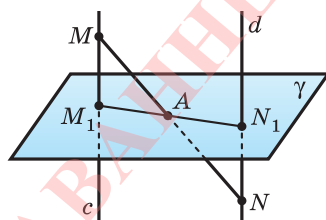
834. На канце HE чатырохвугольнай піраміды $REFGH$, у якой бакавы кант FR перпендыкулярны плоскасці асновы, выбраны пункт A , і на адрэзках AF і AR адзначаны іх сярэдзіны B і C . Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці асновы $EFGH$, і знайдзіце вугал паміж прамымі BC і GH .

835. Канты AB і AC , а таксама DB і DC трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя, а пункт M — сярэдзіна канта BC . Дакажыце, што плоскасць трохвугольніка ADM перпендыкулярная прамой BC .

836. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз дадзены пункт M прамой a і перпендыкулярныя да яе, ляжаць у плоскасці, якая перпендыкулярная да прамой a і праходзіць праз пункт M .

837. Дакажыце, што калі пункт X роўнаадлеглы ад канцоў дадзенага адрэзка AB , то ён ляжыць у плоскасці, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка AB і перпендыкулярная прамой AB .

838. Праз канцы M і N адрэзка, які перасякае плоскасць γ у пункце A , праведзены прамыя c і d . Гэтыя прамыя перпендыкулярныя плоскасці γ і перасякаюць яе ў пунктах M_1 і N_1 адпаведна (рыс. 347). Дакажыце, што пункты M_1 , N_1 і A ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак MN , улічыўшы, што $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

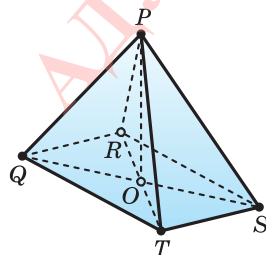


Рыс. 347

839. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α , якія перасякаюць яе ў пунктах C і D адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B , улічыўшы, што $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7,2$ м і адрэзак AB не перасякае плоскасць α .

840. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α , якія перасякаюць яе ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Знайдзіце A_1B_1 , улічыўшы, што $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

841. У якім выпадку праз адну з дзвюх скрыжавальных прамых можна правесці плоскасць, перпендыкулярную другой прамой?



Рыс. 348

842. Канты PQ і PS , а таксама PR і PS чатырохвугольнай піраміды $PQRST$, асновай якой з'яўляецца паралелаграм, роўныя адзін аднаму (рыс. 348). Дакажыце, што адрэзак, які злучае вяршыню P з цэнтрам O сіметрыі паралелаграма, перпендыкулярны аснове $QRST$.

843. Праз вяршыні A і B трохвугольніка ABC праведзены прамыя k і l ,

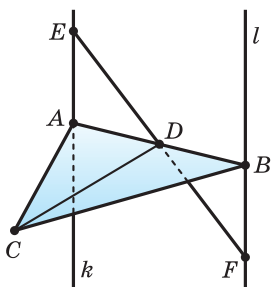


Рис. 349

перпендыкулярныя яго плоскасці, а праз медыяну CD — плоскасць, якая перасякае прамыя k і l у пунктах E і F адпаведна (рыс. 349). Устанавіце:

а) чым з'яўляецца адрэзак CD у трохвугольніку CEF ;

б) што калі $CA = CB$, то трохвугольнік CEF з'яўляецца раўнабокім.

844. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка PQR і праходзіць праз вяршыню P ,

выбраны пункт A . На адрэзку, што злучае сярэдзіну стараны QR з пунктам A , адзначаны такі пункт T , што $AT : TP_1 = 2 : 1$. Вызначыце вугал паміж прамымі:

а) GT і QR , улічыўшы, што G — цэнтр цяжару трохвугольніка PQR ;

б) GT і PQ .

845. Канцы A і B адрэзкаў AA_1 і BB_1 належаць плоскасці α , а самі адрэзкі ёй перпендыкулярныя і размешчаныя па адзін бок ад плоскасці. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка AA_1B_1B , улічыўшы, што:

а) $AA_1 = BB_1$; б) $A_1B_1 = 2AB$; в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

846. Пункты A, B, C, D з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прамавугольнага паралелепіпеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, у аснове якога ляжыць квадрат (рыс. 350). Вызначыце:

а) ці перпендыкулярная прамая Y_1P плоскасці сячэння XX_1DC ;

б) ці перпендыкулярная прамая TB плоскасці XX_1D ;

в) вугал паміж прамымі AY і XD .

847. Усе грані трохвугольнай піраміды $IJKL$ — правільныя трохвугольнікі са стараной 6 см. Пабудуйце сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта KL і перпендыкулярная яму, і знайдзіце плошчу гэтага сячэння.

848. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазна-

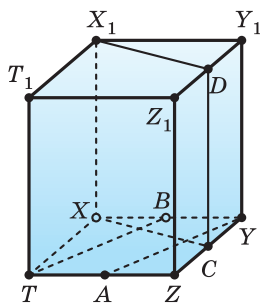


Рис. 350

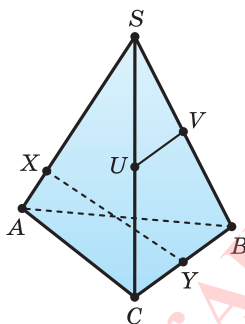
чаны сярэдзіны U , V , Y , а на канце SA — адвольны пункт X (рыс. 351). Вызначыце:

- ці перпендыкулярныя прамыя SA і UV ;
- ці перпендыкулярныя прамыя UV і YX ;
- вугал паміж прамымі UV і AY .

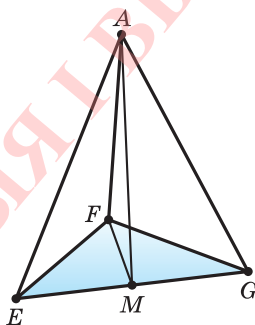
849. Ёсць прамавугольны трохвугольнік EFG з прамым вуглом F і катэтамі FE і FG , адпаведна роўнымі 6 см і 8 см. Ад вяршыні F на прамені, перпендыкулярным плоскасці трохвугольніка, адкладзены адрэзак FA , роўны 12 см, а на гіпатэнузе EG пазначана яе сярэдзіна M (рыс. 352). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка AFM .

850. На рысунку 353 прамыя OA , OB і OC папарна перпендыкулярныя. Знайдзіце адрэзак BC , улічыўшы, што:

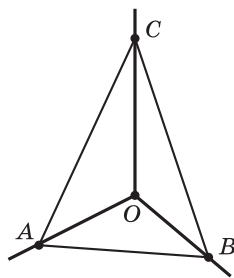
- $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
- $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
- $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
- $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.



Рыс. 351



Рыс. 352



Рыс. 353

851. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 9 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная $15\sqrt{2}$ см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.

852. Пункт Q — сярэдзіна канта KK_1 прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, пункт H канта MM_1 такі, што $MH : HM_1 = 4 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка HQ , улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда роўная 41 см, а дыяганаль яго асновы — 9 см.

853. З вяршыні B трохвугольніка ABC праведзены адрэзак BD , перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце даўжыню гэтага адрэзка, улічыўшы, што $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а старана BC даўжэйшая за старану BA на 4 см.

854. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце O , выбраны два пункты A і B , а на плоскасці α — такі пункт X , што $XA = 3$, $XB = 4$. Знайдзіце XO , улічыўшы, што:

- а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

855. Бакавы кант OY трохвугольнай піраміды $OXYZ$ перпендыкулярны плоскасці яе асновы XYZ . Знайдзіце гэты кант, улічыўшы, што канты YX і YZ адпаведна роўныя 27 см і 48 см і канты OZ і OX адносяцца як 4 : 3.

856. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ якога з'яўляецца квадратам. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні чатырохвугольнай піраміды C_1CDEF , улічыўшы, што $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

857. Асновай трохвугольнай піраміды $SXYZ$ з'яўляецца правільны трохвугольнік, а канты SZ , SX , SY узаемна перпендыкулярныя. Праз пункт Q , выбраны на канце XZ , праведзена плоскасць, перпендыкулярная прамой SZ . Знайдзіце кант SX піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння роўная 32 см², а $SQ = 17$ см.

858. Вымярэнні AB , AD і дыяганаль AC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ адпаведна роўныя 6, 12 і 18. Пункты K і K_1 выбраны на кантах AD і A_1D_1 так, што $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 5$. Дакажыце, што плоскасць BKK_1 перпендыкулярная прамой AC , і знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю BKK_1 .

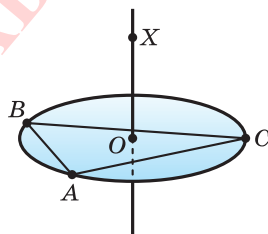
859. Канты прамавугольнага паралелепіпеда роўныя 12 см, 16 см і 28 см. Вызначыце плошчу сячэння, праведзенага праз канцы трох кантаў, што выходзяць з адной вяршыні.

860. Ёсць трохвугольная піраміда $QABC$, аснова якой — правільны трохвугольнік ABC , а бакавыя канты QA , QB , QC роўныя адзін аднаму. З вяршыні C і з такога пункта X канта AC , што $AX = 45$ см і $XC = 30$ см, праведзены перпендыкуляры да грані SAB . Знайдзіце даўжыні гэтых перпендыкуляраў, улічыўшы, што адлегласць паміж іх асновамі роўная 18 см.

861. Ёсць правільная трохвугольная прызма $MNKM_1N_1K_1$. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў MK і KK_1 адпаведна. Праз гэтыя пункты праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя грані MM_1N_1N і перасякаюць яе ў пунктах P і Q адпаведна. Знайдзіце старану асновы і бакавы кант прызмы, улічыўшы, што $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

862. У трохвугольнай піраміды $QFGH$ аснова FGH — правільны трохвугольнік, а бакавыя канты QF , QG , QH роўныя адзін аднаму. Адно сячэнне піраміды перпендыкулярнае канту QH і праходзіць праз вяршыню F , другое — паралельнае канту QH і змяшчае вяршыню G і такі пункт B канта FH , што $FB = 8$ см і $BH = 7$ см. Знайдзіце адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні, улічыўшы, што $QF = 12$ см.

863. Праз цэнтр O апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка (рыс. 354). Дакажыце, што кожны пункт X гэтай прамой роўнаадлеглы ад вяршынь трохвугольніка.



Рыс. 354

864. Пункт Q з'яўляецца цэнтрам квадратнай асновы $ABCD$, а пункт K — сярэдзінай канта PA чатырохвугольнай піраміды $PABCD$, усе канты якой роўныя 100. Нарысуйце сячэнне піраміды і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плоскасць сячэння праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

- а) AC ; б) PA ; в) PQ ; г) BD .

865. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. У ёй пазначаны цэнтр Q яе асновы ABC і ўнутраны пункт K канта PB . Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку і нарысуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

- а) BC ; б) BP ; в) BQ .

866. Пункт K — сярэдзіна канта A_1B_1 адзінкавага куба $ABCA_1B_1C_1D_1$. Нарысуйце сячэнне куба і знайдзіце яго перыметр і плошчу, улічыўшы, што плоскасць праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

- а) DD_1 ; б) CD ; в) C_1D ; г) CD_1 ; д) BD .

867. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y = (2t + 1)^3 + 5(3t - 7)^2$;

е) $y = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$;

б) $y = (t - 1)^4 (t + 1)^3$;

ж) $y = \sqrt{t+2} - \sqrt{t-2}$;

в) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

з) $y = \sqrt[4]{(k-8)^7}$;

г) $y = \frac{2}{(x+1)^2 + 1}$;

і) $y = \sqrt[3]{(3k+1)^2}$.

д) $y = \frac{(x-1)^2}{(x+3)^3}$;

868. Метадам інтэрвалаў рашыце няроўнасць:

а) $(b^2 - 1)(b^3 - 1)(b^4 - 1) \geq 0$;

в) $\frac{1}{b-1} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1}$;

б) $\frac{(b-3)^3(b+4)^4(b-7)}{(b-2)^2(b+1)} \leq 0$;

г) $\sqrt{b^2 - 4}(b - 3) < 0$.

869. Рашыце няроўнасць $f'(x) \leq g'(x)$, улічыўшы, што:

а) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$;

$g(x) = 2 - 6x + 3x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 1$;

$g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$.

870. Дакажыце, што:

а) функцыя $y = x^5 + 6x^3$ нарастае на ўсёй каардынатнай прамой;

б) функцыя $y = \frac{4}{x}$ спадае на прамежках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

871. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

в) $y = 3x - x^3$;

б) $y = x^3 - 12x$;

г) $y = (x - 1)^3 - 3(x - 1)$.

872. Дакажыце, што пры $x \geq 0$ праўдзіцца няроўнасць

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geq \frac{x^4}{2}.$$

873. Знайдзіце вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі f у пункце з абсцысай a , улічыўшы, што:

а) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $a = 1$;

б) $f(x) = -2x^3$, $a = 2$.

874. Ёсць графік функцыі $y = x^4 - x$. Знайдзіце ўраўненне датычнай да гэтага графіка:

а) у пункце $x = 2$;

б) у пункце яго перасячэння з восьсю ардынаты;

в) у пункце яго перасячэння з восьсю абсцыс.

875. У сплаў медзі і цынку, які змяшчаў 22 кг медзі, дадалі 15 кг цынку, пасля чаго ўтрыманне цынку ў сплаве павялічылася на 33 працэнтныя пункты. Вызначыце першапачатковую масу сплаву.

876. Пасля таго, як сплавілі два зліткі медзі, якія змяшчалі 6 кг і 12 кг медзі, атрымалі сплаў з 36-працэнтным утрыманнем медзі. Якім было працэнтнае ўтрыманне медзі ў абодвух злітках, калі ў першым яно было ніжэйшым на 40 працэнтных пунктаў?

* * *

877. Рашыце ўраўненне

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3.$$

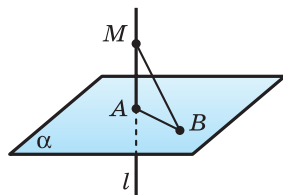
878. На працягу бісектрысы вугла BAC за вяршыню выбраны такі пункт D , што $\angle BDC = 0,5 \angle BAC$. Знайдзіце адрэзак AD , улічыўшы, што $AB = b$ і $AC = c$.

879. Дакажыце, што калі дадатныя лікі b і c праўдзяць няроўнасць $b(1-c) > \frac{1}{4}$, то $b > c$.

17. Адлегласці.

Вугал паміж прамой і плоскасцю

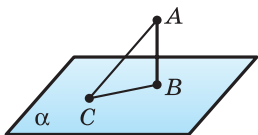
Няхай ёсць плоскасць α і пункт M па-за ёй (рыс. 355). Праз пункт M правядзём прамую l , перпендыкулярную плоскасці α , і няхай A — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α . Адрэзак MA называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта M , а пункт A — *асновай перпендыкуляра*.



Рыс. 355

Злучым пункт M яшчэ з якім-небудзь пунктам B плоскасці α . Адрэзак MB называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта M , а пункт B — *асновай нахіленай*. Адрэзак AB называецца *праекцыяй нахіленай* на плоскасць α .

Тэарэма 5. *Перпендыкуляр да плоскасці, праведзены з пэўнага пункта, меншы за любую нахіленую да гэтай плоскасці, праведзеную з таго самага пункта.*



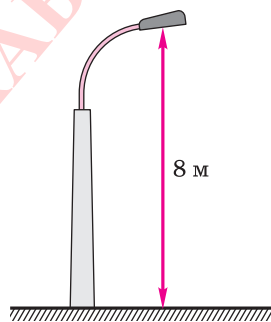
Рыс. 356

Доказ. Няхай адрэзак AB на рысунку 356 — перпендыкуляр, а адрэзак AC — нахіленая да плоскасці α . Гэтыя перпендыкуляр і нахіленая ў прамавугольным трохвугольніку ABC з'яўляюцца адпаведна катэтам і гіпатэнузай. Таму $AB < AC$.

У адпаведнасці са сцверджаннем тэарэмы 5, з усіх адлегласцей ад дадзенага пункта да розных пунктаў дадзенай плоскасці найменшай з'яўляецца адлегласць, вымераная па перпендыкуляры.

Адлегласць ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да плоскасці.

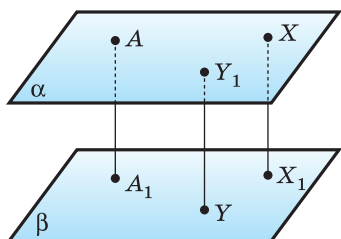
Калі мы гаворым, напрыклад, што вулічны ліхтар знаходзіцца на вышыні 8 м ад зямлі, то паднагадваем, што адлегласць ад ліхтара да паверхні зямлі, вымераная па перпендыкуляры, праведзеным ад ліхтара да плоскасці зямлі, складае 8 м (рыс. 357).



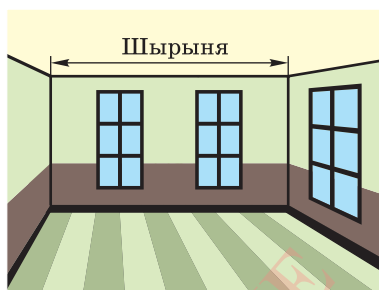
Рыс. 357

Тэарэма 6. *Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці адна і тая і роўная даўжыні іх агульнага перпендыкуляра.*

Доказ. Няхай ёсць паралельныя плоскасці α і β (рыс. 358). Няхай A — які-небудзь пункт плоскасці α , адрэзак AA_1 — перпендыкуляр, праведзены з пункта A да плоскасці β . Возьмем адвольны пункт X плоскасці α і правядзём з яго перпендыкуляр XX_1 да плоскасці β . Тады па тэарэме 1 прамыя AA_1 і XX_1 паралельныя, а па тэарэме 11 з параграфа 10 адрэзкі AA_1 і XX_1 роўныя адзін аднаму. Гэта азначае, што адлегласць ад любога пункта X плоскасці α да плоскасці β роўная адрэзку AA_1 . Паколькі адрэзак AA_1 перпендыкулярны і плоскасці β , то ён выяўляе і адлегласць ад пункта A_1 да плоскасці α . Зразумела, што адлегласць ад



Рыс. 358



Рыс. 359

любога пункта Y плоскасці β да плоскасці α роўная адрэзку AA_1 .

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

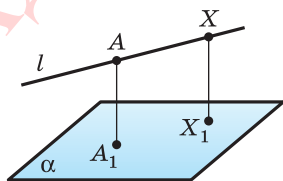
Усе пункты адной сцяны пакой знаходзяцца на адной і той адлегласці ад супрацьлеглай сцяны (рыс. 359). Гэтая адлегласць і ёсць шырыня пакой.

Тэарэма 7. *Адлегласць ад любога пункта прамой, паралельнай плоскасці, да гэтай плоскасці адна і тая і роўная перпендыкуляру, праведзенаму з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.*

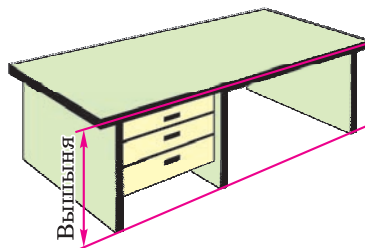
Выкарыстаўшы рысунак 360, правядзіце доказ тэарэмы самастойна.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

Усе пункты краю стала знаходзяцца на адной адлегласці ад падлогі (рыс. 361). Гэтая адлегласць і ёсць вышыня стала.



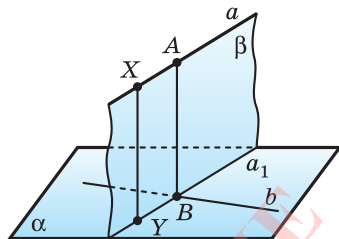
Рыс. 360



Рыс. 361

Тэарэма 8. Дзве скрыжэвальныя прамыя маюць адзіны агульны перпендыкуляр.

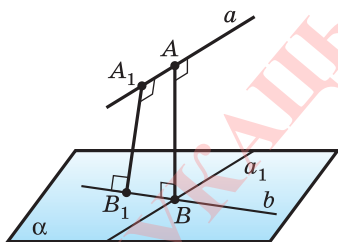
Доказ. Няхай ёсць скрыжэвальныя прамыя a і b (рыс. 362). Дакажам, што на гэтых прамых можна выбраць такія пункты A і B , што прамая AB перпендыкулярная і прамой a , і прамой b .



Рыс. 362

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз прамую b паралельна прамой a . Возьмем на прамой a пункт X і апусцім перпендыкуляр XY на плоскасць α . Няхай β — плоскасць, што праходзіць праз перасякальныя прамыя a і XY . Абазначым a_1 прамую, па якой перасякаюцца плоскасці α і β . Паколькі $a_1 \parallel a$, то прамыя a_1 і b перасякаюцца ў пэўным пункце B . У плоскасці β апусцім перпендыкуляр BA на прамую a . Прамыя AB і XY ляжаць у адной плоскасці β і перпендыкулярныя да прамой a . Таму $AB \parallel XY$ і $AB \perp \alpha$ і, значыць, $AB \perp a$ і $AB \perp b$.

Гэтым самым існаванне агульнага перпендыкуляра скрыжэвальных прамых абгрунтавана. Дакажам зараз яго адзінасць.



Рыс. 363

Няхай скрыжэвальныя прамыя a і b маюць яшчэ адзін агульны перпендыкуляр A_1B_1 , прычым пункт A_1 належыць прамой a , а пункт B_1 — прамой b (рыс. 363).

Пункты A і A_1 , B і B_1 супадаць не могуць, бо з аднаго пункта да прамой можна правесці толькі адзін перпендыкуляр. Па-

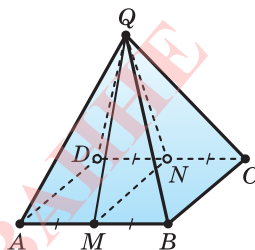
колькі $A_1B_1 \perp a$ і $A_1B_1 \perp b$, то прамая A_1B_1 , як і прамая AB , перпендыкулярная плоскасці α , што праходзіць праз прамую b паралельна прамой a . Таму $A_1B_1 \parallel AB$ і пункты A_1 , B_1 , A , B належаць адной плоскасці. Значыць, і прамыя AA_1 і BB_1 належаць адной плоскасці. Атрымалі супярэчнасць з тым, што гэтыя прамыя скрыжоўваюцца.

Адлегласцю паміж скрыжавальнымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

З доказу тэарэмы 8 вынікае, што *адлегласць паміж скрыжавальнымі прамымі роўная адлегласці ад любога пункта адной з іх да плоскасці, што змяшчае другую прамую і паралельная першай*.

Прыклад 1. У чатырохвугольнай пірамідзе $QABCD$ усе канты роўныя a . Знойдзем адлегласць паміж скрыжавальнымі кантамі AB і QC (рыс. 364).

З тэарэмы 8 вынікае, што на прамых AB і QC ёсць такія пункты X і Y , што прамая XY перпендыкулярная як прамой AB , так і прамой QC , і разам з гэтым плоскасці, што праходзіць праз адну з гэтых прамых паралельна другой.



Рыс. 364

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз пункт Q перпендыкулярна прамой AB . Яна праходзіць праз сярэдзіны M і N кантаў AB і CD . Тады $XY \parallel \alpha$ і праекцыяй адрэзка XY на плоскасць α будзе адрэзак, роўны XY . Вызначым, у якія пункты спраектуюцца пункты X і Y . Паколькі $AB \perp \alpha$, то ўся прамая AB праектуецца ў адзін пункт M . Значыць, пункт X праектуецца ў пункт M . Паколькі пункты Q і C праектуюцца ў пункты Q і N адпаведна, то прамая QC праектуецца ў прамую QN . Улічым зараз, што прамая QN належыць плоскасці, паралельнай AB . Таму шуканая праекцыя адрэзка XY ёсць перпендыкуляр да QN , праведзены з пункта M . Даўжыню d гэтага перпендыкуляра знойдзем, выкарыстаўшы плошчу раўнабокага трохвугольніка QMN з асновай a і бакавымі старонамі $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Атрымаем $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, адкуль $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Цяпер мы можам дакладна апісаць узаемнае размяшчэнне дзвюх прамых у прасторы з дапамогай лікаў. Калі прамыя a і b перасякаюцца, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α паміж імі (рыс. 365). Калі прамыя a і b паралельныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе адлегласць d паміж імі (рыс. 366). Калі прамыя a і

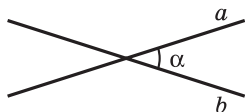


Рис. 365

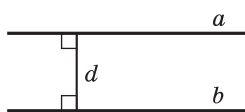


Рис. 366

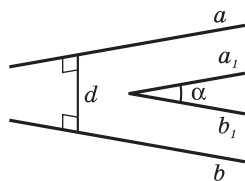


Рис. 367

b скривавальныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α і адлегласць d паміж імі (рыс. 367).

Тэарэма 9. *Калі прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэтую плоскасць, то яна перпендыкулярная і самой нахіленай, а калі прамая плоскасці перпендыкулярная нахіленай да плоскасці, то яна перпендыкулярная і праекцыі гэтай нахіленай.*

Доказ. Няхай адрэзкі AB і AC — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая да плоскасці α , тады адрэзак BC — праекцыя нахіленай AC на гэтую плоскасць (рыс. 368).

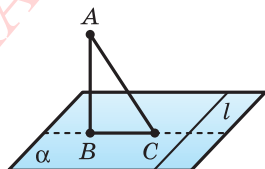


Рис. 368

Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная праекцыі BC . Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да самой нахіленай AC .

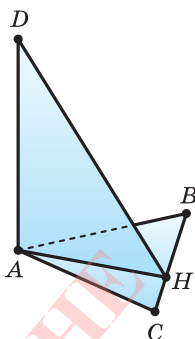
Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых BC і AB плоскасці ABC — да першай прамой па ўмове, а да другой з-за таго, што яна ляжыць у плоскасці α , да якой перпендыкулярная прамая AB . Таму прамая l перпендыкулярная і да прамой BC плоскасці ABC .

Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная нахіленай AC . Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да праекцыі BC гэтай нахіленай.

Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых AC і AB плоскасці ABC . Таму яна перпендыкулярная і да прамой AC плоскасці ABC .

Тэарэма 9 называецца *тэарэмай пра тры перпендыкуляры* з-за таго, што ў ёй гаворыцца пра дачыненне перпендыкулярнасці паміж трыма прамымі. Прывядзём прыклады выкарыстання гэтай тэарэмы.

Прыклад 2. З вяршыні A да плоскасці трохвугольніка ABC , стораны якога AB , BC , CA адпаведна роўныя 13, 20, 11, узведзены перпендыкуляр AD даўжынёй 36 (рыс. 369). Знойдзем адлегласць ад пункта D да прамой BC .



Рыс. 369

Шуканая адлегласць ёсць даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта D на прамую BC . Правядзенне гэтага перпендыкуляра патрабуе знайсці яго аснову на прамой BC . Для гэтага ў плоскасці трохвугольніка ABC пабудуем вышыню AH гэтага трохвугольніка. Паколькі прамая BC перпендыкулярная вышыні AH , якая з'яўляецца праекцыяй нахіленай DH , то па тэарэме пра тры перпендыкуляры прамая BC перпендыкулярная нахіленай DH , г. зн. адрэзак DH выражае шуканую адлегласць. Каб яе вылічыць, знойдзем спачатку вышыню AH трохвугольніка ABC . Па формуле Герона вызначым плошчу S гэтага трохвугольніка, што дазволіць знайсці і яго вышыню AH :

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

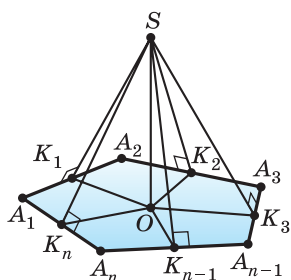
$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6,6.$$

Цяпер, улічыўшы, што трохвугольнік DAH — прамавугольны з прамым вуглом A , па тэарэме Піфагора знойдзем DH :

$$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6.$$

Прыклад 3. Дакажам, што калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад старон многавугольніка, то ў гэты многавугольнік можна ўмежыць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка.

Няхай пункт S роўнаадлеглы ад старон A_1A_2 , A_2A_3 , ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многавугольніка $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ і SO — перпендыкуляр з пункта S на плоскасць гэтага многавуголь-



Рыс. 370

ніка. Тады перпендыкуляры $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, апущчаныя з пункта O на стораны многавугольніка, роўныя адзін аднаму (рыс. 370).

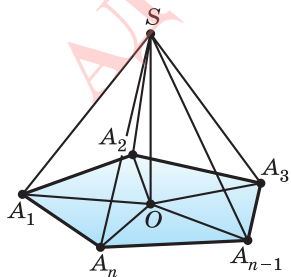
Злучым пункт O з пунктамі $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n$. Паколькі адрэзкі $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ — праекцыі адрэзкаў $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$ на плоскасць многавугольніка, стораны якога $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ адпаведна перпендыкулярныя нахіленым

ным $SK_1, SK_2, \dots, SK_{n-1}, SK_n$, то гэтыя стораны і адпаведна адрэзкі $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$ перпендыкулярныя. Значыць, трохвугольнікі $SOK_1, SOK_2, \dots, SOK_{n-1}, SOK_n$ прамавугольныя і ўсе яны маюць агульны катэт SO і роўныя гіпатэнузы. Таму гэтыя трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і адрэзкі $OK_1, OK_2, \dots, OK_{n-1}, OK_n$, што азначае роўнаадлегласць пункта O ад старон многавугольніка. Значыць, у гэты многавугольнік можна ўмежыць акружнасць з цэнтрам O .

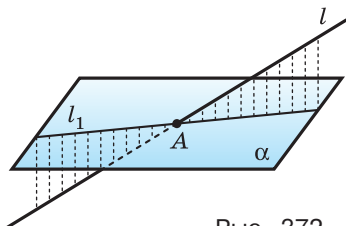
Прыклад 4. Калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад вяршынь многавугольніка, то каля гэтага многавугольніка можна апісаць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апущчанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка.

Выкарыстаўшы рысунак 371, правядзіце доказ гэтага сцверджання самі.

Цяпер увядзём паняцце вугла паміж прамой і плоскасцю. Няхай ёсць плоскасць α і прамая l , якая яе перасякае і не перпендыкулярная α (рыс. 372). Асновы перпендыку-



Рыс. 371



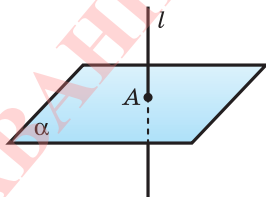
Рыс. 372

ляраў, апущчаных з пунктаў прамой l на плоскасць α , утвараюць прамую l_1 . Гэтая прамая называецца *праекцыяй прамой l на плоскасць α* .

Вуглом паміж прамой і плоскасцю, што перасякае гэтую прамую і не перпендыкулярная ёй, называецца вугал паміж прамой і яе праекцыяй на плоскасць.

Вугал паміж прамой і плоскасцю — найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэтая прамая з усімі прамымі плоскасцямі.

Калі прамая l перпендыкулярная плоскасці α , то яе праекцыяй на гэтую плоскасць з'яўляецца пункт A перасячэння прамой з плоскасцю (рыс. 373). У гэтым выпадку прамая l утварае з усімі прамымі плоскасцямі вуглы, роўныя 90° . Гэты вугал і прымаецца ў якасці вугла паміж прамой і перпендыкулярнай ёй плоскасцю.



Рыс. 373

Калі прамая l паралельная плоскасці α , то яе праекцыяй на плоскасць з'яўляецца прамая l_1 , паралельная l . Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным 0° . Таму вугал паміж паралельнымі прамой і плоскасцю прымаецца роўным 0° .



1. Які адрэзак называецца перпендыкулярам да плоскасці? Які пункт называецца асновай перпендыкуляра?
2. Які адрэзак называецца нахіленай да плоскасці? Які пункт называецца асновай нахіленай?
3. Сфармулюйце сцверджанне пра параўнанне даўжынь перпендыкуляра і нахіленай да плоскасці, праведзеных з аднаго пункта.
4. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці.
6. Што называецца адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі?
7. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць да плоскасці ад любога пункта прамой, паралельнай гэтай плоскасці.
8. Што называецца адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю?
9. Сфармулюйце сцверджанне пра агульны перпендыкуляр дзвюх скрыжавальных прамых.
10. Што называецца адлегласцю паміж скрыжавальнымі прамымі?
11. Сфармулюйце тэарэму пра тры перпендыкуляры.
12. Якім дачыненнем звязаны многавугольнік і пункт, роўнаадлеглы ад старон гэтага многавугольніка?

13. Якім дачыненнем звязаны многавугольнік і пункт, роўнаадлеглы ад вяршынь гэтага многавугольніка?
14. Што называецца праекцыяй прамой на плоскасць?
15. Што называецца вуглом паміж прамой і плоскасцю?

880. Укажыце, у чым адрозненне:

а) перпендыкуляра да плоскасці і прамой, перпендыкулярнай плоскасці;

б) нахіленай да плоскасці і прамой, што перасякае плоскасць.

881. Дакажыце, што калі з аднаго пункта па-за плоскасцю да яе праведзены дзве нахіленыя, то:

а) нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя адна адной;

б) тая нахіленая большая, праекцыя якой большая;

в) роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі;

г) большая нахіленая мае большую праекцыю.

882. З пункта A да плоскасці α праведзены чатыры роўныя нахіленыя AH , AY , AZ , AT . Дакажыце, што пункты H , Y , Z , T належаць адной акружнасці, цэнтрам якой з'яўляецца праекцыя O пункта A на плоскасць α .

883. З аднаго пункта праведзены да плоскасці перпендыкуляр і нахіленая, вугал паміж якімі роўны β . Знайдзіце:

а) нахіленую і яе праекцыю на дадзеную плоскасць, калі перпендыкуляр роўны d ;

б) перпендыкуляр і праекцыю нахіленай, калі нахіленая роўная m .

884. Пункт K належыць прамой p , якая праходзіць праз вяршыню A прамавугольніка $ABCD$ і перпендыкулярная да яго плоскасці. Улічыўшы, што $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, знайдзіце адлегласць:

а) ад пункта K да плоскасці прамавугольніка $ABCD$;

б) паміж прамымі AK і CD .

885. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 10 см і 17 см, праекцыі якіх адрозніваюцца на 9 см. Знайдзіце гэтыя праекцыі.

886. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя. Знайдзіце даўжыні нахіленых, улічыўшы, што:

а) адна з іх на 14 см большая за другую, а праекцыі нахіленых роўныя 16 см і 40 см;

б) нахилення адносяцца як $1 : 2$, а праекцыі нахиленых роўныя 10 см і 70 см .

887. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахиленыя даўжынямі 2 м кожная. Знайдзіце адлегласць ад пункта да плоскасці, улічыўшы, што нахиленыя ўтвараюць вугал у 60° , а іх праекцыі перпендыкулярныя.

888. Даўжыня перпендыкуляра PQ з пункта P да плоскасці роўная 1 , а даўжыні нахиленых PA і PB да гэтай самай плоскасці роўныя 2 . Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB . Знайдзіце QC , улічыўшы, што:

- а) $\angle APB = 90^\circ$; б) $\angle APB = \beta$.

889. З вяршыні B тупога вугла паралелаграма $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BH . Знайдзіце стораны паралелаграма, улічыўшы, што $AH = 5\text{ см}$, $HD = HC = 8,5\text{ см}$, $AC = 1,5\sqrt{33}\text{ см}$.

890. Пункт M адлеглы на 40 см ад кожнай вяршыні правільнага трохвугольніка ABC са стараной 60 см . Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці ABC .

891. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 374). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж пунктам P і прамой:

- а) RS ; б) P_1S_1 ; в) RR_1 ; г) Q_1R_1 .

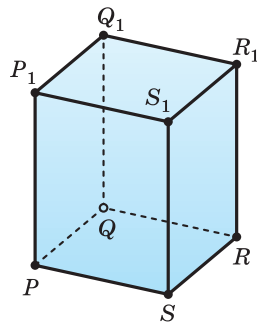
892. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 374). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі:

- а) $PQRS$ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PP_1Q_1Q і SS_1R_1R ;
в) PP_1S_1S і QQ_1R_1R .

893. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 374). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж паралельнымі прамой і плоскасцю:

- а) PQ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PQ_1 і SS_1R_1R ;
в) PR і $P_1Q_1R_1S_1$.

894. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 374).



Рыс. 374

Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж скрыжавальнымі прамымі:

- а) PQ і SS_1 ; б) PQ_1 і SS_1 ; в) PR і P_1S_1 .

895. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 374). Назавіце праекцыю прамой:

- а) PQ на плоскасць SS_1R ;
 б) PQ на плоскасць QQ_1R_1 ;
 в) PQ_1 на плоскасць PQR ;
 г) PQ_1 на плоскасць SS_1R_1 ;
 д) PR_1 на плоскасць QRS ;
 е) PR_1 на плоскасць PQ_1Q .

896. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 374). Назавіце вугал паміж прамой:

- а) PQ і плоскасцю SS_1R ; г) PR_1 і плоскасцю PQ_1Q ;
 б) PQ і плоскасцю QQ_1R_1 ; д) PR_1 і плоскасцю QRS ;
 в) PQ_1 і плоскасцю PQR ; е) PR_1 і плоскасцю QRR_1 .

897. Праз вяршыню A трохвугольніка ABC паралельна прамой BC праведзена плоскасць γ , і з пунктаў B і C на плоскасць γ апущаны перпендыкуляры BB_1 і CC_1 . Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC , улічыўшы, што $\angle B_1AC_1 = 90^\circ$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 25\sqrt{2}$ см, а адлегласць паміж прамой BC і плоскасцю γ роўная 5 см.

898. Праз адну са старон ромба праведзена плоскасць, адлеглая ад супрацьлеглай стараны ромба на 8 см. Знайдзіце праекцыі старон ромба на гэтую плоскасць, улічыўшы, што праекцыі дыяганалей на яе роўныя 16 см і 4 см.

899. Праз аснову AB трапецыі $ABCD$ праведзена плоскасць α , адлеглая ад другой асновы на t (рыс. 375). Знайдзіце адлегласць ад пункта O перасячэння дыяганалей трапецыі да плоскасці α , улічыўшы, што асновы трапецыі адносяцца як $p : q$.

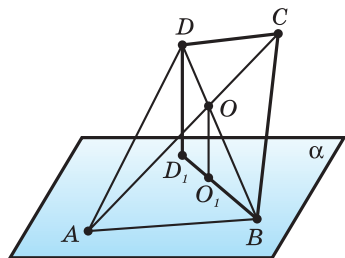


Рис. 375

900. Канцы адрэзка даўжынёй 100 см належаць паралельным плоскасцям, адлеглым на 80 см. Знайдзіце праекцыі адрэзка на кожную плоскасць.

901. Ёсць дзве паралельныя плоскасці. З двух пунктаў адной з іх праведзены нахіленыя да другой плоскасці даў-

жынямі 37 см і 125 см, прычым праекцыя першай нахіленай на адну з плоскасцей роўная 12 см. Знайдзіце праекцыю другой нахіленай.

902. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL , адлеглыя на a , а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C , адлеглы ад MN на b і ад KL на c . Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ , улічыўшы, што:

а) $a = 66, b = c = 65$;

б) $a = 6, b = 25, c = 29$.

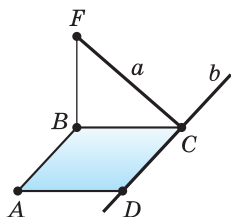
903. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, у якой $PA = PB = PC = 2, AC = 3$ і $AB = 2$. Нарысуйце і знайдзіце адлегласць ад вяршыні да асновы піраміды, улічыўшы, што кант BC роўны:

а) 2;

б) 3;

в) 4.

904. З вяршыні B квадрата $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр QB . Знайдзіце плошчу трохвугольніка QAD , улічыўшы, што $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.



Рыс. 376

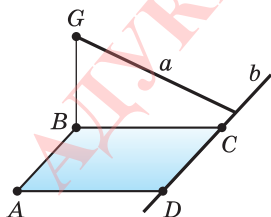
905. Укажыце ўзаемае размяшчэнне прамых a і b на рысунку:

а) 376, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BF \perp ABC$;

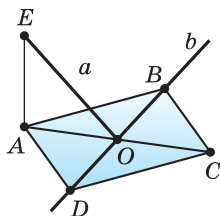
б) 377, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BG \perp ABC$;

в) 378, улічыўшы, што $ABCD$ — ромб і $AE \perp ABC$;

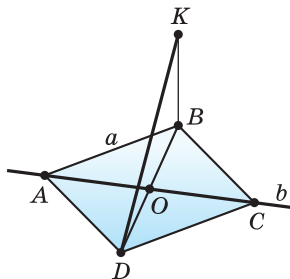
г) 379, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BK \perp ABC$.



Рыс. 377



Рыс. 378



Рыс. 379

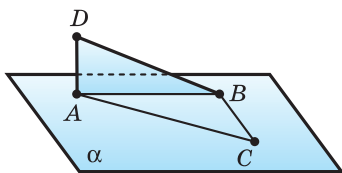
906. Вуглы BAC і ACB трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 41° і 49° , а адрэзак AD перпендыкулярны плос-

касці гэтага трохвугольніка (рыс. 380). Дакажыце, што прамыя BC і BD перпендыкулярныя.

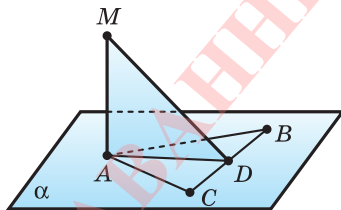
907. З вяршыні A трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AM і пункт M злучаны з сярэдзінай D стараны BC (рыс. 381). Дакажыце, што:

а) прамыя MD і BC перпендыкулярныя, калі стораны AB і AC роўныя;

б) стораны AB і AC роўныя, калі прамыя MD і BC перпендыкулярныя.



Рыс. 380



Рыс. 381

908. Адрэзак AD даўжынёй 12 см перпендыкулярны плоскасці раўнабокага трохвугольніка ABC з асновай BC і бакавой старонай, адпаведна роўнымі 6 см і 5 см. Вызначыце, на якіх адлегласцях ад прамой BC знаходзяцца канцы адрэзка AD .

909. З вяршыні большага вугла трохвугольніка са старонамі 20 см, 34 см і 42 см узведзены перпендыкуляр да плоскасці гэтага трохвугольніка даўжынёй 30 см. Знайдзіце адлегласць ад яго канцоў да большай стараны трохвугольніка.

910. Стораны AB , AC , BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 13, 12 і 5, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка (рыс. 382). Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

911. Адрэзкі AE і CF — вышыні трохвугольніка ABC , а адрэзак BK — перпендыкуляр да плоскасці ABC (рыс. 383). Дакажыце, што прамыя KD і AC перпендыкулярныя.

912. Пункт M ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B ромба $ABCD$ і перпендыкулярная яго плоскасці. Знайдзіце адлегласці ад пункта M да прамых, якія змяшчаюць стораны ромба, улічваючы, што $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, $BM = 12,5$ см.

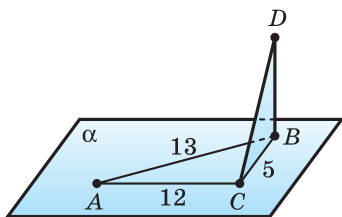


Рис. 382

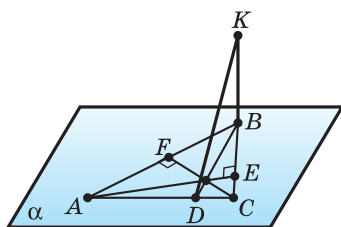


Рис. 383

913. Дакажыце, што калі прамень KA не ляжыць у плоскасці неразгорнутага вугла LKM і вострыя вуглы AKL і AKM роўныя, то праекцыя праменя KA на плоскасць LKM з'яўляецца бісектрысай вугла LKM .

914. Пункт X належыць прамой, якая праходзіць праз цэнтр O правільнага трохвугольніка ABC перпендыкулярна яго плоскасці. Дакажыце, што:

а) адлегласці ад пункта X да вяршынь трохвугольніка роўныя;

б) адлегласці ад пункта X да старон трохвугольніка роўныя;

в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;

г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$.

915. Пункт F ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B квадрата $ABCD$ перпендыкулярна яго плоскасці. Знайдзіце адлегласць ад пункта F да прамых, якім належаць стораны і дыяганалі квадрата, улічыўшы, што $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм.

916. Ёсць прававугольны трохвугольнік ABC , адзін катэт якога і прылеглы да яго востры вугал роўныя m і β . З вяршыні прамога вугла C узведзены перпендыкуляр CD , роўны n . Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB .

917. Улічыўшы, што пункт K ляжыць на прамой, якая праходзіць праз цэнтр O сіметрыі ромба $ABCD$ перпендыкулярна да яго плоскасці:

а) дакажыце роўнасць адлегласцей ад пункта K да ўсіх прамых, якім належаць стораны ромба;

б) знайдзіце гэтую адлегласць, калі $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;

в) $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

918. З цэнтра O акружнасці, умежанай у раўнабокi трохвугольнiк ABC з асновай BC i бакавой стараной AB , адпаведна роўнымi 18 см i 15 см, узведзены перпендыкуляр OX , роўны 6 см. Знайдзіце адлегласці пункта X ад старон трохвугольнiка.

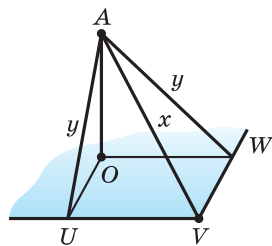
919. Асновай трохвугольнай піраміды $DFGH$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнiк FGH з гіпатэнузай FG i вуглом HFG у 30° . Знайдзіце вышыню грані FDG , праведзеную з вяршыні D , улічыўшы, што бакавы кант DH перпендыкулярны плоскасці асновы i роўны 4 см, а $FH = 6$ см.

920. У раўнабокiм трохвугольнiку XYZ з асновай XY бакавая старана роўная 20, а вугал пры аснове складае 30° . З яго вяршыні Y да плоскасці XYZ узведзены перпендыкуляр QY . Знайдзіце адлегласці ад пункта Q да прамой XZ i ад пункта Y да плоскасці XQZ , улічыўшы, што $QY = 10$.

921. Асновай чатырохвугольнай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ з вуглом ABC i стараной AB , адпаведна роўнымi 60° i a . Яе бакавы кант AQ перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце гэты кант i адлегласць ад пункта A да плоскасці QDC , улічыўшы, што плошча грані QDC роўная a^2 .

922. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце Q , прамая HQ перпендыкулярная плоскасці дадзенага паралелаграма. Знайдзіце вышыню паралелаграма, улічыўшы, што яго стораны роўныя 20 см i 50 см, а адлегласці ад пункта H да старон паралелаграма роўныя 17 см i 25 см.

923. Пункт A , які ляжыць па-за плоскасцю прамога вугла UVW , адлеглы ад яго вяршыні V на x , а ад кожнай з старон — на y (рыс. 384). Знайдзіце адлегласць AO пункта A ад плоскасці прамога вугла.



Рыс. 384

924. Ёсць прамавугольны трохвугольнiк XYZ з гіпатэнузай YZ i катэтам XY , адпаведна роўнымi 13 см i 12 см. Да плоскасці трохвугольнiка з цэнтра Q умежанага ў яго круга узведзены перпендыкуляр QG даўжынёй 1,5 см. Знайдзіце адлегласці пункта G ад старон трохвугольнiка i ад яго вяршынь.

925. З вяршыні M трохвугольніка MNK па-за яго плоскасцю праведзена прамая ML , якая ўтварае са старанамі MN і MK роўныя вострыя вуглы. Вызначыце, на якія часткі праекцыя прамой ML на плоскасць трохвугольніка раздзяляе старану NK , улічыўшы, што $MN = 51$ м, $MK = 34$ м і $NK = 30$ м.

926. Вяршыня піраміды, у аснове якой ляжыць прамавугольная трапецыя з перыметрам 32, знаходзіцца на адлегласці $\sqrt{17}$ ад кантаў асновы. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што яе найбольшы і найменшы бакавыя канты роўныя $7\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$.

927. З вяршыні B прамавугольніка $ABCD$, у якога $AB = 6$ см і $AD = 6\sqrt{2}$ см, да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BQ . Знайдзіце адлегласць ад пункта Q да плоскасці прамавугольніка, улічыўшы, што вугал паміж прамой QD і плоскасцю ABC роўны 30° .

928. Дакажыце, што праекцыяй прамой на плоскасць з'яўляецца прамая.

929. Знайдзіце праекцыю на плоскасць нахіленай даўжынёй m , улічыўшы, што нахіленая ўтварае з плоскасцю вугал, роўны:

- а) 45° ; б) 60° ; в) 30° .

930. Адрэзак даўжынёй 10 см перасякае плоскасць: канцы яго знаходзяцца на адлегласці 3 см і 2 см ад плоскасці. Знайдзіце вугал паміж дадзеным адрэзкам і плоскасцю.

931. З пункта, адлеглага ад плоскасці на d , праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць паміж сабой вугал φ , а з плоскасцю — вуглы α і β . Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:

- а) $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

932. З пункта, адлеглага ад плоскасці на d , праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з плоскасцю вуглы α і β , а іх праекцыі — вугал φ . Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:

- а) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 150^\circ$;
б) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

933. Дакажыце, што вугал паміж прамой і плоскасцю ёсць найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэтая прамая з усімі

прамымі плоскасці, што праходзяць праз пункт перасячэння прамой з плоскасцю.

934. З пункта A , адлеглага на d ад плоскасці α , праведзены нахіленыя AB і AC пад вуглом 30° да плоскасці. Іх праекцыі на плоскасць α утвараюць вугал у 120° . Знайдзіце даўжыню адрэзка BC .

935. Дакажыце, што:

а) калі адзін катэт раўнабокага прамавугольнага трохвугольніка належыць плоскасці, а другі ўтварае з ёю вугал у 45° , то гіпатэнуза ўтварае з плоскасцю вугал у 30° ;

б) калі нахіленая a утварае з плоскасцю α вугал у 45° , а прамая b плоскасці — вугал у 45° з праекцыяй нахіленай, то вугал паміж прамымі a і b роўны 60° .

936. Пункт P адлеглы на a ад кожнай вяршыні квадрата $ABCD$ са стараной a . Знайдзіце вугал, які ўтварае з плоскасцю квадрата прамая AP .

937. Ёсць трохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце вугал паміж кантам піраміды і гранню, якой ён не належыць.

938. З пункта Q да плоскасці α праведзены такія роўныя нахіленыя QA і QB , што вугал паміж імі роўны 60° , а вугал паміж іх праекцыямі на плоскасць α складае 90° . Знайдзіце вугал, які ўтварае нахіленая QA з плоскасцю α .

939. Бакавы кант RA чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка RAC , улічыўшы, што кант RB роўны 20 мм, а бакавыя канты RB і RD нахіленыя да плоскасці асновы пад вугламі 30° і 45° адпаведна.

940. Дакажыце, што калі ў правільнай трохвугольнай піраміды старана асновы роўная адлегласці ад вяршыні да плоскасці асновы, то бакавыя канты нахіленыя да плоскасці асновы пад вугламі ў 60° .

941. Вяршыня правільнай чатырохвугольнай піраміды адлеглая ад плоскасці асновы на h , а яе бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы ў 60° . Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

942. Кант куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ роўны a . Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AB_1 і CD_1 ;

б) AC і BB_1 ;

в) $A_1 D$ і $C_1 A$.

943. Вимярэнні прамавугольнага паралелепіпеда роўныя a , b і c . Знайдзіце адлегласць паміж дыяганаллю паралелепіпеда і дыяганалямі яго граней.

944. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя a . Знайдзіце адлегласць паміж кантамі, якія не належаць адной грані.

945. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.

946. Пункт M — сярэдзіна канта AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі $A_1 M$ і $B_1 C$, улічыўшы, што кант куба роўны a .

947. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.

948. Дакажыце тоеснасць:

а) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$;

б) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$.

949. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = 4$;

б) $\operatorname{tg} \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{tg} 2z$;

в) $\sin 2\gamma - \operatorname{tg} \gamma = \cos 2\gamma \cdot \operatorname{tg} \gamma$;

г) $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \cos 2x \cdot \operatorname{ctg} x$;

д) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} y} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} 2y$;

е) $\frac{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg} 3b \cdot 3 \operatorname{ctg} b$.

950. Дакажыце, што калі $a + b + c = \pi$, то:

а) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$;

б) $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$.

951. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{tg} 3\beta - \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 3\beta \cdot \operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta$;

б) $\frac{1 + \cos \beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta}{2 \cos^2 \beta + \cos \beta - 1} = 2 \cos \beta$;

в) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+y)} = \operatorname{tg} y$.

952. Увёўшы дапаможны аргумент, напрыклад, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, выявіце здабыткам выраз:

а) $1 + \sin \alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin y$; д) $\sqrt{3} + 2 \cos a$;

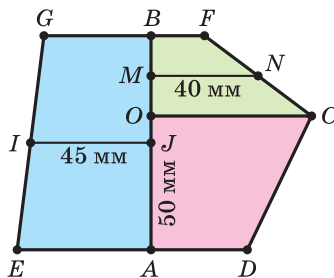
б) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 35^\circ$; е) $\frac{1}{4} - \cos^2 c$.

953. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\sin x + \cos 2x$; в) $\sin 2z - \cos 4z$;

б) $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$; г) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

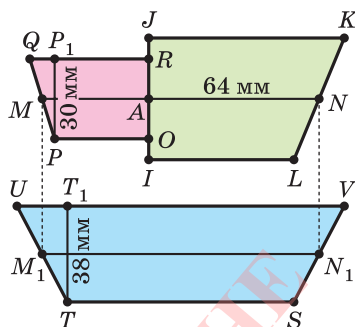
954. На адрэзку AB выбралі пункт O , адлеглы на 50 мм ад пункта A , і на адрэзках-частках OA і OB як на вышынях пабудавалі такія прамавугольныя трапецыі $OCDA$ і $OCFB$, што сярэдняя лінія другой — 40 мм, а іх плошчы адносяцца як 2 : 1. Калі на адрэзку AB як на вышыні пабудавалі трэцюю прамавугольную трапецыю $ABGE$ з плошчай, роўнай супольнай плошчы трапецый $OCDA$ і $OCFB$, то яе сярэдняя лінія аказалася роўнай 45 мм (рыс. 385). Знайдзіце стораны і вуглы гэтых трапецый, улічыўшы, што аснова OC трапецыі $OCFB$ у два разы большая за бакавую старану OB .



Рыс. 385

955. На адрэзку MN выбралі пункт A , адлеглы на 64 мм ад пункта N , і на адрэзках-частках AM і AN як на сярэдніх лініях пабудавалі такія трапецыі $OPQR$ і $ILKJ$, што

вышыня першай з іх роўная 30 мм, а іх плошчы адносяцца як 45 : 88. Калі б на адрэзку MN як на сярэдняй лініі пабудавалі трэцюю трапецыю $STUV$ з плошчай, роўнай супольнай плошчы трапецый $OPQR$ і $ILKJ$, то яе вышыня аказалася б роўнай 38 мм (рыс. 386). Знайдзіце плошчы трапецый $OPQR$ і $ILKJ$.



Рыс. 386

956. Тры матацыклісты A , B і C выехалі адначасова з пэўнага пункта кальцавой трасы ў адным кірунку з пастаяннымі скарасцямі і праз пэўны час зноў апынуліся ў адным пункце. Вызначыце, колькі разоў за гэты час A абганяў C , улічыўшы, што A 3 разы абганяў B і B 4 разы абганяў C .

957. У акружнасць умежаны правільны n -вугольнік $A_1A_2...A_n$. Дакажыце, што значэнне выразу $AA_1^2 + AA_2^2 + ... + AA_n^2$ не залежыць ад выбару пункта A на акружнасці, і знайдзіце гэтае значэнне.

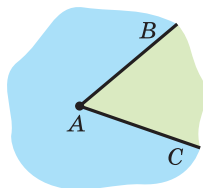
958. Рашыце сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^5 + xy = y^{10} + y^6, \\ x^6 + x^2 = 8y^3 + 2y. \end{cases}$$

18. Перпендыкулярнасць плоскасцей

Два прамені з агульным пачаткам раздзяляюць плоскасць на дзве часткі, кожная з якіх называецца *вуглом* (рыс. 387).

Аналагічна дзве паўплоскасці з агульнай мяжой раздзяляюць прастору на дзве часткі (рыс. 388). Кожную з гэтых частак разам з паўплоскасцямі называюць **двухгранным вуглом**. Паўплоскасці, што абмяжоўваюць двухгранны вугал, называюць



Рыс. 387

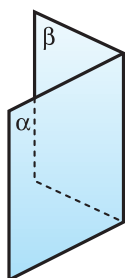


Рис. 388

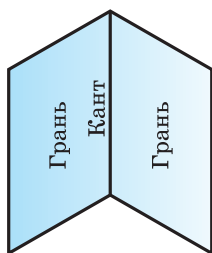


Рис. 389

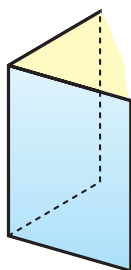


Рис. 390

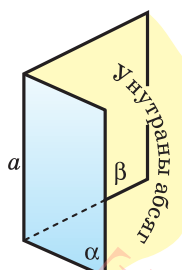


Рис. 391

гранями вугла, а агульную прамую — **кантам** двухграннага вугла (рис. 389).

Звычайна разглядаюць меншы з двухгранных вуглоў з дадзенымі гранямі (рис. 390). Пункты вугла, што не ляжаць на яго гранях, складаюць *унутраны абсяг* двухграннага вугла (рис. 391).

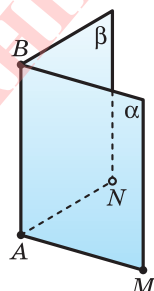


Рис. 392

Двухгранны вугал звычайна абазначаюць па канце: $\angle a$ (гл. рис. 391) або $\angle AB$ (рис. 392). Пры неабходнасці можна далучыць назвы граней або назвы пунктаў на гранях: $\angle \alpha\beta$ (гл. рис. 391), або $\angle \alpha AB\beta$ (гл. рис. 392), або $\angle MABN$ (гл. рис. 392).

Мадэллю двухграннага вугла можа служыць двухсхільны дах (рис. 393), сцяна разам з адчыненымі дзвярыма (рис. 394), паўразгорнутая кніга (рис. 395).

Для вымярэння двухгранных вуглоў уведзіцца паняцце лінейнага вугла. Выберам на канце AB двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ пункт P , і ў яго гранях α і β з гэтага пункта пра-

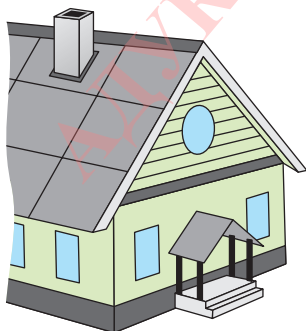


Рис. 393

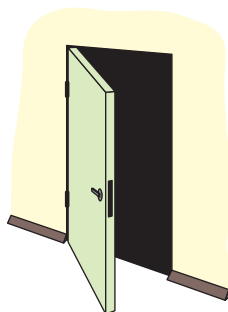


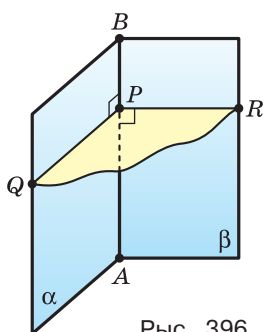
Рис. 394



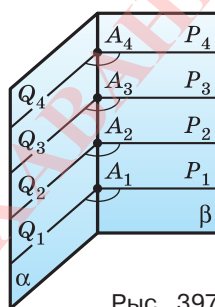
Рис. 395

вядзём прамені PQ і PR , перпендыкулярныя канту AB (рыс. 396). Атрыманы вугал QPR , стораны якога PQ і PR абмяжоўваюць частку плоскасці PQR , што належыць двухграннаму вуглу $\alpha AB \beta$, называюць **лінейным вуглом** двухграннага вугла. Плоскасць лінейнага вугла перпендыкулярная да канта двухграннага вугла, бо па пабудаванні прамені PQ і PR перпендыкулярныя канту AB .

Зразумела, што двухгранны вугал мае бясконца многа лінейных вуглоў (рыс. 397).



Рыс. 396

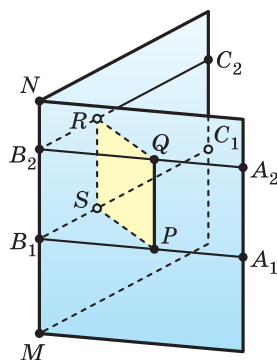


Рыс. 397

Тэарэма 10. Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ — лінейныя вуглы двухграннага вугла MN (рыс. 398). Дакажам, што $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

Адкладзём на старанах вуглоў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ роўныя адрэзкі B_1P , B_2Q , B_1S , B_2R . Тады атрымаюцца чатырохвугольнікі PQB_2B_1 і SRB_2B_1 , у якіх супрацьлеглыя стораны PB_1 і QB_2 , а таксама SB_1 і RB_2 роўныя па пабудаванні і паралельныя як перпендыкуляры да адной прамой, праведзеныя ў адпаведнай плоскасці. Таму $PQ = B_2B_1 = SR$ і $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А гэта азначае, што чатырохвугольнік $PQRS$ з'яўляецца паралелаграмам, што дазваляе зрабіць вывад пра роўнасць адрэзкаў PS і QR . Атрымалі, што ў трохвугольнікаў PSB_1 і QRB_2 роўныя адпа-



Рыс. 398

ведня стораны, таму трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і іх вуглы $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$.

Вымярэнне двухгранных вуглоў звязваецца з вымярэннем іх лінейных вуглоў. У залежнасці ад таго, якім — вострым, прамым, тупым, разгорнутым — з'яўляецца лінейны вугал двухграннага вугла, адрозніваюць *вострыя, прамыя, тупыя, разгорнутыя двухгранныя вуглы*. Двухгранны вугал, выяўлены на rysunku 399, — востры, на rysunku 400 — прамы, на rysunku 401 — тупы.

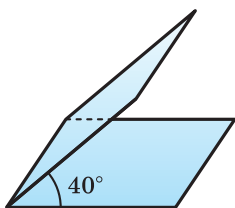


Рис. 399

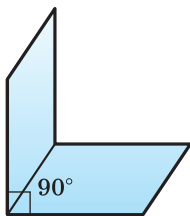


Рис. 400

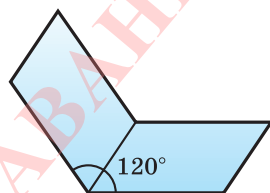


Рис. 401

Дзве перасякальныя плоскасці раздзяляюць прастору на чатыры двухгранныя вуглы з агульным кантам (рис. 402). Калі адзін з іх роўны α , то яшчэ адзін з іх таксама роўны α , а два астатнія — $180^\circ - \alpha$. Сярод гэтых вуглоў ёсць такія, якія не перавышае 90° , яго велічыню і прымаюць за велічыню вугла паміж перасякальнымі плоскасцямі.

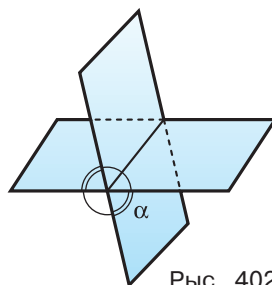


Рис. 402

Калі адзін з вуглоў, што атрымліваюцца пры перасячэнні дзвюх плоскасцей, прамы, то тры астатнія таксама прамыя (рис. 403).

Плоскасці, пры перасячэнні якіх утвараюцца прамыя двухгранныя вуглы, называюцца **перпендыкулярнымі плоскасцямі**.

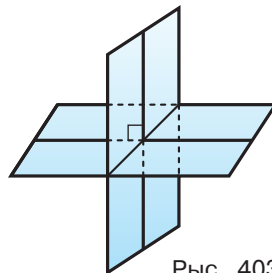


Рис. 403

Для абазначэння перпендыкулярнасці плоскасцей, як і для абазначэння перпендыкулярнасці прамых, выкарыстоўваюць знак \perp .

Мадэлямі перпендыкулярных плоскасцей могуць служыць крышка стала і яго бакавіна (рыс. 404), падлога пакоя і дзверы ў яго (рыс. 405).

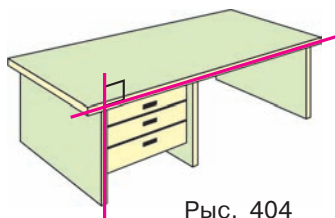


Рис. 404

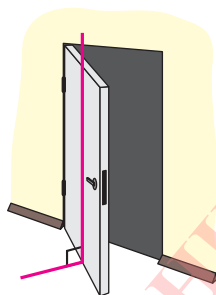


Рис. 405

Тэарэма 11. *Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то такія плоскасці перпендыкулярныя.*

Доказ. Няхай праз прамую a , якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце M , праходзіць плоскасць β (рыс. 406). Дакажам, што $\alpha \perp \beta$.

Плоскасці α і β перасякаюцца па пэўнай прамой MP , якая перпендыкулярная прамой a , бо па ўмове прамая a і плоскасць α перпендыкулярныя.

У плоскасці α правядзём прамую MN , перпендыкулярную прамой MP . Атрыманы вугал NMQ , дзе Q — пункт прамой a , ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha MP \beta$.

Паколькі па ўмове $a \perp \alpha$, то вугал NMQ — прамы, і, значыць, плоскасці α і β перпендыкулярныя.

Тэарэма 11 выражае прымету перпендыкулярнасці плоскасцей.

Вынік. *Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння дзвюх дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная да кожнай з іх (рыс. 407).*

Дакажам цяпер сцверджанне, адваротнае сцверджанню тэарэмы 11.

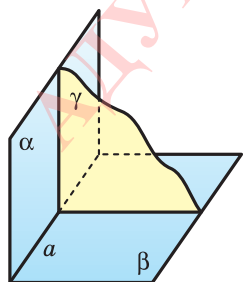


Рис. 407

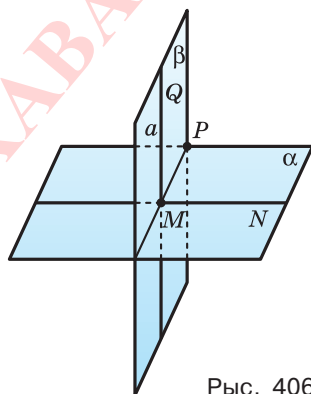
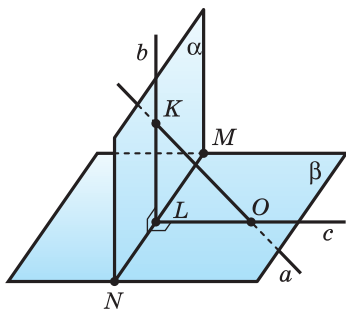


Рис. 406

Тэарэма 12. *Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей правесці прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэтая прамая належыць першай плоскасці.*



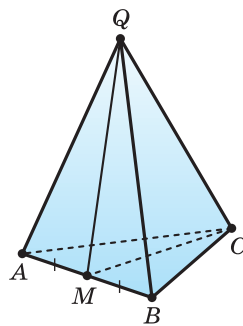
Рыс. 408

Доказ. Няхай дзве перпендыкулярныя плоскасці α і β перасякаюцца па прамой MN і праз пункт K плоскасці α праведзена прамая a , перпендыкулярная плоскасці β . Дакажам, што гэтая прамая належыць плоскасці α .

Праз пункт K у плоскасці α правядзём прамую b , перпендыкулярную MN , і праз пункт L іх перасячэння ў плоскасці β — прамую c , таксама перпендыкулярную MN (рыс. 408). Вугал паміж прамымі b і c прамы як лінейны вугал прамога двухграннага вугла. Атрымалі, што прамая b праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная плоскасці β , бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым MN і c гэтай плоскасці. А паколькі праз дадзены пункт да дадзенай плоскасці можна правесці толькі адну перпендыкулярную прамую, то прамыя b і a супадаюць. Значыць, прамая a належыць плоскасці α .

Прыклад 1. Пункт M — сярэдзіна канта AB пры аснове правільнай піраміды $QABC$ (рыс. 409). Дакажам, што плоскасць QCM перпендыкулярная плоскасці асновы ABC .

Прамая AB з'яўляецца асновай раўнабокіх трохвугольнікаў AQB і ACB . Таму яна перпендыкулярная медыянам QM і CM у гэтых трохвугольніках і разам з гэтым плоскасці QCM . З тэарэмы 12 вынікае, што плоскасць ABC , якая праходзіць праз перпендыкуляр AB да плоскасці QCM , ёй перпендыкулярная.



Рыс. 409

Вынік. *Калі дзве перасякальныя плоскасці перпендыкулярныя трэцяй плоскасці, то іх лінія перасячэння пер-*

пендыкулярная той самай плоскасці (рыс. 410).

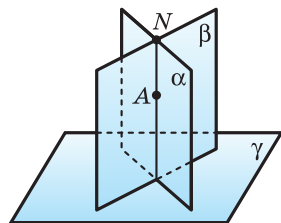
Прыклад 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны α . Знойдзем двухгранны вугал пры бакавым канце.

Няхай N — сярэдзіна канта AC , AK — перпендыкуляр да канта BQ , праведзены з пункта A (рыс. 411). З роўнасці трохвугольнікаў ABQ і CBQ вынікае, што $CK \perp BQ$. Таму вугал AKC — лінейны вугал двухграннага вугла BQ .

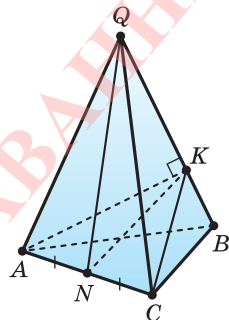
З прамавугольных трохвугольнікаў AKQ і ANQ атрымліваем: $AK = AQ \sin \alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка AKN знаходзім, што

$$\sin \left(\frac{\angle AKC}{2} \right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Таму $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$.



Рыс. 410



Рыс. 411



1. Што называюць вуглом? Што называюць двухгранным вуглом?
2. Што называюць гранню двухграннага вугла; кантам двухграннага вугла? Як абазначаюць двухгранны вугал?
3. Як пабудоваць лінейны вугал двухграннага вугла? Якую ўласцівасць маюць лінейныя вуглы двухграннага вугла?
4. Які двухгранны вугал называюць вострым; прамым; тупым; разгорнутым?
5. Якія плоскасці называюцца перпендыкулярнымі?
6. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці плоскасцей.
7. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, перпендыкулярнай да лініі перасячэння дзвюх плоскасцей.
8. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, праведзенай праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей перпендыкулярна другой плоскасці.
9. Сфармулюйце ўласцівасць лініі перасячэння дзвюх плоскасцей, якія перпендыкулярныя трэцяй.

959. Колькі двухгранних вуглоў мае:

- а) трохвугольная піраміда;
- б) паралелепіпед?

960. Ёсць паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рыс. 412), у аснове якога ляжыць квадрат. Назавіце яго:

- а) прамыя двухгранныя вуглы;
- б) перпендыкулярныя грані.

961. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назавіце лінейны вугал двухграннага вугла:

- а) DD_1 ; б) $A_1 B_1$.

962. Улічыўшы, што $STUVS_1 T_1 U_1 V_1$ — куб (рыс. 413), вызначыце:

- а) ці з'яўляецца вугал TVT_1 лінейным вуглом двухграннага вугла $T_1 SVT$;
- б) ці з'яўляецца вугал $T_1 ST$ лінейным вуглом двухграннага вугла $T_1 SVT$;
- в) велічыню двухграннага вугла $V_1 UTS$.

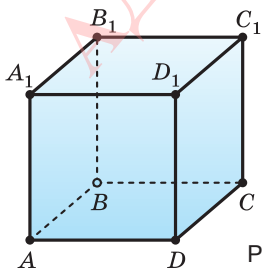
963. Ці могуць дзве плоскасці, кожная з якіх перпендыкулярная трэцяй плоскасці, быць:

- а) паралельнымі плоскасцямі;
- б) перпендыкулярнымі плоскасцямі?

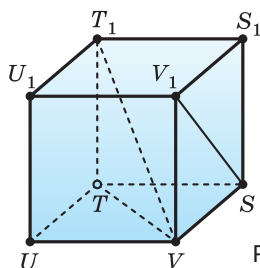
964. Улічыўшы, што пункт T ёсць сярэдзіна канта QR трохвугольнай піраміды $OPQR$, у якой асновай з'яўляецца правільны трохвугольнік PQR , а бакавыя канты роўныя адзін аднаму, вызначыце, ці з'яўляецца вугал:

- а) PRO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$;
- б) PTO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$.

965. Усе канты трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя адзін аднаму, а пункт M ёсць сярэдзіна канта AC . Дакажыце, што вугал DMB з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $BACD$.



Рыс. 412



Рыс. 413

966. Ёсць два двухгранныя вуглы, у якіх адна грань агульная, а дзве іншыя грані разам складаюць плоскасць. Дакажыце, што сума гэтых двухгранных вуглоў роўная 180° .

967. Дакажыце, што калі двухгранны вугал $\alpha AB\beta$ разбіць на два двухгранныя вуглы $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$ (рыс. 414), то лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ роўны суме лінейных вуглоў двухгранных вуглоў $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$.

968. З вяршыні X трохвугольніка XYZ , старана YZ якога ляжыць у плоскасці β , праведзена вышыня XA і перпендыкуляр XP да плоскасці β (рыс. 415). Дакажыце, што вугал XAP — лінейны вугал двухграннага вугла $XYZP$.

969. Дакажыце, што праз дадзены пункт можна правесці плоскасць, перпендыкулярную дадзенай плоскасці. Колькі існуе такіх плоскасцей?

970. Дакажыце, што плоскасць лінейнага вугла двухграннага вугла перпендыкулярная кожнай яго грані.

971. Прамая a не перпендыкулярная да плоскасці α . Дакажыце, што існуе плоскасць, якая змяшчае прамую a і перпендыкулярная плоскасці α .

972. На рысунку 416 двухгранныя вуглы $RABP$ і $PABQ$ роўныя. Дакажыце, што кожны пункт плоскасці ABP роўнаадлеглы ад плоскасцей ABR і ABQ .

973. Два пункты адной грані двухграннага вугла адлеглы ад яго канта на 51 см і 34 см, а першы з іх адлеглы ад другой грані на 15 см. Знайдзіце адлегласць да гэтай грані ад другога пункта.

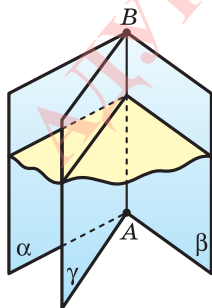


Рис. 414

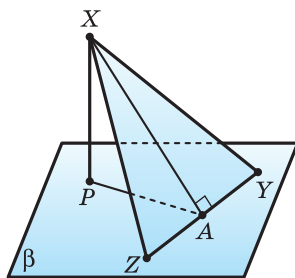


Рис. 415

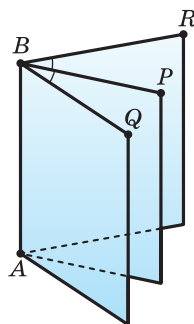


Рис. 416

974. На одной грані двухграннаго вугла выбраны пункт X , адлеглы на 36 см ад канта вугла і на 24 см ад другой яго грані, на другой грані гэтага вугла выбраны пункт Y , адлеглы ад першай грані на 18 см. Знайдзіце адлегласць пункта Y ад канта вугла.

975. Плоскасць прамавугольнага трохвугольніка ABC нахілена да плоскасці α пад вуглом у 45° (рыс. 417). Знайдзіце адлегласць вяршыні прамога вугла C ад плоскасці α , улічыўшы, што $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = a$.

976. Праз гіпатэнузу AB раўнабокага прамавугольнага трохвугольніка ABC пад вуглом у 45° да яго плоскасці праведзена плоскасць γ , адлеглая ад вяршыні прамога вугла C на l (рыс. 418). Знайдзіце плошчу трохвугольніка.

977. Большы катэт прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом і гіпатэнузай, адпаведна роўнымі 30° і c , ляжыць у плоскасці γ , якая з плоскасцю трохвугольніка складае вугал у 60° . Знайдзіце:

а) адлегласць ад вяршыні большага вострага вугла трохвугольніка да плоскасці γ ;

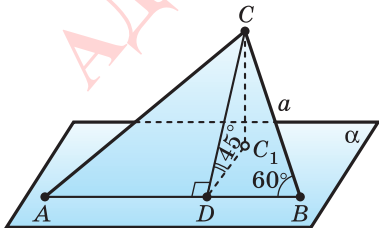
б) вугал паміж гіпатэнузай і плоскасцю γ .

978. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 7 см і 24 см, да плоскасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 30° .

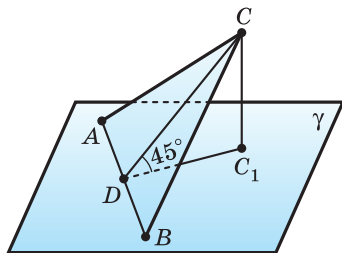
979. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік MNK , у якім $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Праз старану MK праведзена плоскасць пад вуглом 30° да плоскасці асновы, якая перасякае супрацьлеглы бакавы кант у пункце L . Знайдзіце:

а) адрэзак NL бакавога канта;

б) плошчу атрыманага сячэння.



Рыс. 417



Рыс. 418

980. Праз старану CE трохвугольніка CDE , у якога $CD = 9$ м, $DE = 6$ м і $CE = 5$ м, праходзіць плоскасць ρ , якая складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 45° . Знайдзіце адлегласць да плоскасці ρ ад вяршыні D .

981. Кант CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярны плоскасці ABC , $AB = BC = AC = 6$ і $BD = 3\sqrt{7}$. Знайдзіце двухгранныя вуглы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

982. Знайдзіце двухгранны вугал $ABCD$ трохвугольнай піраміды $ABCD$, улічыўшы, што вуглы DAB , DAC і ACB прамыя, $AC = CB = 5$ і $DB = 5\sqrt{5}$.

983. Агульная старана AB трохвугольнікаў ABC і ABD роўная 10 см. Плоскасці гэтых трохвугольнікаў узаемна перпендыкулярныя. Знайдзіце CD , улічыўшы, што трохвугольнікі:

а) роўнастароннія;

б) прамавугольныя раўнабокія з гіпатэнузай AB .

984. Плоскасці правільных трохвугольніка KDM і чатырохвугольніка $KMNP$ перпендыкулярныя. Знайдзіце DN , улічыўшы, што $KM = a$.

985. Правільныя трохвугольнікі ABC і DBC размешчаны так, што вяршыня D праектуецца ў цэнтр трохвугольніка ABC . Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі гэтых трохвугольнікаў.

986. Праекцыяй прамавугольніка $ABCD$ на плоскасць ω з'яўляецца квадрат ABC_1D_1 . Знайдзіце вугал паміж плоскасцю ω і плоскасцю прамавугольніка $ABCD$, улічыўшы, што $AB : BC = 1 : 2$.

987. Адрэзак EL , які злучае вяршыню E трохвугольніка CDE з вяршыняй L трохвугольніка CDL , перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Дакажыце, што плошча трохвугольніка CDE роўная $S \cdot \cos \varphi$, дзе S — плошча трохвугольніка CDL , φ — вугал паміж плоскасцямі CDL і CDE .

988. Паралельныя прамыя AB і CD ляжаць у розных гранях двухграннага вугла, роўнага 60° , а іх пункты A і D адлеглыя ад канта гэтага вугла адпаведна на 16 см і 13 см. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB і CD .

989. З пунктаў A і B канта двухграннага вугла, роўнага 120° , у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры AC і BD да канта. Знайдзіце адрэзак CD , улічыўшы, што $AB = AC = BD = a$.

990. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, а іх даўжыня роўная l . Знайдзіце косінус вугла, утворанага плоскасцю бакавой грані з плоскасцю асновы.

991. Перпендыкуляры, апущаныя з пунктаў C і D , узятых у розных перпендыкулярных плоскасцях, на лінію іх перасячэння, адпаведна роўныя c і d , а адлегласць паміж іх асновамі роўная l . Знайдзіце адрэзак CD і яго праекцыі на кожную з плоскасцей.

992. З пунктаў C і D канта двухграннага вугла, роўнага 120° , у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры CK і DL . Знайдзіце даўжыню адрэзка KL , улічыўшы, што $CK = DL = 3$ см.

993. У розных гранях двухграннага вугла з пунктаў M і N яго канта да гэтага канта ўзведзены перпендыкуляры MA і NB . Вызначыце адлегласць AB , улічыўшы, што:

а) двухгранны вугал прамы, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см і $NB = 12$ см;

б) двухгранны вугал роўны 120° , $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;

в) двухгранны вугал роўны 120° , $MN = MA = NB = x$.

994. З пунктаў M і N канта двухграннага вугла ў розных яго гранях узведзены перпендыкуляры MK і NL . Вызначыце велічыню двухграннага вугла, улічыўшы, што $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см і адлегласць паміж пунктамі K і L роўная 50 см.

995. Старана IJ трохвугольніка IJK , у якога $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, ляжыць у плоскасці ρ , а праекцыі дзвюх іншых старон трохвугольніка на гэтую плоскасць адносяцца як $1 : 2$. Вызначыце велічыню двухграннага вугла, што ўтвораны плоскасцямі ρ і IJK .

996. Знайдзіце двухгранны вугал, утвораны дзвюма бакавымі гранямі чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца квадрат са стараной $20\sqrt{3}$ см, а бакавыя канты роўныя 30 см кожны.

997. Адрэзак даўжынёй a з канцамі на дзвюх перпендыкулярных плоскасцях утварае з адной з іх вугал у 45° , а з другой — вугал у 30° . Знайдзіце частку лініі перасячэння плоскасцей, заключаную паміж перпендыкулярамі, апущанымі на яе з канцоў адрэзка.

998. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 12 дм, а ўсе бакавыя канты роўныя 24 дм. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да яе. Знайдзіце плошчу сячэння.

999. Асновай піраміды служыць трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см. Бакавы кант супраць сярэдняй па велічыні стараны асновы перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 16 см. Знайдзіце велічыні двухгранных вуглоў пры аснове гэтай піраміды.

1000. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

1001. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

1002. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

1003. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a , а ўсе бакавыя канты — b . Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай піраміды.

1004. Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць:

а) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} = -2\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}(x+y) - \operatorname{tg}(x-y)} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$;

г) $\frac{\sin^3 a + \sin 3a}{\cos^3 a - \cos 3a} = \operatorname{ctg} a$.

1005. Улічыўшы, што: $\operatorname{tg} a = \frac{7}{4}$ і $\operatorname{tg} b = \frac{9}{5}$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg}(a+b)$;

в) $\operatorname{ctg}(a+b)$;

б) $\operatorname{tg}(a-b)$;

г) $\operatorname{ctg}(a-b)$.

1006. Дакажыце тоеснасць:

а) $\operatorname{tg} 2\gamma - \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos 2\gamma}$;

б) $\cos t \cdot \sin^{-1} t - \sin t \cdot \cos^{-1} t = 2 \operatorname{ctg}^2 2t$.

1007. Увёўшы дапаможны аргумент, напрыклад, $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, выявіце здабытакм выраз:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 19^\circ$; в) $3 - \operatorname{tg}^2 z$; д) $\frac{3}{4} - \sin^2 t$;

б) $1 + \operatorname{ctg} 29^\circ$; г) $\frac{1}{4} - \sin^2 b$; е) $\frac{3}{4} - \cos^2 u$.

1008. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\sin a + \sin b + \sin (a - b)$; в) $1 + \sin g + \cos g$;

б) $\cos a + \cos b + \sin (a + b)$; г) $1 - \sin x - \cos x$.

1009. Знайдзіце суму:

а) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi$;

б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos k\alpha$.

1010. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x-6}$; в) $5x^2 + 2013x + 2008 = 0$;

б) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{x-3}{x+3} + \frac{x-4}{x+4}$; г) $\frac{x^2-x+2}{3x^2-5x-14} = \frac{x^2-x+6}{3x^2-5x-10}$.

1011. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{x}{x-1} < 1$; в) $\frac{2x-3}{3x-2} \leq \frac{4x-1}{x-4}$;

б) $\frac{2x^2}{x+1} > 1$; г) $|2x-1| + |3x-2| \geq 5x-3$.

1012. Ток у адным ланцугу роўны 4 А, у другім — 11 А, а напружанні ў іх адносяцца як 2 : 7. Знайдзіце магутнасці токаў у першым і другім ланцугах, улічыўшы, што ў трэцім ланцугу, магутнасць і сіла току ў якім адпаведна роўныя супольнай магутнасці і супольнай сіле токаў у першым і другім ланцугах, напружанне складае 170 В (рыс. 419).

1013. Напружанне ў адным ланцугу роўнае 160 В, у другім — 80 В, а токі ў іх адносяцца як 5 : 2. Знайдзіце магутнасці токаў у першым і другім ланцугах, улічыўшы, што ў трэцім ланцугу, магутнасць і напружанне ў якім адпаведна роўныя супольнай магутнасці і супольнаму напружанню ў першым і другім ланцугах, ток складае 8 А (рыс. 420).

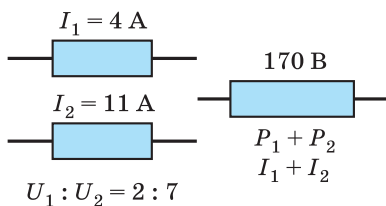


Рис. 419

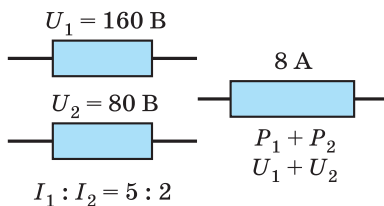


Рис. 420

1014. Рашыце ўраўненне $(2x^3 + x - 3)^3 = 3 - x^3$.

1015. У трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AK і BL . Знайдзіце велічыню вугла A , улічыўшы, што прамая KL дзеліць вугал AKC папалам.

1016. На паперы ў клетку нарысаваны прамавугольнік памерамі $m \times n$, стораны якога ідуць па лініях сеткі. Вызначыце, пры якіх значэннях зменных m і n гэты прамавугольнік можна разрэзаць на «вугалкі» з трох клетак.

Трыганаметрычныя функцыі

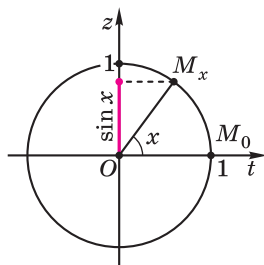
19. Функцыя $y = \sin x$

Мы ведаем, што сінусам ліку x называецца сінус вугла, роўнага x радыянаў.

Функцыя, якая задаецца формулай $y = \sin x$, дзе x — аргумент, называецца **сінусам**.

Тэарэма 1. Абсягам вызначэння функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў, а абсягам значэнняў — прамежак $[-1; 1]$.

Доказ. Сінус ліку x ёсць ардыната z пункта $M_x(t, z)$ адзінкавай акружнасці, атрыманага з пункта $M_0(1; 0)$ паваротам на вугал у x радыянаў (рыс. 421). Паколькі паварот магчымы на любы вугал x , як у дадатным, так і ў адмоўным кірунках, то абсягам вызначэння функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў.



Рыс. 421

Паколькі ардыната пункта адзінкавай акружнасці прымае значэнні ў межах ад -1 да 1 , то абсягам значэнняў функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$.

Такім чынам, графік функцыі $y = \sin x$ размешчаны ў паласе з межамі $y = -1$ і $y = 1$.

Функцыя $y = f(x)$ называецца **перыядычнай** з перыядам T , $T \neq 0$, калі для любога значэння аргумента x з абсягу вызначэння значэнні функцыі ў пунктах x , $x - T$, $x + T$ роўныя адзін аднаму, г. зн. $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Лік T пры гэтым называецца **перыядам** функцыі $f(x)$.

Функцыя $y = f(x)$ называецца **цотнай** (адпаведна няцотнай), калі для любога значэння x з абсягу вызначэння праўдзіцца роўнасць $f(-x) = f(x)$ (адпаведная $f(-x) = -f(x)$).

Графік цотнай функцыі сіметрычны адносна восі Oy , а графік няцотнай — адносна пачатку каардынат.

Тэарэма 2. *Функцыя $y = \sin x$ з'яўляецца няцотнай і перыядычнай, прычым найменшым дадатным перыядам з'яўляецца лік 2π .*

Доказ. Нагадаем, што функцыя f называецца няцотнай, калі для любога значэння x з абсягу вызначэння праўдзіцца роўнасць $f(-x) = -f(x)$. Паколькі для любога ліку x , як устаноўлена ў тэарэме 1 параграфу 11, праўдзіцца роўнасць

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

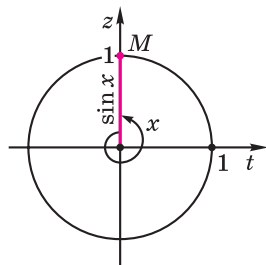
то гэта дазваляе сцвярджаць, што функцыя $y = \sin x$ няцотная.

Лікі x , $x - 2\pi$, $x + 2\pi$ на адзінкавай акружнасці выяўляюцца адным пунктам. Таму гэтым лікам адпавядае адна і тая ардыната, г. зн. сінусы лікаў x , $x - 2\pi$ і $x + 2\pi$ аднолькавыя:

$$\sin x = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi).$$

Гэта азначае, што лік 2π ёсць перыяд сінуса.

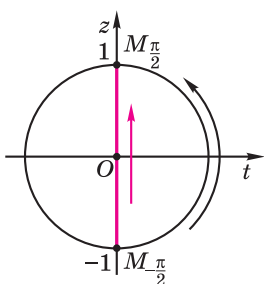
Застаецца даказаць, што гэты лік з'яўляецца найменшым з дадатных перыядаў гэтай функцыі. Няхай M — пункт адзінкавай акружнасці з ардынатай 1 (рыс. 422). Калі рухацца ў дадатным кірунку па адзінкавай акружнасці, то найбліжэйшым пунктам з ардынатай 1 будзе гэты самы пункт M , для чаго давядзецца прайсці ўсю акружнасць, г. зн. прайсці шлях даўжынёй 2π . Атрымліваецца, што дадатны перыяд функцыі $y = \sin x$ не можа быць меншым за 2π .



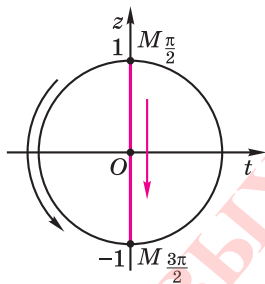
Рыс. 422

Тэарэма 3. *Функцыя $y = \sin x$ нарастае ад -1 да 1 на прамежках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, спадае ад 1 да -1 на прамежках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ і прымае нулявое значэнне пры значэннях аргумента x , роўных $k\pi$, дзе k — любы цэлы лік.*

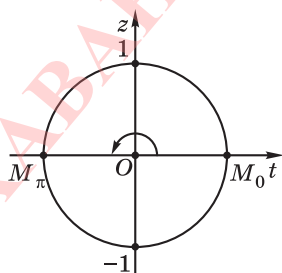
Доказ. Будзем рухаць пункт M_x па адзінкавай акружнасці ад становішча $M_{-\frac{\pi}{2}}$ да становішча $M_{\frac{3\pi}{2}}$ і прасочым за змяненнем ардынаты гэтага пункта. Гэтая ардыната пры руху да становішча $M_{\frac{\pi}{2}}$ нарастае ад -1 да 1 (рыс. 423), а пры далейшым руху да становішча $M_{\frac{3\pi}{2}}$ спадае ад 1 да -1 (рыс. 424). Пры гэтым у становішчах M_0 і M_π ардыната становіцца роўнай нулю (рыс. 425).



Рыс. 423



Рыс. 424



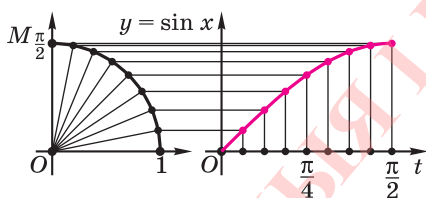
Рыс. 425

Улічыўшы тое, што перыядам функцыі $y = \sin x$ з'яўляецца лік 2π , атрымаем, што гэтая функцыя паводзіць сябе гэтаксама і на любым прамежку, які атрымліваецца з прамежку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ зрухам улева або ўправа на любую колькасць перыядаў, г. зн. на лік выгляду $2k\pi$, дзе k — цэлы лік. Такім чынам, на прамежках $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ функцыя $y = \sin x$ нарастае ад -1 да 1 , а на прамежках $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ спадае ад 1 да -1 . Улічыўшы перыяд функцыі $y = \sin x$ і тое, што лік π атрымліваецца з ліку 0 паваротам на π , можам сцвярджаць, што функцыя $y = \sin x$ у пунктах $k\pi$ прымае нулявое значэнне.

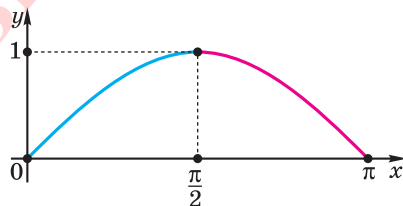
Для набліжанага пабудавання графіка функцыі $y = \sin x$, які называецца *сінусоідай*, можна выкарыстаць такія прыём. Падзелім першую чвэрць адзінкавай акружнасці на

8 долей і на столькі сама долей адрэзак $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ восі абсцыс, размясціўшы акружнасць так, як паказана на рысунку 426. Праз пункты дзялення дугі правядзём прамыя, паралельныя восі абсцыс, і адзначым пункты іх перасячэння з адпаведнымі прамымі, праведзенымі паралельна восі ардынат праз пункты дзялення адрэзка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ восі абсцыс. Гэтыя 8 пунктаў належаць графіку функцыі $y = \sin x$. Злучым іх плаўнай крывой і атрымаем частку шуканай сінусоіды на прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Цяпер улічым, што $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Гэта азначае, што графік сіноса сіметрычны адносна прамой $y = \frac{\pi}{2}$. У выніку атрымаем частку сінусоіды на прамежку $[0; \pi]$ (рыс. 427).

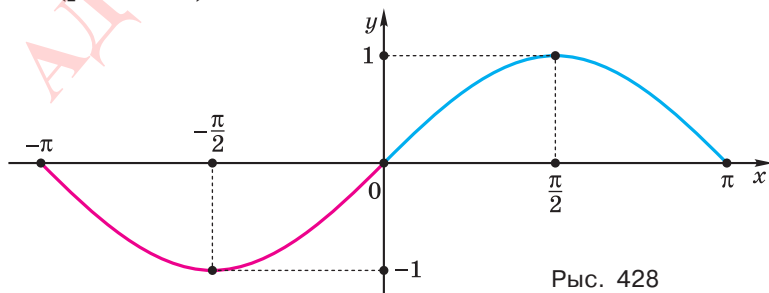


Рыс. 426



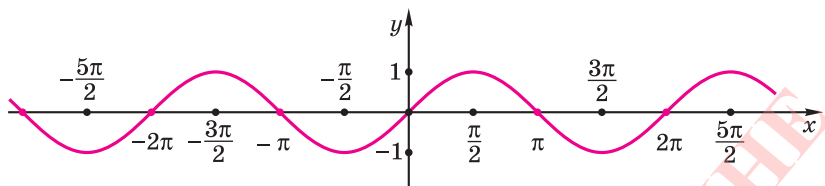
Рыс. 427

Выкарыстаўшы няцотнасць сіноса, атрымаем частку сінусоіды на прамежку $[-\pi; 0]$ сіметрычным адлюстраваннем пабудаванай часткі сінусоіды адносна пачатку каардынат (рыс. 428).



Рыс. 428

Мы пабудавалі сінусоіду на прамежку $[-\pi; \pi]$, даўжынёй 2π , роўнай перыяду сінуса. Гэта дазваляе цяпер атрымаць графік сінуса на ўсёй каардынатнай прамой паралельнымі пераносамі пабудаванай крывой (рыс. 429).



Рыс. 429

Тэарэма 4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказ. Знайдзем прырашчэнне Δy функцыі $y = \sin x$, якое адпавядае прырашчэнню аргумента Δx , а затым адносіну прырашчэнняў функцыі і аргумента:

$$\Delta y = \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

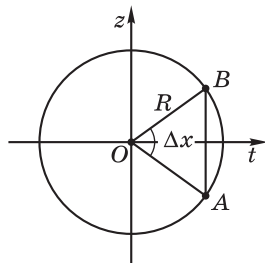
Значыць,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Калі Δx імкнецца да нуля, то $\frac{\Delta x}{2}$ таксама імкнецца да нуля, а $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ імкнецца да $\cos x$.

Значэнне выразу $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ імкнецца да

адзінкі, калі Δx імкнецца да нуля. Пераканаемся ў гэтым, выкарыстаўшы геаметрычныя меркаванні. Няхай цэнтральны вугал велічынёй у Δx радыянаў абапіраецца на дугу AB акружнасці з радыусам R (рыс. 430). Тады даўжыня гэтай



Рыс. 430

дугі роўная $2R \cdot \frac{\Delta x}{2}$, а даўжыня хорды AB , што сцягвае гэтую дугу, — $2R \sin \frac{\Delta x}{2}$. Таму

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{2R \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{2R \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{AB}{\cup AB}.$$

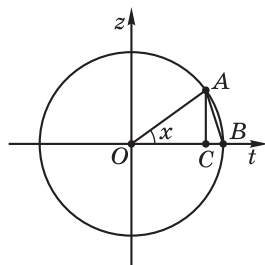
Калі Δx імкнецца да нуля, то даўжыня хорды AB набліжаецца да даўжыні дугі AB , а значыць, іх адносіна набліжаецца да адзінкі.

Такім чынам,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

► **Тэарэма 5.** $|\sin x| < |x|$ пры любых значэннях зменнай x , адрозных ад нуля, і $\sin x \approx x$ пры значэннях зменнай x , блізкіх да нуля.

Доказ. Няхай цэнтральны вугал AOB адзінкавай акружнасці роўны x (рыс. 431). З канца A радыуса OA апусцім перпендыкуляр AC на другі радыус OB . Тады $\sin x = AC$. Разам з гэтым $AC < AB < \cup AB$, а $\cup AB = x$, бо радыус акружнасці роўны 1. Значыць, калі $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.



Рыс. 431

Паколькі сінус — няцотная функцыя, то $x < \sin x$ пры $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$. Значыць, калі $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, то $|\sin x| < |x|$.

Калі $x = 0$, то $|\sin x| = |x|$.

Такім чынам, калі $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ і $x \neq 0$, то няроўнасць $|\sin x| < |x|$ даказаная.

Няхай $|x| > \frac{\pi}{2}$. Тады, улічыўшы, што $|\sin x| \leq 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$, атрымаем, што $|\sin x| < |x|$ і пры гэтых значэннях зменнай x .

Пераканаемся ў праўдзівасці другой часткі сцверджання тэарэмы. Паколькі $\sin x = AC$ і $x = \cup AB$, то пры на-

бліжэнні значэння зменнай x да нуля даўжыні адрэзка AC і дугі AB набліжаюцца адна да адной, а гэта і азначае, што $\sin x \approx x$.

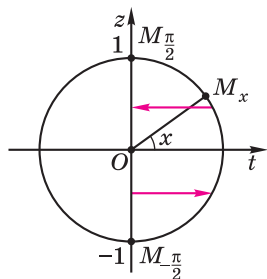
Разгледзім функцыю, адваротную сінусу. У параграфе 13 мы назвалі арксінусам ліку a такі лік з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, сінус якога роўны a .

Функцыя, якая задаецца формулай $y = \arcsin x$, дзе x — аргумент, называецца **арксінусам**.

Тэарэма 6. *Функцыя $y = \arcsin x$ мае наступныя ўласцівасці:*

- а) абсягам вызначэння мае прамежак $[-1; 1]$;*
- б) абсягам значэнняў мае прамежак $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;*
- в) з'яўляецца няцотнай;*
- г) нарастае на $[-1; 1]$;*
- д) графік сіметрычны частцы графіка сінуса на прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ адносна прамой $y = x$.*

Доказ. *а) і б)* Праектаванне ўздоўж восі абсцыс устанаўлівае ўзаемна адзначную адпаведнасць паміж адрэзкамі $M_{-\frac{\pi}{2}}M_{\frac{\pi}{2}}$, які выяўляе лікі прамежку $[-1; 1]$ восі сінусаў, і дугой $M_{-\frac{\pi}{2}}M_{\frac{\pi}{2}}$ трыганаметрычнай акружнасці, якая выяў-



Рыс. 432

ляе лікі прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рыс. 432). А гэта азначае, што абсягам вызначэння функцыі $y = \arcsin x$ з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$, а абсягам значэнняў — прамежак $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

в) У адпаведнасці з тэарэмай 5 параграфу 13 для лікаў з прамежку $[-1; 1]$ праўдзіцца роўнасць $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, а гэта азначае, што функцыя $y = \arcsin x$ з'яўляецца няцотнай.

г) Няхай лікі x_1 і x_2 належаць прамежку $[-1; 1]$ і $x_1 < x_2$. Дакажам, што $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$. Дапусцім, што

$\arcsin x_1 \geq \arcsin x_2$. Улічыўшы, што лікі $\arcsin x_1$ і $\arcsin x_2$ абодва належаць прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на якім функцыя сінус нарастае, атрымаем, што $\sin(\arcsin x_1) \geq \sin(\arcsin x_2)$, або $x_1 \geq x_2$. Але гэта супярэчыць умове.

д) Няхай пункт $M(a, b)$ належыць графіку функцыі сінус, прычым лік a належыць прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Гэта значыць, што $\sin a = b$. Але ў гэтым выпадку $a = \arcsin b$. Гэта азначае, што пункт $N(b, a)$ належыць графіку функцыі арксіноса (рыс. 433).

Графік функцыі $y = \arcsin x$ выяўлены на рысунку 434. ◀

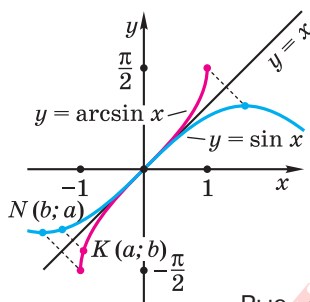


Рис. 433

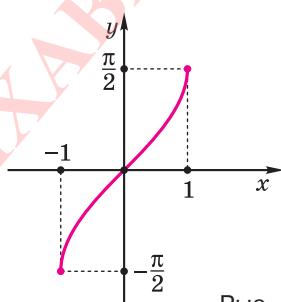


Рис. 434



1. Якую залежнасць называюць функцыяй?
2. Якое мноства называюць абсягам вызначэння функцыі; абсягам значэнняў функцыі?
3. Якая функцыя называецца нарастальнай на мностве K ; спадальнай на мностве K ?
4. Якую функцыю называюць цотнай; няцотнай?
5. Якую функцыю называюць перыядычнай? Які лік называюць перыядам функцыі?
6. Якое мноства з'яўляецца абсягам вызначэння сіноса; абсягам значэнняў сіноса?
7. Які лік з'яўляецца перыядам сіноса?
8. Якой залежнасцю звязаны значэнні сіноса для супрацьлеглых значэнняў аргумента?
9. На якіх прамежках сінус нарастае; на якіх спадае?
10. Пры якіх значэннях аргумента сінус прымае нулявое значэнне?
11. Якая функцыя з'яўляецца вытворнай сіноса?
12. Якой няроўнасцю звязаны значэнні функцый $y = \sin x$ і $y = x$?
13. Як звязаны значэнні функцый $y = \sin x$ і $y = x$ пры блізкіх да нуля значэннях зменнай x ?

1017. Нарысуйце адзінкавую акружнасць, адзначце на ёй пункт, адпаведны ўказанаму ліку, і запішыце яго каардынаты:

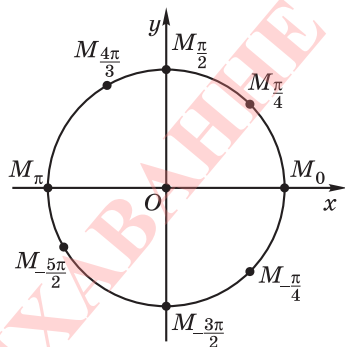
- а) 0; в) π ; д) 2π ; ж) $\frac{3\pi}{4}$;
 б) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{\pi}{4}$.

1018. Па рысунку 435 запішыце формулай усе лікі, якія адпавядаюць пункту:

- а) M_1 ; г) M_4 ; ж) M_7 ;
 б) M_2 ; д) M_5 ; з) M_8 .
 в) M_3 ; е) M_6 ;

1019. Запішыце сінус ліку:

- а) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; і) $\frac{7\pi}{6}$;
 б) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$; к) $-\frac{7\pi}{6}$.
 в) $\frac{\pi}{3}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$;
 г) $-\frac{\pi}{3}$; з) $-\frac{5\pi}{6}$;



Рыс. 435

1020. Запішыце сінус ліку:

- а) 0; в) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{3\pi}{4}$; і) $\frac{5\pi}{4}$;
 б) $-\pi$; г) $-\frac{\pi}{2}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; з) $-\frac{3\pi}{4}$; к) $-\frac{5\pi}{4}$.

1021. Вызначыце, які знак мае значэнне функцыі $y = \sin x$ пры значэнні зменнай x , роўным:

- а) $\frac{7\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; к) 2;
 б) $\frac{5\pi}{4}$; д) $\frac{5\pi}{6}$; з) $\frac{10\pi}{3}$; л) 3;
 в) $-\frac{3}{4}\pi$; е) $\frac{11\pi}{6}$; і) $-\frac{5\pi}{3}$; м) 4.

1022. Выкарыстаўшы графік функцыі, прыведзены на рысунку 436, і яе ўласцівасці, вызначыце, як змяняецца значэнне функцыі $y = \sin x$, калі аргумент змяняецца:

- а) ад 0 да π ; в) ад $\frac{3\pi}{2}$ да $\frac{5\pi}{2}$;
 б) ад $-\frac{3\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$; г) ад $\frac{3\pi}{2}$ да 3π .

1023. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \sin x$, прыведзены на рысунку 436, вызначыце, што больш:

- а) $\sin 0,5$ або $\sin 1$; б) $\sin(-0,2)$ або $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

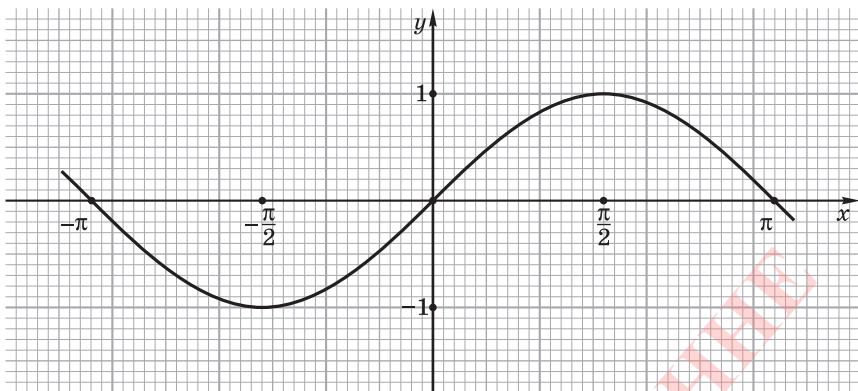


Рис. 436

в) $\sin 2$ або $\sin 3$;

д) $\sin \frac{\pi}{3}$ або $\sin 1$;

г) $\sin(\pi - 1)$ або $\sin 1$;

е) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ або $\sin 1$.

1024. Выкарыстаўшы рысунак 437, на якім прыведзены графік функцыі $y = \sin x$, запішыце:

а) 3 пункты максімуму;

б) 3 пункты мінімуму.

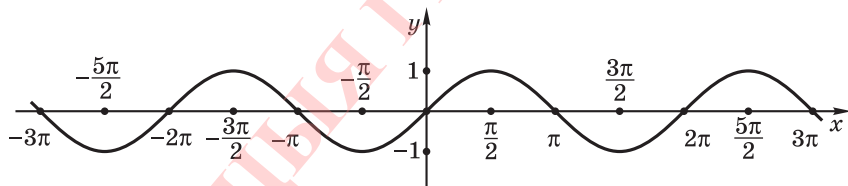


Рис. 437

1025. Па рысунку 436 знайдзіце значэнне сінуса для аргумента x , роўнага:

а) 1;

в) 2;

д) 3;

ж) 1,5;

і) 2,8;

б) -1;

г) -2;

е) -3;

з) -1,5;

к) -2,8.

1026. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \sin x$, прыведзены на рысунку 436, і яе ўласцівасці, вызначыце, у колькіх пунктах перасякае сіносоіду графік функцыі:

а) $y = x$;

г) $y = -\frac{1}{2}x$;

ж) $y = x^2$;

к) $y = -x^3$;

б) $y = -x$;

д) $y = 2x$;

з) $y = -x^2$;

л) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = \frac{1}{2}x$;

е) $y = -2x$;

і) $y = x^3$;

м) $y = -\sqrt{x}$.

1027. Запішыце мноства значэнняў функцыі $y = \sin x$, улічыўшы, што значэнне аргумента x належыць мноству:

- а) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$;
 б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

1028. Выкарыстаўшы сіносіду, выяўленую на рысунку 436, і ўласцівасці сіноса на прамежку $[-\pi; \pi]$, рашыце ўраўненне:

- а) $\sin x = -1$; в) $\sin x = 0,4$; д) $\sin x = \sqrt{2}$;
 б) $\sin x = 0,7$; г) $\sin x = -0,4$; е) $\sin x = -\sqrt{3}$.

1029. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \sin x$, прыведзены на рысунку 436, і яе ўласцівасці, укажыце значэнне аргумента, пры якім сінус роўны $\frac{1}{2}$, а аргумент належыць прамежку:

- а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

1030. Дакажыце, што праўдзіца роўнасць:

- а) $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{25\pi}{6}$; д) $\sin (x - \pi) = \sin (x + \pi)$;
 б) $\sin \left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{7}\right)$; е) $\sin (2x + 2\pi) = \sin (2x - 8\pi)$;
 в) $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{32\pi}{5}$; ж) $\sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;
 г) $\sin \frac{11\pi}{4} = \sin \left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; з) $\sin (7\pi - t) = \sin (3\pi - t)$.

1031. Выкарыстаўшы графікі функцый $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$, прыведзеныя на рысунку 438, укажыце два прамежкі, на якіх:

- а) $\sin x > \frac{1}{2}$; в) $\sin x \geq \frac{1}{2}$;
 б) $\sin x < \frac{1}{2}$; г) $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

1032. Знайдзіце значэнне функцыі $y = \arcsin x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) -1 ; в) 1 ; д) $-\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; і) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 б) 0 ; г) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

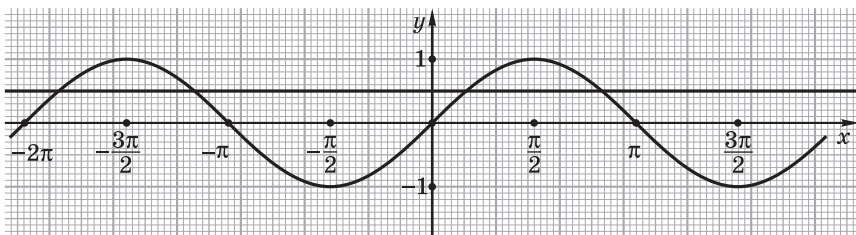


Рис. 438

1033. Выкарыстаўшы калькулятар або табліцы, знайдзіце значэнне функцыі $y = \sin x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- | | | | |
|-------------|------------|------------|--------------|
| а) 0,3284; | г) -2,346; | ж) 145,8; | к) -1988; |
| б) -0,3284; | д) 13,45; | з) -946,3; | л) 0,002984; |
| в) 14,894; | е) -18,42; | і) 5472; | м) 0,02845. |

1034. Выкарыстаўшы калькулятар або табліцы, знайдзіце значэнне функцыі $y = \arcsin x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- | | | |
|-------------|---------------|-------------|
| а) 0,9248; | г) -0,004354; | ж) -0,2004; |
| б) -0,9248; | д) 0,9888; | з) -0,6831. |
| в) 0,1898; | е) -0,1111; | |

1035. На прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ рашыце ўраўненне:

- | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $\sin x = 0$; | г) $\sin x = 1$; | ж) $\sin x = -\frac{1}{2}$; |
| б) $\sin x = \frac{1}{2}$; | д) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | з) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; |
| в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | е) $\sin x = -1$; | і) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. |

1036. На прамежку $[-\pi; \pi]$ рашыце няроўнасць:

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| а) $\sin x > \frac{1}{2}$; | д) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; | і) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| б) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; | е) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; | к) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| в) $\sin x < -\frac{1}{2}$; | ж) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | л) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; |
| г) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; | з) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; | м) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. |

1037. На прамых m і n , якія перпендыкулярныя плоскасці і перасякаюць яе ў пунктах M і N , узяты такія пункты K і L , што $KM = 27$ см, $LN = 48$ см. Знайдзіце адрэзак KL , улічыўшы, што $MN = 29$ см.

1038. З пункта A да плоскасці праведзены перпендыкуляр AB і нахіленыя AC і AD , праекцыі якіх перпендыкулярныя адна адной. Знайдзіце вышыню CG трохвугольніка ACD , улічыўшы, што $AB = 45$ см, $BC = 48$ см, $BD = 60$ см.

1039. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 23 см і 33 см. Знайдзіце адлегласць ад гэтага пункта да плоскасці, улічыўшы, што праекцыі адносяцца як 2 : 3.

1040. Аснова AD трапецыі $ABCD$ ляжыць у плоскасці α , а аснова BC адлеглая ад яе на 20 см (рыс. 439). Знайдзіце адлегласць ад пункта P перасячэння дыяганалей трапецыі да плоскасці α , улічыўшы, што $AD : BC = 7 : 3$.

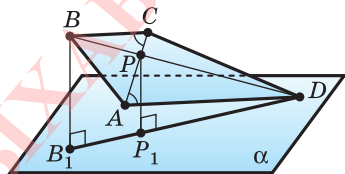


Рис. 439

1041. Пункт D ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B трохвугольніка ABC і перпендыкулярная яго плоскасці. Улічыўшы, што $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см, знайдзіце:

- адлегласць ад пункта D да прамой AC ;
- плошчу трохвугольніка ACD .

1042. З вяршыні прамога вугла C прававугольнага трохвугольніка ABC з катэтамі CB і CA , роўнымі 20 см і 30 см, узведзены перпендыкуляр CD да плоскасці трохвугольніка даўжынёй 10 см. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABD .

1043. На адрэзку AB выбраны пункт T , і на атрыманых адрэзках-частках TA і TB як на ўтваральніках пабудаваны такія конусы, што іх бакавыя паверхні роўныя 195π см² і 45π см², а радыус асновы першага конуса на 8 см большы. Калі на адрэзку A_1B_1 , роўным адрэзку AB , як на ўтваральніку пабудавалі трэці конус з бакавой паверхняй 240π см², то радыус яго асновы аказаўся роўным

10 см (рис. 440). Улічыўшы, што бакавая паверхня S_6 конуса з радыусам асновы r і ўтваральнікам l вызначаецца формулай $S_6 = \pi rl$, знайдзіце:

- утваральнікі і радыусы асноў конусаў;
- поўныя паверхні конусаў;
- вышыні конусаў, г. зн. перпендыкуляры, апущаныя з вяршынь конусаў на іх асновы.

1044. На адрэзку MN выбраны пункт A , і на атрымных адрэзках-частках AM і AN як на дыяметрах асноў пабудаваны такія конусы, што іх бакавыя паверхні роўныя $60\pi \text{ см}^2$ і $180\pi \text{ см}^2$, а ўтваральнік першага конуса на 10 см меншы. Калі на адрэзку MN як на дыяметры асновы пабудавалі трэці конус з бакавой паверхняй $240\pi \text{ см}^2$, то яго ўтваральнік аказаўся роўным 16 см (рис. 441). Знайдзіце:

- утваральнікі і радыусы асноў конусаў;
- поўныя паверхні конусаў;
- вышыні конусаў.

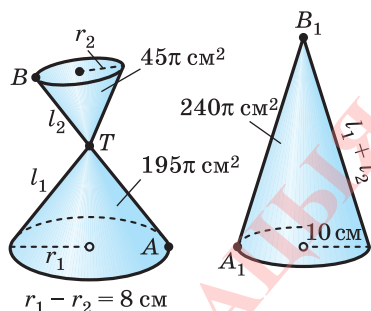


Рис. 440

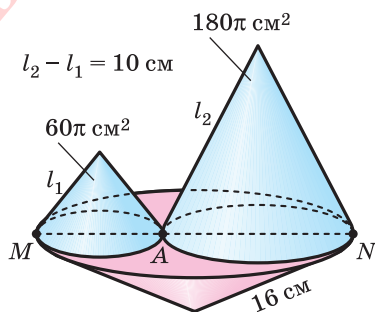


Рис. 441

1045. Ёсць такі мнагаграннік, што ўсе яго вяршыні належаць пэўнай сферы. Дакажыце, што колькасці B яго вяршынь, K яго кантаў і Γ яго граней звязаны роўнасцю $B - K + \Gamma = 2$.

1046. У выпуклым чатырохвугольніку $ABCD$ вуглы B і D прамыя, стораны AB і BC роўныя і адлегласць ад пункта B да прамой AD роўная d . Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка $ABCD$.

1047. Знайдзіце колькасць і суму лічбаў у дзесятковым запісе здабытку $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \dots \cdot 99\dots 9$, улічыўшы, што ў кожным наступным множніку колькасць лічбаў удвая большая, чым у папярэднім, а ў апошнім іх 2^{2008} .

20. Функцыя $y = \cos x$

У адпаведнасці з азначэннем косінусам ліку x называецца косінус вугла, роўнага x радыянаў.

Функцыя, якая зададзена формулай $y = \cos x$, дзе x — аргумент, называецца **косінусам**.

Тэарэма 7. *Функцыя $y = \cos x$ мае наступныя ўласцівасці:*

а) абсягам вызначэння з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў;

б) абсягам значэнняў з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$;

в) з'яўляецца цотнай;

г) з'яўляецца перыядычнай, прычым найменшым дадатным перыядам з'яўляецца лік 2π ;

д) $(\cos x)' = -\sin x$;

е) нарастае ад -1 да 1 на прамежках $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$, спадае ад 1 да -1 на прамежках $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ і прымае нульовае значэнне пры значэннях аргумента x , роўных $\frac{\pi}{2} + k\pi$, дзе k — любы цэлы лік.

Доказ. Уласцівасці а), б) і в) абгрунтоўваюцца гэтаксама, як і адпаведныя ўласцівасці сіноса.

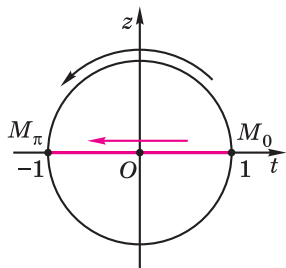
г) Паколькі $\cos x = \cos(x - 2\pi) = \cos(x + 2\pi)$, то лік 2π з'яўляецца перыядам косінуса. Гэта найменшы дадатны перыяд. Сапраўды, калі рухацца па адзінкавай акружнасці ад пункта M_0 у дадатным кірунку, то найбліжэйшым пунктам з абсцысай 1 будзе гэты самы пункт M_0 , для чаго даведзецца прайсці шлях даўжынёй 2π .

д) Улічыўшы, што $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і тое, што $(\sin x)' = \cos x$, атрымаем:

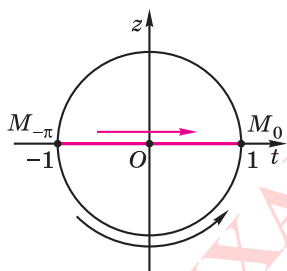
$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)' = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

е) На прамежку $(-\pi; 0)$ $\sin x < 0$, таму $(\cos x)' = -\sin x > 0$. Значыць, на гэтым прамежку функцыя косінус нарастае. На прамежку $(0; \pi)$ $\sin x > 0$, таму $(\cos x)' = -\sin x < 0$, і, значыць, на гэтым прамежку функцыя косінус спадае.

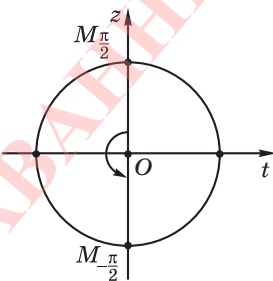
Гэтую ўласцівасць мы можам угледзець і з рысункаў 442 і 443. Пры гэтым у становішчах $M_{\frac{\pi}{2}}$ і $M_{\frac{3\pi}{2}}$ ардыната становіцца роўнай нулю (рыс. 444).



Рыс. 442



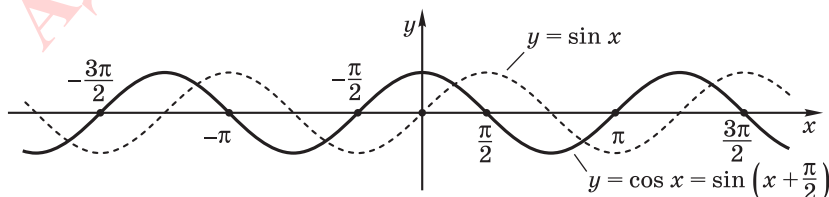
Рыс. 443



Рыс. 444

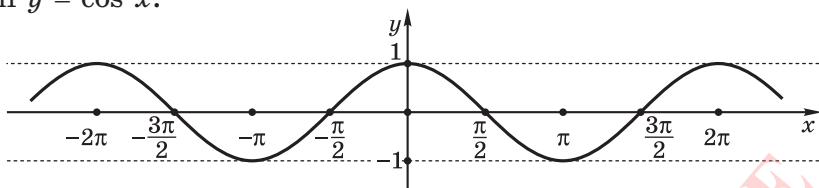
Цяпер улічым, што перыядам функцыі $y = \cos x$ з'яўляецца лік 2π . Гэта дазваляе сцвярджаць, што на любым з прамежкаў $[-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi]$ функцыя $y = \cos x$ нарастае ад -1 да 1 , а на любым з прамежкаў $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ спадае ад 1 да -1 .

Устаноўленых уласцівасцей дастаткова, каб пабудаваць графік косінуса. Яго можна атрымаць і з такіх меркаванняў. Звернем увагу на тое, што пры любым значэнні зменнай x праўдзіцца роўнасць $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Яна паказвае, што графік функцыі $y = \cos x$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sin x$ зрухам уздоўж восі абсцыс улева на $\frac{\pi}{2}$ (рыс. 445).



Рыс. 445

На графіку косінуса, выяўленым на рысунку 446, лёгка ўглядаюцца ўжо даказаныя і іншыя ўласцівасці функцыі $y = \cos x$.



Рыс. 446

► **Тэарэма 8.** *Пры значэннях зменнай x , блізкіх да нуля, праўдзіца набліжаная роўнасць $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, прычым $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, калі $x \neq 0$.*

Доказ. У адпаведнасці з тэарэмай 5 $\sin x \approx x$ пры блізкіх да нуля значэннях зменнай x . Паколькі $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, то $\cos x \approx \sqrt{1 - x^2}$. Цяпер да функцыі $f(t) = \sqrt{1 + t}$ прыменім набліжаную формулу $f(t_0 + t) \approx f(t_0) + f'(t_0)t$, устаноўленую ў параграфу 7. Маём $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$. Няхай $t_0 = 0$. Тады $f(t_0) = 1$ і $f'(t_0) = \frac{1}{2}$. Таму пры блізкіх да нуля значэннях t праўдзіца набліжаная роўнасць $\sqrt{1 + t} \approx 1 + \frac{t}{2}$. Пры значэнні $t_0 = -x^2$ атрымліваем $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Значыць, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

Для доказу няроўнасці $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ разгледзім функцыю $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$. Знойдзем вытворную гэтай функцыі: $g'(x) = -\sin x + x$. У адпаведнасці з тэарэмай 5, калі $x < 0$, то $\sin x > x$, а калі $x > 0$, то $\sin x < x$. Таму $g'(x) < 0$, калі $x < 0$ і $g'(x) > 0$, калі $x > 0$. Гэта азначае, што функцыя $g(x)$ пры $x < 0$ спадае, а пры $x > 0$ нарастае. Таму ў пункце $x = 0$ яна прымае сваё найменшае значэнне, якое роўнае нулю. Атрымліваецца, што $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) > 0$ пры $x \neq 0$, г. зн. калі $x \neq 0$, то $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Разгледзім функцыю, адваротную косінусу.

Функцыя, якая задаецца формулай $y = \arccos x$, дзе x — аргумент, называецца **арккосінусам**.

Тэарэма 9. *Функцыя $y = \arccos x$ мае наступныя ўласцівасці:*

а) абсягам вызначэння з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$;

б) абсягам значэнняў з'яўляецца прамежак $[0; \pi]$;

в) не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай;

г) з'яўляецца спадальнай;

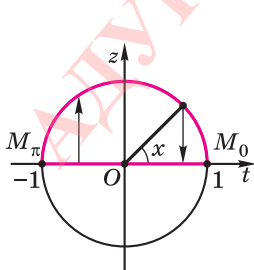
д) графік арккосінуса сіметрычны частцы графіка косінуса на прамежку $[0; \pi]$ адносна прамой $y = x$.

Доказ. а) і б) Праектаванне ўздоўж восі ардынат устанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж адрэзкам M_0M_π , які выяўляе лікі прамежку $[-1; 1]$ восі косінусаў, і дугой M_0M_π трыганаметрычнай акружнасці, якая выяўляе лікі прамежку $[0; \pi]$ (рыс. 447). А гэта азначае, што абсягам вызначэння функцыі $y = \arccos x$ з'яўляецца прамежак $[-1; 1]$, а абсягам значэнняў — прамежак $[-0; \pi]$.

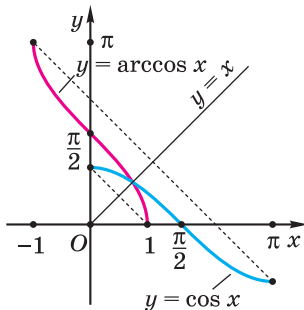
в) Паколькі $\arccos(-1) = \pi$ і $\arccos 1 = 0$, то $\arccos(-1) \neq \arccos 1$ і $\arccos(-1) \neq -\arccos 1$. Таму функцыя арккосінус не можа быць цотнай і не можа быць няцотнай.

Уласцівасці г) і д) даказваюцца аналагічна ўласцівасцям г) і д) тэарэмы 6. Правядзіце гэтыя доказы самастойна. Рысунак 448 ілюструе ўласцівасць д).

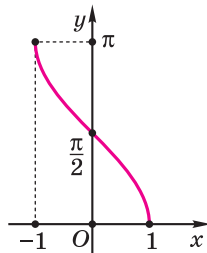
Графік арккосінуса выяўлены на рысунку 449. ◀



Рыс. 447



Рыс. 448



Рыс. 449

Прыклад. Дакажам, што $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4}$.

Паколькі $\frac{2}{\sqrt{13}} > 0$ і $\frac{5}{\sqrt{26}} > 0$, то з улікам азначэнняў арксіноса і арккосінуса адпаведна выразы $\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$ і $\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}$ выяўляюць такія лікі x і y , што:

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ і } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \cos y = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ і } 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Склаўшы пачленна няроўнасці $0 < x < \frac{\pi}{2}$ і $0 < y < \frac{\pi}{2}$, атрымаем, што лік $x + y$ праўдзіць умову:

$$0 < x + y < \pi.$$

На прамежку $[0; \pi]$ косінус спадае, г. зн. кожнае сваё значэнне прымае толькі адзін раз. Гэта дазваляе адназначна па значэнні косінуса ўказаць значэнне яго аргумента. Таму знойдзем спачатку $\cos(x + y)$, а затым і $x + y$:

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \\ &= \cos\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cos\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) - \\ &- \sin\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \sin\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}\right)} \cdot \\ &\cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \sin\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{5}{\sqrt{26}}\right)} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Значыць,

$$x + y = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} + \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{\pi}{4},$$

што і трэба было даказаць.



1. Якое мноства з'яўляецца абсягам вызначэння косінуса; абсягам значэнняў косінуса?
2. Які лік з'яўляецца перыядам косінуса?
3. Якой залежнасцю звязаны значэнні косінуса для супрацьлеглых значэнняў аргумента?
4. На якіх прамежках косінус нарастае; на якіх спадае?
5. Пры якіх значэннях аргумента косінус прымае нулявое значэнне?
6. Якая функцыя з'яўляецца вытворнай косінуса?
7. Як называецца функцыя, адваротная косінусу?

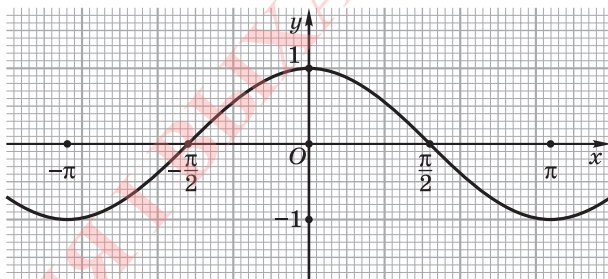
8. Як можна набліжена падлічваць значэнні косінуса для аргументаў, блізкіх да нуля?

1048. Нарысуйце трыганаметрычную акружнасць, адзначце на ёй пункт, адпаведны ліку, і запішыце яго каардынаты:

- а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$;
 б) $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{2\pi}{3}$; з) $-\frac{7\pi}{6}$.

1049. Выкарыстаўшы графік функцыі, прыведзены на рысунку 450, і яе ўласцівасці, вызначыце, як змяняецца значэнне функцыі $y = \cos x$, калі аргумент змяняецца:

- а) ад 0 да π ; в) ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$;
 б) ад $\frac{\pi}{2}$ да $\frac{3\pi}{2}$; г) ад $\frac{3\pi}{2}$ да 3π .



Рыс. 450

1050. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \cos x$ і яе ўласцівасці, знайдзіце значэнне функцыі пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; д) 6π ; ж) -17π ;
 б) $\frac{3\pi}{2}$; г) $-\frac{3\pi}{2}$; е) -6π ; з) 24π .

1051. Запішыце косінус ліку:

- а) 0; д) $\frac{\pi}{6}$; і) $\frac{3\pi}{4}$; н) $\frac{7\pi}{6}$;
 б) $-\pi$; е) $-\frac{\pi}{6}$; к) $-\frac{3\pi}{4}$; о) $-\frac{7\pi}{6}$;
 в) $\frac{\pi}{2}$; ж) $\frac{\pi}{3}$; л) $\frac{5\pi}{6}$; п) $\frac{5\pi}{4}$;
 г) $-\frac{\pi}{2}$; з) $-\frac{\pi}{3}$; м) $-\frac{5\pi}{6}$; р) $-\frac{5\pi}{4}$.

1052. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \cos x$, прыведзены на рысунку 450, і яе ўласцівасці, вызначыце колькасць пунктаў яго перасячэння з графікам функцыі:

- а) $y = x$; в) $y = 2x$; д) $y = x^3$;
 б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = -x^2$; е) $y = -\sqrt{x}$.

1053. Вызначыце, ці праўдзіца роўнасць:

- а) $\cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$; д) $\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{25\pi}{6}$;
 б) $\cos(2x + 2\pi) = \cos(2x - 8\pi)$; е) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;
 в) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ж) $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{32\pi}{5}$;
 г) $\cos(7\pi - t) = \cos(3\pi - t)$; з) $\cos \frac{11\pi}{4} = \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

1054. Вызначыце, які знак мае значэнне функцыі $y = \cos x$ пры значэнні зменнай x , роўным:

- а) $\frac{7\pi}{9}$; в) $\frac{91\pi}{36}$; д) $-\frac{21\pi}{4}$; ж) $\frac{631\pi}{12}$;
 б) $\frac{71\pi}{36}$; г) $\frac{13\pi}{5}$; е) $\frac{11\pi}{7}$; з) $-\frac{1024\pi}{7}$.

1055. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \cos x$, прыведзены на рысунку 450, вызначыце, што больш:

- а) $\cos 0,5$ або $\cos 1$; г) $\cos(\pi - 1)$ або $\cos 1$;
 б) $\cos(-0,2)$ або $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\cos \frac{\pi}{3}$ або $\cos 1$;
 в) $\cos 2$ або $\cos 3$; е) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ або $\cos 1$.

1056. Выкарыстаўшы нарастальнасць або спадавальнасць функцыі $y = \cos x$, параўнайце лікі:

- а) $\cos \frac{\pi}{7}$ і $\cos \frac{8\pi}{9}$; г) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ і $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;
 б) $\cos \frac{8\pi}{7}$ і $\cos \frac{10\pi}{7}$; д) $\cos 1$ і $\cos 3$;
 в) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ і $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; е) $\cos 4$ і $\cos 5$.

1057. Выкарыстаўшы формулы прывядзення, якія дазваляюць сінус выразіць праз косінус, параўнайце лікі:

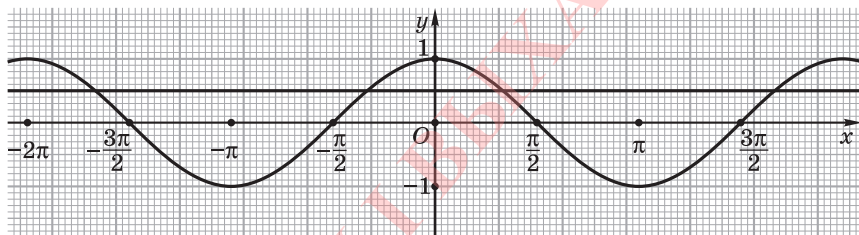
- а) $\cos \frac{\pi}{5}$ і $\sin \frac{\pi}{5}$; в) $\cos \frac{5\pi}{8}$ і $\sin \frac{5\pi}{8}$; д) $\cos \frac{\pi}{6}$ і $\sin \frac{5\pi}{14}$;
 б) $\sin \frac{\pi}{7}$ і $\cos \frac{\pi}{7}$; г) $\sin \frac{3\pi}{5}$ і $\cos \frac{3\pi}{5}$; е) $\cos \frac{\pi}{8}$ і $\sin \frac{3\pi}{10}$.

1058. Запишіть мноства значенняў функцыі $y = \cos x$, улічыўшы, што значэнні аргумента x належаць мноству:

- а) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}\right]$;
 б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

1059. Выкарыстаўшы графікі функцый $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$, прыведзеныя на рысунку 451, укажыце два прамежкі, на якіх:

- а) $\cos x > \frac{1}{2}$; в) $\cos x \geq \frac{1}{2}$;
 б) $\cos x < \frac{1}{2}$; г) $\cos x \leq \frac{1}{2}$.



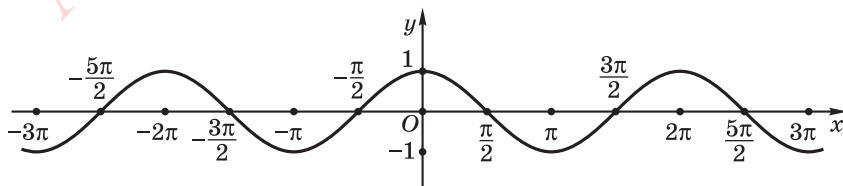
Рыс. 451

1060. Выкарыстаўшы рысунак 452, на якім прыведзены графік функцыі $y = \cos x$, запішыце формулу, што выяўляе ўсе пункты:

- а) максімуму; б) мінімуму.

1061. Выкарыстаўшы рысунак 452, на якім выяўлены графік функцыі $y = \cos x$, запішыце 3 прамежкі, на якіх косінус:

- а) дадатны; в) не адмоўны;
 б) адмоўны; г) не дадатны.



Рыс. 452

1062. Па рысунку 450 знайдзіце значэнне косінуса для аргумента x , роўнага:

- а) 1; в) 3; д) -3; ж) -1,5; і) -2,7.
 б) 2; г) -2; е) 1,5; з) 2,7;

1063. Выкарыстаўшы калькулятар, знайдзіце значэнне функцыі $y = \cos x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) 0,3284; г) -2,346; ж) 145,8; к) -1988;
 б) -0,3284; д) 13,45; з) -946,3; л) 0,002984;
 в) 14,894; е) -18,42; і) 5472; м) 0,02845.

1064. Знайдзіце значэнне функцыі $y = \arccos x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

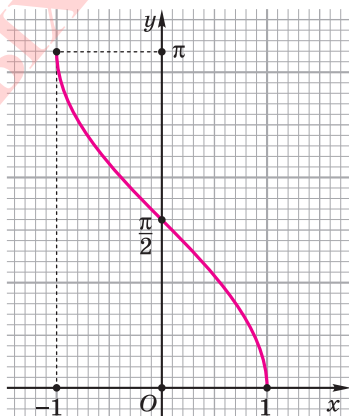
- а) -1; в) 1; д) $-\frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; і) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 б) 0; г) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

1065. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \arccos x$, выяўлены па рысунку 453, знайдзіце значэнне функцыі $y = \arccos x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) 0,6; г) -0,3;
 б) -0,6; д) 0,1;
 в) 0,3; е) -0,1.

1066. Выкарыстаўшы калькулятар, знайдзіце значэнне функцыі $y = \arccos x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) 0,9248; д) 0,9888;
 б) -0,9248; е) -0,1111;
 в) 0,1898; ж) -0,2004;
 г) -0,004354; з) -0,6831.



Рыс. 453

1067. Улічыўшы, што пры выкарыстанні набліжанай роўнасці $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ для лікаў, модулі якіх не перавышаюць 1, рэлятывуная хібнасць меншая за $5x^3 \%$, знайдзіце набліжанае значэнне косінуса ліку і аданіце хібнасць вылічэння:

- а) 0,01; б) 0,05; в) 0,1; г) 0,5.

1068. На прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ рашыце ўраўненне:

а) $\cos x = 0$; г) $\cos x = 1$; ж) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos x = \frac{1}{2}$; д) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x = -1$; і) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1069. Дакажыце, што функцыя $y = \arccos x$ з'яўляецца спадальнай.

1070. Дакажыце, што графік функцыі $y = \arccos x$ сіметрычны адносна прамой $y = x$ часткі графіка функцыі $y = \cos x$ на прамежку $[0; \pi]$.

1071. Дакажыце, што праўдзіцца роўнасць:

а) $2 \arcsin \frac{2}{7} = \arccos \frac{41}{49}$;

б) $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

д) $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14}\right)$;

е) $\arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28$;

ж) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arccos \frac{2}{11}$;

з) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right) = \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$.

1072. Рашыце ўраўненне:

а) $\arcsin x = 2 \arcsin a$; в) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \arcsin a$;

б) $\arccos x = 2 \arcsin a$; г) $\arccos x = \arcsin 2a$.

1073. Дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда $KL MN K_1 L_1 M_1 N_1$ і дыяганалі яго асновы перасякаюцца ў пунктах O і Q адпаведна. Вызначыце, ці перпендыкулярныя:

а) прамыя OQ і KL ;

в) прамая OQ і плоскасць MNK .

б) прамыя KK_1 і LN ;

1074. Праз цэнтр цяжару G грані QCD трохвугольнай піраміды $QBCD$, бакавы кант QB якой перпендыкулярны аснове BCD , праведзена прамая l , перпендыкулярная плоскасці BCD . Пабудуйце пункт перасячэння прамой l з плоскасцю асновы.

1075. Пункт T — сярэдзіна канта AD прамавугольнага паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, асновай якога з'яўляецца квадрат $ABCD$. Знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункт T перпендыкулярна прамой BD , улічыўшы, што $AD = a$, $AA_1 = b$.

1076. Да плоскасці ϕ з пунктаў A , B , C , якія ляжаць з аднаго боку ад ϕ , праведзены тры перпендыкуляры — AA_1 даўжынёй 1, BB_1 даўжынёй 2, CC_1 даўжынёй 3, асновы якіх утвараюць на плоскасці ϕ роўнастаронні трохвугольнік. Знайдзіце від трохвугольніка ABC .

1077. Улічыўшы, што пункты R і Q — сярэдзіны кантаў $A_1 B_1$ і $A_1 C_1$ правільнай прызмы $ABCA_1 B_1 C_1$ з кантамі асновы 20 і бакавым кантам 24, вызначыце:

а) ці з'яўляецца адрэзак CQ праекцыяй адрэзка CB_1 на плоскасць $AA_1 C$;

б) плошчу трохвугольніка $BC_1 R$.

1078. Выкарыстаўшы рысунак 454, дакажыце, што бакавая паверхня прамой прызмы роўная здабытку перыметра асновы прызмы на яе бакавы кант.

1079. Ёсць дзве прамыя прызмы, у якіх перыметры асноў роўныя 24 см і 36 см, а бакавыя канты адносяцца як 4 : 5. Каб трэцяя прамая прызма мела перыметр асновы 60 см, а бакавую паверхню роўнай суме бакавых паверхняў першай і другой прызм, яе бакавы кант павінен быць роўным 23 см. Знайдзіце бакавыя канты першай і другой прызм і іх бакавыя паверхні.

1080. Шляхі, якія таварны цягнік прайшоў за 3 г з адной скорасцю і 9 г з другой, адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце гэтыя шляхі і самі скорасці, улічыўшы, што сярэдняя скорасць цягніка аказалася роўнай 45 км/г.

1081. Рашыце ўраўненне

$$x^2(1 + x^2)^2 + y^2(1 + y^2)^2 = 8x^2y^2.$$

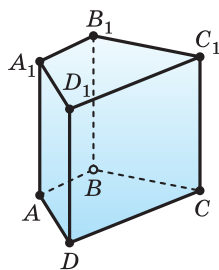


Рис. 454

1082. Бісектрысы знешніх вуглоў B і C трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце O , прычым $OB = OC$. Знайдзіце адрэзак AB , улічыўшы, што $\angle AOB = \alpha$, а радыус апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці роўны R .

1083. Вызначыце, пры якіх натуральных значэннях зменнай n дакладным квадратам з'яўляецца лік:

- а) $5^n + 4^n$; б) $5^n - 4^n$.

21. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$

Функцыя, якая зададзена формулай $y = \operatorname{tg} x$, дзе x — аргумент, называецца **тангенсам**.

Тэарэма 10. *Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ мае наступныя ўласцівасці:*

а) абсягам вызначэння з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў, з якога выключаны лікі выгляду $\frac{\pi}{2} + k\pi$, дзе k — любы цэлы лік;

б) абсягам значэнняў з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў;

в) з'яўляецца перыядычнай з найменшым дадатным перыядам π ;

г) з'яўляецца няцотнай;

д) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

е) нарастае ад $-\infty$ да $+\infty$ на кожным з прамежкаў $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, дзе k — цэлы лік.

Доказ. а) У абсяг вызначэння тангенса ўваходзяць усе рэчаісныя лікі, за выключэннем тых, якія адпавядаюць пунктам перасячэння адзінкавай акружнасці з воссю ардынат (рыс. 455), г. зн. за выключэннем лікаў $\frac{\pi}{2} + k\pi$, дзе k — цэлы лік.

б) У параграфе 13 даказана, што тангенс ліку x роўны каардынаце пункта N восі тангенсаў (рыс. 456). Зра-

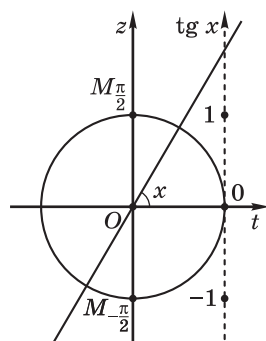


Рис. 455

зумела, што любы лік восі тангенсаў ёсць значэнне тангенса. Таму абсяг значэнняў тангенса ёсць мноства R рэчаісных лікаў.

б) Паколькі $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, то лік π з'яўляецца перыядам тангенса. Гэта найменшы дадатны перыяд, бо на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс кожнае сваё значэнне прымае толькі адзін раз (рыс. 457).

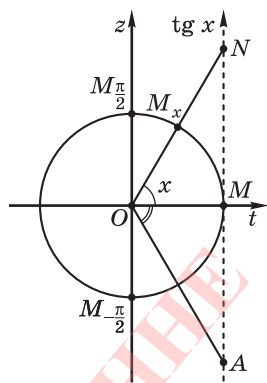
з) Уласцівасць вынікае з роўнасці $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, якая даказаная ў тэарэме 3 параграфу 11.

д) Улічыўшы, што $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ і тое, што $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, атрымаем:

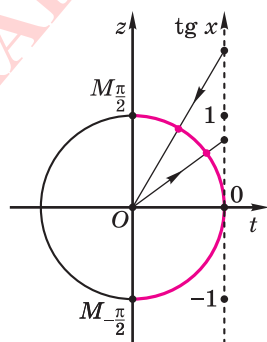
$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

е) Паколькі тангенс — перыядычная функцыя, то дастаткова даследаваць, як ён паводзіць сябе на прамежку даўжынёй, роўнай перыяду π . Зручна ў якасці такога прамежку ўзяць прамежак $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Як ужо ўстаноўлена, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Але $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$, таму на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функцыя тангенс нарастае.

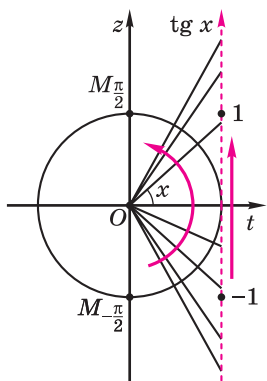
Атрыманы вынік можна ўгледзець і з тых меркаванняў, што тангенс любога рэчаіснага ліку выяўляецца пэўным пунктам восі тангенсаў (рыс. 458). Па



Рыс. 456



Рыс. 457



Рыс. 458

гэтым рысунку бачна, што калі аргумент x нарастае ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ нарастае ад $-\infty$ да $+\infty$.

Улічыўшы, што перыядам функцыі $y = \operatorname{tg} x$ з'яўляецца лік π , можна сцвярджаць, што на любым з прамежкаў $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ функцыя $y = \operatorname{tg} x$ нарастае ад $-\infty$ да $+\infty$.

Устаноўленыя ўласцівасці ў агульных рысах даюць уяўленне пра паводзіны тангенса на кожным з прамежкаў $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Для ўдакладнення ходу графіка выкарыстаем геаметрычнае пабудаванне, аналагічнае апісанаму ў параграфу 19 пры пабудаванні графіка сіноса. Ход гэтага пабудавання лёгка ўглядаецца з рысунка 459. З улікам няцотнасці тангенса, адлюстравыўшы пабудаваную частку графіка адносна пачатку каардынат, атрымаем графік тангенса на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рыс. 460). Улічванне перыядычнасці тангенса дае яго графік у абсягу вызначэння (рыс. 461).

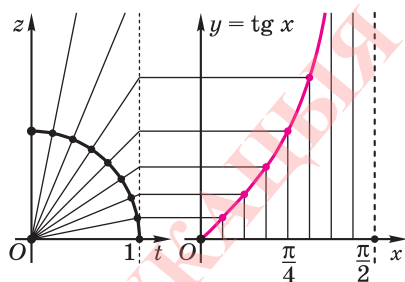


Рис. 459

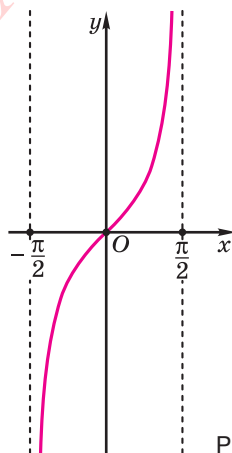


Рис. 460

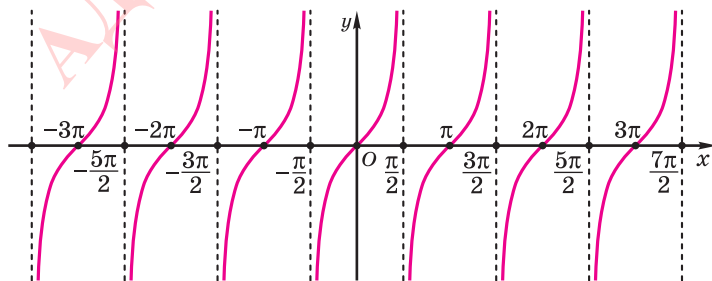


Рис. 461

►Разгледзім функцыю, адваротную тангенсу.

Функцыя, якая задаецца формулай $y = \operatorname{arctg} x$, дзе x — аргумент, называецца **арктангенсам**.

Тэарэма 11. *Функцыя $y = \operatorname{arctg} x$ мае наступныя ўласцівасці:*

а) абсягам вызначэння з'яўляецца мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў;

б) абсягам значэнняў з'яўляецца прамежак $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

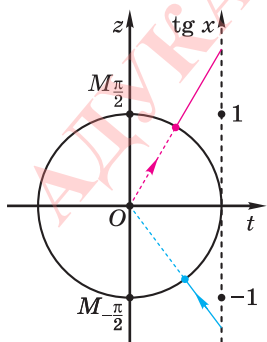
в) з'яўляецца няцотнай;

г) з'яўляецца нарастальнай;

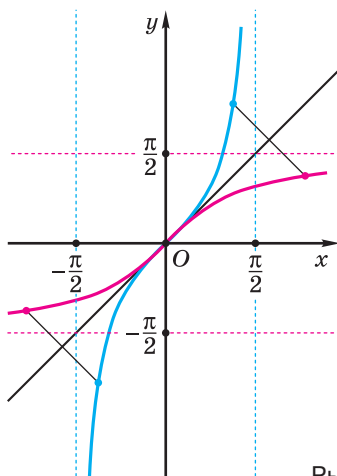
д) графік арктангенса сіметрычны частцы графіка тангенса на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ адносна прамой $y = x$.

Доказ. *а) і б).* Праектаванне з цэнтра O трыганаметрычнай акружнасці ўстанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж воссю тангенсаў, якая выяўляе мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў, і дугой $M_{-\frac{\pi}{2}} M_{\frac{\pi}{2}}$ трыганаметрычнай акружнасці без канцавых пунктаў $M_{-\frac{\pi}{2}}$ і $M_{\frac{\pi}{2}}$, якая выяўляе

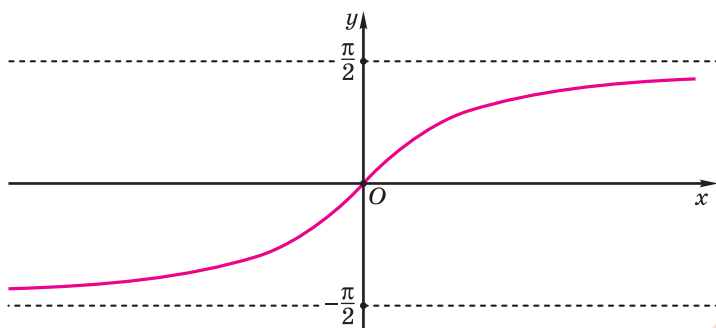
лікі прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рыс. 462). А гэта азначае, што абсягам вызначэння функцыі $y = \operatorname{arctg} x$ з'яўляецца мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў, а абсягам значэнняў — прамежак $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Рыс. 462



Рыс. 463



Рыс. 464

в) Уласцівасць вынікае з роўнасці $\arctg(-x) = -\arctg x$, якая даказаная ў тэарэме 6 параграфа 13.

Уласцівасці з) і д) абгрунтоўваюцца аналагічна ўласцівасцям з) і д) тэарэмы 6. Правядзіце гэтае абгрунтаванне самастойна. Рысунак 463 ілюструе ўласцівасць д).

Графік арктангенса выяўлены на рысунку 464. ◀

Функцыя, якая зададзена формулай $y = \operatorname{ctg} x$, дзе x — аргумент, называецца **катангенсам**.

▶ **Тэарэма 12.** Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ мае наступныя ўласцівасці:

а) абсягам вызначэння з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў, з якога выключаны лікі выгляду $k\pi$, дзе k — любы цэлы лік;

б) абсягам значэнняў з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў;

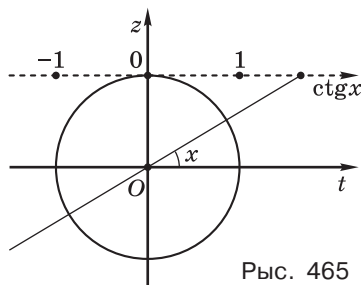
в) з'яўляецца няцотнай;

г) з'яўляецца перыядычнай з найменшым дадатным перыядам π ;

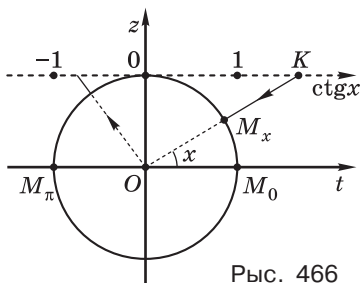
д) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

е) спадае ад $+\infty$ да $-\infty$ на кожным з прамежкаў $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, дзе k — цэлы лік.

Доказ. а) У абсяг вызначэння катангенса ўваходзяць усе рэчаісныя лікі, за выключэннем тых, якія адпавядаюць пунктам перасячэння адзінкавай акружнасці з воссю абсцыс (рыс. 465), г. зн. за выключэннем лікаў $k\pi$, дзе k — цэлы лік.



Рыс. 465



Рыс. 466

б) У параграфе 13 даказана, што катангенс ліку x роўны каардынаце пункта K восі катангенсаў (рыс. 466). Зразумела, што любы лік восі катангенсаў ёсць значэнне катангенса. Таму абсяг значэнняў катангенса ёсць мноства \mathbf{R} рэчаісных лікаў.

в) Уласцівасць вынікае з роўнасці $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, якая даказаная ў тэарэме 1 параграфу 11.

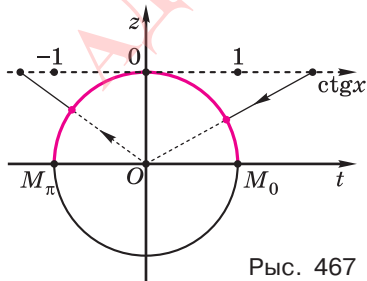
г) Паколькі $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, то лік π з'яўляецца перыядам катангенса. Гэта найменшы дадатны перыяд, бо на прамежку $(0; \pi)$ катангенс кожнае сваё значэнне прымае толькі адзін раз (рыс. 467).

д) Паколькі $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то

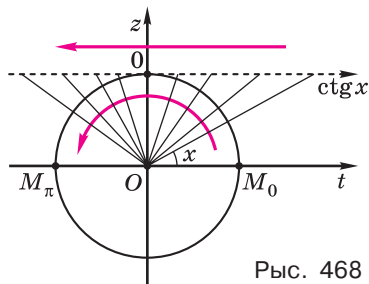
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

е) На прамежку $(0; \pi)$ вытворная катангенса адмоўная, таму на гэтым прамежку катангенс спадае. Улічыўшы, што перыядам функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляецца лік π , можна сцвярджаць, што на любым з прамежкаў $(0 + \pi k; \pi + \pi k)$, дзе k — цэлы лік, функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ спадае ад $+\infty$ да $-\infty$.

Атрыманы вынік можна ўгледзець і з тых меркаванняў, што катангенс любога рэчаіснага ліку выяўляецца пэўным пунктам восі катангенсаў (рыс. 468). Па гэтым рысунку бачна, што калі аргумент x нарастае ад 0 да π , то $\operatorname{ctg} x$ спадае ад $+\infty$ да $-\infty$. ◀

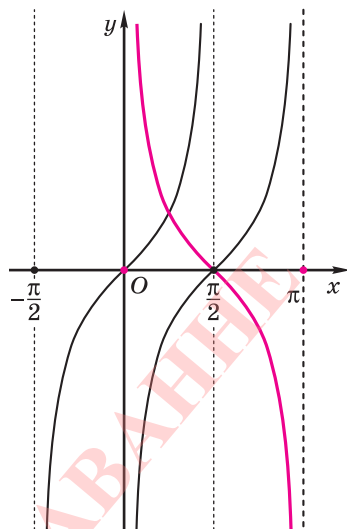


Рыс. 467



Рыс. 468

Роўнасць $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ указвае, што графік катангенса можна атрымаць з графіка тангенса зрухам тангенсоіды па восі абсцыс улева на $\frac{\pi}{2}$ і наступным адлюстраваннем атрыманага графіка адносна восі абсцыс (рыс. 469).



Рыс. 469

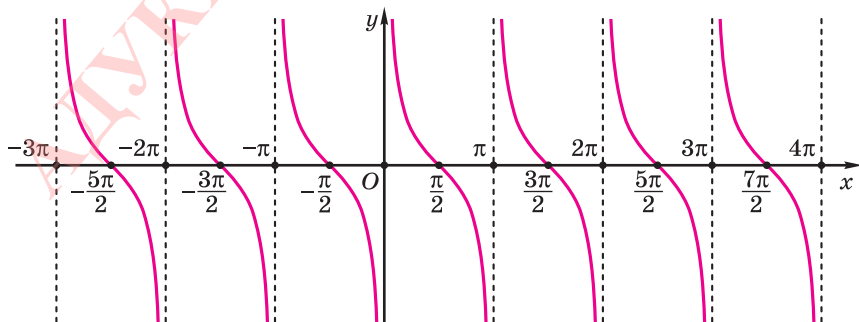
Графік катангенса выяўлены на рысунку 470.

► Разгледзім функцыю, адваротную катангенсу.

Функцыя, якая задаецца формулай $y = \operatorname{arccotg} x$, дзе x — аргумент, называецца **арккатангенсам**.

Тэарэма 13. *Функцыя $y = \operatorname{arccotg} x$ мае наступныя ўласцівасці:*

- а) абсягам вызначэння з'яўляецца мноства \mathbb{R} рэчаісных лікаў;*
- б) абсягам значэнняў з'яўляецца прамежак $(0; \pi)$;*
- в) не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай;*
- г) з'яўляецца спадальнай;*
- д) графік арккатангенса сіметрычны частцы графіка катангенса на прамежку $(0; \pi)$ адносна прамой $y = x$.*



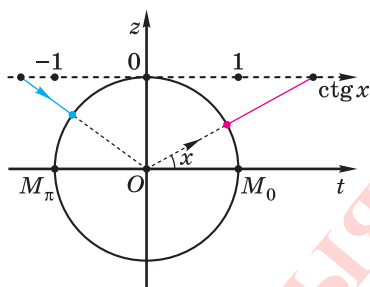
Рыс. 470

Доказ. а) і б). Праектаванне з цэнтра O трыганаметрычнай акружнасці ўстанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж восью катангенсаў, якая выяўляе мноства R рэчаісных лікаў, і дугой M_0M_π трыганаметрычнай акружнасці, якая выяўляе лікі прамежку $[0; \pi]$ (рыс. 471). А гэта азначае, што абсягам вызначэння функцыі $y = \operatorname{arccotg} x$ з'яўляецца мноства R рэчаісных лікаў, а абсягам значэнняў — прамежак $[0; \pi]$.

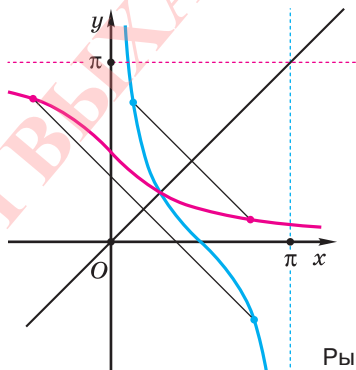
в) Уласцівасць даказваецца, як і адпаведная ўласцівасць для арккосінуса, устаноўленая ў тэарэме 9 параграфа 20. Правядзіце гэты доказ самастойна.

Уласцівасці **г)** і **д)** абгрунтоўваюцца аналагічна ўласцівасцям **г)** і **д)** тэарэмы 6. Правядзіце гэтае абгрунтаванне самастойна. Рысунак 472 ілюструе ўласцівасць **д)**.

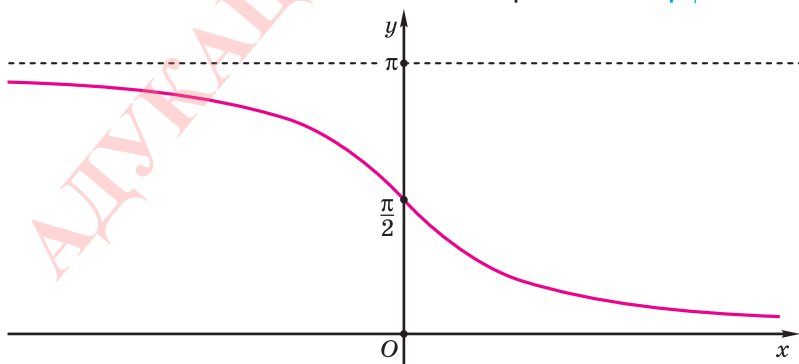
Графік арккатангенса выяўлены на рысунку 473. ◀



Рыс. 471



Рыс. 472



Рыс. 473



1. Якое мноства з'яўляецца абсягам вызначэння тангенса?
2. Якое мноства з'яўляецца абсягам значэнняў тангенса?

3. Які лік з'являється періодам тангенса?
4. Якою залежністю для супрацьлеглых значенняў аргумента зв'язані значення тангенса?
5. На яких проміжках тангенс нарастає; на яких спадає?
6. Яка функція з'являється витворнай тангенса?

1084. Запишіть координату пункту осі тангенса, що відповідає ліку:

- а) 0; б) $\frac{\pi}{4}$; в) π ; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) 2π .

1085. Запишіть тангенс ліку:

- а) 0; в) $-\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; ж) $-\frac{\pi}{3}$;
 б) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{5\pi}{6}$.

1086. Використавши графік функції $y = \operatorname{tg} x$, виявляють на рисунку 474, визначте, у кількох пунктах його перетинає графік функції:

- а) $y = x$; в) $y = -2x$; д) $y = -x^5$;
 б) $y = -\frac{1}{2}x$; г) $y = x^2$; е) $y = \sqrt[5]{x}$.

1087. Використавши графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (гл. рис. 474), визначте, що менше:

- а) $\operatorname{tg} 0,5$ або $\operatorname{tg} 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ або $\operatorname{tg} 0,57$;
 б) $\operatorname{tg}(-0,2)$ або $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{tg}(-0,4)$ або $\operatorname{tg}(-1)$;
 в) $\operatorname{tg} 1,5$ або $\operatorname{tg} 0,5$; е) $\operatorname{tg}(-1)$ або $\operatorname{tg} 0,1$.

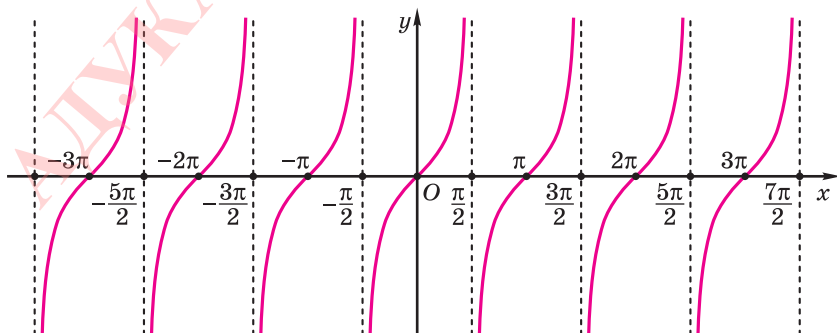


Рис. 474

1088. Визначыце, ці праўдзіцца роўнасць:

- а) $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; д) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{21\pi}{6}$;
б) $\operatorname{tg}(2x - 2\pi) = \operatorname{tg}(2x + 6\pi)$; е) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; ж) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{57\pi}{5}$;
г) $\operatorname{tg}(7\pi - t) = \operatorname{tg}(3\pi - t)$; з) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1089. Визначыце, які знак мае значэнне функцыі $y = \operatorname{tg} x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

- а) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{7\pi}{5}$; ж) $-\frac{4\pi}{3}$; к) $\frac{11\pi}{3}$;
б) 3; д) $\frac{16\pi}{5}$; з) $\frac{5\pi}{4}$; л) 5;
в) 2; е) 7; і) $-\frac{3\pi}{4}$; м) $\frac{13\pi}{8}$.

1090. З дапамогай калькулятара або табліц вызначыце каардынату пункта восі тангенсаў, што адпавядае ліку:

- а) 0; в) 1,3; д) 0,5;
б) 1,5; г) 1,2; е) 0,3.

1091. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (гл. рыс. 474) і яе ўласцівасці, укажыце значэнне аргумента, пры якім тангенс, роўны 1, а аргумент належыць прамежку:

- а) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$;
б) $\left(3\pi; -\frac{7\pi}{2}\right)$; г) $\left(8\pi; \frac{17\pi}{2}\right)$.

1092. Выкарыстаўшы графікі функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = -1$, прыведзеныя на рысунку 475, укажыце тры прамежкі, па якіх:

- а) $\operatorname{tg} x < -1$; в) $\operatorname{tg} x \leq -1$;
б) $\operatorname{tg} x > -1$; г) $\operatorname{tg} x \geq -1$.

1093. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$, выяўлены на рысунку 474, запішыце формулу, што выяўляе ўсе прамежкі, па якіх тангенс:

- а) дадатны; в) неаддатны;
б) адмоўны; г) неадмоўны.

1094. Дакажыце, што для значэнняў зменнай x , блізкіх да нуля, праўдзіцца набліжаная роўнасць $\operatorname{tg} x \approx x$.

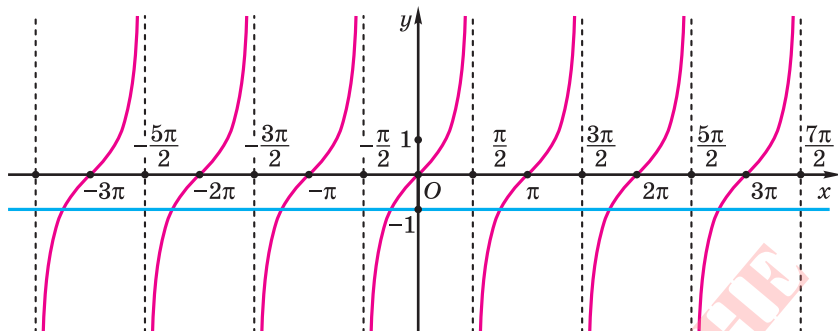


Рис. 475

1095. Викарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$, укажыце найбольшае і найменшае значэнні гэтай функцыі на прамежку:

- а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;
 б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1096. Знайдзіце значэнне функцыі $y = \operatorname{arctg} x$ пры значэнні аргумента, роўным:

- а) -1 ; б) 0 ; в) 1 ; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1097. Дакажыце, што функцыя $y = \operatorname{arctg} x$ з'яўляецца нарастальнай.

1098. Дакажыце, што графік функцыі $y = \operatorname{arctg} x$ сіметрычны адносна прамой $y = x$ частцы графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1099. Запішыце катангенс ліку:

- а) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{3}$; ж) $\frac{2\pi}{3}$;
 б) $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{3}$; з) $\frac{\pi}{2}$.

1100. Викарыстаўшы калькулятар або табліцы, вызначыце каардынату пункта восі катангенсаў, што адпавядае ліку:

- а) 1 ; в) $-1,3$; д) $-0,5$;
 б) $-1,5$; г) $-1,2$; е) $-0,3$.

1101. Викарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$, выяўлены на рысунку 476, вызначыце, што менш:

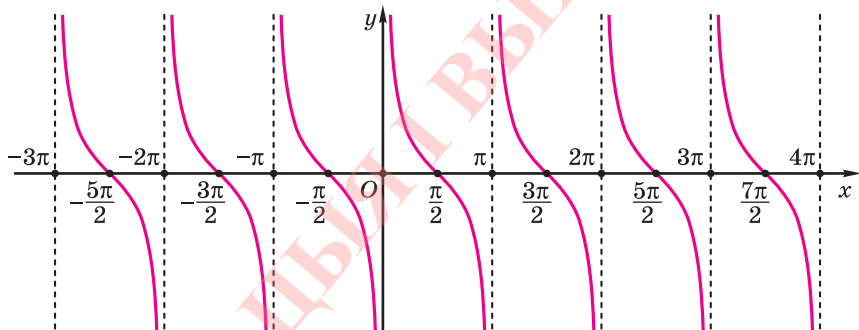
- а) $\operatorname{ctg} 0,5$ або $\operatorname{ctg} 1$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ або $\operatorname{ctg} 0,57$;
 б) $\operatorname{ctg}(-0,2)$ або $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; д) $\operatorname{ctg}(-0,4)$ або $\operatorname{ctg}(-1)$;
 в) $\operatorname{ctg} 1,5$ або $\operatorname{ctg} 0,5$; е) $\operatorname{ctg}(-1)$ або $\operatorname{ctg} 0,1$.

1102. Викарыстаўшы графікі функцый $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = -1$, прыведзеныя на рысунку 477, укажыце тры прамежкі, па якіх:

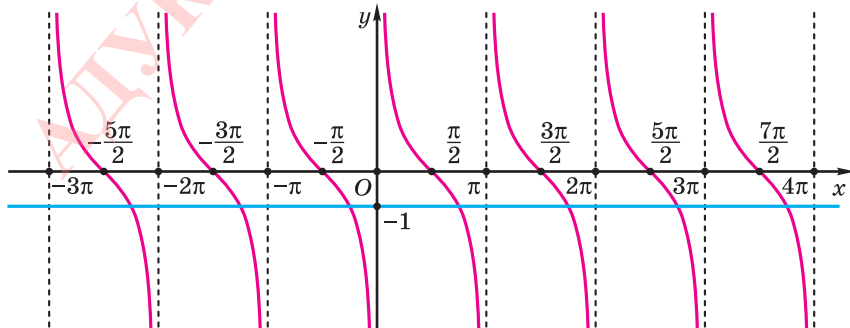
- а) $\operatorname{ctg} x < -1$; в) $\operatorname{ctg} x \leq -1$;
 б) $\operatorname{ctg} x > -1$; г) $\operatorname{ctg} x \geq -1$.

1103. Викарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$, выяўлены на рысунку 476, запішыце формулу, што выяўляе ўсе прамежкі, па якіх катангенс:

- а) дадатны; в) недадатны;
 б) адмоўны; г) неадмоўны.



Рыс. 476



Рыс. 477

1104. Визначьте, ці праўдзіцца роўнасць:

а) $\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg}(x + \pi)$;

б) $\operatorname{ctg}(2x - 2\pi) = \operatorname{ctg}(2x + 6\pi)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

г) $\operatorname{ctg}(7\pi - t) = \operatorname{ctg}(3\pi - t)$;

д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 + 2\sin \frac{\pi}{4}$;

е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{6\pi}{9}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{9}\right)$;

ж) $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5} = \operatorname{ctg} \frac{57\pi}{5}$;

з) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$.

1105. Визначьте, які знак мае значэнне функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ пры значэнні аргумента x , роўным:

а) $\frac{8\pi}{9}$; в) $\frac{13\pi}{3}$; д) $\frac{632\pi}{9}$;

б) $\frac{5\pi}{23}$; г) 28; е) $-\frac{2008\pi}{3}$.

1106. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ (гл. рыс. 477) і яе ўласцівасці, на прамежку $(0; \pi)$ рашыце няроўнасць:

а) $\operatorname{ctg} x < 1$; д) $\operatorname{ctg} x < -1$;

б) $\operatorname{ctg} x \leq 1$; е) $\operatorname{ctg} x \leq -1$;

в) $\operatorname{ctg} x > 1$; ж) $\operatorname{ctg} x > -1$;

г) $\operatorname{ctg} x \geq 1$; з) $\operatorname{ctg} x \geq -1$.

1107. Выкарыстаўшы графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$, укажыце найбольшае і найменшае значэнні гэтай функцыі на прамежку:

а) $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$; в) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$;

б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{5\pi}{4}\right]$.

1108. Знайдзіце значэнне функцыі $y = \operatorname{arctg} x$ пры значэнні аргумента, роўным:

а) -1 ; б) 0; в) 1; г) $\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1109. Дакажыце, што функцыя $y = \operatorname{arctg} x$ з'яўляецца спадальнай.

1110. Докажіть, що графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ симетричний відносно прямої $y = x$ частини графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ на проміжку $(0; \pi)$.

1111. Докажіть, що праїдзїца роїнасць:

а) $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \operatorname{arctg} 3 = \frac{\pi}{4}$;

б) $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} = \operatorname{arctg} \frac{2}{11}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{4} + \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{7} = \frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

е) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

1112. Докажіть, що праїдзїца роїнасць:

а) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} 7 = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4}$;

в) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6}$;

г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

1113. Докажіть, що праїдзїца роїнасць:

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{m} + \operatorname{arctg} \frac{m-1}{m+1} = \frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{n}{m} + \operatorname{arctg} \frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \operatorname{arctg} 3$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} - \operatorname{arctg} \frac{3}{11} = \frac{\pi}{4}$.

1114. Рашыце ўраўненне:

а) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3a$;

г) $\operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} a$;

б) $\operatorname{arctg} x = 3 \arcsin a$;

д) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$;

в) $\operatorname{arctg} x = 3 \arccos a$;

е) $\arcsin x = 4 \arcsin a$.

1115. Рашыце ўраўненне:

а) $\arcsin x = \arccos x$; в) $\pi - \arcsin x = \arccos x$;

б) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x$; г) $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arccotg} 3x = \frac{\pi}{4}$.

1116. Пункт знаходзіцца на адлегласці 8 см ад кожнай вяршыні правільнага трохвугольніка са стараной 12 см. Знайдзіце адлегласць гэтага пункта ад плоскасці трохвугольніка.

1117. Ёсць раўнабокi трохвугольнік, аснова якога i праведзеная да яе вышыня роўныя 8 см. Пункт А адлеглы на 12 см ад плоскасці трохвугольніка i роўнаадлеглы ад яго вяршынь. Знайдзіце адлегласць пункта А ад вяршынь трохвугольніка.

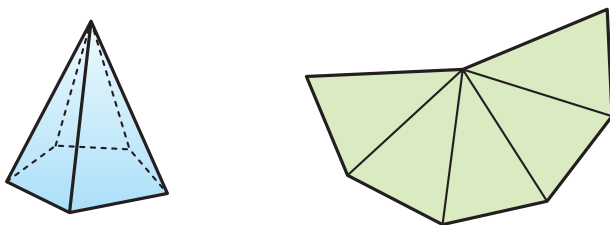
1118. З пункта, адлеглага ад плоскасці на 10 м, праведзены дзве роўныя нахіленыя. Знайдзіце адлегласць паміж асновамі нахіленых, улічыўшы, што яны перпендыкулярныя i ўтвараюць з плоскасцю вуглы ў 30° .

1119. З вяршыні квадрата ўзведзены перпендыкуляр да яго плоскасці. Адлегласці ад канца гэтага перпендыкуляра да іншых вяршынь квадрата роўныя a i b , прычым $a < b$. Знайдзіце перпендыкуляр i старану квадрата.

1120. З вяршыні Х прамавугольнага трохвугольніка XYZ з гіпатэнузай XY да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр XQ. Знайдзіце плошчу трохвугольніка YZQ, улічыўшы, што $YZ = 12$ см, $ZQ = 12\sqrt{3}$ см.

1121. Выкарыстаўшы рысунак 478, дакажыце, што бакавая паверхня правільнай піраміды роўная здабытку паўперыметра асновы піраміды i яе апафемы.

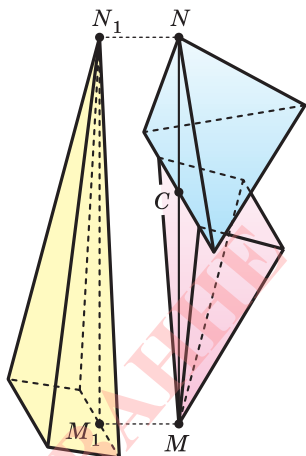
1122. На адрэзку MN выбраны пункт С, i на адрэзках-частках CN i CM як на апафемах пабудаваны правільныя



Рыс. 478

піраміды. Їх бакавыя паверхні роўныя 150 см^2 і 270 см^2 , а перыметр асновы другой піраміды складае 120% перыметра асновы першай піраміды (рыс. 479). Знайдзіце апафемы пірамід, улічыўшы, што калі на адрэзку MN як на апафеме пабудавалі трэцюю правільную піраміду з бакавой паверхняй 420 см^2 , то перыметр асновы аказаўся роўным 28 см .

1123. Веласіпедыст з адной скорасцю праехаў 39 км , а затым знізіў яе на 20% і праехаў яшчэ $15,6 \text{ км}$. Знайдзіце скорасці веласіпедыста, улічыўшы, што сярэдняя скорасць на ўсім шляху склала 14 км/г .



Рыс. 479

1124. Рашыце ўраўненне $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

1125. Знайдзіце абсяг значэнняў функцыі

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

1126. Знайдзіце ўсе натуральныя лікі, якія нельга выіць сумай двух узаемна простых лікаў, большых за 1 .

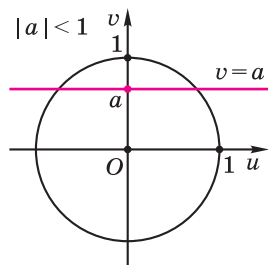
22. Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні

Разгледзім *найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні*, г. зн. ураўненні выгляду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

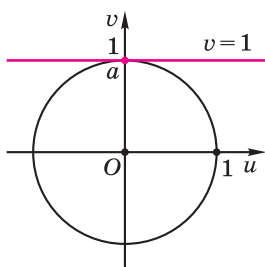
Няхай ёсць ураўненне

$$\sin x = a.$$

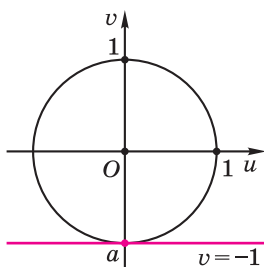
Для яго рашэння на каардынатную плоскасць uOv накладзём трыганаметрычную акружнасць і прамую $v = a$. Пры гэтым магчымыя тры выпадкі: прамая $v = a$ перасякае акружнасць у двух пунктах, калі $|a| < 1$ (рыс. 480);



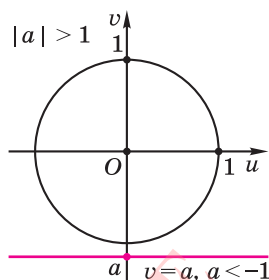
Рыс. 480



Рыс. 481



Рыс. 482



Рыс. 483

прамая $v = a$ датыкаецца да акружнасці, калі $|a| = 1$ (рыс. 481 і 482); прамая $v = a$ не мае з акружнасцю агульных пунктаў, калі $|a| > 1$ (рыс. 483). У першым і другім выпадках ураўненне $\sin x = a$ мае карані, у трэцім гэтае ўраўненне каранёў не мае.

Прыклад 1. Рэшым ураўненне $\sin x = 0$. Прамая $v = 0$ перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах M_0 і M_π (рыс. 484). Пунктам M_0 выяўляюцца ўсе лікі выгляду $2k\pi$, а пунктам M_π — усе лікі выгляду $\pi + 2n\pi$, дзе k і n — цэлыя лікі. Значыць,

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ або } (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

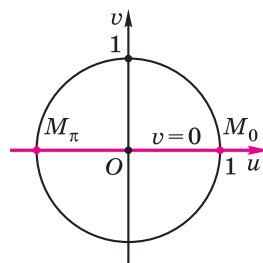
Тут запіс-формула $k \in \mathbb{Z}$ выражае сцверджанне « k — цэлы лік», або раўназначнае яму сцверджанне «Лік k належыць мноству цэлых лікаў».

Заўважым, што дзве запісаныя серыі каранёў можна выявіць адной формулай

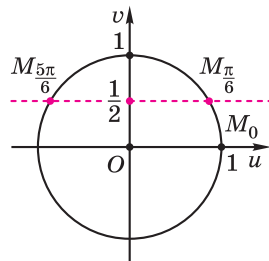
$$x = t\pi, t \in \mathbb{Z},$$

бо пры цотных значэннях зменнай t , г. зн. калі $t = 2k$, атрымліваецца першая серыя, а пры няцотных значэннях зменнай t , г. зн. калі $t = 2n + 1$, — другая серыя.

Прыклад 2. Рэшым ураўненне $\sin x = \frac{1}{2}$. Прамая $v = \frac{1}{2}$ перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах $M_{\frac{\pi}{6}}$ і $M_{\frac{5\pi}{6}}$ (рыс. 485). Пункт $M_{\frac{\pi}{6}}$



Рыс. 484



Рыс. 485

адпавядае ўсім лікам выгляду $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, а пункт $M_{\frac{5\pi}{6}}$ — усім лікам выгляду $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, дзе k і n — цэлыя лікі. Значыць, мноства каранёў ураўнення $\sin x = \frac{1}{2}$ складаюць мноствы $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ і $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, што можна запісаць так:

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Адказ можна запісаць і ў выглядзе

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ або } x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

або ў выглядзе

$$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

паколькі пры цотных значэннях m гэтая формула дае лікі першай серыі, а пры няцотных — другой. Сапраўды, калі $m = 2k$, то $x = (-1)^{2k} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, а калі $m = 2n + 1$, то $x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + (2n + 1)\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

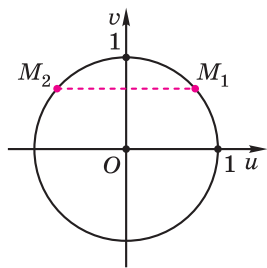
Тэарэма 14. Калі $|a| > 1$, то ўраўненне $\sin x = a$ не мае каранёў, а калі $|a| \leq 1$, то карані гэтага ўраўнення выяўляюцца формулай

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Няхай $|a| > 1$. Тады прамая $v = a$ не перасякае трыганаметрычную акружнасць, і таму ўраўненне $\sin x = a$ не мае каранёў.

Няхай $|a| < 1$. Тады прамая $v = a$ перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах M_1 і M_2 (рыс. 486).

Пункт M_1 трыганаметрычнай акружнасці адпавядае ліку $\arcsin a$ з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай



Рыс. 486

$$x = \arcsin a + 2m\pi, \text{ дзе } m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Пункт M_2 адпавядае ліку $\pi - \arcsin a$ з прамежку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай

$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Формулы $x = \arcsin a + 2m\pi$ і $x = \pi - \arcsin a + 2n\pi$, дзе m і n — цэлыя лікі, можна аб'яднаць у адну формулу:

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

паколькі пры цотных значэннях зменнай k , г. зн. калі $k = 2m$, атрымліваецца першая формула, а пры няцотных значэннях k , г. зн. калі $k = 2n + 1$, — другая формула.

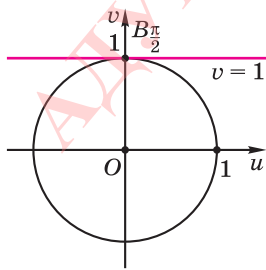
Калі $a = 1$, то выразы $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$ абодва становяцца выразам $\frac{\pi}{2}$, што адпавядае датыканню прамой $v = a$ да трыганаметрычнай акружнасці ў пункце B (рыс. 487). У гэтым выпадку ўсе тры формулы (1), (2) і (3) даюць адно і тое мноства лікаў $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Калі $a = -1$ (рыс. 488), то формулы (1), (2) і (3) таксама вызначаюць адно і тое мноства лікаў $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

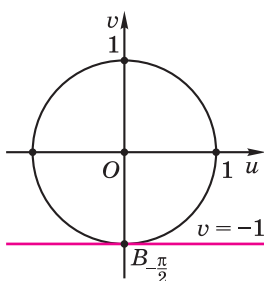
Няхай ёсць ураўненне

$$\cos x = a.$$

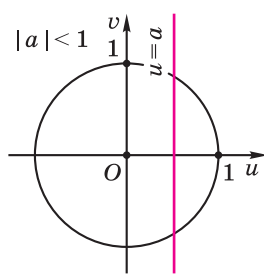
Для яго рашэння на каардынатнай плоскасці uOv разгледзім трыганаметрычную акружнасць і прамую $u = a$. Пры гэтым рэалізуецца адзін з трох выпадкаў: прамая $u = a$ перасякае акружнасць у двух пунктах, калі $|a| < 1$ (рыс. 489); прамая $u = a$ датыкаецца да акружнасці, калі



Рыс. 487



Рыс. 488



Рыс. 489

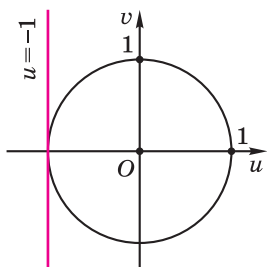


Рис. 490

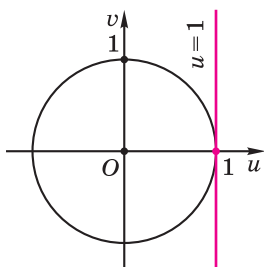


Рис. 491

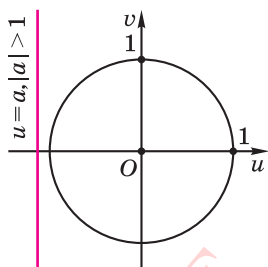


Рис. 492

$|a| = 1$ (рис. 490 і 491); пряма $u = a$ не має з акружнасцю агульных пунктаў, калі $|a| > 1$ (рис. 492). У трэцім выпадку ўраўненне $\cos x = a$ каранёў не мае, у першым і другім выпадках гэтае ўраўненне мае карані.

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $\cos x = 0$.

Ёсць два пункты трыганаметрычнай акружнасці, якія маюць абсцысу, роўную 0 — пункты $M_{\frac{\pi}{2}}$ і $M_{\frac{3\pi}{2}}$ (рис. 493).

Пункт $M_{\frac{\pi}{2}}$ адпавядае лікам выгляду $\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, а пункт $M_{\frac{3\pi}{2}}$ — лікам выгляду $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, дзе m і n — цэлыя лікі. Гэтыя дзве серыі каранёў можна выявіць адной формулай

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Атрыманая формула і задае мноства каранёў ураўнення $\cos x = 0$.

Прыклад 4. Рэшым ураўненне $\cos x = -\frac{1}{2}$. Прамая $u = -\frac{1}{2}$ перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах $M_{\frac{2\pi}{3}}$ і $M_{\frac{4\pi}{3}}$ (рис. 494). Пункт $M_{\frac{2\pi}{3}}$ выяўляе ўсе лікі выгляду

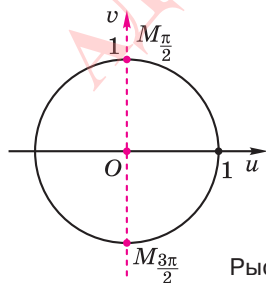


Рис. 493

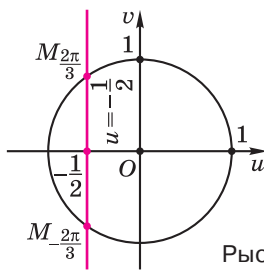


Рис. 494

ду $\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, а пункт $M_{\frac{2\pi}{3}}$ — усе лікі выгляду $-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, дзе m і n — цэлыя лікі. Гэтыя лікі разам складаюць мноства каранёў ураўнення $\cos x = -\frac{1}{2}$. Адказ можна запісаць і так:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Тэарэма 15. *Калі $|a| > 1$, то ўраўненне $\cos x = a$ не мае каранёў, а калі $|a| \leq 1$, то мноства каранёў гэтага ўраўнення выяўляецца формулай*

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, \text{ дзе } k \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Няхай $|a| > 1$. Тады прамая $u = a$ не перасякае трыганаметрычную акружнасць, і таму ўраўненне $\cos x = a$ не мае каранёў.

Няхай $|a| < 1$. Тады прамая $u = a$ перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах M_1 і M_2 (рыс. 495).

Пункт M_1 трыганаметрычнай акружнасці адпавядае ліку $\arccos a$ з прамежку $[0; \pi]$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай

$$x = \arccos a + 2m\pi, \text{ дзе } m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Пункт M_2 адпавядае ліку $-\arccos a$ з прамежку $[-\pi; 0]$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай

$$x = -\arccos a + 2n\pi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Дзве атрыманыя серыі каранёў можна аб'яднаць адной формулай

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Калі $a = 1$, то выразы $\arccos a$ і $-\arccos a$ абодва становяцца лікам 0, што адпавядае датыканню прамой $x = a$ да трыганаметрычнай акружнасці ў пункце A (рыс. 496).

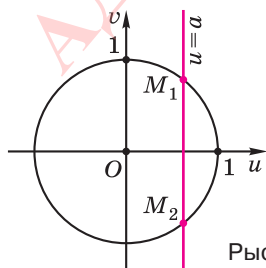


Рис. 495

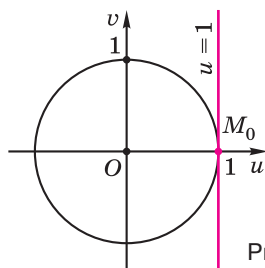


Рис. 496

У гэтым выпадку ўсе тры формулы (4), (5) і (6) даюць адно і тое мноства лікаў $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Калі $a = -1$ (рыс. 497), то формулы (4), (5) і (6) таксама вызначаюць адно і тое мноства лікаў $\{(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Няхай ёсць ураўненне

$$\operatorname{tg} x = a.$$

Тэарэма 16. *Мноства каранёў ураўнення $\operatorname{tg} x = a$ выяўляецца формулай*

$$x = \operatorname{arctg} a + m\pi, \text{ дзе } m \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Няхай a — пэўны рэчаісны лік. Адзначым яго на восі тангенсаў. Прамая, што праходзіць праз гэты пункт і пачатак каардынат, перасякае трыганаметрычную акружнасць у двух пунктах M_1 і M_2 (рыс. 498).

Пункт M_1 адпавядае ліку $\operatorname{arctg} a$ з прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай

$$x = \operatorname{arctg} a + 2m\pi, \text{ дзе } m \in \mathbb{Z}.$$

Пункт M_2 адпавядае ліку $\pi + \operatorname{arctg} a$ з прамежку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, а значыць, і ўсім лікам, якія выяўляюцца формулай

$$x = \pi + \operatorname{arctg} a + 2n\pi, \text{ дзе } n \in \mathbb{Z}.$$

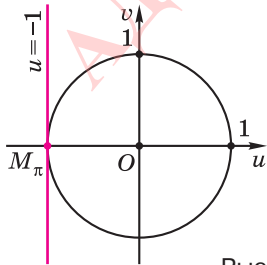
Дзве атрыманыя серыі каранёў можна аб'яднаць адной формулай

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

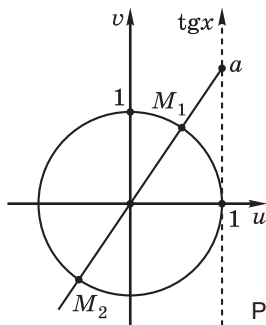
Прыклад 5. Рэшым ураўненне $\operatorname{tg} y = 3$.

У адпаведнасці з тэарэмай 16 атрымаем

$$y = \operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Рыс. 497

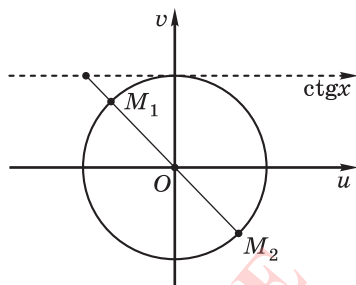


Рыс. 498

► **Тэарэма 17.** Мноства каранёў ураўнення $\operatorname{ctg} x = a$ выйляецца формулай

$$x = \operatorname{arccctg} a + t\pi, \text{ дзе } t \in \mathbb{Z}.$$

Доказ тэарэмы 17 праводзіцца аналагічны доказу тэарэмы 16. Правядзіце яго самастойна, выкарыстаўшы рысунак 499.



Рыс. 499

Прыклад 6. Рэшым ураўненне $\operatorname{ctg} y = 2$.

У адпаведнасці з тэарэмай 17 атрымаем

$$y = \operatorname{arccctg} 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$$



1. Які лік называецца арксінусам ліку a ?
2. Укажыце мноства каранёў ураўнення $\sin x = a$, калі $a > 1$; $a \leq 1$.
3. Які лік называецца арккосінусам ліку a ?
4. Укажыце мноства каранёў ураўнення $\cos x = a$, калі $a > 1$; $a \leq 1$.
5. Які лік называецца арктангенсам ліку a ?
6. Укажыце мноства каранёў ураўнення $\operatorname{tg} x = a$.

1127. Рашыце ўраўненне:

- | | |
|------------------------------------|---|
| а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | д) $\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0$; |
| б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; | е) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; |
| в) $\sin 2x = 0$; | ж) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -0,5$; |
| г) $\sin \frac{x}{3} = -1$; | з) $2 \sin 2x - 1 = 0$. |

1128. Рашыце ўраўненне:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; | д) $3 \cos 5x - 3 = 0$; |
| б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | е) $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; |
| в) $\cos 3x = \frac{1}{2}$; | ж) $2 \cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$; |
| г) $\cos 2x = -1$; | з) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{3}$. |

1129. Рашыце ўраўненне:

- а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$;
б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; е) $3 \operatorname{tg}(x + 1) + \sqrt{3} = 0$;
в) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$;
г) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$; з) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

1130. Рашыце ўраўненне:

- а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;
б) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\operatorname{ctg} 4x = 5$; ж) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$;
г) $\operatorname{ctg} 2x + \sqrt{3} = 0$; з) $3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 5 = 0$.

1131. Знайдзіце суму каранёў ураўнення на прамежку $[-\pi; 2\pi]$:

- а) $\sin t = -1$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$; д) $\cos 2t = 0$;
б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin 2t = 0$; е) $\cos 2t = -1$.

1132. Знайдзіце суму каранёў ураўнення на прамежку $[-2\pi; \pi]$:

- а) $\sin 2t = 1$; в) $\sin^2 t = \frac{3}{4}$; д) $\operatorname{tg} t = 1$;
б) $\sin t \cos t = 0$; г) $\cos^2 t = \frac{1}{2}$; е) $\operatorname{tg} 2t = 1$.

1133. Знайдзіце суму каранёў ураўнення на ўказаным прамежку:

- а) $\sin^2 t = \frac{1}{4}$, $[0; 2\pi]$; в) $\operatorname{tg}^2 t = 1$, $[-2\pi; \pi]$;
б) $\cos x = 1$, $[-\pi; 3\pi]$; г) $\operatorname{ctg}^2 t = 3$, $[0; 2\pi]$.

1134. Даўжыня бакавога канта правільнай трохвугольнай піраміды $DFGH$ роўная 12 см. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні піраміды да плоскасці асновы, улічыўшы, што кант асновы роўны 8 см.

1135. З вяршыні прамога вугла C прамавугольнага трохвугольніка ABC з катэтам і прылеглым да яго вуглом, адпаведна роўнымі a і α , узведзены перпендыкуляр CD даўжынёй l . Знайдзіце плошчу трохвугольніка DAB .

1136. Аснова XY і бакавая старана YZ раўнабокага трохвугольніка XYZ адпаведна роўныя 6 см і 5 см. З цэнтра Q акружнасці, умежанай у трохвугольнік, узведзены перпендыкуляр QG . Знайдзіце вышыню трохвугольніка XGY , праведзеную з вяршыні G , улічыўшы, што $QG = 2$ см.

1137. З вяршыні прамога вугла C прамавугольнага трохвугольніка ABC да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр CD . Знайдзіце адлегласць ад пункта D да гіпатэнузы трохвугольніка, улічыўшы, што $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$.

1138. Выкарыстаўшы рысунак 500, дакажыце, што плошча бакавой паверхні цыліндра роўная здабытку даўжыні акружнасці асновы на ўтваральнік.

1139. Ёсць тры цыліндры. У аднаго акружнасць асновы роўная 21π см, у другога бакавая паверхня роўная 435π см², а ўтваральнік на 10 см карацейшы, у трэцяга бакавая паверхня роўная суме бакавых паверхняў першага і другога цыліндраў, даўжыня акружнасці асновы — суме даўжынь іх акружнасцей, а ўтваральнік роўны $19,2$ см. Знайдзіце ўтваральнікі першага і другога цыліндраў.

* * *

1140. Улічыўшы, што α — большы за 1 карань ураўнення $x^3 - x - 1 = 0$, спрасціце выраз

$$\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}.$$

1141. Дыяганаль AC чатырохвугольніка $ABCD$ утварае са старанамі CB і CD вуглы ў 30° і 45° , а дыяганаль BD аддзяляе роўнастаронні трохвугольнік BCD . Знайдзіце вуглы ABC і ADC .

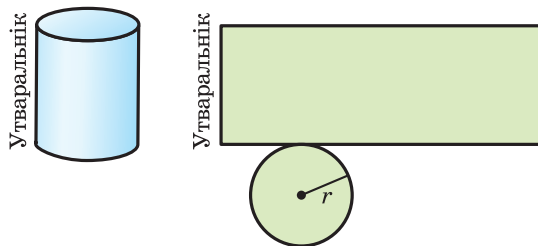


Рис. 500

1142. Яку найменшую колькасць вугалкоў з трох клетак трэба выказаць з шахматнай дошкі, каб пасля гэтага ўжо нельга было выказаць ні аднаго такога вугалка?

23. Трыганаметрычныя ўраўненні

Трыганаметрычным ураўненнем называецца ўраўненне, якое змяшчае зменныя пад знакам сінуса, косінуса, тангенса або катангенса.

Рашэнне трыганаметрычных ураўненняў зводзіцца да рашэння найпрасцейшых ураўненняў, разгледжаных у папярэднім параграфі. Пры гэтым даводзіцца выконваць пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў.

Прыклад 1. Рэшым ураўненне

$$10 \cos^2 x - 2 \sin x - 8 = 0.$$

Замяніўшы выраз $\cos^2 x$ роўным яму выразам $1 - \sin^2 x$, атрымаем квадратнае ўраўненне адносна $\sin x$:

$$\begin{aligned} 10 \cos^2 x - 2 \sin x - 8 &= 0 \equiv \\ &\equiv 10(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x - 8 = 0 \equiv \\ &\equiv 10 - 10 \sin^2 x - 2 \sin x - 8 = 0 \equiv \\ &\equiv 10 \sin^2 x + 2 \sin x - 8 = 0 \equiv 5 \sin^2 x + \sin x - 4 = 0 \equiv \\ &\equiv \sin x = -1 \text{ або } \sin x = \frac{4}{5} \equiv x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\text{або } x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Адказ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = (-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$

Прыклад 2. Рэшым ураўненне

$$\operatorname{tg} z + 7 \operatorname{ctg} z + 8 = 0.$$

Замяніўшы выраз $\operatorname{ctg} z$ роўным яму выразам $\frac{1}{\operatorname{tg} z}$, атрымаем квадратнае ўраўненне адносна $\operatorname{tg} z$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z + 7 \operatorname{ctg} z + 8 &= 0 \equiv \operatorname{tg} z + \frac{7}{\operatorname{tg} z} + 8 = 0 \equiv \\ &\equiv \operatorname{tg}^2 z + 8 \operatorname{tg} z + 7 = 0 \equiv \operatorname{tg} z = -1 \text{ або } \operatorname{tg} z = -7 \equiv \\ &\equiv z = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ або } z = -\arctg 7 + m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Звернем увагу на тое, што другі пераход у пераўтварэннях ураўнення, які заключаўся ў множанні левай і правай частак ураўнення на $\operatorname{tg} z$, з'яўляецца пераўтварэннем раў-

назначасці ў абсягу вызначэння ўраўнення, які вызначаецца ўмовамі $\sin x \cos x \neq 0$. Усе знойдзеныя карані праўдзяць гэтыя ўмовы.

Адказ. $z = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; x = -\arctg 7 + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Пры рашэнні трыганаметрычных ураўненняў можа аказацца карысным выкарыстанне прыёму *раскладання на множнікі*.

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $2 \sin t \sin 2t = \cos t$.

Выкарыстаўшы тоеснасць $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, атрымаем ураўненне

$$2 \sin t \cdot 2 \sin t \cos t - \cos t = 0,$$

якое вынясеннем за дужкі множніка $\cos t$ прыводзіцца да ўраўнення

$$\cos t (4 \sin^2 t - 1) = 0.$$

Далейшае рашэнне ўраўнення наступнае:

$$\cos t (4 \sin^2 t - 1) = 0 \equiv \cos t = 0, \text{ або } 4 \sin^2 t - 1 = 0 \equiv$$

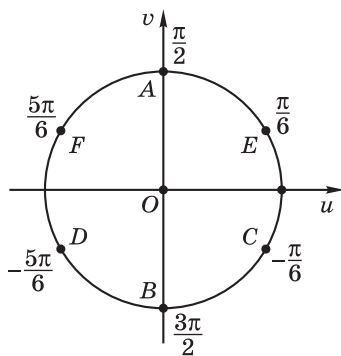
$$\equiv \cos t = 0, \text{ або } \sin t = -\frac{1}{2}, \text{ або } \sin t = \frac{1}{2} \equiv$$

$$\equiv t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ або } t = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або } t = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

У нас атрымалася 3 серыі каранёў. Іншы раз некаторыя з серый можна аб'яднаць у адну серыю. Выявім атрыманыя серыі каранёў на трыганаметрычнай акружнасці. Першая серыя выяўляецца пунктамі A і B , другая — пунктамі C і D , трэцяя — пунктамі E і F (рыс. 501). Звернем увагу на тое, што пры руху па акружнасці, напрыклад, у дадатным кірунку, кожны з гэтых пунктаў атрымліваецца з папярэдняга зрухам на $\frac{\pi}{3}$. Гэта дазваляе ўсе атрыманыя серыі выявіць адной формулай $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z}$.

Адказ. $\frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z}$.



Рыс. 501

Прыклад 4. Рэшым ураўненне

$$\sin^2 u + 2 \sin u \cos u - 3 \cos^2 u = 0.$$

Звернем увагу на тое, што калі лічыць $\sin u$ і $\cos u$ членамі першай ступені, то кожнае складаемае алгебраічнай сумы ў левай частцы ўраўнення мае адну і тую — другую — ступень. Яго можна рашаць дзяленнем на найбольшую ступень сіноса або косінуса. Пры гэтым мы не парушаем раўназначнасць пераўтварэнняў, бо тыя значэнні зменнай, пры якіх сінус або косінус роўныя нулю, не з'яўляюцца каранямі ўраўнення. Сапраўды, калі дапусціць, што $\cos u = 0$, то тады і $\sin u = 0$, але сінус і косінус разам не могуць ператварацца ў нуль. Улічыўшы гэта, падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 u$ і рэшым атрыманае ўраўненне, раўназначнае дадзенаму:

$$\begin{aligned} \sin^2 u + 2 \sin u \cos u - 3 \cos^2 u &= 0 \equiv \\ \equiv \operatorname{tg}^2 u + 2 \operatorname{tg} u - 3 &= 0 \equiv \operatorname{tg} u = -3, \text{ або } \operatorname{tg} u = 1 \equiv \\ \equiv u = -\arctg 3 + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ або } u &= \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Адказ. $u = -\arctg 3 + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ або $u = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Прыклад 5. Рэшым ураўненне

$$3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 = 0.$$

Гэтае ўраўненне заменай складаемага 7 тоесна роўнай яму сумай $7(\sin^2 y + \cos^2 y)$ зводзіцца да ўраўнення $3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 \sin^2 y - 7 \cos^2 y = 0$, у якога ўсе складаемыя маюць другую ступень. Яго далейшае рашэнне наступнае:

$$\begin{aligned} 3 \sin^2 y - 11 \sin y \cos y - 7 \sin^2 y - 7 \cos^2 y &= 0 \equiv \\ \equiv 7 \cos^2 y + 11 \sin y \cos y + 4 \sin^2 y &\equiv \\ \equiv 7 \operatorname{ctg}^2 y + 11 \operatorname{ctg} y + 4 &= 0 \equiv \\ \equiv \operatorname{ctg} y = -1, \text{ або } \operatorname{ctg} y = -\frac{4}{7} &\equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ \text{або } y = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{7}\right) + l\pi, l \in \mathbf{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ або } y = \pi - \operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + l\pi, l \in \mathbf{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ або } y = -\operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + (l+1)\pi, l \in \mathbf{Z} &\equiv \\ \equiv y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ або } y = -\operatorname{arccctg} \frac{4}{7} + m\pi, m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Адказ. $y = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ або $y = -\operatorname{arccotg} \frac{4}{7} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 6. Рэшым ураўненне

$$2 \sin \frac{x}{3} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = 1 - 2 \sin \frac{x}{3}.$$

Раскладзём дадзенае ўраўненне на множнікі і рэшым атрыманае ўраўненне:

$$\begin{aligned} & \left(2 \sin \frac{x}{3} \operatorname{tg} x + 2 \sin \frac{x}{3} \right) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv \\ & \equiv 2 \sin \frac{x}{3} (\operatorname{tg} x + 1) - (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \equiv \\ & \equiv (\operatorname{tg} x + 1) \left(2 \sin \frac{x}{3} - 1 \right) = 0 \equiv \operatorname{tg} x = -1, \text{ або } \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \equiv \\ & \equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ або } \frac{x}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \equiv \\ & \equiv x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ або } x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Улічым абсяг вызначэння ўраўнення, які вызначаецца ўмовай $\cos x \neq 0$. Лёгка заўважыць, што лікі серыі $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3n\pi, n \in \mathbb{Z}$ гэтую ўмову не праўдзяць і, значыць, не могуць уваходзіць у адказ.

Адказ. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Прыклад 7. Рэшым ураўненне $7 \sin b + \cos b = 5$.

Выкарыстаем формулу дапаможнага вугла, для чаго падзелім левую і правую часткі ўраўнення на $\sqrt{7^2 + 1^2}$, г. зн. на $\sqrt{50}$:

$$\frac{7}{\sqrt{50}} \sin b + \frac{1}{\sqrt{50}} \cos b = \frac{5}{\sqrt{50}}.$$

Паколькі $\left(\frac{7}{\sqrt{50}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{50}} \right)^2 = 1$, то існуе такі лік u , што $\frac{7}{\sqrt{50}} = \sin u$ і $\frac{1}{\sqrt{50}} = \cos u$. Гэта дазваляе ўраўненне выявіць так:

$$\sin u \sin b + \cos u \cos b = \frac{5}{5\sqrt{2}}, \text{ або } \cos(b - u) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значыць, $b - u = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, або $b = \pm \frac{\pi}{4} + u + 2k\pi$. Паколькі $u = \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}$, то

$$b = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Адказ. $b = \pm \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{7}{\sqrt{50}} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Рэшым гэтае ўраўненне інакш, выкарыстаўшы ўніверсальную падстаноўку, якая дазваляе выразіць $\sin b$ і $\cos b$ праз $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$:

$$\sin b = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}; \quad \cos b = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}.$$

З улікам гэтага ўраўненне набывае выгляд:

$$\frac{14 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} = 5.$$

Яго рашэнне можа быць такім:

$$\begin{aligned} 14 \operatorname{tg} \frac{b}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} - 5 - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} &= 0 \equiv \\ \equiv 6 \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} - 14 \operatorname{tg} \frac{b}{2} + 4 &= 0 \equiv \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \text{ або } \operatorname{tg} \frac{b}{2} = 2 \equiv \\ \equiv \frac{b}{2} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z} \text{ або } \frac{b}{2} = \operatorname{arctg} 2 + n\pi, n \in \mathbb{Z} \equiv \\ \equiv b &= 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \text{ або } b = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Улічыўшы умовы, пры якіх прымяняльная ўніверсальная падстаноўка, застаецца правэрыць, ці праўдзяць ураўненне лікі выгляду $\pi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$:

$$7 \sin(\pi + 2l\pi) + \cos(\pi + 2l\pi) = 7 \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 \neq 5.$$

Адказ. $b = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}; b = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Пры рашэнні трыганаметрычных ураўненняў могуць выкарыстоўвацца ўласцівасці трыганаметрычных функцый.

Прыклад 8. Рэшым ураўненне

$$\sin^2 s \sin 3s - 1 = \cos^2 s - \cos^4 s.$$

Пераўтворым тоесна правую частку ўраўнення:

$$\begin{aligned} \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s - \cos^4 s \equiv \\ \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s (1 - \cos^2 s) \equiv \\ \equiv \sin^2 s \sin 3s - 1 &= \cos^2 s \sin^2 s. \end{aligned}$$

Цяпер звернем увагу на тое, што значэнні левай часткі $\sin^2 s \sin 3s - 1$ ураўнення належаць прамежку $[-2; 0]$, а

правай часткі $\cos^2 s \sin^2 s$ — прамежку $[0; 1]$. Адсюль зразумела, што роўнасць можа дасягацца толькі пры ўмове, што левая і правая часткі ўраўнення абедзве роўныя нулю, г. зн. дадзенае ўраўненне раўназначнае сістэме

$$\begin{cases} \sin^2 s \sin 3s - 1 = 0, \\ \cos^2 s \sin^2 s = 0. \end{cases}$$

Другое ўраўненне сістэмы патрабуе, каб хаця б адзін з множнікаў $\cos s$ або $\sin s$ быў роўны нулю. Такім множнікам можа быць толькі $\cos s$, бо калі $\sin s = 0$, то першае ўраўненне не праўдзіцца ні пры якім значэнні зменнай s . Першае ўраўненне сістэмы можа праўдзіцца толькі пры ўмове, што абодва множнікі $\sin^2 s$ і $\sin 3s$ роўныя адзінцы. Такім чынам, зыходнае ўраўненне раўназначнае сістэме

$$\begin{cases} \cos s = 0, \\ \sin^2 s = 1, \\ \sin 3s = 1. \end{cases}$$

Можна заўважыць, што другое ўраўненне атрыманай сістэмы вынікае з першага ўраўнення, таму яго можна апусціць: $\begin{cases} \cos s = 0, \\ \sin 3s = 1. \end{cases}$ Каранямі першага ўраўнення з'яўляюцца лікі выгляду $\frac{\pi}{2} + l\pi$, дзе $l \in \mathbf{Z}$. Гэтыя лікі павінны праўдзіць і апошняе ўраўненне, г. зн. павінна праўдзіцца ўраўненне $\sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1$. Рэшым яго:

$$\begin{aligned} \sin 3\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = 1 &\equiv \frac{3\pi}{2} + 3l\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbf{Z} \equiv \\ &\equiv 1 + 3l = 2m, m \in \mathbf{Z} \equiv m = \frac{1+3l}{2}, m \in \mathbf{Z} \equiv l = 2k + 1. \end{aligned}$$

Значыць, $s = \frac{\pi}{2} + l\pi = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, дзе $k \in \mathbf{Z}$.

Адказ. $s = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, дзе $k \in \mathbf{Z}$.



1. Якое ўраўненне называецца трыганаметрычным?

2. Пры якіх значэннях аргумента вызначаная функцыя $y = \sin x$; $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$?

3. Пры якой умове праўдзіцца роўнасць $AB = 0$?

4. Як рашаюць трыганаметрычныя ўраўненні, складаемыя абедзвюх частак якіх маюць адну і тую ступень?

5. У чым заключаецца ўніверсальная падстаноўка і пры якой умове яна прымяняльная?

1143. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{\sin t}{1 - \cos t} = 0$; в) $\frac{5}{3 \sin t + 4} = 2$; д) $\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg} z} = 0$;
б) $\frac{\cos y}{1 + \sin y} = 0$; г) $\frac{3}{5 \operatorname{tg} x + 8} = 1$; е) $\frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = 0$.

1144. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin t \cos t = 0,25$; г) $\sin^4 \frac{y}{2} - \cos^4 \frac{y}{2} = 0,25$;
б) $\sin n \cos n = -0,25$; д) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$;
в) $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0,5$; е) $\cos^2 y = \frac{1}{2}$.

1145. Рашыце ўраўненне:

а) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$; д) $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
б) $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; е) $\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
в) $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$; ж) $\operatorname{tg} y = 3 \operatorname{ctg} y$;
г) $8 \cos^2 x - 12 \sin x + 7 = 0$; з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

1146. Рашыце ўраўненне:

а) $2 \cos^2 z - \sin z + 1 = 0$; е) $2 \sin^2 y + 3 \cos y = 0$;
б) $3 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$; ж) $5 \sin^2 y + 6 \cos y - 6 = 0$;
в) $4 \sin^2 y - \cos y - 1 = 0$; з) $\cos^2 x + 3 \sin x = 3$;
г) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$; і) $\cos 4x - \sin 2x = 1$;
д) $2 \cos^2 y + \sin y + 1 = 0$; к) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

1147. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos y = \sin y$; д) $\sin z = 2 \cos z$;
б) $\sin y + \sqrt{3} \cos y = 0$; е) $2 \sin t + \cos t = 0$;
в) $3 \sin k - \sqrt{3} \cos k = 0$; ж) $2 \sin 2x = 3 \cos 2x$;
г) $3 \sin m + 5 \cos m = 0$; з) $2 \cos l - \sqrt{2} \sin l = 0$.

1148. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin^2 k - 4 \sin k \cos k + 3 \cos^2 k = 0$;
б) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$;
в) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
г) $2 \sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$;
д) $7 \sin^2 t - 5 \sin t \cos t - 2 \cos^2 t = 0$;

- е) $2 \sin^2 y = \sqrt{6} \sin 2y - 3 \cos^2 y$;
 ж) $\sqrt{3} \sin^2 l = 4 \sin l \cos l - \sqrt{3} \cos^2 l$;
 з) $\sin^2 n + \sqrt{3} \cos^2 n = (1 + \sqrt{3}) \sin n \cos n$.

1149. Рашыце ўраўненне:

- а) $3 \sin x \cos x - 2 \cos 2x = 0$;
 б) $\cos^2 y + 4 \sin^2 y = 2 \sin 2y$;
 в) $\sin 2y + \sin y \cos y = 2 \cos 2y$;
 г) $2 \cos^2 2t + 3 \sin 4t + 4 \sin^2 2t = 0$.

1150. Рашыце ўраўненне:

- а) $\cos^2 l - 3 \sin l \cos l + 1 = 0$;
 б) $3 \sin^2 y + 2 \sin y \cos y = 2$;
 в) $9 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2$;
 г) $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$.

1151. Рашыце ўраўненне:

- а) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) \left(2 \sin \frac{x}{12} + 1 \right) = 0$;
 б) $\left(1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} \right) (1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$;
 в) $\left(2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right) (2 \operatorname{tg} x + 1) = 0$;
 г) $\left(1 + \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) (\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

1152. Рашыце ўраўненне:

- | | |
|--|--|
| а) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$; | ж) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$; |
| б) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$; | з) $2 \sin x \cos x = \cos x$; |
| в) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$; | и) $2 \sin^2 y = \sqrt{3} \sin 2y$; |
| г) $2 \sin m - \cos m \sin m = 0$; | к) $\sin 2y = 2 \sin y$; |
| д) $\sqrt{3} \cos n + \cos n \sin n = 0$; | л) $\operatorname{tg} 5y = \operatorname{tg} 3y$; |
| е) $\sqrt{3} \sin k \cos k = \cos^2 k$; | м) $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$. |

1153. Рашыце ўраўненне:

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| а) $\cos x = \cos 3x$; | е) $\sin t + \cos 3t = 0$; |
| б) $\sin z = \sin 3z$; | ж) $\sin 2z = \cos 3z$; |
| в) $\sin y + \sin 3y = 0$; | з) $\sin 2y - \cos y = 0$; |
| г) $\sin 3x = \sin 5x$; | и) $\sin 5t - \sin t = 0$; |
| д) $\cos 5t - \cos 3t = 0$; | к) $\sin 5y = \sin 7y$. |

1154. Рашыце ўраўненне:

- а) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;
- б) $\sin 7y - \sin y = \cos 4y$;
- в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
- г) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;
- д) $\sin y + \sin 2y + \sin 3y + \sin 4y = 0$;
- е) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

1155. Рашыце ўраўненне:

- а) $\sin 3a = \sin 2a \cos a$;
- б) $\cos 7z \cos 3z = \cos 4z$;
- в) $\cos 5a \cos a = \cos 4a$;
- г) $\cos 3z \cos z = \cos 7z \cos 5z$.

1156. Рашыце ўраўненне:

- а) $2 \sin t - 5 \cos t + 2 \operatorname{tg} t = 5$;
- б) $\sin z - \cos z + \operatorname{tg} z = 1$;
- в) $\operatorname{tg} z + \sin z \operatorname{tg} z = 0$;
- г) $\cos t + \operatorname{tg} t = 0$;
- д) $\operatorname{tg} 4z = \operatorname{tg} 2z$;
- е) $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x = 1$.

1157. Рашыце ўраўненне:

- а) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$;
- б) $\sin y + \cos y = 1$;
- в) $\sin x - \cos x = 1$;
- г) $\sin y - \sqrt{3} \cos y = 1$;
- д) $\sin 3t + \cos 3t = \sqrt{2}$;
- е) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = \sqrt{2}$;
- ж) $\sqrt{3} \sin z + \cos z = 2$;
- з) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

1158. Рашыце ўраўненне:

- а) $\sin 5t + \sqrt{3} \cos 5t = 2 \sin 7t$;
- б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$;
- в) $\cos 3y - \sin y = \cos y - \sin 3y$;
- г) $5 (\sin t + \cos t)^2 - 13 (\sin t + \cos t) + 8 = 0$.

1159. Рашыце ўраўненне:

- а) $2 \sin 2z - 3 (\sin z + \cos z) + 2 = 0$;
- б) $\sin x + \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$.

1160. Рашыце ўраўненне:

- а) $\cos 2z + \operatorname{tg} z = 1$;
- б) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$;
- в) $2 \sin u - 5 \cos u = 4$;
- г) $5 \sin x + \cos x = 5$;
- д) $\sqrt{3} \sin y - \sqrt{5} \cos y = \sqrt{3}$;
- е) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$;
- ж) $\sin y - \sqrt{7} \cos y = \sqrt{7}$;
- з) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = 1$.

1161. Рашыце ўраўненне:

- а) $\sin d + \cos d = 3$;
- б) $\sin a + \cos 2a = 2$;
- в) $\sin 3x + \cos 4x = 2$;
- г) $\sin 4z + |\sin 5z| = 2$;
- д) $2 \sin e - 3 \cos e = 6$;
- е) $\sin 3y - \cos 2y = 2$;
- ж) $\sin \frac{a}{3} - \sin \frac{a}{4} = -2$;
- з) $\sin z - \cos 2z + \sin 4z = 3$.

1162. Рашыце ўраўненне:

- а) $\sin x \sin 5x = 1$; д) $\sin 6u \sin 8u = 1$;
б) $\sin x \cos 4x = -1$; е) $\cos 4x \cos 5x = 1$;
в) $\cos x \sin 5x = -1$; ж) $\cos 8w \cos 3w = -1$;
г) $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{5} = 1$; з) $\sin^3 5t + \sin^4 7t = 2$.

1163. Дакажыце, што ўраўненне $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 100x = 100$ не мае каранёў.

1164. Рашыце ўраўненне:

- а) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; в) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$; д) $\frac{\sin 4c}{\cos 6c} = 1$;
б) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; г) $\frac{\sin 3a}{\cos 5a} = 0$; е) $\frac{\cos 3d}{\sin 2d} = 1$.

1165. У аснове трохвугольнай піраміды $KLMN$ ляжыць раўнабокi трохвугольнік LMN з асновай MN , а яе бакавы кант KL перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце плошчу грані KMN , улічыўшы, што $LM = 10$ см, $MN = 12$ см, $LK = 15$ см.

1166. У трохвугольнай пірамідзе $IJKL$ бакавы кант KI перпендыкулярны плоскасці JKL . Знайдзіце вышыню IH грані IJL , улічыўшы, што $JK = 10$ см, $KL = 17$ см, $JL = 21$ см, $IK = 15$ см.

1167. Пункт адлеглы ад плоскасці трохвугольніка на 2,2 м, а да кожнай з яго старон — на 12,2 м. Знайдзіце радыус акружнасці, умежанай у гэты трохвугольнік.

1168. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўсе роўныя a і ўтвараюць з асновай піраміды вуглы ў 30° . Знайдзіце старану асновы, якая з'яўляецца правільным трохвугольнікам.

1169. Ёсць ромб $ABCD$ са стараной a і вострым вуглом A , роўным 60° . Да яго плоскасці з вяршыні B узведзены перпендыкуляр BP . Знайдзіце сінус вугла паміж прамой PD і плоскасцю PBC , улічыўшы, што гэтая прамая з плоскасцю ромба ўтварае вугал, роўны 45° .

1170. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у якім: $D_1 B = d$, $AC = m$, $AB = l$. Знайдзіце адлегласць паміж:

- а) прамой $A_1 C_1$ і плоскасцю ABC ;
б) плоскасцямі ABB_1 і DCC_1 ;
в) прамой DD_1 і плоскасцю ACC_1 .

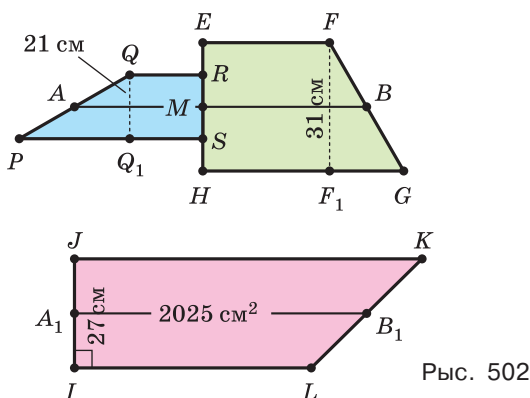


Рис. 502

1171. На адрезку AB узяты пункт M , і на адрэзках-частках MA і MB як на сярэдніх лініях пабудавалі прамавугольныя трапецыі $PQRS$ і $EFGH$ з вышынямі QQ_1 і FF_1 , адпаведна роўнымі 21 см і 31 см, і супольнай плошчай 2025 см^2 (рыс. 502). Такую плошчу мела б трапецыя $IJKL$ з сярэдняй лініяй A_1B_1 , роўнай AB , і вышынёй 27 см. Знайдзіце:

а) сярэднія лініі трапецый $PQRS$ і $EFGH$;

б) бакавыя стораны трапецый $PQRS$ і $EFGH$, улічыўшы, што вуглы P і G адпаведна роўныя 30° і 60° .

1172. Сплавлілі кавалак медзі шчыльнасцю $8,96 \text{ г/см}^3$ і кавалак цынку шчыльнасцю $7,13 \text{ г/см}^3$ і атрымалі 100 кг латуні шчыльнасцю $8,20 \text{ г/см}^3$. Знайдзіце з дакладнасцю да кілаграма масы ўзятых кавалкаў.

1173. На рысунках 504—515 (см. с. 336) выяўлены графікі функцый, атрыманыя рознымі пераўтварэннямі графіка функцыі $y = f(x)$, што на рысунку 503. Укажыце нумар рысунка, на якім прыведзены графік функцыі:

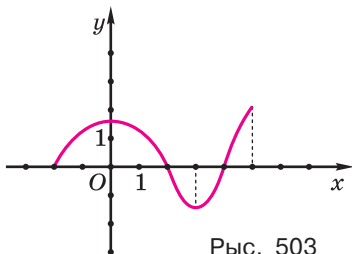


Рис. 503

а) $y = f(x + 2)$;

д) $y = -f(x)$;

і) $y = 2f(x)$;

б) $y = f(x - 2)$;

е) $y = f(-x)$;

к) $y = \frac{1}{2}f(x)$;

в) $y = f(x) + 2$;

ж) $y = |f(x)|$;

л) $y = f(2x)$;

г) $y = f(x) - 2$;

з) $y = f(|x|)$;

м) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

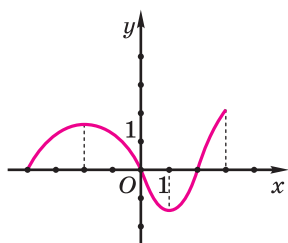


Рис. 504

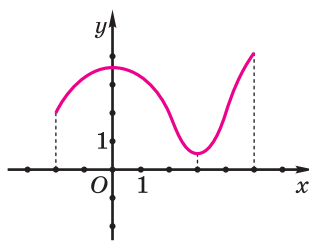


Рис. 505

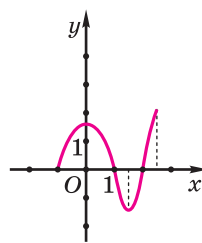


Рис. 506

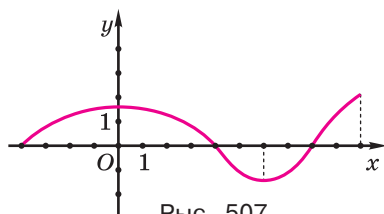


Рис. 507

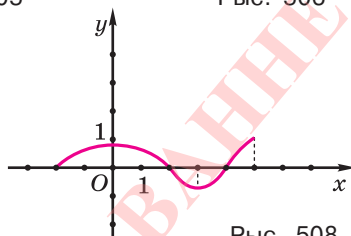


Рис. 508

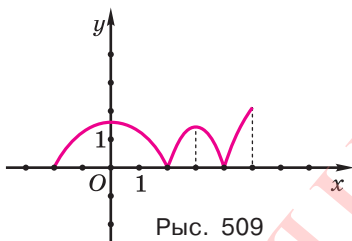


Рис. 509

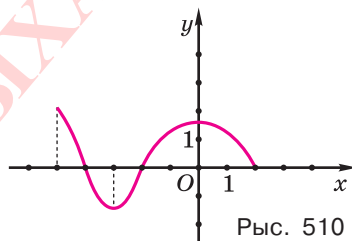


Рис. 510

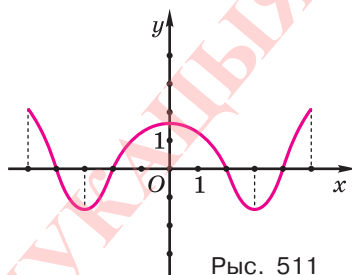


Рис. 511

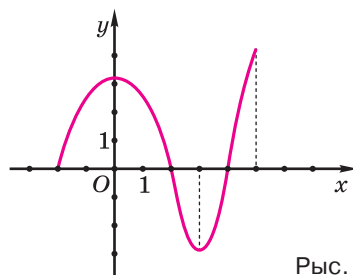


Рис. 512

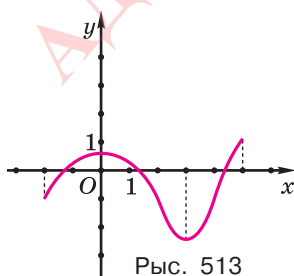


Рис. 513

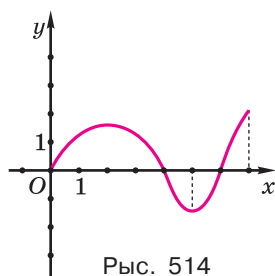


Рис. 514

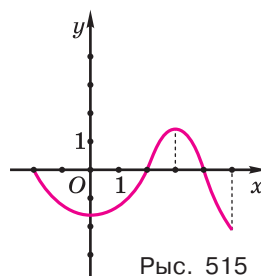


Рис. 515

1174. На паперы ў клетку пабудаваны прамавугольнік, стораны якога належаць лініям сеткі. Памеры прамавугольніка ёсць $m \times n$ клетак, прычым лікі m і n узаемна простыя. Улічыўшы, што дыяганаль прамавугольніка не перасякае ва ўнутраных пунктах 116 клетак, вызначыце, колькі клетак яна можа перасякаць.

1175. Вугал A трохвугольніка ABC роўны 50° , а вугал C роўны 70° . На старанах AB і BC адзначаны адпаведна такія пункты P і Q , што $\angle ACP = \angle CAQ = 30^\circ$. Улічыўшы, што адрэзкі AP і CQ перасякаюцца ў пункце M , знайдзіце:

- а) $\angle ABM$; б) $\angle CPQ$.

1176. Ці можна на плоскасці адзначыць 225 пунктаў так, каб адлегласць паміж любымі двума пунктамі была не меншай за 3 і не большай за 21?

24. Трыганаметрычныя функцыі

Вывучаныя ў IX класе пераўтварэнні графікаў функцый дазваляюць, выкарыстаўшы графікі найпростейшых трыганаметрычных функцый $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, будаваць графікі больш складаных трыганаметрычных функцый.

Прыклад 1. Пабудуем графік функцыі

$$y = 2 \sin \left(3x + 1\frac{1}{2} \right).$$

Улічым, што $y = 2 \sin \left(3x + 1\frac{1}{2} \right) = 2 \sin 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)$. Таму шуканы графік атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sin x$ у выніку наступнай паслядоўнасці пераўтварэнняў:

– спісканнем у 3 разы графіка функцыі $y = \sin x$ да восі ардынат атрымаем графік функцыі $y = \sin 3x$ (рыс. 516);

– зрухам графіка функцыі $y = \sin 3x$ уздоўж восі абсцыс на $\frac{1}{2}$ улева атрымаем графік функцыі $y = \sin 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)$ (рыс. 517);

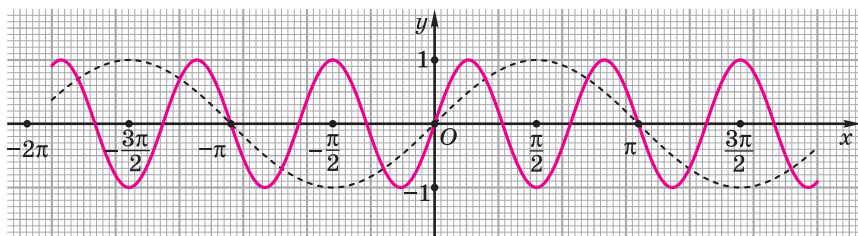


Рис. 516

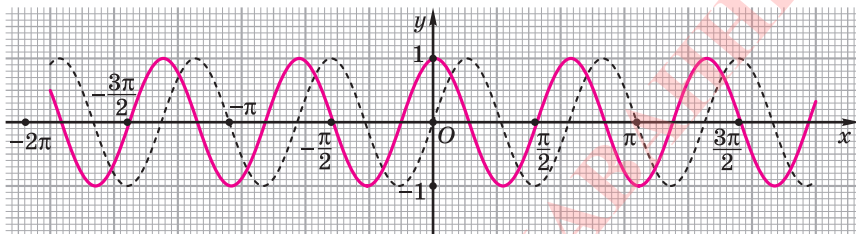


Рис. 517

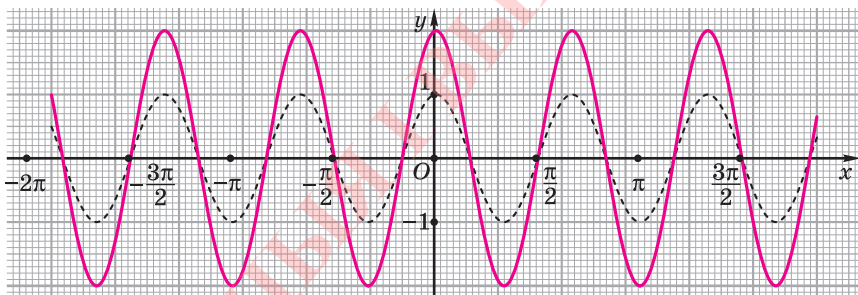


Рис. 518

– расцяжэннем графіка функцыі $y = \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ад восі абсцыс у 2 разы атрымаем графік функцыі $y = 2 \sin 3\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (рыс. 518).

Пры пераўтварэннях графіка функцыі $y = f(x)$ у адпаведнасці з формуламі $y = f(x) + c$ (зрух уздоўж восі ардынат), $y = f(x + c)$ (зрух уздоўж восі абсцыс), $y = -f(x)$ (сіметрыя адносна восі абсцыс), $y = f(-x)$ (сіметрыя адносна восі ардынат), $y = kf(x)$ (расцяжэнне ад восі абсцыс або сцісканне да яе), $y = f(kx)$ (сцісканне да восі ардынат або расцяжэнне ад яе) пэўныя характарыстыкі функцыі пераходзяць у спадчыну.

Адзначаная акалічнасць дазваляе спрасціць даследаванне функцый выгляду $y = A \sin(kx + b)$ і $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ — дастаткова знайсці іх перыяды, пункты іх нулявых значэнняў, пункты максімуму і пункты мінімуму.

Тэарэма 18. *Функцыі $y = A \sin(kx + b)$ і $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ перыядычныя і іх найменшыя дадатныя перыяды адпаведна роўныя $\frac{2\pi}{|k|}$ і $\frac{\pi}{|k|}$.*

Доказ. У адпаведнасці з азначэннем лік T ёсць перыяд функцыі $y = A \sin(kx + b)$, калі пры ўсіх значэннях аргумента x праўдзіцца роўнасць

$$A \sin(k(x + T) + b) = A \sin(kx + b),$$

або

$$2A \sin \frac{kT}{2} \cos \left(kx + b + \frac{kT}{2} \right) = 0.$$

Гэтая роўнасць тоесна праўдзіцца, калі $\sin \frac{kT}{2} = 0$. Таму $\frac{kT}{2} = m\pi$, дзе $m \in \mathbb{Z}$, або $T = \frac{2m\pi}{k}$. А з лікаў $\frac{2m\pi}{k}$, дзе $m \in \mathbb{Z}$, найменшым дадатным з'яўляецца лік $\frac{2\pi}{|k|}$.

Сцверджанне пра перыядычнасць функцыі $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$ даказваецца аналагічна.

Вынік. *Функцыі $y = A \cos(kx + b)$ і $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$ перыядычныя і іх найменшыя дадатныя перыяды адпаведна роўныя $\frac{2\pi}{|k|}$ і $\frac{\pi}{|k|}$.*

Для доказу дастаткова выкарыстаць тоеснасці

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \text{ і } \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Прыклад 2. Даследуем функцыю $y = -2 \frac{1}{2} \cos \left(\left| \frac{2}{3} x \right| + \frac{\pi}{3} \right)$.

Разгледзім спачатку гэтую функцыю на прамежку $[0; +\infty)$, на якім яна выяўляецца формулай

$$y = -2 \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2}{3} x + \frac{\pi}{3} \right).$$

Перыяд гэтай функцыі роўны $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$, г. зн. 3π .

Знойдзем пункты, у якіх значэнне функцыі роўнае нулю:

$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= 0 \equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in N_0 \equiv \\ &\equiv x = \frac{\pi}{4} + \frac{3n\pi}{2}, n \in N_0. \end{aligned}$$

Знойдзем пункты максімуму:

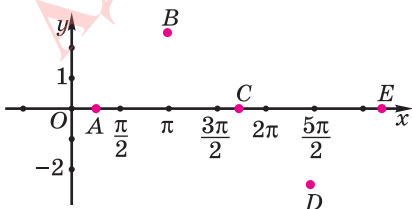
$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \equiv \\ &\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2n\pi, n \in N_0 \equiv x = \pi + 3n\pi, n \in N_0. \end{aligned}$$

Знойдзем пункты мінімуму:

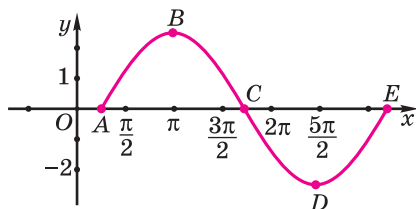
$$\begin{aligned} -2\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) &= -2\frac{1}{2} \equiv \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \equiv \\ &\equiv \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi, m \in N \equiv x = -\frac{\pi}{2} + 3m\pi, m \in N_0. \end{aligned}$$

Нагадаем, што мы пакуль што разглядаем толькі неадмоўныя значэнні аргумента. Таму для значэнняў зменнай n выбіраем толькі неадмоўныя цэлыя лікі, на што ўказвае запіс $n \in N_0$.

Адзначым атрыманыя пункты на восі абсцыс, улічыўшы, што дастаткова разгледзець прамежак даўжынёй 3π , роўны перыяду. Нам зручна ўзяць прамежак $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, левы канец якога ёсць адзін з нулёў функцыі. У выніку атрымваем пункты $A\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$, $B\left(\pi; 2\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7\pi}{4}; 0\right)$, $D\left(\frac{5\pi}{2}; -2\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{13\pi}{4}; 0\right)$ (рыс. 519). Гэтыя пункты выразна ўказваюць ход графіка на прамежку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$, які прыведзены на рысунку 520. Графік функцыі на прамежку $\left(\frac{13\pi}{4}; +\infty\right)$ атрымліваецца з



Рыс. 519



Рыс. 520

графіка, виявлено на рисунку 521, зрухати на 3π , $n \in \mathbb{N}$, у додатним кірунку осі абсцис. Для атримання графіка на прамежку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ знойдемо пункт перасячання графіка функції з оссю ординат: $-2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) = -2\frac{1}{4}$. У выніку атримаємо графік на прамежку $[0; +\infty)$ (рис. 522).

Для атримання графіка на \mathbb{R} улічимо, што функція $y = -2\frac{1}{2}\cos\left(\left|\frac{2}{3}x\right| + \frac{\pi}{3}\right)$ — цотная, таму яе графік сіметрычны адносна осі ординат (рис. 523).

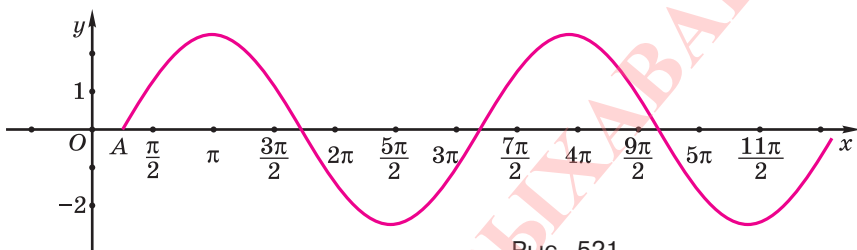


Рис. 521

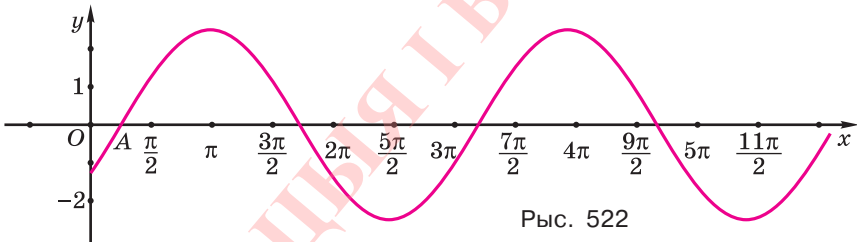


Рис. 522

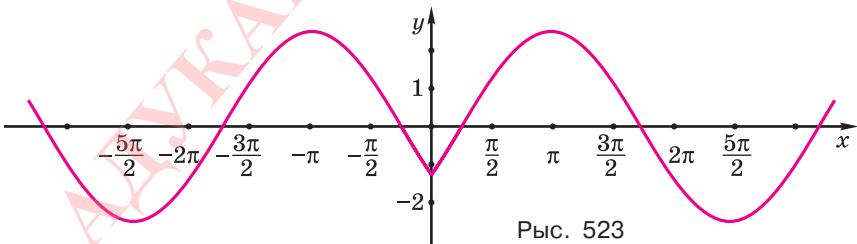


Рис. 523

Прыклад 3. Даследуем функцыю $z = \cos^2 t$.

Улічыўшы, што $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, дадзеную функцыю можна запісаць у выглядзе $z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$. Цяпер зразумелы ход пабудавання графіка:

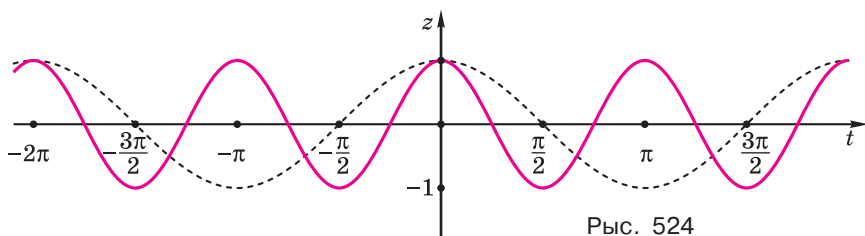


Рис. 524

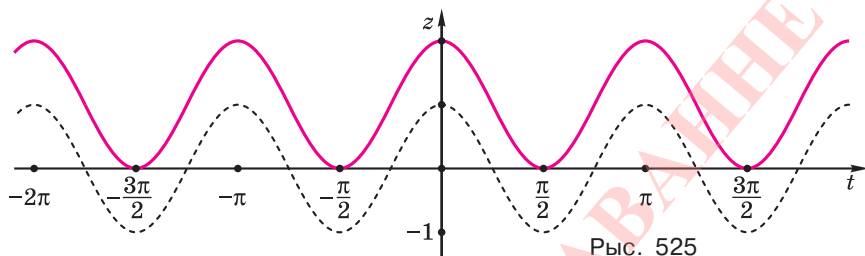


Рис. 525

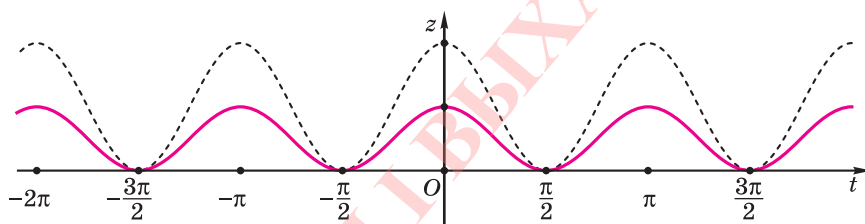


Рис. 526

– спісканне графіка функції $z = \cos t$ у 2 рази да восі ардыннат (рис. 524);

– зрух графіка функції $z = \cos 2t$ на 1 уздоўж восі ардыннат (рис. 525);

– спісканне графіка функції $z = 1 + \cos 2t$ у 2 рази да восі абсцыс (рис. 526).

Многія рэальныя працэсы апісваюцца функцыямі выгляду

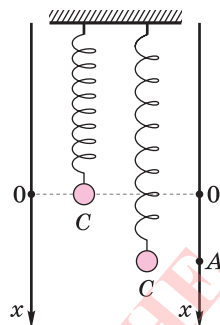
$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Такія працэсы называюцца *гарманічнымі ваганнямі*.

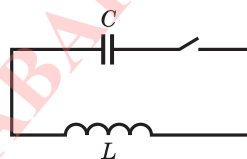
Калі на прамой, па якой рухаецца на спружыне шарык C , увесці каардынаты так, каб у становішчы раўнавагі каардыната x шарыка C была роўная нулю, адцягнуць шарык у дадатным кірунку на адлегласць A і ў момант часу

t , роўны нулю, адпусціць яго (рыс. 527), то залежнасць каардынаты x шарыка C ад часу t будзе выражацца законам $x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, дзе ω — пэўны каэфіцыент, які характарызуе жорсткасць спружыны.

Калі вагальны контур, які складаецца з паслядоўна злучаных кандэнсатара C і шпулі індуктыўнасці L (рыс. 528), мае пэўны запас энергіі, напрыклад, ненулявы зарад у кандэнсатары, то па гэтым ланцугу пойдзе электрычны ток, а напружанне U на абкладках кандэнсатара будзе змяняцца па законе $U = U_0 \sin(\omega t + \alpha)$, дзе ω — пэўная характарыстыка контуру, якая вызначаецца параметрамі кандэнсатара і шпулі, U_0 і α вызначаюцца станам ланцуга ў пачатковы момант часу.



Рыс. 527



Рыс. 528

Гарманічнае ваганне цалкам вызначаецца параметрамі A , ω і ϕ , якія адпаведна называюцца *амплітудай*, *вуглавой скорасцю* (або *кругавой частотой*), *пачатковай фазай вагання*. Перыяд такой функцыі роўны $\frac{2\pi}{\omega}$, яго называюць *перыядам гарманічнага вагання*.

Гарманічныя ваганні часта даводзіцца складаць. У механіцы гэта звязана з тым, што на пункт можа дзейнічаць некалькі сіл, кожная з якіх выклікае гарманічныя ваганні. У электратэхніцы і радыётэхніцы складанне ваганняў адбываецца пры накладанні токаў.

Прыклад 4. Знойдзем амплітуду і пачатковую фазу гарманічнага вагання $u = 60 \sin 2t + 11 \cos 2t$.

Выканаем пераўтварэнні:

$$\begin{aligned}
 u &= 60 \sin 2t + 11 \cos 2t \equiv \\
 &\equiv u = \sqrt{60^2 + 11^2} \left(\frac{60}{\sqrt{60^2 + 11^2}} \sin 2t + \frac{11}{\sqrt{60^2 + 11^2}} \cos 2t \right) \equiv \\
 &\equiv u = 61 \left(\frac{60}{61} \sin 2t + \frac{11}{61} \cos 2t \right) \equiv u = 61 (\cos \alpha \sin 2t + \sin \alpha \cos 2t), \\
 &\text{дзе } \frac{60}{61} = \cos \alpha \text{ і } \frac{11}{61} = \sin \alpha \equiv u = 61 \sin (2t + \alpha).
 \end{aligned}$$

Значыць, амплітуда і пачатковая фаза вагання адпаведна роўныя 61 і $\arcsin \frac{11}{61}$.

Адзначым, што перыяд сумы або рознасці двух гарманічных ваганняў з рознымі сувымернымі кругавымі частатамі роўны найменшаму агульнаму кратнаму перыядаў гэтых ваганняў.

Прыклад 5. Даследуем функцыю $V = 2\sqrt{3} \sin y + \cos 2y$.

Перыяд функцыі роўны НАК $(2\pi; \pi)$, г. зн. 2π .

Знойдзем крытычныя пункты функцыі:

$$V' = 2\sqrt{3} \cos y - 2 \sin 2y;$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \cos y - 2 \sin 2y = 0 &\equiv 2\sqrt{3} \cos y - 4 \sin y \cos y = 0 \equiv \\ &\equiv 4 \cos y \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) = 0 \equiv \cos y = 0 \text{ або } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \equiv \\ &\equiv y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ або } y = (-1)^l \frac{\pi}{3} + l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Вынікі далейшага даследавання на прамежку $[0; 2\pi]$, роўным перыяду, выяўлены ў табліцы.

y	0	$\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$
V'	0	$+$	0	$-$	0	$+$
V	1	\nearrow	\max $2,5$	\searrow	$2\sqrt{3}$ -1 \min	\nearrow

y	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	2π
V'	0	$-$	0	$+$	0
V	\max $2,5$	\searrow	$-2\sqrt{3}$ -1 \min	\nearrow	1

Для ўдакладнення ходу графіка знойдзем пункты яго перасячэння з восяю абсцыс:

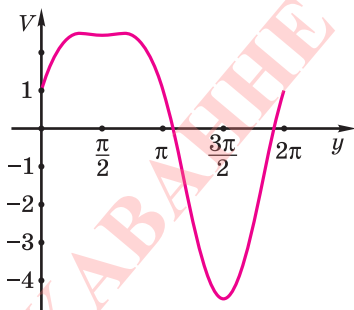
$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \sin y + \cos 2y = 0 &\equiv 2\sqrt{3} \sin y + 1 - 2\sin^2 y = 0 \equiv \\ &\equiv 2\sin^2 y - 2\sqrt{3} \sin y - 1 = 0 \equiv \sin y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{або } \sin y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \equiv y = \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

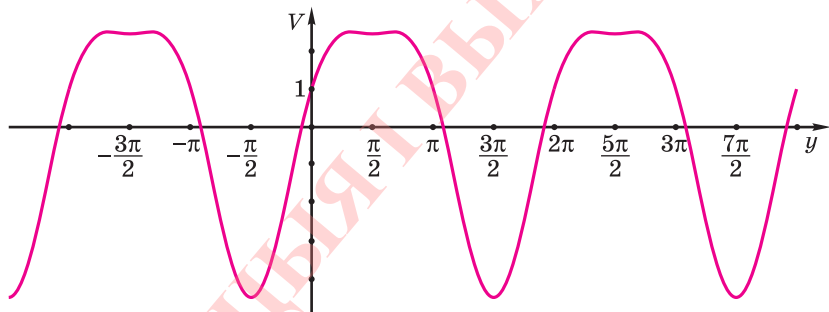
$$\text{або } y = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}, l \in \mathbb{Z}.$$

З гэтых лікаў у прамежак $[0; 2\pi]$ трапляюць лікі $\arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} + 2\pi$ і $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}$, набліжана роўныя 6,03 і 3,39.

Праведзенае даследаванне дазваляе нарысаваць графік функцыі на прамежку $[0; 2\pi]$ (рыс. 529). Графік функцыі на ўсёй каардынатнай прамой атрымліваецца зрухамі на $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, па восі абсцыс (рыс. 530).



Рыс. 529



Рыс. 530



1. Як з графіка функцыі $y = f(x)$ атрымаць графік функцыі $y = f(x) + c$; графік функцыі $y = f(x + c)$?
2. Як з графіка функцыі $y = f(x)$ атрымаць графік функцыі $y = -f(x)$; графік функцыі $y = f(-x)$?
3. Як з графіка функцыі $y = f(x)$ атрымаць графік функцыі $y = |f(x)|$; графік функцыі $y = f(|x|)$?
4. Як з графіка функцыі $y = f(x)$ атрымаць графік функцыі $y = f(kx)$ пры $k > 1$; графік функцыі $y = f(kx)$ пры $0 < k < 1$?
5. Чаму роўны перыяд функцыі $A \sin(kx + b)$; $y = A \operatorname{tg}(kx + b)$; $y = A \cos(kx + b)$; $y = A \operatorname{ctg}(kx + b)$?
6. Які працэс называюць гарманічным ваганнем?
7. Што называюць амплітудай, круговай частатой, перыядам, пачатковай фазай гарманічнага вагання?

1177. Перапішыце табліцу ў сшытак і, запоўніўшы яе пустыя клеткі, укажыце асноўныя ўласцівасці трыганаметрычных функцый.

Уласцівасць	Функцыя			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Абсяг вызначэння	R			R , акрамя лікаў $n\pi$
Абсяг значэнняў				
Цотнасць		Цотная		
Найменшы дадатны перыяд			π	
Пункты перасячэння з восяю абсцыс	$(n\pi; 0)$			
Пункт перасячэння з восяю ардынат				Няма
Прамежкі дадатных значэнняў			$\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$	
Прамежкі адмоўных значэнняў				
Прамежкі нарастання				
Прамежкі спадання				
Пункты мінімуму		$\pi + 2n\pi$		Няма
Мінімумы	-1			
Пункты максімуму				
Максімумы				

1178. На кожным з рысункаў 531—535 у межах аднаго перыяду выяўлены дзве тангенсоіды, адна з іх атрымліваецца з другой пэўным пераўтварэннем. Запішыце ўраўненне суцэльнай тангенсоіды і пераўтварэнне, якім яна атрымана са штрыхавой тангенсоіды, улічыўшы рысунак:

а) 531; б) 532; в) 533; г) 534; д) 535.

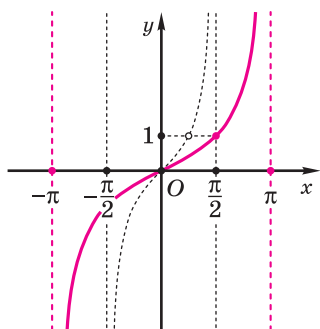


Рис. 531

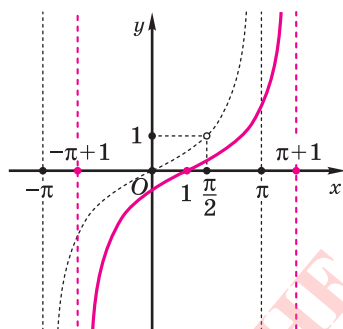


Рис. 532

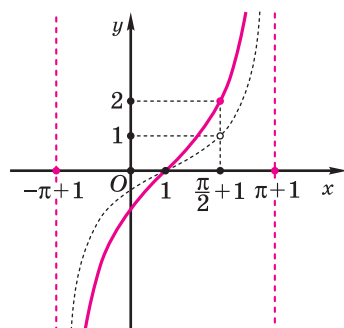


Рис. 533

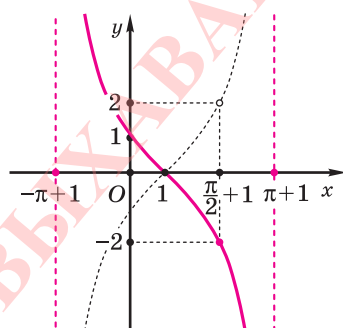


Рис. 534

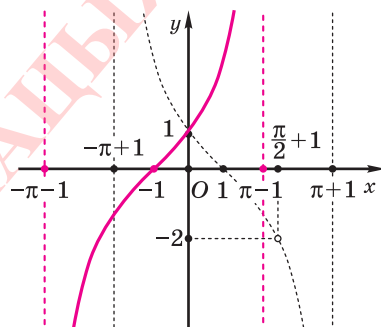


Рис. 535

1179. Знайдіть абсциссу визначення і абсциссу значення функції:

а) $y = 3 \cos 2x - 1$;

в) $y = 2 - \operatorname{tg} 3x$;

б) $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

г) $1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x$.

1180. Знайдіть переряд функцій:

а) $y = \sin \pi x$;

в) $y = \operatorname{tg} 3\pi x$;

б) $y = \cos \frac{\pi}{2} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} x$.

1181. Побудуйте графік функцій:

а) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3}$;

д) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 3x$;

б) $y = -\frac{3}{2} \cos 3x$;

е) $y = -2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$;

в) $y = -2 \sin 2x$;

ж) $y = -3 \cos 1\frac{1}{2} x$;

г) $y = 3 \sin \frac{x}{3}$;

з) $y = \frac{5}{2} \sin \frac{4}{3} x$.

1182. Даследуйте функцыю f і пабудуйте яе графік, уліччыўшы, што:

а) $f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

е) $f(x) = 4 \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{4} \right)$;

в) $f(x) = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$;

з) $f(x) = \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{4} - 3x \right)$;

г) $f(x) = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$;

і) $f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{6} - 3x \right)$.

д) $f(x) = \cos \left(2x - \frac{2\pi}{3} \right)$;

1183. Знайдіть переряд, нулі і побудуйте графік функцій:

а) $y = \sin \frac{4}{3} x$;

д) $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x$;

б) $y = \cos \frac{5}{3} x$;

е) $y = \sin \frac{2}{3} x$;

в) $y = \operatorname{tg} \frac{4}{3} x$;

ж) $y = \cos \frac{4}{3} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} \frac{5}{6} x$;

з) $y = \operatorname{ctg} \frac{2}{3} x$.

1184. Знайдіть переряд, нулі і побудуйте графік функцій:

а) $y = 2 \sin \left(\frac{3}{2} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right)$;

в) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right)$;

б) $y = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{3}{2} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$;

г) $y = -2 \operatorname{ctg} \left(3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right)$;

$$\begin{array}{ll} \text{д)} y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{3}(x - \pi)\right); & \text{ж)} 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right); \\ \text{е)} y = -2 \cos\left(\frac{2}{3}(x - \pi)\right); & \text{з)} y = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right). \end{array}$$

1185. Пункт виконває гарманічне вагання па законe $x(t) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right)$. Визначыце, у які самы блізкі ад пачатку руху момант часу зрух пункта:

- а) максімальны; в) роўны 5;
б) роўны 0; г) роўны -10.

1186. Визначыце амплітуду A , перыяд T , кругавую частату w і пачатковую фазу ϕ гарманічнага вагання:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} y = \frac{1}{2} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right); & \text{г)} y = 3 \cos 3t; \\ \text{б)} y = 7 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right); & \text{д)} y = 2 \sin(3\pi t + 1); \\ \text{в)} y = \cos\left(4t - \frac{\pi}{4}\right); & \text{е)} y = 3 \cos(4\pi t - 2). \end{array}$$

1187. Пабудуйце графік гарманічнага вагання:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} y = 3 \sin\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right); & \text{в)} y = \frac{1}{3} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right); \\ \text{б)} y = \frac{1}{2} \sin\left(3t + \frac{6\pi}{5}\right); & \text{г)} y = \frac{3}{2} \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{3}\right). \end{array}$$

1188. Знайдзіце амплітуду, перыяд, кругавую частату і пачатковую фазу гарманічнага вагання, якое вызначаецца законам:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \sin x + \sqrt{3} \cos x; & \text{е)} -7 \sin 2x - 24 \cos 2x; \\ \text{б)} \sin x - \cos x; & \text{ж)} 3 \sin 3x + 2\sqrt{2} \cos 3x; \\ \text{в)} 3 \sin x + 4 \cos x; & \text{з)} \sin 5x + \cos 5x; \\ \text{г)} 4 \sin x - 3 \cos x; & \text{і)} 33 \sin 6x - 56 \cos 6x. \\ \text{д)} 5 \sin x - 12 \cos x; & \end{array}$$

1189. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 8 \sin x + 15 \cos x; & \text{г)} 5 - 7 \sin x - 24 \cos x; \\ \text{б)} 8 \sin x - 15 \cos x; & \text{д)} \sqrt{\sin x - \cos x}; \\ \text{в)} -5 \sin x + 12 \cos x; & \text{е)} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{array}$$

1190. Докажіть, що рівняння $\sqrt{99} \sin x - 49 \cos x = 51$ не має коренів.

1191. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$; б) $y = \sin 2x - \cos 2x$.

1192. Дослідуйте на збіг функцію:

а) $y = -\sin t$; г) $y = \cos^3 t$; ж) $y = \sin^2 t - \cos^2 t$;

б) $y = -\cos t$; д) $y = \sin t \cos t$; з) $y = \sin 2x$;

в) $y = \sin^2 t$; е) $y = \sin t + \cos t$; і) $y = \sin 5x$.

1193. Дослідуйте на збіг функцію:

а) $y = \sin 2x + 1$; е) $y = \operatorname{tg} 3x \sin 2x$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y = \frac{\cos x}{x}$;

в) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \frac{x}{\sin x}$;

г) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; і) $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x}$.

д) $y = \operatorname{tg} 2x \cos 4x$;

1194. Побудуйте графік функції:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y = |\sin x|$;

б) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; з) $y = \sin x + |\sin x|$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$; і) $y = \cos x + |\cos x|$;

г) $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; к) $y = |\operatorname{tg} 2x|$;

д) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; л) $y = \sin x + \cos x$;

е) $y = \sin^2 x$; м) $y = \sin x + 2 \cos x$.

1195. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin x + \cos x$; е) $y = \sin^2 2x$;

б) $y = \sin x - \cos x$; ж) $y = \sin^2 3x$;

в) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$; з) $y = \cos^2 3x$;

г) $y = \sin^2 x$; і) $y = \frac{1}{2} \sin^2 4x$.

д) $y = \cos^2 2x$;

1196. Побудуйте графік функції:

а) $y = \sin x + \sin 2x$; г) $y = \cos 2x - \cos 4x$;

б) $y = \sin x + \cos 2x$; д) $y = \sin 3x - \sin 6x$;

в) $y = \cos x - \sin 2x$; е) $y = \sin 3x + \cos 6x$.

1197. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $z = 9 \sin^2 y + 6 \cos y$.

1198. Даследуйце на цотнасць і перыядычнасць функцыю:

а) $y = \sin \sqrt{x}$; б) $y = \sin \sqrt{x^2}$.

1199. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд T функцыі

$$y = \sin \frac{2t}{15} - 3 \cos \frac{4t}{21} + \sin \frac{6t}{35}.$$

1200. Знайдзіце абсяг вызначэння і абсяг значэнняў функцыі:

а) $y = \arccos \sqrt{x}$;

б) $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1+x^2}$;

г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}$;

д) $y = \operatorname{arcctg} \frac{4x}{x^2+4}$;

е) $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{t} + \arccos \sqrt{t}$;

з) $y = \arcsin \sqrt{1+t+t^2} + \arccos \sqrt{1-t+t^2}$;

и) $y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \operatorname{arcctg} t$.

1201. З вяршынь A і B вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка ABC да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляры AA_1 і BB_1 . Знайдзіце адлегласць ад вяршыні C да сярэдзіны адрэзка A_1B_1 , улічыўшы, што $A_1C = 20$ м, $A_1A = 12$ м, $B_1C = 24$ м, $B_1B = 8$ м і адрэзак A_1B_1 з плоскасцю трохвугольніка:

а) не мае агульных пунктаў;

б) мае агульныя пункты.

1202. Вышыняй піраміды называецца перпендыкуляр, праведзены з яе вяршыні на аснову. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды роўныя d . Знайдзіце вышыню піраміды, улічыўшы, што асновай з'яўляецца:

а) роўнастаронні трохвугольнік са стараной 1;

б) прамавугольны трохвугольнік з катэтамі 3 і 4;

в) трохвугольнік са старанамі 4, 5, 6.

1203. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды роўныя d . Знайдзіце вышыню піраміды, улічыўшы, што асновай з'яўляецца раўнабокi трохвугольнік з бакавой стараной 1 і вуглом супраць асновы, роўным:

а) 120° ; б) 135° ; в) 150° .

1204. Ёсць трохвугольная піраміда $QABC$, у якой аснова ABC — раўнабокi трохвугольнік з роўнымі старанамі AB і BC , а бакавы кант QB перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце радыус акружнасці, умежанай у аснову піраміды, улічыўшы, што канты AQ і AC адпаведна роўныя 13 см і 10 см, а вышыня QH грані QAC утварае з плоскасцю асновы вугал у 60° .

1205. З пункта C да плоскасці β па вугламі 30° і 45° праведзены перпендыкулярныя адна да адной нахіленыя CA і CB . Знайдзіце вугал, які з плоскасцю β утварае перпендыкуляр, апущчаны з пункта C на прамую AB .

1206. Праз вяршыню A меншага вугла трохвугольніка са старанамі, роўнымі 17 см, 15 см і 8 см, праведзена прамая AM , перпендыкулярная да яго плоскасці. Вызначыце адлегласць ад пункта M да прамой, якая змяшчае меншую старану трохвугольніка, улічыўшы, што $AM = 112$ см.

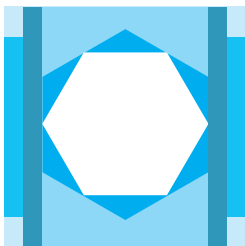
1207. Сплавiлі кавалак медзi шчыльнасцю $8,96 \text{ г/см}^3$ і кавалак цынку шчыльнасцю $7,13 \text{ г/см}^3$ і атрымалі 10 дм^3 латуні шчыльнасцю $8,32 \text{ г/см}^3$. Знайдзіце з дакладнасцю да дзясятай кілаграма масы ўзятых кавалкаў.

1208. Дакажыце, што калі $xu = 1$ і $x > y$, то праўдзiцца няроўнасць

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}.$$

1209. Дзве вышыні трохвугольніка роўныя 12 і 20. Якой можа быць трэцяя вышыня гэтага трохвугольніка?

1210. Вызначыце, якая найбольшая колькасць простых лікаў можа сустрацца сярод 17 паслядоўных натуральных лікаў, большых за 3.



Даведачны матэрыял

АРЫФМЕТЫКА

У арыфметыцы вывучаюцца лікі, дзеянні над лікамі, лікавыя выразы.

Натуральныя лікі

Натуральныя лікі ў дзесяткавай пазіцыйнай сістэме лічэння запісваюцца з дапамогай знакаў

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

якія называюць *лічбамі*.

Любая паслядоўнасць лічбаў, якая не пачынаецца з лічбы 0, выяўляе натуральны лік. Усе натуральныя лікі разам складаюць мноства натуральных лікаў, якое абазначаюць \mathbb{N} .

Над натуральнымі лікамі заўсёды можна выконваць дзеянні *складання, множання і ўзвядзення ў ступень*.

Дадаць да натуральнага ліку a натуральны лік b азначае да натуральнага ліку a прылічыць паслядоўна b адзінкаў:

$$a + b \stackrel{\text{азн}}{=} (\dots((a + \underbrace{1 + \dots + 1}_{b \text{ адзінкаў}}) + \dots + 1).$$

Калі $a + b = c$, то лікі a і b называюць *складаемымі*, а лік c — *сумай*.

Памножыць натуральны лік a на натуральны лік b азначае натуральны лік a узяць складаемым b разоў:

$$a \cdot b \stackrel{\text{азн}}{=} (\dots((a + \underbrace{b + \dots + b}_{b \text{ адзінкаў}}) + \dots + b).$$

Калі $a \cdot b = c$, то лікі a і b называюць *множнікамі*, а лік c — *здабыткам*. Першы множнік a называюць яшчэ *множывам*.

Дзеяннем, адваротным складанню, з'яўляецца *адніманне*. Ад натуральнага ліку a адняць натуральны лік b азначае знайсці такі натуральны лік c , сума якога і ліку b роўная ліку a :

$$a - b = c \stackrel{\text{азн}}{\equiv} c + b = a.$$

Калі $a - b = c$, то лік a называюць *памянішваемым*, лік b — *аднімаемым*, а лік c — *рознасцю*.

Дзеяннем, адваротным множанню, з'яўляецца дзяленне. Натуральны лік a падзяліць на натуральны лік b азначае знайсці такі натуральны лік c , здабытак якога і ліку b роўны ліку a :

$$a : b = c \stackrel{\text{азн}}{\equiv} c \cdot b = a.$$

Калі $a : b = c$, то лік a называюць дзелівам, лік b — дзельнікам, а лік c — дзеллю.

Натуральны лік a узвесці ў натуральную ступень n азначае натуральны лік a узяць множнікам b разоў:

$$a^n \stackrel{\text{азн}}{=} (\underbrace{((a \cdot a) \cdot a) \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множнікаў}}).$$

Калі $a^n = c$, то лік a называюць асновай ступені, лік n — паказчыкам ступені, а лік c — ступенню.

Другая ступень ліку называецца яшчэ *квадратам* ліку, трэцяя — *кубам* ліку.

Дзеяннем, адваротным узвядзенню ў ступень, з'яўляецца здабыванне караня. Здабыць корань ступені n з ліку a азначае знайсці такі натуральны лік c , што яго n -я ступень роўная ліку a :

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{азн}}{=} c^n = a.$$

Калі $\sqrt[n]{a} = c$, то лік a называюць падкарэнным лікам, лік n — паказчыкам караня, а лік c — каранем.

Адваротныя дзеянні — адніманне, дзяленне і здабыванне караня — не заўсёды выканальныя на мностве натуральных лікаў. Напрыклад, няма натуральнага ліку, які з'яўляецца значэннем рознасці $3 - 7$, або які з'яўляецца значэннем дзелі $3 : 7$, або які з'яўляецца значэннем караня $\sqrt{2}$.

Корань другой ступені называюць *квадратным каранем*, трэцяй ступені — *кубическим каранем*.

Калі пры дзяленні натуральнага ліку a на натуральны лік b атрымаецца натуральны лік c , то гавораць, што натуральны лік a дзеліцца (цалкам) на натуральны лік b , або што натуральны лік a кратны натуральнаму ліку b , або што лік b ёсць дзельнік ліку a .

Разглядаецца яшчэ і іншае дзеянне дзялення аднаго натуральнага ліку на другі. Натуральны лік a падзяліць з астачай на натуральны лік b азначае знайсці такія найбольшы натуральны лік p і натуральны лік q , што здабытак ліку p і ліку b , складзены з лікам q , роўны ліку a :

$$a : b = p \text{ (астача } q) \stackrel{\text{азн}}{\equiv} p \cdot b + q = a \text{ і } q < b.$$

Дзяленне з астачай заўсёды выканальнае на мностве натуральных лікаў.

Лік, які дзеліцца на 2, называецца *цотным лікам*, а які не дзеліцца, — *няцотным лікам*.

Лічбы 0, 2, 4, 6, 8 называюцца *цотнымі*, а лічбы 1, 3, 5, 7, 9 — *няцотнымі*.

Уласцівасць цотнага ліку: цотны лік заканчваецца цотнай лічбай.

Уласцівасць няцотнага ліку: няцотны лік заканчваецца няцотнай лічбай.

Прымета дзялімасці ліку на 2: калі лік заканчваецца цотнай лічбай, то ён дзеліцца на 2.

Уласцівасць ліку, што дзеліцца на 5: калі лік дзеліцца на 5, то ён заканчваецца лічбай 0 або лічбай 5.

Прымета дзялімасці ліку на 5: калі лік заканчваецца лічбай 0 або лічбай 5, то ён дзеліцца на 5.

Уласцівасць ліку, што дзеліцца на 3: калі лік дзеліцца на 3, то сума яго лічбаў дзеліцца на 3.

Прымета дзялімасці ліку на 3: калі сума лічбаў ліку дзеліцца на 3, то ён дзеліцца на 3.

Уласцівасць ліку, што дзеліцца на 9: калі лік дзеліцца на 9, то сума яго лічбаў дзеліцца на 9.

Прымета дзялімасці ліку на 9: калі сума лічбаў ліку дзеліцца на 9, то ён дзеліцца на 9.

Лік, які мае дакладна два розныя дзельнікі — адзінку і сам сябе, называецца *простым лікам*.

Лік, які мае больш за два розныя дзельнікі, называецца *састаўным лікам*.

Кожны натуральны лік адназначна раскладваецца ў здабытак простых множнікаў, калі не ўлічваць парадак іх запісу. Калі множнік уваходзіць у расклад пэўнага ліку на простыя множнікі некалькі разоў, то колькасць гэтых уваходжанняў называецца *кратнасцю множніка*.

Найбольшы з лікаў, на якія дзеляцца дадзеныя лікі, называецца *найбольшым агульным дзельнікам (НАД)* гэтых лікаў.

Найменшы з лікаў, які дзеліцца на ўсе дадзеныя лікі, называецца *найменшым агульным кратным (НАК)* гэтых лікаў.

Каб знайсці НАД некалькіх натуральных лікаў, можна раскласці іх на простыя множнікі, выбраць агульныя множнікі з улікам іх кратнасці і затым выбраныя лікі перамножыць.

Каб знайсці НАК некалькіх натуральных лікаў, можна раскласці іх на простыя множнікі, выбраць тыя множнікі, якія ўваходзяць у расклад хаця б аднаго дадзенага ліку з улікам іх кратнасці, і затым выбраныя лікі перамножыць.

Калі НАД двух лікаў роўны адзінцы, то такія лікі называюцца *ўзаемна простымі*.

Неадмоўныя рацыянальныя лікі

Долей называецца адна з роўных частак, на якія раздзелена цэлае.

Звычайным дробам называецца любая колькасць долей.

Звычайны дроб, які складзены з n -х долей, якіх ёсць m , запісваецца як $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ долей}} = \frac{1}{n} \cdot m.$$

У запісе $\frac{m}{n}$ лік m называецца *лічнікам* дробу, лік n — *назоўнікам* дробу.

Рыса дробу і знак дзялення ўзаемазамяняльныя:

$$\frac{m}{n} = m : n.$$

Калі лічнік дробу меншы за яго назоўнік, то дроб называецца *правільным*.

Калі лічнік дробу большы за яго назоўнік або роўны яму, то дроб называецца *няправільным*.

Калі ў няправільным дробу, напрыклад, $\frac{10}{3}$, вылучыць яго цэлую і дробавую часткі і запісаць іх адна за адной, то атрыманы запіс $3\frac{1}{3}$ называюць *змешаным дробам*.

$$3\frac{1}{3}^{\text{азн}} = 3 + \frac{1}{3}.$$

Каб няправільны дроб выявіць змешаным дробам, можна лічнік няправільнага дробу падзяліць з астачай на яго назоўнік.

Каб змешаны дроб выявіць няправільным дробам, можна цэлую частку змешанага дробу памножыць на назоўнік яго дробавай часткі, да атрыманага здабытку дадаць лічнік дробавай часткі і атрыманую суму запісаць лічнікам няправільнага дробу, пакінуўшы ранейшы назоўнік.

Асноўная ўласцівасць дробу: велічыня дробу не зменіцца, калі яго лічнік і назоўнік памножыць або падзяліць на адзін і той лік.

Множанне лічніка і назоўніка звычайнага дробу на адзін і той лік называецца *прывядзеннем дробу да новага назоўніка*.

Дзяленне лічніка і назоўніка звычайнага дробу на адзін і той лік называецца *скарачэннем дробу*.

Скарачэннем дроб можна звесці да найпрасцейшага дробу з узаемна простымі лічнікам і назоўнікам, які называецца *нескарачальным дробам*.

Ёсць бясконца многа дробаў, роўных адзін аднаму:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots$$

Кожны з роўных адзін аднаму дробаў ёсць *выяўнік* пэўнага *рацыянальнага ліку*. Сярод выяўнікаў таго ці іншага рацыянальнага ліку ёсць выяўнік з найменшым назоўнікам, які з'яўляецца *нескарачальным дробам*.

Кожны натуральны лік мае бясконца многа выяўнікаў:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots$$

Дробы выяўляюць таксама і лікі, якія не з'яўляюцца натуральнымі. Такія лікі называюць *дробавымі лікамі*.

Каб прывесці дробы да агульнага назоўніка, можна ў якасці агульнага назоўніка ўзяць НАД назоўнікаў дадзеных дробаў і памножыць лічнік і назоўнік кожнага з дробаў на дзель ад дзялення агульнага назоўніка на назоўнік адпаведнага дробу. Дзель ад дзялення агульнага на-

зоўніка дадзеных дробаў на назоўнік таго ці іншага дробу называецца *дадатковым множнікам*.

Каб скласці два дробы з аднолькавымі назоўнікамі, дастаткова скласці іх лічнікі, пакінуўшы назоўнік ранейшым:

$$\frac{m}{k} + \frac{n}{k} = \frac{m+n}{k}.$$

Каб скласці два дробы з рознымі назоўнікамі, трэба папярэдне прывесці іх да агульнага назоўніка.

Каб ад аднаго дробу адняць другі дроб з назоўнікам, роўным назоўніку першага дробу, дастаткова ад лічніка першага дробу адняць лічнік другога дробу, пакінуўшы назоўнік ранейшым:

$$\frac{m}{k} - \frac{n}{k} = \frac{m-n}{k}.$$

Каб выканаць адніманне дробаў з рознымі назоўнікамі, трэба папярэдне прывесці іх да агульнага назоўніка.

Каб памножыць дроб на натуральны лік, можна памножыць на гэты лік лічнік дробу, пакінуўшы назоўнік ранейшым, або падзяліць на гэты лік назоўнік, пакінуўшы лічнік ранейшым:

$$\frac{m}{n} \cdot k = \frac{m \cdot k}{n} = \frac{m}{n:k}.$$

Каб падзяліць дроб на натуральны лік, можна падзяліць на гэты лік лічнік дробу, пакінуўшы назоўнік ранейшым, або памножыць на гэты лік назоўнік, пакінуўшы лічнік ранейшым:

$$\frac{m}{n} : k = \frac{m:k}{n} = \frac{m}{n \cdot k}.$$

Каб памножыць дроб на дроб, дастаткова перамножыць паасобку іх лічнікі і назоўнікі, запісаўшы здабытак лічнікаў у лічніку дробу-здабытку, а здабытак назоўнікаў — у назоўніку дробу-здабытку:

$$\frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{nl}.$$

Два лікі, здабытак якіх роўны адзінцы, называюць *адваротнымі* адзін аднаму.

Каб адзін дроб падзяліць на другі, дастаткова першы дроб памножыць на дроб, адваротны другому:

$$\frac{k}{l} : \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \cdot \frac{n}{m} = \frac{kn}{lm}.$$

Звычайны дроб, назоўнік якога ёсць разрадная адзінка, называецца *дзясятковым дробам*.

Звычайны дроб можна пераўтварыць у дзясятковы дзяленнем лічніка на назоўнік. Пры гэтым атрыманы дзясятковы дроб будзе канечным або бясконцым перыядчным без даперыяду ці з даперыядам:

$$\frac{3}{40} = 0,075; \quad \frac{31}{37} = 0,(837); \quad \frac{62}{165} = 0,3(75).$$

Каб канечны дзесятковы дроб пераўтварыць у звычайны, можна запісаць дроб з лічнікам, роўным дробавай частцы дзесятковага дробу, і назоўнікам, роўным разраднай адзінцы са столькімі нулямі, колькі ёсць лічбаў у дробавай частцы дзесятковага дробу, і затым скараціць атрыманы звычайны дроб:

$$0,075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}.$$

Каб бясконцы перыядычны дзесятковы дроб без даперыяду пераўтварыць у звычайны дроб, можна запісаць звычайны дроб, лічнік якога роўны перыяду, а назоўнік — ліку, запісанаму столькімі дзявяткамі, колькі ёсць лічбаў у перыядзе, і затым скараціць атрыманы звычайны дроб:

$$0,(837) = \frac{837}{999} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37}.$$

Каб бясконцы перыядычны дзесятковы дроб з даперыядам пераўтварыць у звычайны дроб, можна запісаць звычайны дроб, лічнік якога роўны рознасці паміж лікам, запісаным лічбамі ад дзесятковай коскі да канца першага перыяду, і лікам, запісаным лічбамі даперыяду, а назоўнік — ліку, запісанаму столькімі дзявяткамі, колькі лічбаў у перыядзе, і столькімі нулямі, колькі лічбаў у даперыядзе:

$$0,3(75) = \frac{375 - 3}{990} = \frac{93}{111} = \frac{31}{37}.$$

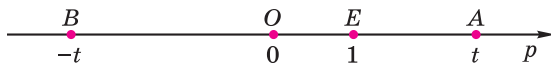
Сотая доля называецца *працэнтам*, а тысячная — *прамілем*. Працэнт абазначаюць знакам %, а праміль — знакам ‰:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01; 47\% = \frac{47}{100} = 0,47;$$

$$1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0,001; 47\text{‰} = \frac{47}{1000} = 0,047.$$

Рацыянальныя лікі

Калі на прамой p узяць пэўны пункт O у якасці пачатку адліку, выбраць адзін з двух кірункаў і адзінкавы адрэзак OE , то гэтым самым задаецца *каардынатная прамая*.



Калі ад пачатку адліку O на дадзенай прамой у выбраным кірунку адкласці адрэзак, даўжыня якога роўная дадзенаму ліку t , то атрымаем пункт A . Лік t называюць *каардынатай пункта A* . Гэта запісваюць так: $A(t)$. Для пунктаў O і E маем адпаведна: $O(0)$ і $E(1)$.

Прамень OE каардынатнай прамой называюць *дадатным праменем*, другі яе прамень — *адмоўным праменем*.

Пункту B , сіметрычнаму пункту A адносна пачатку адліку O , прысвойваецца каардыната $-t$. Лікі t і $-t$ называюць *супрацьлеглымі лікамі*.

Лікі, якім адпавядаюць пункты каардынатнай прамой, размешчаныя на дадатным прамені, называюцца *дадатнымі лікамі*, якія могуць запісвацца як са знакам «+», так і без яго. Запісы выгляду +1 і 1 выяўляюць адзін і той лік.

Лікі, якім адпавядаюць пункты каардынатнай прамой, размешчаныя на адмоўным прамені, называюцца *адмоўнымі лікамі*. Адмоўныя лікі запісваюцца са знакам «-».

Лік 0 не лічаць ні адмоўным, ні дадатным.

Модулем $|t|$ ліку t называецца сам гэты лік, калі ён дадатны або роўны нулю, і супрацьлеглы лік, калі — адмоўны:

$$|t| = \begin{cases} t, & \text{калі } t - \text{дадатны лік або лік } 0, \\ -t, & \text{калі } t - \text{адмоўны лік.} \end{cases}$$

Каб скласці два лікі з аднолькавымі знакамі, трэба скласці іх модулі і перад сумай паставіць іх агульны знак.

Каб скласці два лікі з рознымі знакамі, трэба ад большага модуля адняць меншы і вынік запісаць са знакам таго ліку, модуль якога большы.

Каб ад аднаго ліку адняць другі лік, можна да памяншаемага дадаць лік, супрацьлеглы аднімаемаму.

Каб памножыць два лікі, трэба перамножыць іх модулі і вынік запісаць са знакам плюс, калі множнікі маюць аднолькавыя знакі, і са знакам мінус — калі розныя знакі.

Каб падзяліць адзін лік на другі, можна дзеліва памножыць на лік, адваротны дзельніку.

Натуральныя лікі называюць яшчэ *дадатнымі цэлымі лікамі*. Лікі, супрацьлеглыя натуральным лікам, называюць *адмоўнымі цэлымі лікамі*. Мноства \mathbb{Z} *цэлых лікаў* — гэта натуральныя лікі, лікі, супрацьлеглыя натуральным, і лік 0.

Цэлыя лікі разам з дробавымі, як дадатнымі, так і адмоўнымі, разам складаюць мноства \mathbb{Q} *рацыянальных лікаў*.

Рэчаісныя лікі

У мностве рацыянальных лікаў становяцца заўсёды выканальнымі адніманне і дзяленне — дзеянні, адваротныя складанню і множанню. Але дзеянне здабывання кораня, адваротнае дзеянню ўзвядзення ў ступень, не заўсёды выканальнае. Напрыклад, лік $\sqrt{2}$ не з'яўляецца рацыянальным.

Рацыянальныя лікі выяўляюцца дзесятковымі дробамі — канечнымі або бясконцымі перыядычнымі. Кожны дзесятковы дроб, як канечны, так і бясконцы перыядычны, выяўляе пэўны рацыянальны лік. Бясконцыя неперыядычныя дзесятковыя дроби выяўляюць *ірацыянальныя лікі*:

$$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ \dots$$

Да ірацыянальных лікаў прыводзіць не толькі дзеянне здабывання кораня. Дзеянні знаходжання значэнняў сінуса, косінуса, тангенса, катангенса, за рэдкім выключэннем, параджаюць ірацыянальныя лікі:

$$\sin 2^\circ = 0,034\ 899\ 496\ 702\ 500\ 971\ 645\ 995\ 181\ 625\ 333\dots;$$

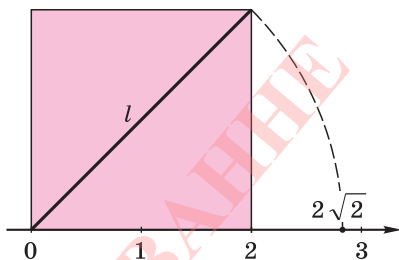
$$\operatorname{tg} 89^\circ = 57,289\ 961\ 630\ 759\ 424\ 687\ 278\ 147\ 537\ 113\dots$$

Ірацыянальным з'яўляецца і вядомы вам лік π :

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\dots$$

Рацыянальныя лікі разам з ірацыянальнымі лікамі складаюць мноства \mathbb{R} *рэчаісных лікаў*.

Кожнаму рацыянальнаму ліку адпавядае адзіны пункт каардынатнай прамой, але не кожны пункт каардынатнай прамой мае сваёй каардынатай рацыянальны лік. На рысунку паказана пабудаванне пункта, каардыната якога ёсць даўжыня l дыяганалі квадрата са старонай 2, а гэтая даўжыня выражаецца лікам $2\sqrt{2}$, які не з'яўляецца рацыянальным. Кожнаму рэчаіснаму ліку адпавядае адзіны пункт каардынатнай прамой, і кожны пункт каардынатнай прамой мае каардынатай рэчаісны лік.



Параўнанне рэчаісных лікаў

Для любых двух рэчаісных лікаў a і b праўдзіцца адно і толькі адно са сцверджанняў: a менш за b ; a роўна b ; a больш за b .

Адносіны a менш за b , a роўна b , a больш за b абазначаюцца формуламі $a < b$, $a = b$, $a > b$ адпаведна і ўводзяцца наступным азначэннем:

$$a < b \stackrel{\text{азн}}{=} a - b < 0; \quad a = b \stackrel{\text{азн}}{=} a - b = 0; \quad a > b \stackrel{\text{азн}}{=} a - b > 0.$$

Формуламі $a \geq b$, $a \neq b$ і $a \leq b$ абазначаюць дачыненні a больш або роўна b , a не роўна b і a менш або роўна b . Першае з гэтых дачыненняў праўдзіцца, калі праўдзіцца хаця б адно з дачыненняў $a > b$ або $a = b$, другое — калі не праўдзіцца дачыненне $a = b$, трэцяе — калі праўдзіцца хаця б адно з дачыненняў $a < b$ або $a = b$.

Формулай $a < x < b$ абазначаецца дачыненне x больш за a і менш за b , якое праўдзіцца, калі праўдзіцца дачыненні $a < x$ і $x < b$. Аналагічна абазначаюцца дачыненні $a \leq x < b$ і $a < x \leq b$.

Дачыненне $a = b$ называюць *роўнасцю*, дачыненні $a < b$, $a > b$, $a \geq b$, $a \neq b$ і $a \leq b$ — *няроўнасцямі*. Няроўнасці $a < b$ і $a > b$ называюць *строгімі няроўнасцямі*, а няроўнасці $a \geq b$ і $a \leq b$ — *нястрогімі няроўнасцямі*.

Дачыненне *роўна* мае такія ўласцівасці:

калі $a = b$, то $b = a$ (сіметрычнасць);

калі $a = b$ і $b = c$, то $a = c$ (транзітыўнасць).

Дачыненне *менш* мае такія ўласцівасці:

калі $a < b$, то $b > a$;

калі $a < b$ і $b < c$, то $a < c$ (транзітыўнасць);

калі $a < b$, то $a + c < b + c$;

калі $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$;

калі $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$;

калі $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;

калі $a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — дадатныя лікі, то $ac < bd$;

калі $a < b$ і $c > d$, то $a - c < b - d$;

калі $a < b$ і a і b — дадатныя лікі, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

калі $a < b$, a і b — дадатныя лікі і n — натуральны лік, то $a^n < b^n$.
Аналагічныя ўласцівасці мае і дачыненне *больш*.

З двух натуральных лікаў большы той, які пры лічэнні называецца пазней.

Натуральныя лікі і дзесятковыя дробы параўноўваюць паразрадна, пачынаючы са старшага разраду.

З двух дадатных звычайных дробаў з роўнымі назоўнікамі большы той, у якога лічнік большы. З двух дадатных звычайных дробаў з роўнымі лічнікамі большы той, у якога назоўнік меншы. Каб параўнаць два звычайных дробы з рознымі лічнікамі і назоўнікамі, можна гэтыя дробы замяніць роўнымі ім дробамі з роўнымі назоўнікамі, прывёўшы іх да агульнага назоўніка.

З двух рэчаісных лікаў з рознымі знакамі большым з'яўляецца дадатны лік. Лік 0 большы за любы адмоўны лік і меншы за любы дадатны. З двух адмоўных рэчаісных лікаў большы той, модуль якога меншы. З двух дадатных рэчаісных лікаў большы той, модуль якога большы.

Сярэднія велічыні

Сярэднім арыфметычным \bar{a} лікаў a_1, a_2, \dots, a_n называецца іх сума, падзеленая на іх колькасць n :

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Сярэднім геаметрычным g n дадатных лікаў a_1, a_2, \dots, a_n называецца корань n -й ступені з іх здабытку:

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Сярэдняе арыфметычнае \bar{a} і сярэдняе геаметрычнае g адных і тых лікаў звязаны няроўнасцю $g \leq \bar{a}$.

Уласцівасці дзеянняў над лікамі

Складанне і множанне натуральных лікаў маюць перамяшчальную і спалучальную ўласцівасці, а множанне ў дачыненні да складання мае размеркавальную ўласцівасць:

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Лік 0 мае такія ўласцівасці:

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a + (-a) = 0;$$

$$a - 0 = a; \quad 0 - a = -a;$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

$0 : a = 0$, калі $a \neq 0$; выраз $a : 0$ не мае значэння.

Лік 1 мае такія ўласцівасці:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a; a \cdot \frac{1}{a} = 1;$$

$$1 : a = \frac{1}{a}, \text{ калі } a \neq 0; a : 1 = a.$$

Прапорцыі

Адносінай значэнняў пэўнай велічыні называюць дзель ад дзялення аднаго з гэтых значэнняў на другое. Калі дзеліва большае за дзельнік, то адносіна паказвае, у колькі разоў першае значэнне большае за другое, у адваротным выпадку — якую частку першае значэнне складае ад другога.

Каб знайсці адносіну значэнняў велічыні, трэба прывесці іх да адной адзінкі вымярэння і першы лік падзяліць на другі.

Роўнасць $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ дзвюх адносін $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ называюць *прапорцыяй*.

Калі ёсць прапорцыя $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то лікі a і d называюць *крайнімі членамі* прапорцыі, а лікі b і c — *яе сярэднімі членамі*.

Калі роўнасць $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ праўдзівая, то адпаведная прапорцыя называецца *правільнай прапорцыяй*, у адваротным выпадку — *няправільнай прапорцыяй*.

Калі прапорцыя правільная, то здабытак яе крайніх членаў роўны здабытку сярэдніх членаў.

Калі здабытак крайніх членаў прапорцыі роўны здабытку яе сярэдніх членаў, то прапорцыя правільная.

Калі пераставіць крайнія члены правільнай прапорцыі або яе сярэднія члены, то прапорцыя застаецца правільнай:

$$\text{калі } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ і } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Ступень з рацыянальным паказчыкам

Коранем n -й ступені з ліку a называецца такі лік, n -я ступень якога роўная a .

Неадмоўны корань n -й ступені з неадмоўнага ліку называюць *арыфметычным коранем n -й ступені*.

Арыфметычны корань n -й ступені мае такія ўласцівасці:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{калі } n \text{ — няцотны натуральны лік,} \\ |a|, & \text{калі } n \text{ — цотны натуральны лік;} \end{cases}$$

$$\text{сцверджанні } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$a > b \equiv \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ праўдзяцца пры любых натуральных значэннях n, m, k , большых за адзінку, калі $a \geq 0$ і $b \geq 0$;

сцверджанне $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ праўдзіцца пры любым натуральным значэнні

n , большым за адзінку, калі $a \geq 0$ і $b > 0$;

сцверджанне $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ праўдзіцца пры любым няцотным натуральным значэнні n , большым за адзінку.

Ступень з рацыянальным паказчыкам азначаецца наступным чынам:

$$a^0 = 1, \text{ калі } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \text{ калі } n \text{ — натуральны лік і } n > 1;$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ калі } a > 0, m \text{ — цэлы лік, а } n \text{ — натуральны лік};$$

$$a^{\frac{m}{n}} = 0, \text{ калі } a = 0 \text{ і } \frac{m}{n} \text{ — дадатны рацыянальны лік};$$

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}, \text{ калі } a \neq 0, q \text{ — дадатны рацыянальны лік}.$$

Для любых дадатных рэчаісных значэнняў a і b і любых рацыянальных значэнняў p і q праўдзіцца роўнасці:

$a^p a^q = a^{p+q};$	$(ab)^p = a^p b^p;$
$a^p : a^q = a^{p-q};$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{pq};$	

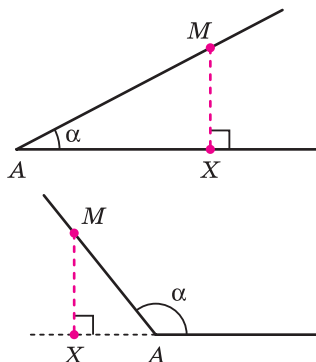
Любы рэчаісны лік можна выявіць у *стандартным выглядзе*, г. зн. запісаць здабыткам $c \cdot 10^n$, дзе $1 \leq c < 10$, а n ёсць цэлы лік. Лік n называюць *парадам ліку*.

Трыганаметрычныя лікавыя выразы

Сінусам вугла α называецца адносіна, першы кампанент якой ёсць адлегласць ад адвольнага пункта M на адной старане вугла да прамой, што змяшчае другую старану, а другі кампанент — адлегласць ад пункта M да вяршыні A вугла:

$$\sin \alpha = \frac{MX}{MA}.$$

Косінусам вугла α называецца адносіна, першы кампанент якой ёсць адлегласць ад вяршыні A вугла да праекцыі X адвольнага пункта M адной стараны вугла на прамую, што змяшчае другую яго старану, а другі кампанент — адлегласць ад вяршыні A да пункта M , прычым гэтая адно-



сіна мае знак плюс, калі праекцыя X трапляе на старану вугла, і знак мінус, калі — на працяг стараны:

$$\cos \alpha = \begin{cases} \frac{AX}{AM}, & \text{калі } \alpha \leq 90^\circ, \\ -\frac{AX}{AM}, & \text{калі } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ. \end{cases}$$

Тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса гэтага вугла да яго косінуса:

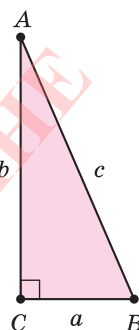
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Катангенсам вугла α называецца адносіна косінуса гэтага вугла да яго сінуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Сінус, косінус, тангенс, катангенс вострага вугла прамавугольнага трохвугольніка звязаны з яго старанамі:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}; \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$



Сінус, косінус, тангенс, катангенс некаторых вуглоў прыведзены ў наступнай табліцы.

Вугал α , °	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Сінус вугла α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Косінус вугла α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Тангенс вугла α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існуе	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Катангенс вугла α	Не існуе	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існуе

Сінус, косінус, тангенс і катангенс аднаго і таго вугла звязаны формуламі:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Для сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вугла праўдзяцца *формулы прывядзення*:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; & \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha; & \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha; \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha; & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha; & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Для сінуса і косінуса праўдзяцца *формулы складання* і *формулы дваінога вугла*:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

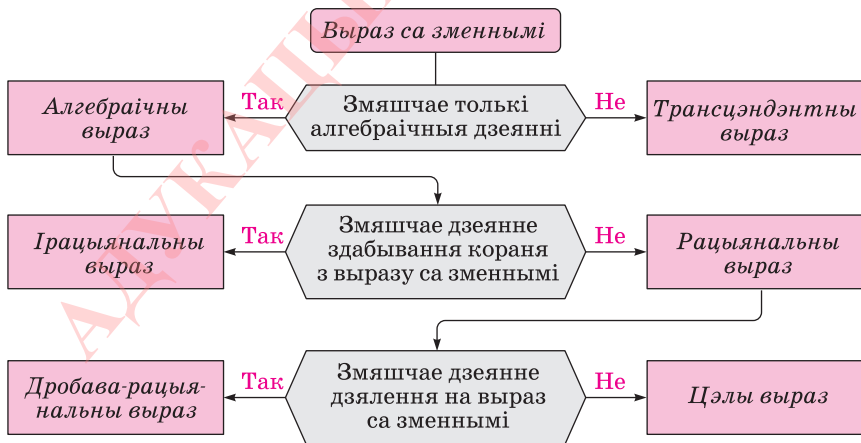
АЛГЕБРА

Выразы

Выраз. Тоеснае пераўтварэнне выразу

У алгебры вывучаюцца выразы са зменнымі, ураўненні, няроўнасці, функцыі. Асноўным з гэтых паняццяў з'яўляецца паняцце выразу са зменнымі. Ураўненне або няроўнасць атрымліваецца з двух выказаў, калі злучыць іх знакам $=$, $<$, $>$, \neq , \geq , \leq . Функцыя паўстае тады, калі ў дачыненні да выразу са зменнымі ставіцца пытанне пра яго значэнні пры розных магчымых значэннях зменных.

Выраз са зменнымі ўтвараецца з лікаў і зменных з дапамогай дзеянняў над лікамі, з якіх вы ведаеце складанне, адніманне, множанне, дзяленне, узвыдзенне ў рацыянальную ступень (узвыдзенне ў цэлую ступень і здабыццё кораня), знаходжанне значэнняў сінуса, косінуса, тангенса, катангенса. У залежнасці ад таго, якія дзеянні выкарыстаны пры ўтварэнні выразу, яго адносяць да таго ці іншага віду, дачыненні паміж якімі паказвае наступная схема.



Калі ў выраз са зменнымі падставіць замест кожнай зменнай якое-небудзь яе значэнне, то атрымаецца лікавы выраз, значэнне якога называюць *значэннем выразу са зменнымі* пры выбраных значэннях зменных.

Мноства набораў значэнняў зменных, пры якіх выраз са зменнымі мае значэнні, называюць *абсягам вызначэння выразу*.

Цэлы выраз мае значэнні пры любых значэннях уваходных у іх зменных.

Дробава-рацыянальны выраз мае значэнні пры тых наборах значэнняў уваходных у выраз зменных, пры якіх яго назоўнік не роўны нулю.

Грацыянальны выраз пры няцотным паказчыку кораня мае значэнні пры ўсіх наборах значэнняў, уваходных у выраз зменных, а пры цотным паказчыку — пры тых наборах значэнняў зменных, пры якіх яго падкарэнны выраз не меншы за нуль.

Два выразы з аднымі і тымі зменнымі называюцца *тоесна роўнымі*, калі пры ўсіх наборах значэнняў зменных з абсягу вызначэння адпаведныя значэнні выразаў роўныя.

Замена выразу тоесна роўным яму выразам называецца *тоесным пераўтварэннем* гэтага выразу.

Раскрыццём дужак называецца замена выразаў $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ і $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ выразамі $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ і $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ адпаведна.

Вынясеннем агульнага множніка за дужкі называецца замена выразаў $ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ і $a_1b + a_2b + \dots + a_nb$ выразамі $a(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ і $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$ адпаведна.

Паколькі $a - b = (a + (-b))$, то выраз, утвораны з іншых выразаў з дапамогай складання і аднімання, можна запісаць як суму, якая называецца *алгебраічнай сумай*.

Калі складаемыя алгебраічнай сумы аднолькавыя або адрозніваюцца толькі лікавымі множнікамі, то іх называюць *падобнымі складаемымі*. Замена сумы падобных складаемых тоесна роўным ёй адным складаемым называецца *прывядзеннем падобных складаемых*.

Цэлыя выразы

Здабытак лікаў, зменных і іх натуральных ступеней называюць *адначленам*.

Любы адначлен можна прывесці да *стандартнага выгляду*, г. зн. вывядзі здабыткам лікавага множніка, які запісаны першым, і наступных ступеней розных зменных. Гэты лікавы множнік называецца *каэфіцыентам адначлена*. Суму паказчыкаў ступеней усіх зменных адначлена называюць *ступенню адначлена*.

Здабытак двух адначленаў і натуральную ступень адначлена можна замяніць тоесна роўным адначленам стандартнага выгляду.

Каб перамножыць адначлены, трэба перамножыць каэфіцыенты, а паказчыкі ступеней аднолькавых зменных скласці.

Каб узвесці ў ступень адначлен, трэба ўзвесці ў гэтую ступень кожны з множнікаў.

Алгебраічную суму адначленаў называюць *мнагачленам*.

Адначлены, з якіх складзены мнагачлен, называюць *членамі мнагачлена*. Адначлен таксама лічаць мнагачленам.

Мнагачлен з двух членаў называюць *двухчленам*, а з трох членаў — *трохчленам*.

Члены мнагачлена, якія адрозніваюцца толькі знакамі сваіх каэфіцыентаў, у суме даюць нуль, гавораць, што яны *ўзаемна знішчаюцца*.

Мнагачлен, які не мае падобных членаў, і ўсе яны запісаны ў стандартным выглядзе, называюць *мнагачленам стандартнага выгляду*.

Любы мнагачлен можна прывесці да стандартнага выгляду.

Суму ці рознасць любых мнагачленаў можна выразіць мнагачленам стандартнага выгляду.

Пры рашэнні адваротнай задачы — выяўленні мнагачлена сумай або рознасцю мнагачленаў — карыстаюцца правіламі:

калі пры заключэнні ў дужкі членаў мнагачлена перад дужкамі пастаўлены знак плюс, то члены ў дужках запісваюць са сваімі знакамі;

калі пры заключэнні ў дужкі членаў мнагачлена перад дужкамі пастаўлены знак мінус, то члены ў дужках запісваюць з супрацьлеглымі знакамі.

Каб памножыць адначлен на мнагачлен, трэба гэты адначлен памножыць на кожны член мнагачлена і атрыманыя здабыткі скласці.

Каб мнагачлен падзяліць на адначлен, трэба кожны член мнагачлена падзяліць на гэты адначлен.

Каб вынесці агульны множнік членаў мнагачлена за дужкі, трэба:

— вылучыць гэты агульны множнік;

— дзяленнем членаў мнагачлена на агульны множнік знайсці мнагачлен, што запісваецца ў дужках.

Каб памножыць мнагачлен на мнагачлен, трэба кожны член аднаго мнагачлена памножыць на кожны член другога мнагачлена і запісаць суму атрыманых здабыткаў.

Пры пераўтварэннях цэлых выказаў могуць выкарыстоўвацца формулы скарачанага множання:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Кожны цэлы выраз можна выявіць мнагачленам стандартнага выгляду. Мэтай пераўтварэння цэлага выразу ў большасці выпадкаў якраз і з'яўляецца прывядзенне яго да стандартнага выгляду.

Іншы раз даводзіцца вырашаць адваротную задачу — выявіць мнагачлен стандартнага выгляду здабыткам некалькіх множнікаў-мнагачленаў. Такое пераўтварэнне мнагачлена называюць *раскладаннем мнагачлена на множнікі*.

Пры раскладанні мнагачлена на множнікі выкарыстоўваюць спосабы: вынясення агульнага множніка за дужкі; груповкі; па формулах скарачанага множання.

$$\begin{aligned} \text{Прыклад 1. } 7t^3u - 21t^2u + 14t^3 - 42t^2 & \stackrel{(1)}{=} 7t^2(tu - 3u + 2t - 6) \stackrel{(2)}{=} \\ & \stackrel{(2)}{=} 7t^2((tu + 2t) - (3u + 6)) \stackrel{(3)}{=} 7t^2(t(u + 2) - 3(u + 2)) \stackrel{(4)}{=} 7t^2((u + 2)(t - 3)). \end{aligned}$$

Тут выкарыстана: (1) — вынясенне агульнага множніка $7t^2$ усіх членаў дадзенага мнагачлена; (2) — групоўка членаў мнагачлена ў дужках; (3) — вынясенне агульных множнікаў t і 3 мнагачленаў у першых і другіх дужках адпаведна; (4) — вынясенне агульнага множніка $u + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Прыклад 2. } 4b^2 - 12bc + 9c^2 - 16k^2 &= (4b^2 - 12bc + 9c^2) - 16k^2 \\ &= (2b - 3c)^2 - (4k)^2 = (2b - 3c + 4k)(2b - 3c - 4k). \end{aligned}$$

Тут выкарыстана: (1) — групоўка членаў мнагачлена; (2) — формула квадрата рознасці; (3) — формула рознасці квадратаў.

Квадратны трохчлен

З цэлых выразаў спецыяльна вывучаецца *квадратны трохчлен*, г. зн. мнагачлен $ax^2 + bx + c$, дзе a, b, c — пэўныя лікі, x — зменная, прычым $a \neq 0$.

Значэнні зменнай x , пры якіх квадратны трохчлен мае сваім значэннем лік 0 , называюцца *каранямі квадратнага трохчлена*.

Лікі a, b, c называюць *каэфіцыентамі* квадратнага трохчлена, лік a — *першым*, або *старшым*, *каэфіцыентам*, лік b — *другім каэфіцыентам*, лік c — *свабодным членам*.

Выраз $b^2 - 4ac$ называюць *дыскрымінантам квадратнага трохчлена* і абазначаюць D , г. зн.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Калі $D > 0$, то квадратны трохчлен мае два карані x_1 і x_2 , якія выражаюцца праз яго каэфіцыенты наступным чынам:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ і } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Калі $D = 0$, то квадратны трохчлен мае адзін карань $x = -\frac{b}{2a}$.

Калі $D < 0$, то квадратны трохчлен не мае каранёў.

Тэарэма Віета: калі x_1 і x_2 — карані квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ і } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тэарэма, адваротная тэарэме Віета: калі лікі a, b, c, x_1 і x_2 праўдзяць умовы $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ і $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 і x_2 — ёсць карані квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$.

Тэарэма пра раскладанне квадратнага трохчлена на лінейныя множнікі: калі x_1 і x_2 ёсць карані квадратнага трохчлена $ax^2 + bx + c$, то праўдзіцца роўнасць $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Рацыянальныя выразы

Мноства рацыянальных выразаў складаюць цэлыя і дробава-рацыянальныя выразы.

Любы рацыянальны выраз можна выявіць дробам $\frac{M}{N}$, дзе M і N — мнагачлены стандартнага выгляду, прычым мнагачлен N можа быць лікам. Такі дроб называюць *рацыянальным дробам*.

Мэтай пераўтварэнняў рацыянальнага выразу з'яўляецца часцей за ўсё выяўленне яго рацыянальным дробам.

Правілы дзеянняў над рацыянальнымі дробамі такія самыя, як і над звычайнымі дробамі. Разам з гэтымі правіламі пры пераўтварэннях рацыянальных выказаў выкарыстоўваюцца правілы пераўтварэння цэлых выказаў, якія з'яўляюцца часткамі рацыянальнага выразу, а таксама ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам, у тым ліку і наступная:

$$\text{калі } P \neq 0 \text{ і } Q \neq 0, \text{ то } \left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n.$$

Прыклад 3. Спрасцім выраз

$$\left(\frac{4x^2}{4x^2 + 4xy^2 + y^2} - \frac{2x}{2x + y}\right)^{-1} : \left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + (y - 2x)^{-1}\right)^{-2} + (2x - y)^{-2}.$$

Рашэнне:

$$1) \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy^2 + y^2} - \frac{2x}{2x + y} = \frac{4x^2}{(2x + y)^2} - \frac{\frac{2x + y}{2x}}{2x + y} = \frac{4x^2 - 4x^2 - 2xy}{(2x + y)^2} =$$

$$= \frac{-2xy}{(2x + y)^2};$$

$$2) \left(\frac{-2xy}{(2x + y)^2}\right)^{-1} = \frac{(2x + y)^2}{-2xy};$$

$$3) \frac{2x}{4x^2 - y^2} + (y - 2x)^{-1} = \frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} = \frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{1}{2x - y} =$$

$$= \frac{2x - 2x - y}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{-y}{(2x - y)(2x + y)};$$

$$4) \left(\frac{-y}{(2x - y)(2x + y)}\right)^{-2} = \frac{(2x - y)^2(2x + y)^2}{y^2};$$

$$5) \frac{(2x + y)^2}{-2xy} : \frac{(2x - y)^2(2x + y)^2}{y^2} = \frac{(2x + y)^2 y^2}{-2xy(2x - y)^2(2x + y)^2} = -\frac{y}{2x(2x - y)^2};$$

$$6) -\frac{y}{2x(2x - y)^2} + (2x - y)^{-2} = \frac{y}{2x(2x - y)^2} + \frac{1}{(2x - y)^2} = \frac{2x - y}{2x(2x - y)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x(2x - y)} = \frac{1}{4x^2 - 2xy}.$$

Алгебраічныя выразы

Мноства алгебраічных выказаў складаюць рацыянальныя і ірацыянальныя выразы.

Пры пераўтварэннях алгебраічных выказаў выкарыстоўваюць правілы дзеянняў над гэтымі выразамі, уласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам, у тым ліку і ўласцівасці радыкалаў.

Прыклад 4. Спростім выраз

$$(m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} + \frac{(m^2-n^2)^{-\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} - (m^2+mn)\left((m+n)^{-1}(m^{-1}-m^{-2}n)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Каб дадзены выраз меў значэнне, павінна праўдзіцца сістэма ўмоў

$$\begin{cases} \frac{m-n}{m+n} \geq 0, & m+n \neq 0, \\ m^2-n^2 > 0, \\ m-n \neq 0, \\ \frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \geq 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Паколькі праўдзіцца ўмова $m^2 - n^2 > 0$, г. зн. умова $|m| > |n|$, то будучы праўдзіцца і ўмовы $m \neq 0$, $m+n \neq 0$ і $m-n \neq 0$, а значыць, і ўмова $\frac{m-n}{m+n} \neq 0$, а таксама ўмова $\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \geq 0$. Таму сістэма ўмоў (1) раўназначная сістэме

$$\begin{cases} |m| > |n|, \\ \frac{m-n}{m+n} > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Калі $m > 0$, то з умовы $|m| > |n|$ вынікае, што $m+n > 0$ і $m-n > 0$, а таму $\frac{m-n}{m+n} > 0$. А калі $m < 0$, то з умовы $|m| > |n|$ вынікае, што $m+n < 0$ і $m-n < 0$, і зноў $\frac{m-n}{m+n} > 0$. Таму сістэма ўмоў (2) раўназначная ўмове $|m| > |n|$. (3)

Пры далейшым спрашчэнні дадзенага выразу давядзецца карыстацца тоеснасцю $|a|\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, таму гэтыя спрашчэнні давядзецца праводзіць асобна для выпадкаў $m > 0$ і $m < 0$.

Няхай $m > 0$, тады:

$$1) (m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} = \sqrt{\frac{(m+n)^2(m-n)}{m+n}} = \sqrt{(m+n)(m-n)};$$

$$2) \frac{(m^2-n^2)^{-\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} = \frac{m-n}{\sqrt{m^2-n^2}} = \sqrt{\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}};$$

$$3) (m^2 + mn) \left((m+n)^{-1} (m^{-1} - m^{-2}n) \right)^{\frac{1}{2}} = m(m+n) \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{m^2(m+n)^2}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m^2 - n^2};$$

$$4) \sqrt{(m+n)(m-n)} + \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} - \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}.$$

Няхай $m < 0$, тады:

$$1) (m+n) \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} = -\sqrt{\frac{(m+n)^2(m-n)}{m+n}} = -\sqrt{(m+n)(m-n)};$$

$$2) \frac{(m^2 - n^2)^{\frac{1}{2}}}{(m-n)^{-1}} = \frac{m-n}{\sqrt{m^2 - n^2}} = -\sqrt{\frac{(m-n)^2}{(m-n)(m+n)}} = -\sqrt{\frac{m-n}{m+n}};$$

$$3) (m^2 + mn) \left((m+n)^{-1} (m^{-1} - m^{-2}n) \right)^{\frac{1}{2}} = m(m+n) \left(\frac{1}{m+n} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{m^2(m+n)^2}{m+n} \cdot \frac{m-n}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m^2 - n^2};$$

$$4) -\sqrt{(m+n)(m-n)} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} - \sqrt{m^2 - n^2} = -2\sqrt{m^2 - n^2} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}.$$

Адказ. $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$, калі $m > 0$ і $|m| > |n|$; $-2\sqrt{m^2 - n^2} - \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$, калі $m < 0$ і $|m| > |n|$.

Трансцэндэнтныя выразы

3 трансцэндэнтных выказаў вам вядомыя трыганаметрычныя выразы. Пры іх пераўтварэннях выкарыстоўваюцца азначэнні трыганаметрычных функцый і вядомыя вам формулы, што звязваюць адно з адным сінус, косінус, тангенс і катангенс аднаго вугла, формулы прывядзення, формулы складання і формулы двайнога вугла.

Прыклад 5. Спрасцім выраз $\frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha + 90^\circ) - 1} + \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha - 90^\circ) - 1}$.

Рашэнне. 1. $\frac{\cos^2(\alpha - 90^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha + 90^\circ) - 1} = \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha)}{\sin^{-2}(90^\circ + \alpha) - 1} = \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha)}{\frac{1}{\sin^2(90^\circ + \alpha)} - 1} =$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{\sin^2(\alpha + 90^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha - 90^\circ) - 1} = \frac{\sin^2(90^\circ + \alpha)}{\cos^{-2}(90^\circ - \alpha) - 1} = \frac{\sin^2(90^\circ + \alpha)}{\frac{1}{\cos^2(90^\circ - \alpha)} - 1} = \\
 & = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha. \\
 3. \quad & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Ураўненні і няроўнасці

З двух выразаў са зменнымі ўтвараецца формула, калі выразы звязць пэўным дачыненнем. У школьнай алгебры вивучаюцца дачыненні *роўна, менш, больш* і іх адмоўі — *не роўна, больш або роўна, менш або роўна*. У адпаведнасці з гэтым з двух выразаў A і B утвараюцца формулы наступных відаў:

$$A = B, A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B.$$

Формула, якая ператвараецца ў праўдзівае выказванне пры любых наборах значэнняў уваходных у яе зменных, называецца *тоесна праўдзівай формулай*, або *агульназначнай формулай*. Іншыя формулы называюцца *формуламі-залежнасцямі*. Агульназначныя формулы-роўнасці называюць яшчэ *тоеснасцямі*.

Формула-роўнасць $A = B$ называецца *ўраўненнем*, формулы-няроўнасці $A < B, A > B, A \neq B, A \geq B, A \leq B$ — *няроўнасцямі са зменнымі*.

Абсягам вызначэння формулы называецца мноства тых набораў значэнняў зменных, што ўваходзяць у выразы A і B , пры якіх маюць значэнні абодва выразы A і B .

Лік, які ператварае ўраўненне ў праўдзівае выказванне, называюць *коранем ураўнення*.

Рашыць ураўненне азначае знайсці ўсе яго карані або ўстанавіць, што іх няма.

Лік, які ператварае няроўнасць са зменнай у праўдзівае выказванне, называюць *рашэннем няроўнасці*.

Рашыць няроўнасць азначае знайсці ўсе яе рашэнні або ўстанавіць, што іх няма.

З формул утвараюцца іх сістэмы і сукупнасці.

Сістэмай формул называецца формула, якая складаецца з дзвюх ці больш формул і якая праўдзівая пры тых і толькі тых наборах значэнняў зменных, пры якіх праўдзіца кожная з формул.

Сістэма, якая складаецца з формул A і B , абазначаецца $\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$

Сукупнасцю формул называецца формула, якая складаецца з дзвюх ці больш формул і якая праўдзівая пры тых і толькі тых наборах значэнняў зменных, пры якіх праўдзіца прынамсі адна з формул. Сукупнасць, якая складаецца з формул A і B , абазначаецца $\begin{bmatrix} A, \\ B. \end{bmatrix}$

Кожная пара значэнняў зменных, якая праўдзіць сістэму або сукупнасць формул з двума зменнымі, называецца *рашэннем сістэмы* або *сукупнасці*.

Рашыць сістэму або *сукупнасць* азначае знайсці ўсе яе рашэнні ці ўстанавіць, што іх няма.

Рашэнне ўраўненняў, няроўнасцей і іх сістэм часта прадугледжвае звязанне іх да стандартных ураўненняў або няроўнасцей. Пры гэтым атрыманыя ў выніку пераўтварэнняў ураўненне, няроўнасць або сістэма павінны мець тыя самыя рашэнні, што і зыходныя ўраўненне, няроўнасць або сістэма. У такім выпадку гавораць пра *раўназначныя ўраўненні*, няроўнасці, сістэмы.

Пераўтварэннямі раўназначнасці ўраўненняў або няроўнасцей з'яўляюцца:

- перанос складаемага з адной часткі ўраўнення або няроўнасці ў другую са зменай яго знака;

- множанне або дзяленне абедзвюх частак ураўнення на адзін і той не роўны нулю лік;

- множанне або дзяленне абедзвюх частак няроўнасці на адзін і той дадатны лік;

- множанне або дзяленне абедзвюх частак няроўнасці на адзін і той адмоўны лік з заменай знака няроўнасці знакам супрацьлеглага сэнсу;

- узвядзенне абедзвюх частак ураўнення або няроўнасці ў адну і тую жа ступень.

Пры рашэнні ўраўненняў карыстаюцца і пераўтварэннямі *вынікання*, г. зн. пераўтварэннямі, пры якіх усе карані дадзенага ўраўнення з'яўляюцца каранямі атрыманага ўраўнення. Прыкладам пераўтварэння вынікання з'яўляецца ўзвядзенне абедзвюх частак ураўнення або няроўнасці ў адну і тую цотную ступень. Пераўтварэнне вынікання можа прыводзіць да з'яўлення *пабочных каранёў*, г. зн. такіх лікаў, якія з'яўляюцца каранямі атрыманага ўраўнення, але не з'яўляюцца каранямі зыходнага. Таму пры выкарыстанні пераўтварэнняў вынікання абавязковым этапам рашэння ўраўнення з'яўляецца *праверка* таго, ці з'яўляюцца атрыманыя лікі каранямі дадзенага ўраўнення.

Пры рашэнні ўраўненняў і няроўнасцей выкарыстоўваюцца такія тыповыя прыёмы, як *уводзенне дапаможнай зменнай*, *раскладанне на множнікі*, *перабор выпадкаў*, *звядзенне да сістэмы*, *выкарыстанне графічных выяўленняў*, *выкарыстанне ўласцівасцей функцый*. Праілюструем сказанае прыкладамі.

Ураўненне $\frac{15}{x^2 - x + 1} = (x - 1)^2 + x^2$ з увядзеннем зменнай $y = x^2 - x + 1$ прыводзіцца да ўраўнення $\frac{15}{y} = 2y - 1$.

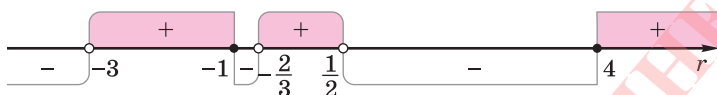
Ураўненне $x^2 \sin x + \cos x = x^2 \cos x + \sin x$ можна запісаць у выглядзе $(x^2 - 1)(\sin x - \cos x) = 0$. Таму яно зводзіцца да сукупнасці ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ \sin x - \cos x = 0. \end{cases}$$

З розкладанням на множники зв'язані *метод інтервалаў*, якім ра-
 шаюцца рацыянальныя няроўнасці. Няроўнасць $\frac{2}{t+3} + \frac{2}{3t+2} \geq \frac{3}{2t-1}$

зводная да няроўнасці $\frac{(t+1)(t-4)}{(t+3)(3t+2)(2t-1)} \geq 0$, для якой *метад інтерва-*

лаў дае адказам мноства $(-3; -1] \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup [4; +\infty)$.



Пры рашэнні няроўнасці з модулем $|x+2| + |2x-5| < 7$ даводзіцца разглядаць яе на трох прамежках $(-\infty; -2)$, $[-2; 2,5]$ і $(2,5; +\infty)$.

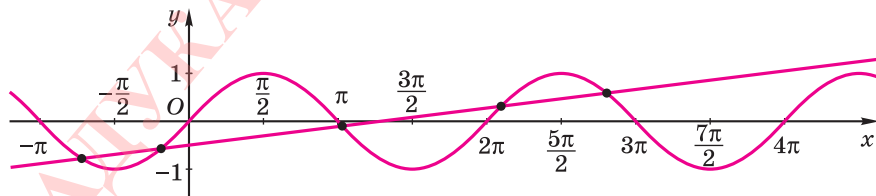
Ураўненне $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ заменай $\begin{cases} \sqrt[3]{x+45} = a, \\ \sqrt[3]{x-16} = b \end{cases}$ зводнае да

сістэмы $\begin{cases} a-b=1, \\ a^3-b^3=61, \end{cases}$ раўназначнай сістэме $\begin{cases} a-b=1, \\ (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)=61, \end{cases}$

або сістэме $\begin{cases} a-b=1, \\ ab=20. \end{cases}$ Яе рашэнні $(5; 4)$ і $(-4; -5)$ дазваляюць атрымаць

рашэнні дадзенага ўраўнення: $x_1 = 80$ і $x_2 = -109$.

Каб адказаць на пытанне пра колькасць каранёў ураўнення $\sin x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$, зручна выкарыстаць графічны спосаб рашэння ўраўнення. Пабудаваўшы графікі функцый $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$, заўважаем, што яны маюць 5 пунктаў перасячэння: па два на прамежках $(-\pi; 0)$ $(2\pi; 3\pi)$ і адзін — на прамежку $(\pi; 1,5\pi)$.

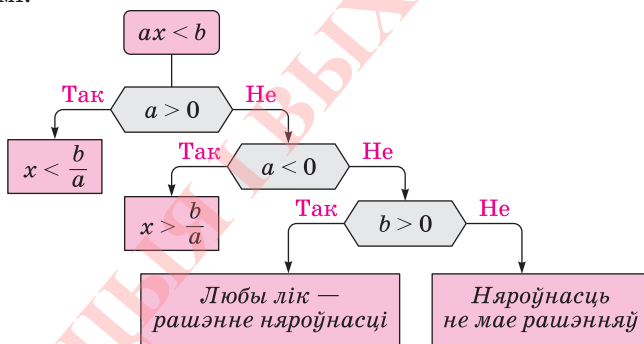


Пры рашэнні ўраўнення $\sqrt{2x+5} - \sqrt[5]{3x-5} = 4-x$ падборам знаходзім, што лік 2 з'яўляецца каранем. Іншых каранёў ураўненне не мае, бо функцыя $y = \sqrt{2x+5} - \sqrt[5]{3x-5}$, што вызначаецца левай часткай ураўнення, нарастае на абсягу вызначэння, а функцыя $y = 4-x$ спадае.

Звесткі пра рашэнне лінейных, квадратных, двухчленных і трыганаметрычных ураўненняў прыведзены ў наступнай табліцы.

Ураўненне	Карані	Ураўненне	Карані
$ax = b$	$\frac{b}{a}$, калі $a \neq 0$	$\sin x = a$	$(-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, калі $ a \leq 1$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, калі $D = b^2 - 4ac \geq 0$	$\cos x = a$	$\pm \arccos a + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, калі $ a \leq 1$
$x^n = a$	$\sqrt[n]{a}$, калі n — няцотны лік; $\pm \sqrt[n]{a}$, калі n — цотны лік і $a \geq 0$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{arctg} a + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$
		$\operatorname{ctg} x = a$	$\operatorname{arccotg} a + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$

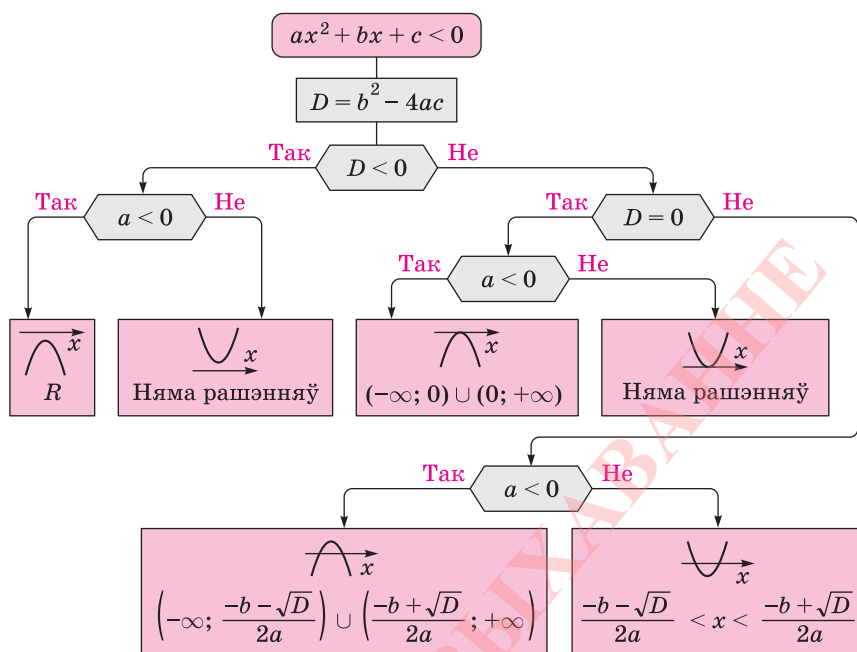
Звесткі пра рашэнне лінейных і квадратных няроўнасцей даюцца наступнымі схемамі.



Пры рашэнні сістэм ураўненняў імкнучца зменшыць колькасць зменных і атрымаць ураўненне з адной зменнай, якое дазволіць знайсці яе значэнні, а затым для кожнага з атрыманых значэнняў шукаюцца значэнні астатніх зменных. Выключыць адну са зменных з сістэмы двух лінейных ураўненняў з двума зменнымі можна *спосабам падстаноўкі* або *спосабам алгебраічнага складання*.

Ураўненне, няроўнасць або сістэма могуць змяшчаць дзве ці больш зменных, прычым адна з іх лічыцца зменнай ураўнення, а астатнія разглядаюцца як параметры, г. зн. іх значэнні лічацца фіксаванымі. У такім выпадку гавораць пра *ўраўненне, няроўнасць або сістэму з параметрамі*.

Рашыць ураўненне, няроўнасць або сістэму з параметрамі азначае для кожнага набору значэнняў параметраў знайсці карані або рашэнні адпаведных ураўнення, няроўнасці або сістэмы.



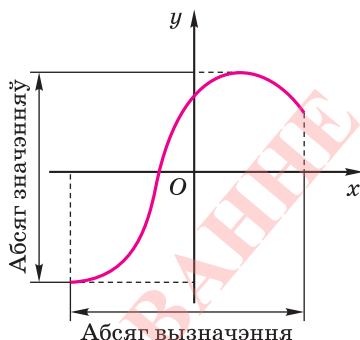
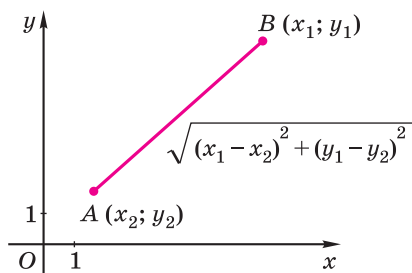
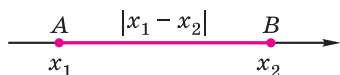
22. Каардынаты і функцыі

Калі на прамой выбраны два пункты O і E і з імі супастаўлены лікі 0 і 1 адпаведна, то гавораць, што на прамой зададзена *сістэма каардынат*, а саму прамую называюць *каардынатнай прамой*, або *каардынатнай воссю*. Пункт O называюць *пачаткам каардынат*, а адрэзак OE — *адзінкавым адрэзкам*. Адпаведнасць паміж пунктамі каардынатнай прамой і рэчаіснымі лікамі ўзаемна адназначная: кожнаму пункту каардынатнай прамой адпавядае адзін рэчаісны лік, а кожнаму рэчаісмаму ліку адпавядае адзін пункт каардынатнай прамой. Лік x , адпаведны пункту A каардынатнай прамой, называюць *каардынатай* гэтага пункта і запісваюць $A(x)$.

Калі на кожнай з дзвюх перпендыкулярных прамых зададзены сістэмы каардынат з агульным пачаткам у пункце O перасячэння прамых, то гавораць, што зададзена *сістэма каардынат на плоскасці*. Плоскасць, на якой зададзена сістэма каардынат, называецца *каардынатнай плоскасцю*, адну з каардынатных прамых, звычайна гарызантальную, называюць *воссю абсцыс*, другую — *воссю ардынат*. Адпаведнасць паміж пунктамі каардынатнай плоскасці і парамі рэчаісных лікаў узаемна адназначная: кожнаму пункту каардынатнай прамой адпавядае адзіная пара рэчаісных лікаў, а кожнай пары рэчаісных лікаў адпавядае адзін пункт каардынатнай плоскасці. Лікі x і y пары $(x; y)$, адпаведнай пункту M каардынатнай плоскасці, называюць *каардынатамі* гэтага пункта, прычым першая каардыната называецца *абсцысай*, другая — *ардынтай*. Гэта запісваюць $M(x; y)$.

Калі ёсць пункты $A(x_1)$ і $B(x_2)$, то адлегласць паміж імі выражае лік $|x_1 - x_2|$, а калі пункты $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то лік

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Залежнасць адной зменнай y ад другой x , пры якой кожнаму значэнню зменнай x з пэўнага мноства D адпавядае адзінае значэнне зменнай y , называецца *функцыянальнай залежнасцю*, або *функцыяй*.

Функцыянальную залежнасць зменнай y ад зменнай x абазначаюць $y = f(x)$, або $y = y(x)$. Пры гэтым зменную x называюць *аргументам* функцыі.

Мноства тых значэнняў, якія можа прымаць аргумент функцыі, называецца *абсягам вызначэння функцыі*, а мноства тых значэнняў, якія можа набываць залежная зменная y , — *абсягам значэнняў функцыі*. Абсяг вызначэння функцыі $y = f(x)$ абазначаюць сімвалам $D(y)$, а абсяг значэнняў — $E(y)$.

Графікам функцыі $y = f(x)$ называецца мноства ўсіх пунктаў каардынаты плоскасці, абсцысы якіх роўныя значэнням аргумента, а ардынаты — адпаведным значэнням функцыі.

Арыфметычнай прагрэсіі называецца паслядоўнасць, у якой кожны наступны член атрымліваецца дадаваннем да папярэдняга аднаго і таго ліку d , які называецца *рознасцю прагрэсіі*. Паслядоўнасць (a_n) з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй тады і толькі тады, калі любы яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму двух суседніх членаў:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Формулы

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ і } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

даюць магчымасць знайсці n -ны член арыфметычнай прагрэсіі і суму n яе першых членаў.

Геаметрычнай прагрэсіі называецца паслядоўнасць, у якой кожны наступны член атрымліваецца з папярэдняга множаннем на адзін і той не роўны нулю лік q , які называецца *назоўнікам прагрэсіі*. Пасля-

доўнасьць (b_n) з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй тады і толькі тады, калі квадрат кожнага яе члена, пачынаючы з другога, роўны здабытку двух суседніх з ім членаў:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Для знаходжання n -ага члена геаметрычнай прагрэсіі і сумы першых n яе членаў можна выкарыстаць формулы:

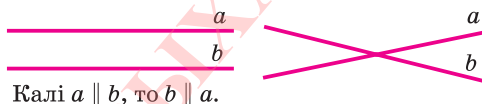
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ і } S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Сумай членаў бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі з першым членам a_1 і назоўнікам q называецца лік $S = \frac{a_1}{1-q}$.

ГЕАМЕТРЫЯ

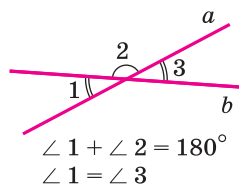
Дзве прамыя

Дзве прамыя a і b адной плоскасці могуць быць паралельнымі або перасякальнымі.



Калі $a \parallel b$, то $b \parallel a$.

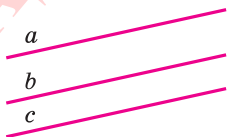
Перасякальныя прамыя раздзяляюць плоскасць на чатыры вуглы, пары якіх маюць спецыяльныя назвы. Вуглы 1 і 2, якія маюць агульную старану, называюць *сумежнымі*, а вуглы 1 і 3, стораны кожнага з якіх з'яўляюцца працягамі старон другога вугла, — *вертыкальнымі*. Сумежныя вуглы разам складаюць 180° , а вертыкальныя вуглы роўныя адзін аднаму.



$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 2 &= 180^\circ \\ \angle 1 &= \angle 3 \end{aligned}$$

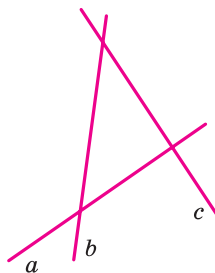
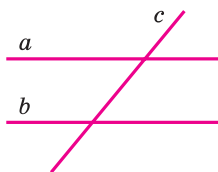
Тры прамыя

Сярод трох прамых a , b , c адной плоскасці можа не быць паралельных прамых або такія прамыя могуць быць. Калі паралельныя прамыя a і b ёсць, то трэцяя прамая c можа быць паралельнай ім або перасякаць іх. Гэтым параджаецца чатыры канфігурацыі.

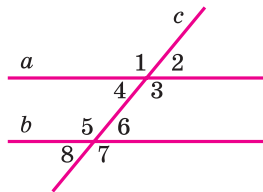


Калі $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Калі $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$.



Калі дзве прамыя a і b перасечаны трэцяй прамой, то ўтвараюцца 8 вуглоў. Вуглы 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 называюцца *адпаведнымі*, вуглы 3 і 6, 4 і 5 — *унутранымі накрыжлеглымі*, вуглы 3 і 5, 4 і 6 — *унутранымі аднабаковымі*.



Уласцівасці паралельных прамых: калі прамыя a і b паралельныя, то адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180° .

Прыметы паралельных прамых: прамыя a і b паралельныя, калі адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180° .

Трохвугольнік

Тры папарна перасякальныя прамыя вылучаюць з плоскасці трохвугольнік. Стораны і вуглы трохвугольніка называюць *элементамі трохвугольніка*.

Сума ўнутраных вуглоў роўная 180° ; кожная старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон і большая за іх рознасць; большаму вуглу адпавядае большая супрацьлеглая старана; большай старане адпавядае большы супрацьлеглы вугал; квадрат стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон без падвоенага здабытку гэтых старон і косінуса вугла паміж імі (*тэарэма косінусаў*); стараны прапарцыянальныя сінусам супрацьлеглых вуглоў (*тэарэма сіносаў*):

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ; |b - c| < a < b + c; |a - c| < b < a + c; |a - b| < c < a + b;$$

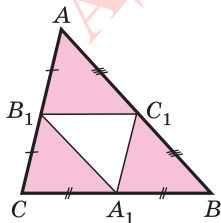
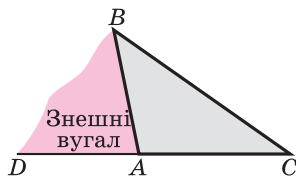
калі $\angle A > \angle B$, то $a > b$; калі $a > b$, то $\angle A > \angle B$;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Акрамя старон і вуглоў у трохвугольніку вылучаюць і іншыя элементы.

Знешні вугал трохвугольніка — вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом.

Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух яго ўнутраных вуглоў, не сумежных з ім; $\angle BAD = \angle B + \angle C$.



Сярэдняя лінія трохвугольніка — адрэзак, што злучае сярэдзіны дзвюх яго старон.

Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельная трэцяй старане і роўная яе палавіне; сярэднія лініі трохвугольніка раздзяляюць яго на чатыры роўныя трохвугольнікі:

$$A_1B_1 \parallel AB; A_1B_1 = \frac{1}{2} AB;$$

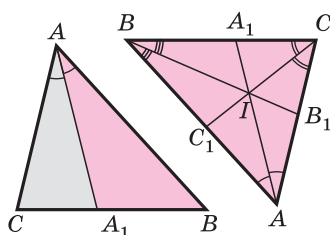
$$S_{A_1B_1C_1} = S_{AB_1C_1} = S_{BA_1C_1} = S_{CA_1B_1}.$$

Медыана трохвугольніка — адрэзак, што злучае вяршыню трохвугольніка і сярэдзіну супрацьлеглай стараны.

Медыяна трохвугольніка раздзяляе яго на два роўнавялікія трохвугольнікі; медыяна трохвугольніка адсякае ад яго трохвугольнік, падобны дадзенаму; медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які адсякае ад кожнай з іх трэцюю долю, калі лічыць ад стараны; медыяны трохвугольніка раздзяляюць яго на шэсць роўнавялікіх трохвуголікаў:

$$S_{ABB_1} = S_{ACA_1}; \Delta MAN \sim \Delta CAB; A_1G = \frac{1}{3} AA_1, B_1G = \frac{1}{3} BB_1, C_1G = \frac{1}{3} CC_1;$$

$$S_{AGC_1} = S_{BGC_1} = S_{BGA_1} = S_{CGA_1} = S_{CGB_1} = S_{AGB_1}.$$



Бісектрыса трохвугольніка — адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, заключаны паміж яго вяршыняй і супрацьлеглай стараной.

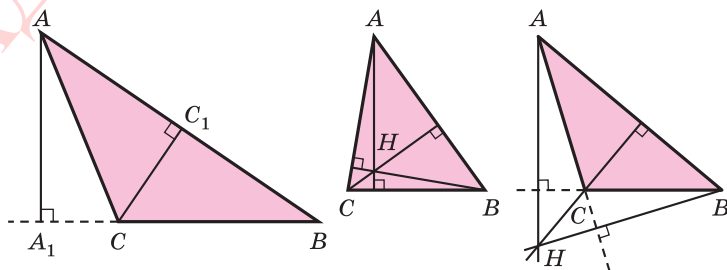
Бісектрыса трохвугольніка дзеліць супрацьлеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам; бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце; пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка раздзяляе кожную бісектрысу ў адносіне, першы кампанент якой — сума старон, што заключаюць бісектрысу, другі кампанент — трэцяя старана, калі лічыць ад вяршыні:

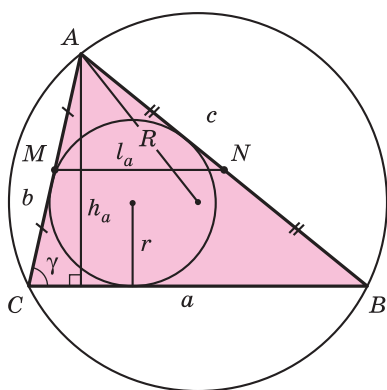
Вышыня трохвугольніка — перпендыкуляр, апущаны з вяршыні трохвугольніка на прамую, што праходзіць праз супрацьлеглую яго старану.

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}; \frac{AI_1}{IA_1} = \frac{AB + AC}{BC}; \frac{BI_1}{IB_1} = \frac{BA + BC}{AC}; \frac{CI_1}{IC_1} = \frac{CA + CB}{AB}.$$

Прамыя, што праходзяць праз вышыні трохвугольніка, перасякаюцца ў адным пункце.

Плошча трохвугольніка роўная палавіне здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні, або здабытку вышыні трохвугольніка і перпенды-





кулярнай ёй сярэдняй лініі, або палавіне здабытку дзвюх яго старон і сінуса вугла паміж імі, або квадратнаму кораню са здабытку паўперыметра і трох рознасцей паўперыметра з кожнай стараной, або здабытку паўперыметра і радыуса ўмежанай акружнасці, або здабытку трох старон трохвугольніка, падзеленаму на пачачвяроны радыус апісанай акружнасці:

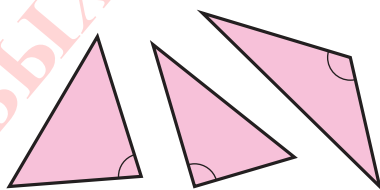
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; S = h_a \cdot l_a;$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C; p = \frac{1}{2} (a + b + c);$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; S = p \cdot r; S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

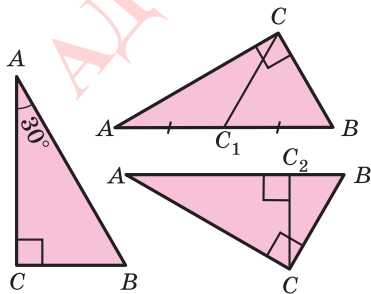
Прамавугольны трохвугольнік

Два вуглы трохвугольніка абавязкова вострыя, а трэці — большы — яго вугал можа быць і вострым, і прамым, і тупым. У адпаведнасці з гэтым трохвугольнікі падзяляюць на *востравугольныя, прамавугольныя, тупавугольныя*.



Гіпатэнуза — большая старана прамавугольнага трохвугольніка, *катэты* — дзве іншыя яго стараны.

Вострыя вуглы прамавугольнага трохвугольніка разам складаюць 90° ; квадрат яго гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў (*тэарэма Піфагора*); калі катэт ляжыць супраць вугла ў 30° , то ён роўны палавіне гіпатэнузы; калі катэт роўны палавіне гіпатэнузы, то ён ляжыць супраць вугла ў 30° ; медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўная палавіне гэтай гіпатэнузы і з'яўляецца радыусам апісанай акружнасці; вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, з'яўляецца сярэднім геаметрычным адрэзкаў, на якія яна раздзяляе гіпатэнузу, а катэт ёсць сярэдняе геаметрычнае гіпатэнузы і праекцыі гэтага катэта на гіпатэнузу; сінус вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да гіпатэнузы; косінус вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы; тангенс вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да прылеглага; катангенс вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да супрацьлеглага:

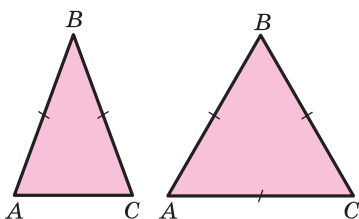


$$\begin{aligned}\angle A + \angle B &= 90^\circ; AB^2 = AC^2 + BC^2; CC_1 = AC_1 = BC_1 = R; \\ CC_2 &= \sqrt{AC_2 \cdot BC_2}, AC = \sqrt{AB \cdot AC_2}, BC = \sqrt{AB \cdot BC_2} \sin A = \frac{BC}{AB}; \\ \cos A &= \frac{AC}{AB}; \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.\end{aligned}$$

Приметы прямокутного трикутника. Трикутник з'являється прямокутним, калі:

- сума двох яких-небудь його кутів роўная 90° ;
- квадрат большай яго стараны роўны суме квадратів двох інших старон;
- адна з яго медыан роўная палавіне стараны, да якой праведзена.

Раўнабкі трохвугольнік

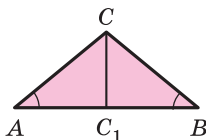


Калі трохвугольнік мае роўныя стараны, яго называюць *раўнабкім*. Раўнабкі трохвугольнік з трыма роўнымі старанамі называюць *роўнастароннім*.

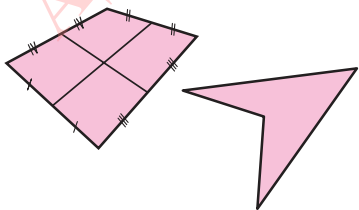
Вуглы *раўнабокага трохвугольніка* пры аснове роўныя; медыяна, бісектрыса, вышыня, праведзеныя да асновы, супадаюць; медыяны раўнабокага трохвугольніка, праведзеныя да бакавых старон, роўныя адна адной; вышыні раўнабокага трохвугольніка, праведзеныя да бакавых старон, роўныя адна адной; бісектрысы раўнабокага трохвугольніка, праведзеныя да бакавых старон, роўныя адна адной: $\angle A = \angle C$; калі BB_1 — медыяна, то BB_1 — бісектрыса і вышыня; калі BB_1 — бісектрыса, то BB_1 — медыяна і вышыня; калі BB_1 — вышыня, то BB_1 — бісектрыса і медыяна.

Приметы раўнабокага трохвугольніка. Трикутник з'являецца раўнабкім, калі:

- дзве яго стараны роўныя;
- два яго вуглы роўныя;
- медыяна і вышыня або медыяна і бісектрыса або вышыня і бісектрыса, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць.

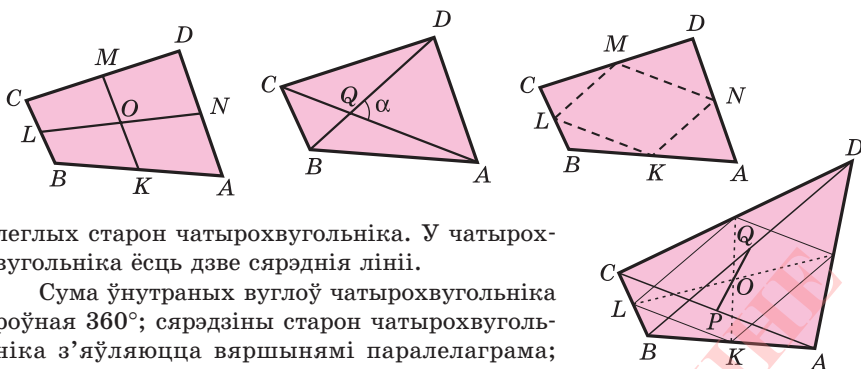


Чатырхвугольнік



Плоская замкнёная чатырохзвёнавая ломаная вылучае з плоскасці *чатырхвугольнік*. Адрозніваюць *выпуклыя* і *невыпуклыя* чатырхвугольнікі. Звычайна разглядаюць выпуклыя чатырхвугольнікі.

Сярэдняя лінія чатырхвугольніка — адрэзак, які злучае сярэдзіны супраць-



леглых сторін чотирихвугольника. У чотирихвугольника єсть две сярэднія лінії.

Сума ўнутраных вуглоў чатырихвугольника роўная 360° ; сярэдзіны старон чатырихвугольника з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма; сярэднія лініі чатырихвугольника пунктам перасячэння дзяляцца папалам; адрэзак, што злучае сярэдзіны дыяганалей чатырихвугольника, праходзіць праз пункт перасячэння яго сярэдніх ліній і дзеліцца ім папалам; плошча чатырихвугольника роўная палавіне здабытку яго дыяганалей і сінуса вугла паміж імі; з чатырихвугольнікаў, на якія сярэднія лініі раздзяляюць чатырихвугольник, сума плошчаў чатырихвугольнікаў, прылеглых да супрацьлеглых вяршынь, роўная суме плошчаў двух іншых чатырихвугольнікаў; з трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць чатырихвугольник, сума плошчаў трохвугольнікаў, прылеглых да супрацьлеглых старон, роўная суме плошчаў двух іншых чатырихвугольнікаў:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; $KLMN$ — паралелаграм;

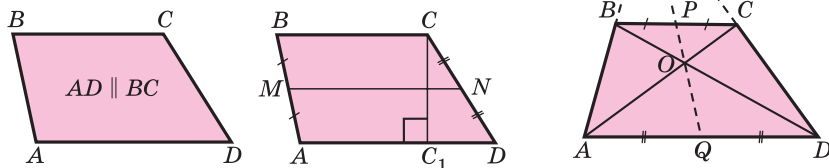
$$OK = OM; OL = ON; O \in PQ \text{ і } OP = OQ; S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{AKON} + S_{CLOM}; = S_{BKOL} + S_{DMON}; = S_{AQB} \cdot S_{CQD}; = S_{AQD} + S_{BQC}.$$

Трапецыя

Трапецыя — чатырихвугольник, у якога две стараны паралельныя, а две іншыя непаралельныя. Паралельныя стараны трапецыі называюць *асновамі*, а две іншыя — *бакавымі старанамі*.

Сума вуглоў, прылеглых да бакавой стараны трапецыі, роўная 180° ; сярэдняя лінія трапецыі паралельная яе асновам і роўная іх паўсуме; прамой, праведзенай праз сярэдзіны асноў трапецыі, належаць пункт перасячэння дыяганалей трапецыі і пункт перасячэння прамых, праведзеных праз бакавыя стараны; з трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць трапецыю, трохвугольнікі, пры-



леглыя да яе асноў, — падобныя, а трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон, — роўнавялікія; плошча трапецыі роўная здабытку яе сярэдняй лініі і вышыні:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ; MN \parallel AD, MN \parallel BC,$$

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC); O \in PQ \text{ і } R \in PQ;$$

$$\Delta AOD \sim \Delta BOC, S_{AOB} = S_{DOC}; S_{ABCD} = MN \cdot CC_1.$$

Прыметы чатырохвугольніка з паралельнымі старанамі. Чатырохвугольнік мае паралельныя стараны, калі:

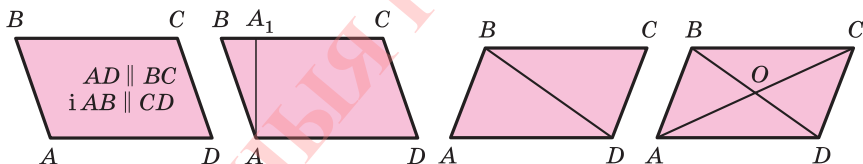
– сума вуглоў, прылеглых да якой-небудзь стараны, роўная 180° ; $\angle A + \angle B = 180^\circ$, або $\angle B + \angle C = 180^\circ$, або $\angle C + \angle D = 180^\circ$, або $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

– адрэзак, што злучае сярэдзіны супрацьлеглых старон чатырохвугольніка, роўны паўсуме дзвюх іншых яго старон; $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ або $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$;

– з чатырох трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць чатырохвугольнік, два трохвугольнікі, прылеглыя да супрацьлеглых старон, роўнавялікія; $S_{AOB} \sim S_{DOC}$ або $S_{AOD} \sim S_{BOC}$.

Паралелаграм

Паралелаграм — чатырохвугольнік, у якога супрацьлеглыя стараны паралельныя.



Сума вуглоў, прылеглых да любой стараны паралелаграма, роўная 180° ; супрацьлеглыя стараны паралелаграма паралельныя і роўныя; супрацьлеглыя вуглы паралелаграма роўныя; дыяганаль паралелаграма раздзяляе яго на два роўныя трохвугольнікі; дыяганалі паралелаграма раздзяляюць яго на дзве пары роўных трохвугольнікаў, а ўсе чатыры трохвугольнікі роўнавялікія; пункт перасячэння дыяганалей дзеліць кожную з іх папалам; пункт перасячэння дыяганалей ёсць цэнтр сіметрыі паралелаграма; плошча роўная здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ і } \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ і } \angle C + \angle D = 180^\circ, \text{ і } \angle D + \angle A = 180^\circ;$$

$$AD \parallel BC \text{ і } AB \parallel CD; AD = BC \text{ і } AB = CD; \angle A = \angle C \text{ і } \angle B = \angle D;$$

$$\Delta ABD = \Delta CBD; \Delta AOD = \Delta COB, \Delta AOB = \Delta COD,$$

$$S_{AOD} = S_{COB} = S_{AOB} = S_{COD}; AO = CO; BO = DO; S_{ABCD} = BC \cdot AA_1.$$

Прыметы паралелаграма. Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі:

– сумы вуглоў, прылеглых да якіх-небудзь дзвюх сумежных старон, роўныя 180° кожная; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ і $\angle B + \angle C = 180^\circ$, або

$\angle B + \angle C = 180^\circ$ і $\angle C + \angle D = 180^\circ$, або $\angle C + \angle D = 180^\circ$ і $\angle D + \angle A = 180^\circ$, або $\angle D + \angle A = 180^\circ$ і $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

– його супрацьлеглыя стораны роўныя; $AD = BC$ і $AB = CD$;

– ён мае пару супрацьлеглых паралельных і роўных старон;
 $AD \parallel BC$ і $AD = BC$ або $AB = CD$ і $AB \parallel CD$;

– яго супрацьлеглыя вуглы роўныя; $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$;

– яго дыяганалі пункта перасячэння дзяляцца папалам; $AO = CO$;
 $BO = DO$.

Прамавугольнік

Прамавугольнік — паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал.

Усе вуглы прамавугольніка роўныя адзін аднаму і прамыя; дыяганалі прамавугольніка роўныя; дыяганалі прамавугольніка раздзяляюць яго на чатыры раўнабокія трохвугольнікі; пасярэднія перпендыкуляры да старон прамавугольніка з'яўляюцца восьмі сіметрыі; плошча прамавугольніка роўная здабытку сумежных старон:

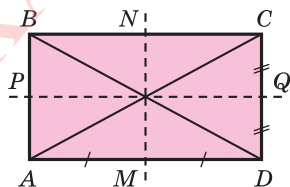
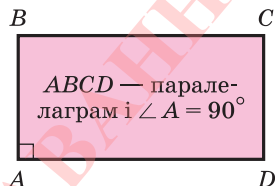
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ; AC = BD;$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD.$$

Прыметы прамавугольніка. Паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам, калі:

– яго дыяганалі роўныя; $AC = BD$;

– пасярэдні перпендыкуляр да якой-небудзь стараны паралелаграма з'яўляецца яго восью сіметрыі; MN — вось сіметрыі або PQ — вось сіметрыі.



Ромб

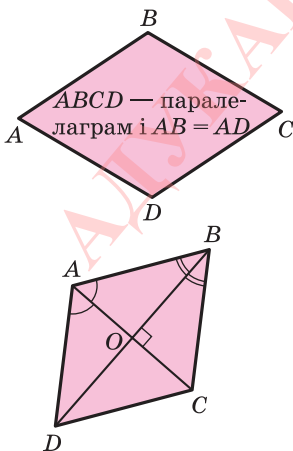
Ромб — паралелаграм, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны.

Усе стораны ромба роўныя адна адной; яго дыяганалі перпендыкулярныя; дыяганалі ромба раздзяляюць вуглы папалам; дыяганалі ромба раздзяляюць яго на чатыры роўныя прамавугольныя трохвугольнікі; прамыя, якім належаць дыяганалі, з'яўляюцца восьмі сіметрыі ромба; плошча ромба роўная палавіне здабытку яго дыяганалей:

$$AB = BC = CD = DA; AC \perp BD; \angle ABD = \angle CBD \text{ і } \angle BCA = \angle DCA;$$

$$\triangle AOB = \triangle COB = \triangle AOD = \triangle COD; AC \text{ і } BD \text{ — восі сіметрыі ромба};$$

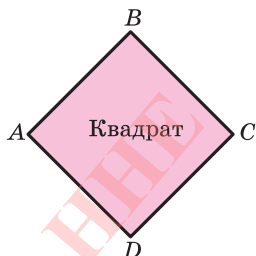
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$



Приметы ромба. Паралелограм з'яўляецца ромбам, калі:

- ён мае пару роўных сумежных старон; $AB = BC$, або $BC = CD$, або $CD = DA$, або $DA = AB$;
- яго дыяганалі перпендыкулярныя; $AC \perp BD$;
- яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам; $\angle ABD = \angle CBD$ і $\angle BCA = \angle DCA$;
- прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восьямі сіметрыі.

$ABCD$ — прамавугольнік і $AB = AD$



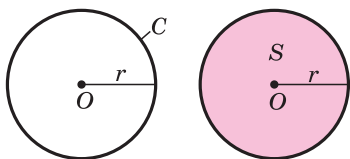
$ABCD$ — ромб
і $\angle A = 90^\circ$

Квадрат

Квадрат — прамавугольнік, у якога ёсць роўныя сумежныя староны, або ромб, у якога ёсць прамы вугал.

Паколькі квадрат з'яўляецца і прамавугольнікам, і ромбам, то ў яго ёсць усе ўласцівасці прамавугольніка і ўсе ўласцівасці ромба.

Акружнасць і круг



Адносіна даўжыні C акружнасці да яе дыяметра d ёсць адна і тая для любой акружнасці. Гэтая адносіна выражае лік, які абазначаецца π .

$$\pi = \frac{C}{d} \approx \frac{22}{7} \quad \frac{355}{113} \approx 3,14159.$$

Даўжыні C акружнасці, плошча S адпаведнага круга і іх радыус r звязаныя формуламі:

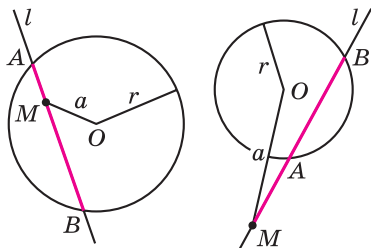
$$C = 2\pi r; S = \pi r^2; S = \frac{C}{2} r.$$

Акружнасць і прамая

Агульных пунктаў у акружнасці і прамой можа быць не больш за два. **Сечная** — прамая, якая мае з акружнасцю два агульныя пункты.

Датычная — прамая, якая мае з акружнасцю адзін агульны пункт.

Датычная перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў пункт датыку.



$$MA \cdot MB = |a^2 - r^2|$$

Прымета датычнай. Прамая з'яўляецца датычнай, калі яна праходзіць праз пункт акружнасці і перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў гэты пункт.

Калі прамая праходзіць праз дадзены пункт і перасякае дадзеную акружнасць, то здабытак адлегласцей ад гэтага пункта да пунктаў перасячэння сечнай з акружнасцю ёсць велічыня пастаянная для любой такой прамой, прычым калі r — радыус акружнасці, a — адлегласць ад цэнтра да выбранага пункта i :

- пункт ляжыць унутры акружнасці, то гэтая пастаянная роўная $r^2 - a^2$;
- пункт ляжыць па-за акружнасцю, то гэтая пастаянная роўная $r^2 + a^2$.

Акружнасць і дзве прамыя

Дзве паралельныя прамыя, кожная з якіх мае агульныя пункты з акружнасцю, высякаюць з акружнасці роўныя дугі і роўныя хорды; калі радыус акружнасці перпендыкулярны да адной з паралельных хорд, то ён перпендыкулярны і да другой хорды і раздзяляе кожную з іх на два роўныя адрэзкі:

$$\cup AC = \cup BD, AB = CD;$$

калі $OK \perp AB$, то $OK \perp CD$ і $PA = PB$ і $QC = QD$.

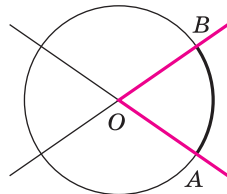
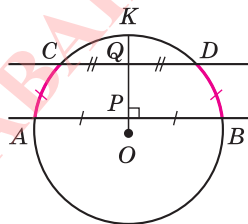
Перасякальныя прамыя ў дачыненні да акружнасці могуць размяшчацца так, што пункт перасячэння або супадае з цэнтрам акружнасці, або ляжыць на акружнасці, або ляжыць унутры круга, або ляжыць па-за кругам.

Вугал, вяршыня якога супадае з цэнтрам акружнасці, называецца *цэнтральным вуглом*.

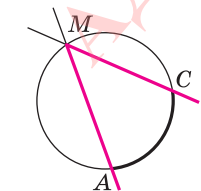
Цэнтральны вугал вымяраецца дугой, на якую абапіраецца.

Вугал, вяршыня якога належыць акружнасці, а стораны маюць з акружнасцю агульныя пункты, называецца *ўмежаным вуглом*.

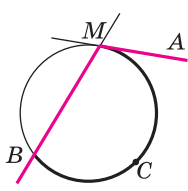
Умежаны вугал вымяраецца палавінай дугі, на якую ён абапіраецца. Умежаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, з'яўляецца прамым. Умежаныя вуглы, што абапіраюцца на адну дугу, роўныя.



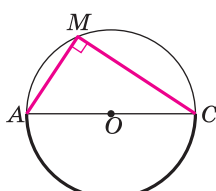
$$\angle AOB = \cup AB$$



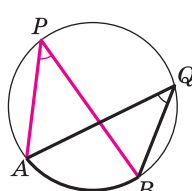
$$\angle AMC = \frac{1}{2} \cup AC$$



$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup BCM$$



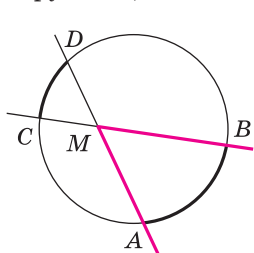
$$\angle AMC = 90^\circ$$



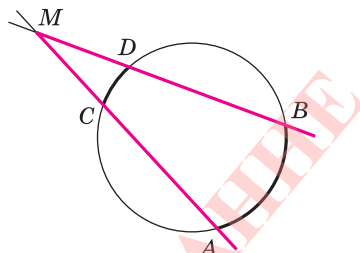
$$\angle APB = \angle AQB$$

Вугал з вяршыняй унутры круга вымяраецца паўсумай дуг, адна з якіх заключана паміж старанамі дадзенага вугла, а другая — паміж старанамі вугла, вертыкальнага дадзенаму.

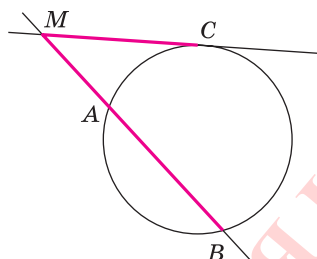
Вугал, вяршыня якога знаходзіцца па-за кругам, а стораны перасякаюць акружнасць, вымяраецца паўрознасцю дуг, якія дадзены вугал высякае з акружнасці.



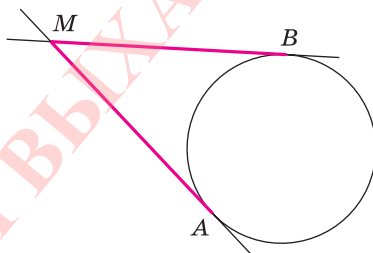
$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup CD)$$



$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup CD)$$



$$MA \cdot MB = MC^2$$



$$MA = MB$$

Калі сечная і датычная праходзяць праз дадзены пункт па-за кругам, то здабытак адлегласцей ад гэтага пункта да пунктаў перасячэння сечнай з акружнасцю роўны квадрату адлегласці ад дадзенага пункта да пункта дотыку датычнай да акружнасці.

Калі праз дадзены пункт да дадзенай акружнасці праведзены дзве датычныя, то адлегласці ад гэтага пункта да пунктаў дотыку роўныя адна адной.

Акружнасць і трохвугольнік

Акружнасць, умежаная ў многавугольнік, — акружнасць, якая датыкаецца да ўсіх старон многавугольніка.

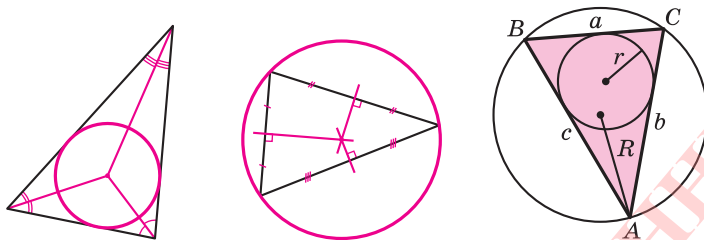
Акружнасць, апісаная каля многавугольніка, — акружнасць, якая праходзіць праз усе вяршыні многавугольніка.

Цэнтр умежанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння бісектрыс трохвугольніка.

Цэнтр апісанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка.

Радыусы r і R умежанага і апісанага акружнасцей звязаны з іншымі элементамі трохвугольніка формуламі:

$$r = \frac{S}{p}; R = \frac{abc}{4S}; \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



Акружнасць і чатырохвугольнік

Сумы супрацьлеглых старон апісанага чатырохвугольніка роўныя.

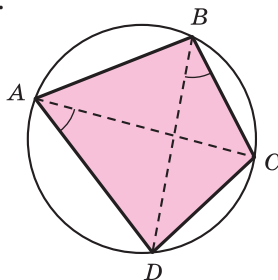
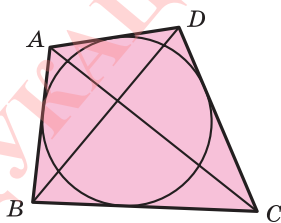
Прымета апісанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца апісаным каля акружнасці, калі ў яго роўныя сумы супрацьлеглых старон.

Сумы супрацьлеглых вуглоў умежанага чатырохвугольніка роўныя 180° ; здабытак дыяганалей умежанага чатырохвугольніка роўны суме здабыткаў супрацьлеглых старон.

Прыметы ўмежанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца ўмежаным у акружнасць, калі:

а) сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180° ; $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

б) вуглы, кожны з якіх утвораны стараной і дыяганаллю і якія абпярэюцца на адну старану, роўныя; $\angle ACB = \angle ADB$, або $\angle BAC = \angle BDC$, або $\angle CAD = \angle CBD$, або $\angle ACD = \angle ABD$.



$$AD + BC = AB + CD$$

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Дачыненні паміж фігурамі

Геаметрычныя фігуры могуць знаходзіцца ў дачыненнях роўнасці і падобнасці.

Роўныя фігуры — фігуры, якія супадаюць пры накладанні.

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі ў іх адпаведна роўныя:

- вугал і прылеглыя да яго стораны ў адным вуглу і прылеглым да яго старанам у другім;
- старана і прылеглыя да яе вуглы ў адным старане і прылеглым да яе вуглам у другім;
- тры стараны ў адным трох старанам у другім.

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў. Прамавугольныя трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі ў іх адпаведна роўныя:

- катэты ў адным катэтам у другім;
- катэт і прылеглы да яго востры вугал у адным катэтам і прылегламу да яго востраму вуглу ў другім;
- гіпатэнуза і востры вугал у адным гіпатэнузе і востраму вуглу ў другім;
- гіпатэнуза і катэт у адным гіпатэнузе і катэту ў другім.

Тэорыя падобнасці грунтуецца на *тэарэме Фалеса*: калі на адной старане вугла адкладзены роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то гэтыя прамыя на другой старане высякаюць таксама роўныя адрэзкі.

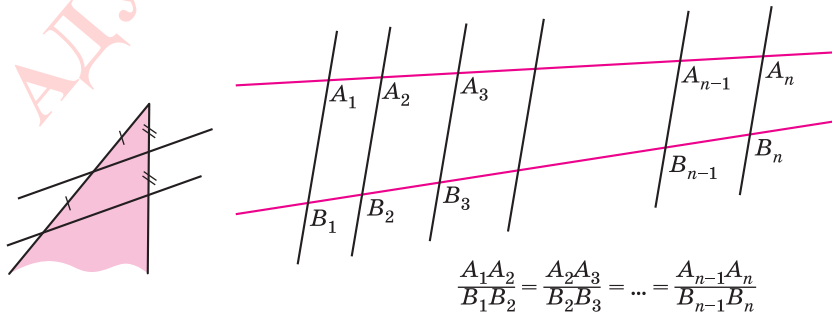
Праўдзіцца абгульненая тэарэма Фалеса: шэраг паралельных прамых, якія перасякаюць дзве іншыя прамыя, высякаюць на іх прапарцыянальныя адрэзкі.

Падобныя трохвугольнікі — трохвугольнікі, вуглы якіх папарна роўныя, а адпаведныя стораны прапарцыянальныя.

Прыметы падобнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі з'яўляюцца падобнымі, калі ў іх:

- ёсць па роўным вугле, а прылеглыя да іх стораны прапарцыянальныя;
- ёсць па два роўныя вуглы;
- усе тры стараны прапарцыянальныя.

Адносіна любых адпаведных лінейных элементаў падобных трохвугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна перыметраў падобных многавугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна плошчаў падобных многавугольнікаў роўная квадрату каэфіцыента падобнасці. Адносіна аб'ёмаў падобных фігур-цел роўная кубу каэфіцыента падобнасці.



Адказы

Раздзел I

9. 656 м^2 . 10. $18(11+\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 11. $750(10+\sqrt{3}) \text{ мм}^2$. 12. 1320 см^2 .
13. а) 150; $12,5(12+\sqrt{3})$; б) 1200; 1400; в) 3456; $108(32+9\sqrt{3})$; г) 2000;
 $2000 + 640 \operatorname{tg} 54^\circ$. 14. а) $2\sqrt{19} \text{ см}$; б) $9\sqrt{67} \text{ см}^2$; в) $9(\sqrt{67}+\sqrt{3}) \text{ см}^2$.
15. $4225\sqrt{3} \text{ мм}^2$. 16. а) $6\sqrt{13} \text{ см}$; $18\sqrt{3} \text{ см}$; б) $405\sqrt{3} \text{ см}^2$; в) $648\sqrt{3} \text{ см}^2$.
17. а) $2\sqrt{82}$, $2\sqrt{73} \text{ см}$; $\sqrt{194} \text{ см}$; б) $48\sqrt{73} \text{ см}^2$; в) $144+4\sqrt{73} \text{ см}^2$.
18. $48(6-\sqrt{11}) \text{ см}^2$. 19. а) $6\sqrt{34} \text{ см}$; 36 см; б) 2160 см^2 ; в) 3456 см^2 .
21. а) $2\sqrt{58} \text{ см}$; $2\sqrt{65} \text{ см}$; б) 296 см^2 ; в) 392 см^2 . 22. а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}} \text{ м}$;
 $\sqrt{142+45\sqrt{3}} \text{ м}$; б) 192 м^2 ; в) 282 м^2 . 23. а) 5 м; $\sqrt{89} \text{ м}$; б) $8(5+\sqrt{34}) \text{ м}^2$;
в) $8(11+\sqrt{34}) \text{ м}^2$. 24. а) $8\sqrt{3} \text{ см}$; $8\sqrt{6} \text{ см}$; $8\sqrt{6} \text{ см}$; б) $192(1+\sqrt{2}) \text{ см}^2$;
в) $192(2+\sqrt{2}) \text{ см}^2$. 25. а) 13 см; 12 см; б) 360 см^2 ; в) $30(12+5\sqrt{3}) \text{ см}^2$.
26. $150(2\sqrt{3}-3) \text{ см}^2$. 27. а) $12\sqrt{7} \text{ см}$; $12\sqrt{3} \text{ см}$; б) $1080\sqrt{3} \text{ см}^2$;
в) $1728\sqrt{3} \text{ см}^2$. 28. $2,4\sqrt{34} \text{ см}$. 30. а) $168\pi \text{ см}^2$; б) $168\pi \text{ см}^2$; в) $2,4\pi \text{ м}^2$;
г) $1,68\pi \text{ м}^2$. 31. $625\pi \text{ см}^2$. 32. $252\pi \text{ м}^2$. 33. $\pi^2 \text{ м}^2$. 34. 4 см; 16 см.
35. 2,11 л. 36. $4,83 \text{ м}^2$. 37. $\frac{d^2}{8\pi}$. 38. $a : b$. 39. 37 мм. 40. $1040\pi \text{ см}^2$.
41. а) $75\pi \text{ см}^2$; б) $288\pi \text{ дм}^2$; в) $6,25\pi \text{ м}^2$. 42. а) $81\pi(3+2\sqrt{3}) \text{ см}^2$;
б) $200\pi(1+\sqrt{2}) \text{ дм}^2$; в) $4,32 \text{ м}^2$. 43. 216° . 44. $12\pi \text{ см}$. 46. а) $88\pi \text{ см}^2$;
б) $88\pi \text{ см}^2$; в) $540\pi \text{ дм}^2$; г) $3,24\pi \text{ м}^2$. 47. $36\pi \text{ см}^2$. 48. $144\pi \text{ м}^2$. 49. $50\pi^2 \text{ м}^2$.
50. 12 см; 36 см. 51. $a : b$. 52. 30° , 60° . 53. 216. 54. $8 : 2\pi : 3\sqrt{3}$. 55.
6000. 59. 81 км/г . 60. 4. 61. 15 см і 24 см. 67. б) 4. 68. 1 або 3. 88.
 $\sqrt{10} \text{ см}$. 89. $4(5+3\sqrt{2}) \text{ см}$. 90. 72 дм^2 . 91. $576(1+\sqrt{3}) \text{ см}^2$. 92. 11 мм і
60 мм. 93. 4640 см^2 або 8448 см^2 . 94. 4 см. 95. 960 см^2 . 96. 4 см.
115. 12. 116. а) $m + n$, $\frac{m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\frac{n(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$; б) $m + n$, $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$,
 $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 117. 6 см, 3,36 см. 121. 7 м, 9 м і 16 м або $8\frac{5}{23} \text{ м}$, $10\frac{5}{23} \text{ м}$
і $18\frac{10}{23} \text{ м}$. 122. 18 см і 10 см. 123. 2 г, 3 г. 129. в) $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ м}^2$.
130. $\frac{a}{9}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$. 132. $\sqrt[4]{2a^2-\frac{l^2}{4}}$. 133. 72 см^2 . 134. $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$.

135. $20\sqrt{3}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм. 136. $\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt[4]{3}}$. 142. $\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$.
 146. $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-2)$, $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. 147. $\frac{a}{2}(2\sqrt{3}+1)$, $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. 150. $\frac{2\sqrt{3}-1}{11\sqrt{6}}S$.
 151. $1,25a^2\sqrt{3}$. 152. 10 мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм. 153. $2\sqrt{2}S(1+\sqrt{3})$.
 156. $2R^2\sqrt{3}$. 157. $3l^2$. 158. $2\sqrt{3}$ м². 159. $\frac{1}{2a\sqrt{2}}\sqrt{a^4+4S^2}$.
 160. $2a^2\left(2\sqrt{\frac{\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}+1\right)$. 161. $\frac{3c}{8}\sqrt{8h^2+c^2}$. 162. $\frac{4}{3}(\sqrt{13}+\sqrt{10})$ м.
 163. 480 см². 165. $2\sqrt{2(4Q^2-a^4)}$. 166. $\sqrt{8Q^2+a^4}$. 176. 11-і 7-вугольнік.
 177. 14 км/г. 178. 20 см. 179. 24 цукеркі.

Раздзел II

216. а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; б) $\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a-b)}$; в) a^3+b^3 ; г) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$.
 217. а) $\frac{2}{(5x+1)(5x-1)^2}$; б) $\frac{3}{2(9-4y^2)}$; в) $\frac{ab}{a+b}$; г) $\frac{8}{m^2-4}$. 218. а) $2-\sqrt{3}$;
 б) $\sqrt{5}+2$; в) $\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}{3}$; г) $\frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}$. 219. а) -2 ; б) \sqrt{ab} ; в) $-\frac{a+b}{a-b}$;
 г) $4\frac{x}{y}-2$. 223. 18 кг · м/с, 42 кг · м/с. 224. 6 м/с, 24 м/с. 233. а) $-0,25$;
 б) -1 ; в) $-\frac{1}{16}$. 234. г) $-\frac{2}{y^3}$. 235. а) $4c^3$; б) $2c+3\sqrt{c}+1$; в) $-\frac{3}{(c-2)^2}$;
 г) $-\frac{1}{(c-1)^2}$; д) $1-\frac{1}{(c+1)^2}$; е) $\frac{-1+8c-2c^2}{(2c^2-1)^2}$; ж) $\frac{4c}{(c^2+1)^2}$; з) $-\frac{3c^2}{(c^3+1)^2}$;
 и) $3c^2+2c+2-\frac{2}{c^2}-\frac{2}{c^3}$; к) $7c^6+1+\frac{1}{c^2}+\frac{7}{c^8}$; л) $3c^2-6c-8+\frac{3\sqrt{c}}{2}+\frac{4}{c\sqrt{c}}$;
 м) $\frac{-\sqrt{c}-2}{6\sqrt[3]{c^2}(\sqrt{c}-1)^2}$. 236. а) $2-y$; б) $\sqrt{2-y^2}$; в) $2-\left(\frac{y}{y-3}\right)^2$; г) $1-\frac{3}{y^2+1}$;
 д) $\sqrt{\frac{y}{y-3}}$; е) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y-3}}$. 238. а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=\frac{1}{x}$; г) $f(x)=\frac{x}{2}$;
 д) $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)$; е) $f(x)=-\sqrt{x-1}$. 239. а) $28(2y-7)^{13}$; б) $50(3+5y)^9$;

в) $-21(7y - 1)^{-4}$; г) $-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}y + 2\right)^{-6}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2y + 3}}$; е) $\frac{5}{2\sqrt{5y - 8}}$; ж) $-\frac{2}{\sqrt{7 - 4y}}$;

з) $\frac{4a}{\sqrt{4a^2 - 1}}$; и) $\frac{a}{\sqrt{3a^2 + 63}}$; к) $\frac{9a}{\sqrt{9a^2 - 16}}$; л) $65(5e - 2)^{12} - 60(3e + 7)^{19}$;

м) $45(3e - 2)^{14} + 8(3e - 1)^3$; н) $\frac{3}{\sqrt{6e - 8}} - \frac{4e}{\sqrt{4e^2 - 3}}$; п) $-\frac{9a^2}{\sqrt{7 - 3a^3}}$.

240. а) $7(m - 3)^6$; б) $27(3m - 4)^8$; в) $-8(1 - 2m)^3$; г) $-5(1 - m)^4$; д) $2m - 1$;

е) $-\frac{9}{(3m + 1)^4}$; ж) $-\frac{18}{(3m + 2)^4}$; з) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{m}}$; и) $-\frac{1}{2\sqrt{-m}}$; к) $\frac{5}{2\sqrt{5m - 1}}$;

л) $\frac{5(m + 2)^4}{2\sqrt{(m + 2)^5}}$; м) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2m - 7)^2}}$. 241. а) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)^4$; б) $\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5 + 1}}$;

в) $\frac{1}{4\sqrt{x(1 + \sqrt{x})}}$; г) $12(x + 1)^3((x + 1)^4 - 2)^2$; д) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3 - 1)^2}}$;

е) $-\frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)\sqrt{x^3 + x}}$. 254. 43 см; 22 см. 261. а) $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$,

$(\sqrt[3]{3}; +\infty)$. 263. д) На $(-3; 3)$ спадає; е) на $(0; 2)$ спадає; ж) на $(-3; 1)$

спадає; з) усюды спадає. 264. д) Усюды нарастає; е) на $(-2; 2)$ спадає; ж) на $(-1; 1)$ нарастає; и) усюды нарастає; к) нарастає на $(-1; 0)$ і на $(1; -\infty)$; л) спадає на $(-\infty; 3)$; м) нарастає на $(-2; +\infty)$. 265. а) Наростає на $(0; 0,5)$

і на $(1; +\infty)$; б) спадає на $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; в) спадає на $(-1; 0)$ і на $(0; 1)$; г) нарастає на $(-\infty; 0)$ і на $(0; +\infty)$; д) спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(0; 1)$; е) спадає на $(-\infty; -1)$, на $(-1; 1)$ і на $(1; +\infty)$; ж) нарастає на $(-1; 1)$; з) нарастає на $(1; 2)$ і $(2; 4)$; и) спадає на $(-1; 1)$; к) спадає на $(-1; 0)$; л) спадає на $(0; \frac{1}{4})$, нарастає на $(\frac{1}{4}; +\infty)$; м) нарастає на $(0; +\infty)$. 273. а) 2; б) 1;

в) ± 2 ; г) $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$; д) ± 1 ; е) ± 2 . 275. д) $y_{\min} = y(-2) = -16$, $y_{\max} = y(2) = 16$;

е) $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(4) = -32$; ж) $y_{\max} = y(-1 - \sqrt{5}) = \frac{29 + 10\sqrt{5}}{3}$,

$y_{\min} = y(-1 + \sqrt{5}) = \frac{29 - 10\sqrt{5}}{3}$; з) $y_{\max} = y(-2) = 69$, $y_{\min} = y(5) = -274$.

281. б) $a = 0$ — пункт мінімуму; в) критичних пунктів немає; г) критичні пункти 0, ± 2 ; $a = 0$ — пункт мінімуму. 282. д) Спадає на

$(-\infty; \frac{1}{4})$ і на $(\frac{1}{4}; +\infty)$; е) нарастає на $(-\infty; -2)$ і на $(-2; +\infty)$; ж) нарастає на $(0; 3,2)$ і спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(3,2; +\infty)$; з) спадає на $(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0)$

і на $\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, наростає на $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$, $(2; +\infty)$; $t_{\max} = t\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -3\sqrt{3}$, $t_{\min} = t\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3}$. 283. а) Наростає на $(-\infty; +\infty)$;

б) спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(8; 12)$, наростає на $(0; 8)$ і на $(12; +\infty)$; в) спадає на $(-\infty; 0)$ і наростає на $(0; +\infty)$; г) наростає на $(-\infty; 0)$ і на $(2; +\infty)$, спадає на $(0; 1)$ і на $(1; 2)$. 286. $y_{\max} = y(13)$. 287. $y_{\max} = y(-3)$. 288. $a = 1$.

291. а) $(-1; 0) \cup (1; 3)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $\left[\frac{1}{3}; 8\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; 0,5)$. 292. а) 0; 6;

б) -3. 295. 14 кг і 22 кг або 11,4 кг і 24,6 кг. 296. 3 м/с і 21 м/с або $4\frac{6}{7}$ м/с і $19\frac{1}{7}$ м/с. 301. а) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 3$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -3$; б) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 3$; $f_{\text{найм.}} = f(-2) = -6$; в) $f_{\text{найб.}} = f(2) = 14$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$;

г) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 18$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -2$; д) $f_{\text{найб.}} = f(1) = f(4) = 2$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = 1$; е) $f_{\text{найб.}} = f(2,25) = 0,75$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$. 302. а) $f_{\text{найб.}} = f(\pm 4) = 105$; $f_{\text{найм.}} = f(\pm \sqrt{5}) = -16$; б) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 169$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = 1$;

в) $f_{\text{найб.}} = f(2) = 3375$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = -1$; г) $f_{\text{найб.}} = f(2) = \frac{2}{3}$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$. 303. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 82,5$; $f_{\text{найм.}} = f(3) = 40,5$; б) $f_{\text{найб.}} = f(-3) = -4$; $f_{\text{найм.}} = f(-5) = -5\frac{1}{3}$. 304. а) $f_{\text{найб.}} = 27 = f_{\text{найм.}}$;

б) $f_{\text{найб.}} = 4 < 12 = f_{\text{найм.}}$. 305. а) $f_{\text{найб.}} = f(0) = -9$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = f(-1) = -16$; $f_{\text{найб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -16$; б) $g_{\text{найб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{найб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; в) $u_{\text{найб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{найб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{найб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{найм.}} = u(2) = 4$;

г) $v_{\text{найб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{найм.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{найб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{найм.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{найм.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{найб.}} = f(-1; 2)$

б) $f_{\text{найб.}} = 4 < 12 = f_{\text{найм.}}$. 305. а) $f_{\text{найб.}} = f(0) = -9$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = f(-1) = -16$; $f_{\text{найб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -16$; б) $g_{\text{найб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{найб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; в) $u_{\text{найб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{найб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{найб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{найм.}} = u(2) = 4$;

г) $v_{\text{найб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{найм.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{найб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{найм.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{найм.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{найб.}} = f(-1; 2)$

б) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -16$; б) $g_{\text{найб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{найб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; в) $u_{\text{найб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{найб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{найб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{найм.}} = u(2) = 4$;

г) $v_{\text{найб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{найм.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{найб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{найм.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{найм.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{найб.}} = f(-1; 2)$

б) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -16$; б) $g_{\text{найб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{найб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; в) $u_{\text{найб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{найб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{найб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{найм.}} = u(2) = 4$;

г) $v_{\text{найб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{найм.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{найб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{найм.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{найм.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{найб.}} = f(-1; 2)$

б) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 0$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -16$; б) $g_{\text{найб.}} = g(2) = 47$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; $g_{\text{найб.}} = g(3) = 585$; $g_{\text{найм.}} = g(1) = -11$; в) $u_{\text{найб.}} = u(-4) = -5$; $u_{\text{найб.}} = u(-2) = -4$; $u_{\text{найб.}} = u(1) = 5$; $u_{\text{найм.}} = u(2) = 4$;

г) $v_{\text{найб.}} = v(-3) = -\frac{13}{3}$; $v_{\text{найм.}} = v(-2) = -4$; $v_{\text{найб.}} = v(5) = 5,8$; $v_{\text{найм.}} = v(2) = 4$. 306. а) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 5$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = 0$; б) $f_{\text{найб.}} = f(0) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -15$; в) $f_{\text{найб.}} = f(3) = 34$; $f_{\text{найм.}} = f(-1) = 2$; г) $f_{\text{найб.}} = f(-1; 2)$

$= f(1) = 3\frac{1}{3}$; $f_{\text{найм.}} = f(2) = -3\frac{1}{3}$; д) $f_{\text{найб.}} = f(2) = 1$; $f_{\text{найм.}} = f(0) = \frac{1}{3}$;
 е) $f_{\text{найб.}} = f(4) = 4,25$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = 2$; ж) $f_{\text{найб.}} = f(0,25) = 0,25$; $f_{\text{найм.}} =$
 $= f(4) = -2$; з) $f_{\text{найб.}} = f(9) = 3$; $f_{\text{найм.}} = f(1) = -1$; и) $f_{\text{найб.}} = f(1) = 19$;
 $f_{\text{найм.}} = f\left(\frac{1}{7}\right) = 5\frac{38}{49}$; к) $f_{\text{найб.}} = f(2) = 15$; $f_{\text{найм.}} = f(-0,5) = -35$.
309. При $a < -1$ і при $a > 1$. **310.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 2. **311.** а) 1; б) $\sqrt[3]{2}$;
 в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **312.** а) $8 + 8$; б) $6 \cdot 6$. **314.** 8 см і 8 см. **315.** $5 + 5$. **316.** $4 + 4$.
318. а) $6 + 2$; б) $12 + 24 + 18$. **319.** 50 м \times 100 м. **320.** $2\sqrt{6}$ км.
321. 350 м² і 250 м². **322.** $MX = \frac{1}{2\sqrt{3}} AB$. **323.** 0,5a, 0,5h. **325.** 60°.
326. $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **327.** а) $4 \times 4 \times 2$; б) $3 \times 6 \times 2$. **328.** 2 см, 2 см.
329. $10 \times 10 \times 5$. **330.** $R = H$. **331.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **332.** $\sqrt[3]{4SQ^2}$. **333.** За 1 км
 да В. **334.** а) 3; б) 1 і -2; в) таких пунктів немає; г) 0 і 1. **335.** а) -8; б) 1;
 в) 12; г) 2. **336.** а) -1; б) 1. **337.** а) $c = \frac{1}{4}$; б) $c = \frac{1}{12}$. **338.** а) $4x - y - 2 = 0$;
 б) $4x + y + 2 = 0$; в) $4x - 2y - 1 = 0$; г) $8x + 8y + 1 = 0$. **339.** $x + 2y -$
 $-4 = 0$. **340.** $x + y - 1 = 0$. **341.** а) $3x + 16y - 2 = 0$; б) $3x + y - 2 = 0$.
342. (2; -4). **343.** (1; 1), (-1; -1). **344.** а) (1; 0,5), (-1; -0,5); б) (0; 0);
 в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; г) $\left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **345.** $y = 4x + 1$ і
 $y = -2x - 7$; $y = -2x + 4$ і $y = 4x - 8$. **346.** $y = 0$ і $x = 0$, 90°; $y = 2x - 1$
 і $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $\arctg \frac{3}{4}$. **347.** а) (0,5; 0,25), (3,5; 8,75); б) $x + y = 1$,
 $y = 7x + 17$. **349.** а) $\approx 1,004$. **350.** а) $\approx 0,6838$; б) $\approx 0,588$. **351.** а) $\approx 2,03$;
 б) $\approx 22,44$; в) $\approx 2,39$; г) $\approx 10,03$. **352.** а) $\approx 30,018$; $\approx 0,58$; б) $\approx 23,568$;
 $\approx -1,05$; в) $\approx 190,13$; $\approx 1,36$; г) $\approx 59,08$; $\approx 11,76$. **353.** $\approx 1,03$, 0,05 %.
355. а) $\approx 1,002$; б) $\approx 5,001$; в) $\approx 0,997$; г) $\approx 0,996$; д) $\approx 5,10$; е) $\approx 7,00$;
 ж) $\approx 3,98$; з) $\approx 9,04$. **356.** а) $\approx 0,94$; б) $\approx 1,08$; в) $\approx 1,0078$; г) $\approx 0,99$;
 д) $\approx 2,72$; е) $\approx 1,79$. **361.** 2968 ц. **362.** 3055 ц, 3500 ц.

Розділ III

370. а) 7 см; б) 30 см. **371.** б) 200 см. **372.** 50 см. **373.** 40 мм.
384. а) 40°; б) 45°; в) 90°. **385.** а) 58°; б) 47°. **386.** а) 90°; б) 64°.
388. У 5 разів. **391.** $1,5 + \sqrt{2}$ см; $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ см². **392.** 36 см. **393.** 40 м або 8 м.

394. 20 см. 395. 12 см. 396. 24 см. 398. 49 см. 399. б) 12 см. 400. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см.
401. $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$. 403. а) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}}$; б) $y' = \frac{3\sqrt{s}}{2}$; в) $y' = -\frac{3}{2s^2\sqrt{s}}$; г) $y' = 2s + \frac{2}{3\sqrt[3]{s}}$.
404. а) Усюды нарастае; б) нарастае на $(2; +\infty)$, спадае на $(-\infty; 2)$; в) нарастае на $(-\infty; -3)$ і на $(4; +\infty)$, спадае на $(-3; 4)$. 405. а) Экстрэмумаў няма; б) пры $a \leq 0$ экстрэмумаў няма; пры $a > 0$ максімум у пункце $x = -\sqrt{a}$ і мінімум у пункце $x = \sqrt{a}$; в) пры $a \geq 0$ мінімум у пункце $x = 0$; пры $a < 0$ максімум у пункце $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ і мінімум у пункце $x = 0$;
- г) пры $a \geq 0$ экстрэмумаў няма; пры $a < 0$ максімум у пункце $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ і мінімум у пункце $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$. 414. 48 ц/га; 32 ц/га. 415. 54 мм і 48 мм, 48 мм і 31 мм. 416. 41 см²; 23 см². 440. 96 см. 441. $8\frac{1}{3}$ см. 442. 24 см.
445. 4S. 446. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 447. $\frac{1}{3}m$. 448. б) 1600 см². 449. $\frac{\sqrt{S}}{4}$. 450. б) 5 см.
452. 10 см. 453. 24 см; 36 см. 454. 25 см. 455. 16 см. 458. $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$.
459. 1620 см². 460. а) $y' = \frac{5\sqrt[3]{s^2}}{3}$; б) $y' = -\frac{1}{4\sqrt[4]{s^5}}$; в) $y' = \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{s^2}$;
- г) $y' = \frac{3s+2}{2\sqrt{s}}$. 462. а) $y = c$; б) $y = -0,5x + c$; в) $y = -x^2 + c$; г) $y = x^2 + x + c$;
- д) $y = x^3 + c$; е) $y = -x^3 - 5x + c$. 464. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$.
465. 10 г, 18 г. 466. 10 г, 16 г. 467. 20 м/с, 22 м/с. 468. 20 м/с, 25 м/с.
477. б) 12 см². 482. а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. 485. а) $2\sqrt{136-45\sqrt{5}}$;
- $3\sqrt{106-21\sqrt{5}}$; 29; б) $45\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\frac{189}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 210. 486. б) 4:9.
487. в) 6 см². 495. б) 4 см. 497. 8 см². 507. 46 см. 510. 109 см. 511. 6 S.
512. б) 140 см. 513. $\frac{q}{16}$. 514. 64 см². 515. 72 см. 516. 38 см. 517. $\frac{4}{3}S$.
518. $\frac{5}{4}Q$. 519. $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. 520. 0,16 q. 521. 1:3. 522. $\frac{9m}{64}\sqrt{4n^2-m^2}$.
523. 32 см². 526. а) $y' = 4s^3 + 12s^2 - 2s + 2$; б) $y' = 4s^3 + 4s^2 - \frac{5}{s^2}$;
- в) $y' = 7s^6 + \frac{7}{s^8}$; г) $y' = -\frac{8s^2+10}{s^{11}}$. 527. а) Спадае на $(-\infty; \frac{2}{3})$, нарастае на $(\frac{2}{3}; +\infty)$; б) нарастае на $(-\infty; 1)$ і на $(5; +\infty)$, спадае на $(1; 5)$; в) спадае на $(-\infty; -2)$ і на $(0; 2)$, нарастае на $(-2; 0)$ і на $(2; +\infty)$; г) спадае на $(-\infty; -1)$ і

на $(1; +\infty)$, нарастає на $(-1; 1)$. **531.** а) $(0; 1)$ і $(-1; -1)$; б) $(1; 1)$, $\left(2; \frac{5}{7}\right)$.
535. 38 ц/га, 45 ц/га. **536.** 17 см, 50 см. **537.** 2 см, 5 см.

Розділ IV

- 577.** а) 8; б) 10; в) 13; г) 21. **578.** $\frac{768}{49}(9-4\sqrt{2})$ см². **579.** $81\sqrt{3}$ см².
- 580.** 1152 см². **581.** $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. **582.** 94 см². **583.** $\frac{a}{3}$. **584.** $7\sqrt{3} - 12$.
- 586.** 21 ц/га. **587.** 37 км. **588.** 196 м², 464 м². **589.** $\frac{3}{4}$ ml. **619.** а) 132° , 120° , 48° , 60° ; б) 12° ; в) 84° . **621.** 0,6. **622.** $1 + \operatorname{ctg} \alpha + 0,5 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
- 624.** 70 км/г. **625.** 24 км і 25 км. **626.** 117 см² або 207 см². **634.** в) $\frac{\pi}{7}$;
г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\pi - x$; е) $\pi - x$. **638.** а) 0,6; б) -0,8; в) $\sqrt{2\sqrt{6}-4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **639.** а) 0,4;
 $\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\frac{2}{\sqrt{21}}$; $\frac{\sqrt{21}}{2}$; б) -0,8; 0,6; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$. **644.** а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{3\pi}{5}$; г) $\frac{4\pi}{5}$;
д) $\frac{3\pi}{5}$; е) $\frac{4\pi}{5}$. **647.** а) 0,5; б) каранёў няма; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **652.** в) $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$;
г) не існує. **655.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $4\pi - 12$; в) $4\pi - 12$. **661.** а) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{12}{5}$;
б) $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{3}$; в) $+\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$; $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$. **663.** а) $\frac{\pi}{2} - 2$;
б) $\pi - 2$; в) $4\pi - 10$; г) $3\pi - 10$. **666.** а) 1; б) $\frac{\pi}{7}$. **667.** а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{6\pi}{7}$; в) $\frac{3\pi}{4}$.
668. а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; д) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; е) $-\frac{5}{\sqrt{11}}$. **669.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $4\pi -$
 -11 ; в) $8 - 2\pi$; г) $10 - \frac{5\pi}{2}$; д) $\frac{3\pi}{10}$; е) $\frac{9\pi}{10}$. **670.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
г) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **671.** а) $-\frac{16}{65}$; б) $\frac{77}{85}$; в) $-3\frac{15}{16}$; г) 0; д) $\frac{33}{65}$; е) $-\frac{16}{63}$.
679. а) $\operatorname{arctg} \frac{56}{33}$; б) $-\operatorname{arctg} \frac{16}{63}$; в) $-\operatorname{arctg} \frac{39}{95}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{84}{13}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $\frac{\pi}{4}$.
680. а) $\arccos \left(-\frac{140}{221}\right)$; б) $\arcsin \left(-\frac{36}{325}\right)$; в) $\arcsin \frac{63}{65}$; г) $\arcsin \left(-\frac{119}{169}\right)$;
д) $\arcsin \frac{36}{85}$; е) $\arcsin \left(-\frac{36}{97}\right)$. **682.** а) $\arccos 0,3$; б) $\arcsin \frac{4}{11}$; в) $\operatorname{arccotg} 3$;

р) $\operatorname{arccotg} h$. **684.** а) 0; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) 0. **686.** а) $\frac{161}{289}$; б) $\frac{13}{85}$;
 в) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$; г) $\frac{36}{85}$. **687.** а) $mn - \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}$; г) $\frac{k\sqrt{1-l^2} + l\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{(1-k^2)(1-l^2)} - kl}$;
 д) $2p\sqrt{1-p^2}$; е) $\frac{2j}{1-j^2}$; ж) $\frac{1-h^2}{1+h^2}$; з) $\frac{2g}{1+g^2}$; и) $\frac{f^2-1}{f^2+1}$; к) $\sqrt{\frac{1+d}{2}}$;
 л) $\frac{s}{1+\sqrt{1+s^2}}$; м) $\sqrt{1+t^2} - t$. **696.** а) $\sqrt{R^2+S} \pm \sqrt{R^2-S}$; б) $\frac{S}{2r} + \frac{r}{2} \pm$
 $\pm \sqrt{\left(\frac{S}{2r} - \frac{r}{2}\right)^2 - S}$; в) $\sqrt{S\left(\frac{S}{h^2} + 1\right)} \pm \sqrt{S\left(\frac{S}{h^2} - 1\right)}$; г) $\sqrt{m^2+2S} + \sqrt{m^2-2S}$,
 $0,5\left(\sqrt{m^2+2S} - \sqrt{m^2-2S}\right)$ або $\sqrt{m^2+2S} - \sqrt{m^2-2S}$, $0,5\left(\sqrt{m^2+2S} + \sqrt{m^2-2S}\right)$;
 д) $\frac{S\sqrt{2}}{l} \pm \sqrt{\frac{2S^2}{l^2} - 2S}$. **697.** У $\frac{25}{6\pi}$ разоў. **698.** $32\sqrt{3}$ або $64\sqrt{3}$. **699.** 96 км/г,
 72 км/г. **700.** 16 см, 25 см. **704.** а) $\frac{1}{\cos a}$; б) 13; в) 0; г) $\frac{2}{|\sin t|}$. **706.** а) $\cos c$;
 б) $\operatorname{tg} x$; в) $\cos 4\beta$; г) 1; д) $\operatorname{tg} c$; е) $\cos 2y$. **709.** б) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) -1.
710. а) $\sin 80^\circ$; б) $-\cos 20^\circ$; в) $\cos 2\beta$; г) $\cos 2\gamma + \sin 2\gamma$; д) $\cos^2 2\varphi$;
 е) $\frac{1}{1+\sin 2\beta}$. **714.** а) $\frac{2}{\sin x}$; б) $2 \operatorname{ctg} y$; в) $2 \operatorname{tg} a$; г) $\operatorname{ctg} \alpha$. **715.** $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$.
716. а) $1,5\pi$; б) π ; в) 0; г) $1,5\pi$. **717.** а) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$; $-3\frac{3}{7}$; б) $-\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$;
 $1\frac{1}{119}$; в) $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$; $-1\frac{1}{119}$; г) $-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{3}$. **719.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{2\sqrt{46}}{25}$;
 г) $-\frac{4\sqrt{82}}{49}$; д) $1\frac{7}{8}$; е) $-\frac{9}{40}$. **721.** а) $2 \cos \beta$; б) калі $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg} 2\beta >$
 $> 2 \operatorname{tg} \beta$; калі $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} 2\beta < 2 \operatorname{tg} \beta$. **722.** а) 0; б) 0; в) $\pm \frac{\pi}{4}$.
723. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{13\pi}{12}$; в) 2π . **725.** а) $2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
728. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **729.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{\sqrt{14}}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{3}{\sqrt{10}}$; -3. **731.** а) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\frac{\sqrt{2}}{10}$; 7; в) $-\frac{5}{\sqrt{34}}$; $-\frac{3}{\sqrt{34}}$; $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$.

732. а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2} - 1$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $2 - \sqrt{3}$;
 р) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1$; д) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$;
 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$; $2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 2$; е) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}$; $\sqrt{4-2\sqrt{2}} -$
 $-\sqrt{2} + 1$. 733. 0,8; 0,6. 735. а) 0,8; б) $\sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$; в) -2. 737. а) $\frac{5\pi}{3}$;
 б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $\frac{14\pi}{3}$. 739. а) 0,6; $\pm 0,8$; б) $\frac{40}{41}$; $\pm \frac{9}{41}$; в) $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$. 740. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; р) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\sqrt{5} + 1$. 741. а) $\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$;
 б) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2y + \frac{1}{8} \cos 4y$; в) $\frac{1}{32}(2 - \cos z + 2\cos 2z - \cos 3z - 2\cos 4z)$.
 744. д) $\sin x$; е) $\cos x$; ж) $\cos x$; з) $\sin x$. 746. а) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 5^\circ$; б) $-\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$;
 в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$. 747. а) $2 \cos 22^\circ \sin 39^\circ$; б) $\sqrt{2} \sin 5^\circ$; в) $\sqrt{2} \cos\left(b - \frac{\pi}{4}\right)$;
 е) $4 \cos 2x \cos^2 1,5x$. 748. а) $-4 \cos \beta \sin^2 \frac{\beta}{2}$; б) $4 \sin 2\gamma \cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;
 в) $-4 \cos 2z \sin\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; р) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; д) $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; е) $\operatorname{ctg} 4a$.
 749. а) $\sin(a+b) \sin(a-b)$; б) $\sin(a+b) \sin(b-a)$; в) $-\cos(a+b) \cdot$
 $\cdot \cos(a-b)$; р) $\cos 4^\circ \cos 36^\circ$; д) $\sin 2q \sin 8q$; е) $-\cos(y+z) \cos(y-z)$.
 752. а) $\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2} \cos\left(k - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $2 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;
 р) $2 \sin\left(\frac{k}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{k}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; д) $4 \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; е) $4 \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot$
 $\cdot \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. 761. р) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; д) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. 762. в) $2 \sin^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;
 р) $2 \sin^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $2 \operatorname{tg} a \sin^2 \frac{a}{2}$; е) $2 \operatorname{ctg} b \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$; ж) $2 \operatorname{tg} a \cos^2 \frac{a}{2}$;
 з) $2 \operatorname{ctg} x \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; и) $\cos 2a$; к) $-\cos 2b$; л) $4 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) \cdot$
 $\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right)$; м) $4 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$. 763. а) k ; б) $\frac{t^2 - s^2}{t^2 + s^2}, \frac{2ts}{t^2 + s^2}$.

769. 2208 ц; 900 ц. 770. 336 см³; 423 см³. 771. 112 см³; 108 см³.
 780. $-\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. 781. а) 0; б) $-2\operatorname{ctg} x$; в) 0; г) $\operatorname{ctg}^2 t$; д) $-\sin^3 a$; е) -1 .
 782. а) $\cos \beta$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$. 783. а) $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{3}$; б) $\frac{19}{70}$; в) 11; г) 2.
 784. а) 1; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0; д) 0; е) 1; ж) 0; з) 1; и) -3 ; к) 0.
 786. а) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}$; б) $\sin 2a$; в) 1; г) 1; д) $2\cos 4a - 1$; е) $\operatorname{tg} 2r$; ж) $2|\operatorname{ctg} y|$;
 з) $|\sin x - \sin y|$; и) $2\left|\sin \frac{u-v}{2}\right|$; к) -4 ; л) $\operatorname{tg} p (2\sin 2p - 1)$. 789. а) $2 - \sqrt{2}$;
 б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $8\sqrt{3}$; г) 2. 790. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 1,5; д) 9; е) 3. 791. а) $-\frac{1}{2}$;
 б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{2}$; д) 1; е) $\frac{3}{2}$. 792. а) $-\frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{7a}{2}}{2\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right)}$;
 б) $-2\cos\left(2b + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $-8 \cos 2c$; г) $\sin^2(z - t)$; д) 4; е) $\sin 2x \sin 2y$;
 ж) $\frac{\sin d \sin \frac{9d}{2}}{\sin \frac{3d}{2}}$; з) $\operatorname{tg}(i - j) \operatorname{tg}(j - k) \operatorname{tg}(k - i)$; и) 3; к) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + e\right)$. 796. а) $\frac{3}{16}$;
 б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 3; д) -7 ; е) 2,25. 797. а) 2; б) $\frac{3t^2 - 1}{2}$; в) 1; г) $a^4 - 4a^2 + 2$;
 д) 0; е) $-\frac{3}{2}$. 799. а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{44}{125}$; в) $\frac{3}{4}$; г) 5,5; д) $-\frac{119}{120}$; е) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. 800. а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
 б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\sqrt{\frac{3}{11}}$. 802. $\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$. 803. а) 0; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{1}{8}$;
 д) $\frac{\sqrt{2}}{512}$. 804. г) $\frac{3}{4} \sin 4t$; д) $\operatorname{tg} 5a$; ж) $\sqrt{5}$. 807. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. 814. 1,5 г. 815. 42 м.

Раздел V

826. $\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{2}}$. 827. $4\sqrt{17}$ см або $4\sqrt{65}$ см; 32 см; 20 см. 838. 40 см.
 839. 7,8 м. 840. 18 см. 845. б) 90° , 150° , 30° , 90° . 847. $9\sqrt{2}$ см².
 849. 6,5 см. 850. а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2 - p^2 + r^2}$; г) $\sqrt{l^2 - k^2 + 2m^2}$.
 400

851. 15 см. 852. 15 см. 853. 12 см. 854. а) 1,8; б) $2\frac{5}{12}$; в) 3. 855. 36 см.
 856. 3200 мм². 857. 23 см. 858. $36\sqrt{5}$. 859. 296 см². 860. 60 см, 36 см.
 861. 20 см, 24 см. 862. 12 см. 864. а) 1250; б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000.
 866. а) 4; 1; б) $4; 1$; в) $2 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2 + \sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 868. а) $\{-1\} \cup [1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup [3; 7]$; в) $(-\infty; -1) \cup [1 - \sqrt{2}; 0) \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$; г) $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$. 869. а) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; б) $[-2; 1]$.
 873. а) 1; б) -24. 875. 25 кг. 876. 20 %, 60 %. 883. а) $\frac{d}{\cos \beta}$, $d \operatorname{tg} \beta$;
 б) $m \cos \beta$, $m \sin \beta$. 884. а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. 885. 6 см, 15 см. 886. а) 41 см,
 55 см; б) 40 см, 80 см. 887. $\sqrt{2}$ м. 888. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{\frac{5+3\cos \beta}{2}}$. 889. 3 см;
 7,5 см. 890. 20 см. 897. $12,5\sqrt{337}$ см². 898. 10 см, 6 см. 899. $\frac{mp}{p+q}$ або
 $\frac{mq}{p+q}$. 900. 60 см. 901. 120 см. 902. а) 56; б) 20. 903. а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$;
 в) умова супярэчлівая. 904. 270 см². 908. 12 см, $4\sqrt{10}$ см. 909. 16 см,
 34 см. 912. 12,5 см, 25 см. 915. 8 дм, 17 дм, $\sqrt{176,5}$ дм.
 916. $\sqrt{m^2 \sin^2 \beta + n^2}$. 917. б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + h^2}$. 918. 7,5 см. 919. 5 см.
 920. 20; $5\sqrt{3}$. 921. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. 922. 40 см, 16 см. 923. $\sqrt{2y^2 - x^2}$.
 924. 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, $2,5\sqrt{17}$ см. 925. 18 м і 12 м. 926. $16(3 + \sqrt{17})$.
 927. 6 см. 929. а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. 930. 30°. 931. а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$.
 932. а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. 934. $3d$. 936. 45°. 937. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 938. 45°. 939.
 $5\sqrt{5}$ мм. 941. $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. 942. а) a ; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. 943.
 $\frac{abc}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2) + 4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2) + 4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2}}$. 944. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 945. $\frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$. 946. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 947. $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2 - a^2}$. 954. 36 мм, 50 мм, 60 мм,
 2 $\sqrt{769}$ мм; 60 мм, 30 мм, 20 мм, 50 мм. 955. 1440 мм²; 2816 мм².

973. 10 см. 974. 27 см. 975. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 976. $2l^2$. 977. а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.
 978. 3,36 см. 979. а) $8\sqrt{3}$ см; б) $112\sqrt{3}$ см². 980. 4 м. 981. 90°, 45°, 60°. 982. 60°. 983. а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. 984. $a\sqrt{2}$. 985. $\arccos \frac{1}{3}$. 986. 60°. 988. $\sqrt{217}$ см. 989. 2а. 990. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 991. $\sqrt{c^2 + d^2 + l^2}$; $\sqrt{c^2 + l^2}$; $\sqrt{d^2 + l^2}$. 992. 6 см. 993. а) 42 см; б) 16 см; в) 2х. 994. 60°. 995. 60°. 996. 120°. 997. $\frac{a}{2}$. 998. 27 дм². 999. 90°; 90°; $\arccos 0,6$. 1000. $\arccos \frac{1}{3}$. 1001. $\arccos \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}$; $\arccos \frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}$. 1002. $\arccos \left(-\frac{1}{3}\right)$; $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 1003. $\arccos \frac{a}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$; $\arccos \frac{a^2}{a^2 - 4b^2}$. 1005. а) $-\frac{71}{43}$; б) $-\frac{1}{83}$. 1007. а) $\frac{2 \sin 41^\circ}{\cos 19^\circ}$; б) $\frac{\sqrt{2} \cos 16^\circ}{\sin 29^\circ}$; в) $\frac{4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - z\right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + z\right)}{\cos^2 z}$; г) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + b\right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} - b\right)$; д) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + b\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - b\right)$; е) $-\sin \left(\frac{\pi}{6} + u\right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - u\right)$. 1008. а) $4 \cos \frac{a-b}{2} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$; б) $4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin \left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $2\sqrt{2} \cos \frac{g}{2} \cos \left(\frac{g}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. 1009. а) $-\frac{\sin \frac{n+1}{2} \varphi \cos \frac{n}{2} \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}$; б) $\frac{\cos \frac{k+1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{k}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 1010. а) -2,4; -1,2; б) 0; -7 + 2√3; в) -1; -401,6; г) -2; 4. 1011. а) $(-\infty; 1)$; б) $(-1; -0,5) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (4; +\infty)$ г) x — любы лік. 1012. 240 Вт; 2310 Вт. 1013. 1600 Вт; 320 Вт.

Раздел VI

1027. а) $[0; 1]$; б) $[-1; 0]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right]$; г) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$; е) $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 1037. 20 см. 1038. 60 см. 1039. 9 см. 1040. 14 см. 1041. а) 15 см; б) 75 см². 1042. 350 см². 1043. а) 15 см, 13 см; 9 см, 5 см; б) 364π см², 70π см²; в) $2\sqrt{14}$ см, $2\sqrt{14}$ см. 1044. а) 10 см, 6 см; 20 см, 9 см; б) 96π см², 261π см²; в) 8 см, $\sqrt{319}$ см. 1058. а) $[-1; 0]$;

- б) $[-1; 0]$; в) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$; е) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.
1072. а) $2a\sqrt{1-a^2}$; б) $1-2a^2$; в) $\sqrt{1-a^2}$; г) $\sqrt{1-4a^2}$. 1075. $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$.
1077. б) $130\sqrt{3}$. 1079. 20 см, 25 см; 480 см², 900 см². 1080. 216 км, 324 км; 72 км/г, 36 км/г. 1114. а) $\frac{1+3a}{1-3a}$; б) $\frac{3a-4a^3}{(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}}$;
- в) $\frac{4a^3-3a}{(4a^2-1)\sqrt{1-a^2}}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $4a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2}$. 1115. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- б) 1; в) каранёў няма; г) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$. 1116. 4 см. 1117. 13 см. 1118. $20\sqrt{2}$.
1119. $\sqrt{2a^2-b^2}$; $\sqrt{b^2-a^2}$. 1120. $72\sqrt{3}$ см². 1122. 12 см, 18 см.
1123. 15 км/г, 12 км/г. 1133. а) 4π ; б) 2π ; в) -3π ; г) 4π . 1134. $\frac{4\sqrt{69}}{3}$ см.
1135. $\frac{a\sqrt{l^2+a^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$. 1136. 2,5 см. 1137. $\sqrt{z^2+y^2-\frac{y^4}{x^2}}$. 1139. 25 см, 15 см. 1143. а) Каранёў няма; б) $\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- г) $-\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) каранёў няма; е) каранёў няма.
1144. а) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- г) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
1145. а) $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) каранёў няма; в) $\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; г) $(-)^k\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arctg 1,5+\pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\arctg 3+k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg 4+\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- ж) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 1146. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $\pi+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\arccos 0,2+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; и) $\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; к) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 1147. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; г) $-\operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1,5 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; з) $\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 1148. а) $\frac{\pi}{4} +$
 $+\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} 0,5 + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} \frac{2}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 ж) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
 1149. а) $\operatorname{arctg} 0,5 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{arctg} 0,5 + \pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0,5 + \frac{\pi n}{2},$
 $n \in \mathbb{Z}$. 1150. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\operatorname{arctg} (-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi,$
 $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 3,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$. 1151. а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^{m+1} 2\pi + 12\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \pi + 8\pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} 0,5 + \pi n,$
 $n \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 1152. а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 г) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; ж) $\pi k,$
 $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; и) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; к) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; л) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; м) $\frac{\pi}{8} k + n\pi, k = 0, 1, 2, 3, 5,$
 $6, 7, n \in \mathbb{Z}$. 1153. а) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 г) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
 ж) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
 и) $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; к) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$. 1154. а) $\frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$;

$(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; р) $\frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$; $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; е) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi(2m+1)}{5}, m \in \mathbb{Z}$. 1155. а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}$.
1156. а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg 2,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
е) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 1157. а) $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
е) $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) каранеў няма.
1158. а) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;
в) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 1159. а) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
б) $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 1160. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\arctg \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $2 \arctg -2 \pm \sqrt{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $2 \arctg \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
 $-2 \arctg (4 + \sqrt{15}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
ж) $2 \arctg \sqrt{7} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $-\frac{5\pi}{12} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 1161. а) Каранеў
няма; б) каранеў няма; в) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) каранеў няма; д) каранеў
няма; е) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) каранеў няма; з) каранеў няма.
1162. а) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; б) каранеў няма; в) каранеў няма; г) $20\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
д) каранеў няма; е) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ж) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; з) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1164. а) Каранёў няма; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
 д) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}r + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, r = 0, 2, 3, 4$. 1165. 102 см².
 1166. 17 см. 1167. 12 м. 1168. 1,5а. 1169. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 1170. а) $\sqrt{d^2 - m^2}$;
 б) $\sqrt{m^2 - l^2}$; в) $\frac{l}{m} \sqrt{m^2 - l^2}$. 1171. а) 30 см, 45 см; б) 42 см, $62\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.
 1172. 64 кг, 36 кг. 1189. а) 17; -17; б) 17; -17; в) 13; -13; г) 30; -20;
 д) $\sqrt[4]{2}$; 0; е) не існуе; 0,5. 1197. 10; -6. 1199. 105π. 1200. а) $[0; 1]$,
 $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; в) \mathbb{R} , $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $[-1; 1]$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$;
 д) \mathbb{R} , $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$; ж) $[0; 1]$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
 з) $\{0\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; і) \mathbb{R} , $\{0\}$. 1201. а) $2\sqrt{73}$ м; б) 14 м. 1202. а) $\sqrt{d^2 - \frac{1}{3}}$;
 б) $\sqrt{d^2 - 6,25}$; в) $\sqrt{d^2 - \frac{64}{7}}$. 1203. а) $\sqrt{d^2 - 1}$; б) $\sqrt{d^2 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$;
 в) $\sqrt{d^2 - 2 - \sqrt{3}}$. 1204. $\frac{5}{6}(\sqrt{61} - 5)$ см. 1205. 60°. 1206. 113 см.
 1207. 58,2 кг; 25,0 кг.

ЗМЕСТ

РАЗДЗЕЛ I.

УВОДЗІНЫ Ў СТЭРЭАМЕТРЫЮ..... 4

1. Прасторавыя фігуры..... 4
2. Прамыя і плоскасці 20
3. Пабудаванні ў стэрэаметрыі 36

РАЗДЗЕЛ II.

ВЫТВОРНАЯ І ЯЕ ПРЫМЯНЕННІ 49

4. Вытворная 49
5. Правілы знаходжання вытворных 62
6. Даследаванне функцыі з дапамогай вытворнай..... 74
7. Прымяненні вытворнай 86

РАЗДЗЕЛ III.

ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ..... 101

8. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы 101
9. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы 115
10. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы 124

РАЗДЗЕЛ IV.

ТРЫГНАМЕТРЫЧНЫЯ ВЫРАЗЫ 140

11. Сінус, косінус, тангенс і катангенс адвольных вуглавога і лікавага аргументаў..... 140
12. Формулы складання. Формулы прывядзення 158
13. Арксінус, арккосінус, арктангенс і арккатангенс 171
14. Прымяненні формул складання 191
15. Пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў 209

РАЗДЗЕЛ V.

ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ 226

16. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці 226
17. Адлегласці. Вугал паміж прамой і плоскасцю 240
18. Перпендыкулярнасць плоскасцей 260

РАЗДЗЕЛ VI.

ТРЫГНАМЕТРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ 275

19. Функцыя $y = \sin x$ 275
20. Функцыя $y = \cos x$ 289
21. Функцыя $y = \operatorname{tg} x$ 300
22. Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні 315
23. Трыганаметрычныя ўраўненні 325
24. Трыганаметрычныя функцыі 337

Даведачны матэрыял 353

Адказы 391

(Назва і нумар школы)

Навучальны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Латоцін Леанід Аляксандравіч
Чабатарэўскі Барыс Дзмітрыевіч

Матэматыка

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Рэдактар	<i>Т. К. Слаута</i>
Мастак вокладкі	<i>В. К. Жалудкова</i>
Мастак	<i>А. Л. Латоцін</i>
Камп'ютарны набор	<i>А. П. Шаціла</i>
Камп'ютарная верстка	<i>А. П. Шаціла</i>
Карэктар	<i>Т. К. Слаута</i>

Падпісана ў друк 06.06.2013. Фармат 60×90¹/₁₆.

Папера афсетная № 1. Друк афсетны.

Ум. друк. арк. 25,5+0,25 форз. Ул.-выд. арк. 18,7+0,3 форз.

Тыраж 1915 экз. Заказ

РУП «Выдавецтва «Адукацыя і выхаванне».

ЛИ № 02330/639 ад 31.01.2012.

Вул. Будзёнага, 21, 220070, г. Мінск.

ТАА «Прынтхаўс»

ЛП № 02330/0552738 ад 02.02.2010.

Вул. Адаеўскага, 117, 220015, г. Мінск.

Правообладатель "Адукацыя і выхаванне"